4. Содержание лабораторных работ

Раздел 1. Механика

Практическое занятие 1.

Тема занятия. **Кинематика материальной точки**

Цель занятия. Изучить закономерности движения материальной точки.

Теоретическая часть.

Поступательное движение

Средняя (путевая) скорость:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где $\Delta s -$ путь, пройденный точкой за интервал времени Δt. Путь Δs не может убывать и принимать отрицательные значения, т.е. $\Delta s \geq 0$.

Мгновенная скорость (проекция на ось x):

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$$

Среднее ускорение:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}$$

Мгновенное (линейное) ускорение (проекция на ось x):

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Основные уравнения кинематики поступательного движения: скорость и путь равнопеременного поступательного движения:

$$\upsilon = \upsilon_0 + a\,t,$$

$$s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2\,a}.$$

где $\upsilon_0 -$ начальная скорость (в момент времени $t=0$); для равнозамедленного движения $a<0$, для равноускоренного $a>0$).

При движении тела по вертикальному направлению в поле силы тяжести Земли $a=g$.

Движение материальной точки по окружности

Угловая скорость:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}.$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при движении точки по окружности:

$$\upsilon = \omega R, \qquad a_t = \varepsilon R, \qquad a_n = \omega^2 R,$$

где $\upsilon -$ модуль линейной скорости; a_t и a_n - модули тангенциального и нормального ускорений; $\omega -$ модуль угловой скорости; $\varepsilon -$ модуль углового ускорения; $R -$ радиус окружности.

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Основные уравнения кинематики вращательного движения: угловая скорость и угловой путь

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \phi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}.$$

Для равнопеременного вращательного движения $(\varepsilon = const)$, $\varepsilon > 0 -$ ускоренное вращение, $\varepsilon < 0 -$ замедленное вращение.

Связь частоты вращения *n* и угловой скорости:

$$\omega = 2\pi n.$$

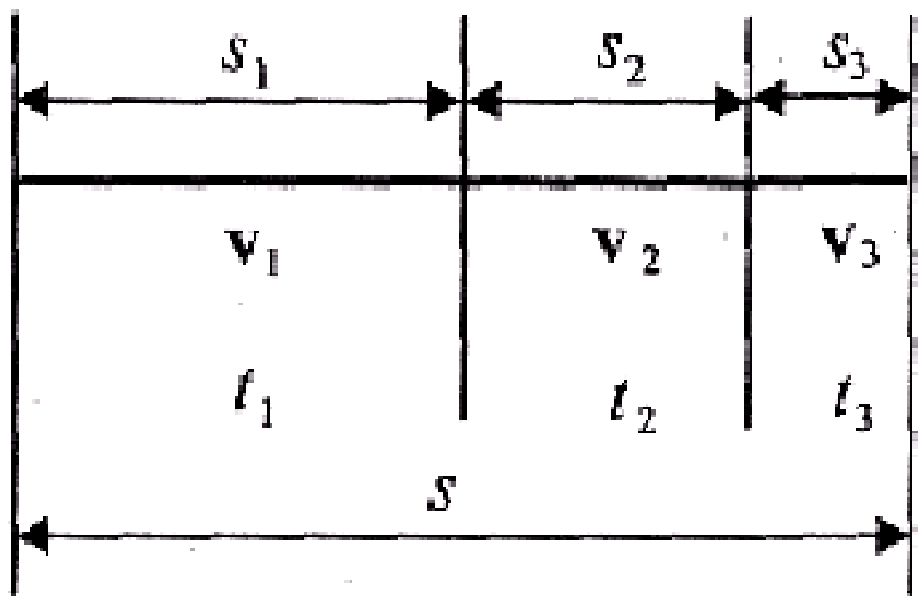
Связь углового перемещения и числа оборотов *N*:

$$\phi = 2\pi N.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью υ_1 = 16 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью υ_2 = 12 км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью υ_3 = 5 км/ч. Определите среднюю скорость движения студента на всем пути.

Решение:



Длина первой части пути $s_1=v_1t_1$, второй части пути $s_2=v_2t_2$, третьей части, $s_3=v_3t_3$.

По условию, $s_1=s_2+s_3$, а время $t_2=t_3$. Средняя скорость

$$\langle v\rangle=\frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3},$$

так как s_1- половина пути, то весь путь равен $2s_1$, время $t_1=s_1/v_1$, оставшееся время t_2+t_3 = , тогда

$$\langle v\rangle=\frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{2s_1}{v_2+v_3}}=\frac{2v_1(v_2+v_3)}{2v_1+v_2+v_3}.$$

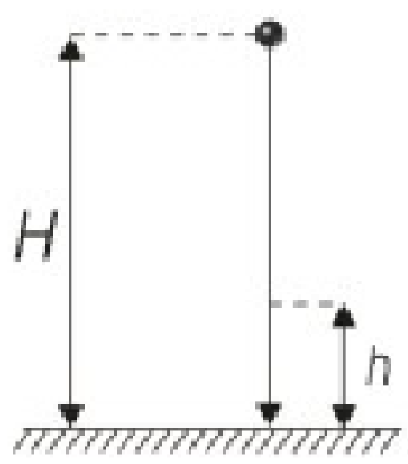
Задача 2. Последние 2 метра пути вертикально падающее тело прошло за 0,3 с. С какой высоты падало тело?

Дано:

$h=2$м

$t_2=0{,}3$с

$H=?$



Высоту H падения тела (без начальной скорости) можно определить по формуле $H=\frac{gt^2}{2}$. Здесь t – полное время падения. Очевидно $t = t_1+ t_2$, где t_1 – время прохождения первого участка; t_2 – время прохождения последних 2-х метров пути.

Запишем уравнение движения для двух последних метров пути, считая движение равноускоренным:

$$h = \upsilon_1 t_2 + \frac{g t_2^2}{2},$$

где υ_1 – скорость, с которой тело «входит» в этот участок пути.

Следовательно, $$\upsilon_1 = \frac{h - \frac{g t_2^2}{2}}{t_2} = \frac{h}{t_2} - \frac{g t_2}{2}. \qquad (1)$$

Первый участок пути тело проходит без начальной скорости, т.е. $\upsilon_0 = 0$, а так как $g = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{t_1}$, то $t_1 = \frac{\upsilon_1}{g}$. Учитывая (1), получим $t_1 = \frac{h}{g t_2} - \frac{t_2}{2}$.

Таким образом, общее время движения тела $t = t_1 + t_2$ равно

$$t = \frac{h}{g t_2} - \frac{t_2}{2} + t_2 = \frac{h}{g t_2} + \frac{t_2}{2} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в формулу для H, окончательно, получим

$$H = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{g t_2} + \frac{t_2}{2}\right)^2 = \frac{10}{2} \cdot \left(\frac{2}{10 \cdot 0{,}3} + \frac{0{,}3}{2}\right)^2 \approx 3{,}33 \text{ м.}$$

Задача 3. Тело брошено с начальной скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, дальность полета, а так же тангенциальное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории в начальный момент времени.

Дано:

$\upsilon_0 = 20$ *м/с*

$\alpha = 30^\circ$

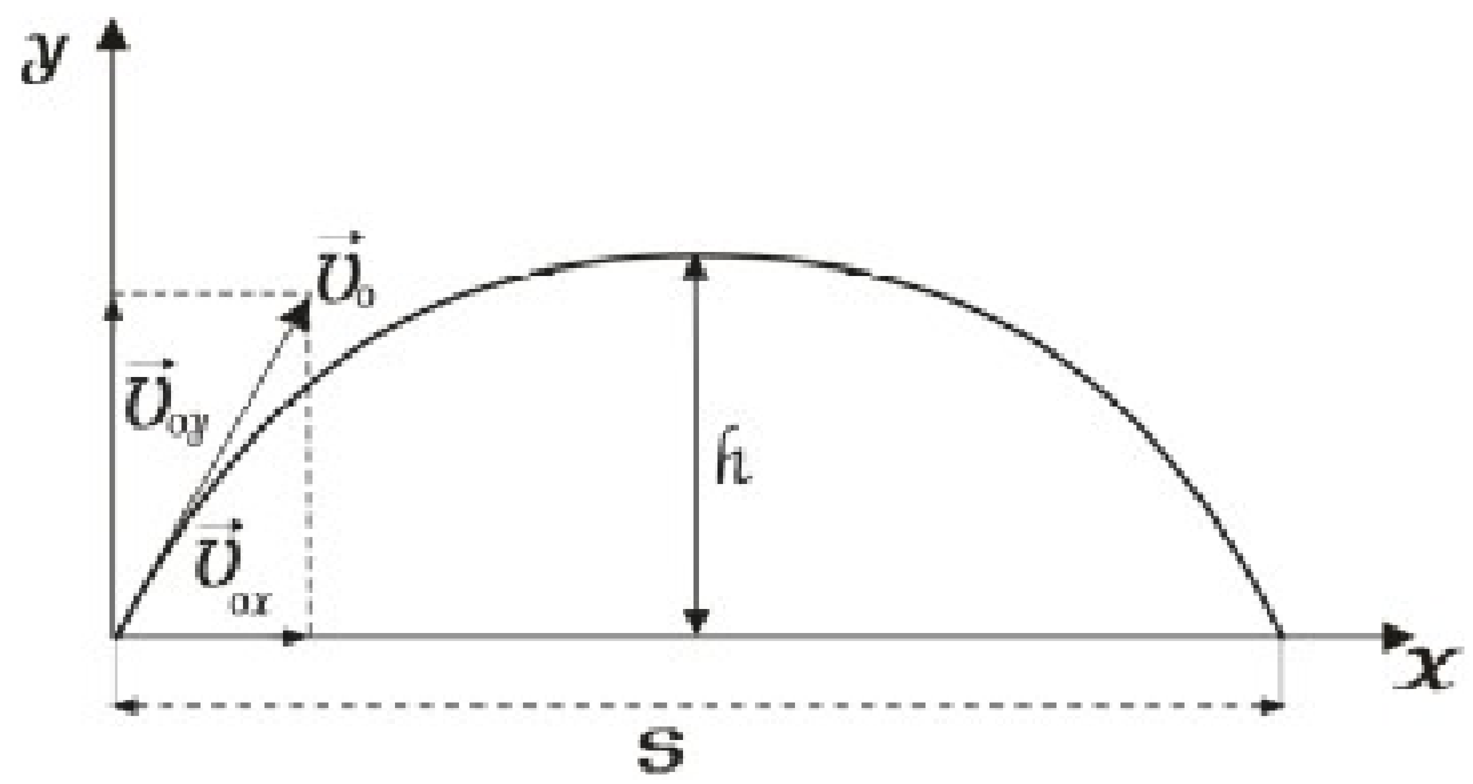
$h = ?$

$S = ?$

$a_\tau = ?$

$a_n = ?$

$R = ?$



Воспользуемся принципом суперпозиции движений: движение тела представим как два независимых движения вдоль осей координат X и Y.

Из треугольника скоростей найдем начальные скорости

$$\upsilon_{ox} = \upsilon_o \cdot \cos\alpha \,, \quad \upsilon_{oy} = \upsilon_o \cdot \sin\alpha \,. \qquad (1)$$

Вдоль оси X движение равномерное (при отсутствии сопротивления движению, других сил, действующих вдоль оси X, нет). Поэтому υ_x не изменяется, то есть $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$.

Вдоль оси Y движение – равноускоренное за счет силы тяготения. При подъеме на высоту h скорость υ_y изменяется со временем по закону: $\upsilon_y = \upsilon_{oy} - gt$. Считая, что в максимальной точке подъема $\upsilon_y = 0,$ найдем время подъема t_1: $\upsilon_{oy} = gt_1$. Учитывая (1), получим

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} \qquad (2)$$

Из уравнения движения вдоль оси y найдем высоту подъема

$$h = \upsilon_{oy} \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 5 \text{ м.}$$

Из уравнения равномерного движения вдоль оси X, найдем дальность полета S:

$$S = \upsilon_{ox} \cdot t = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha \cdot t,$$

где t- общее время движения, из соображений симметрии, равное удвоенному времени подъема, т.е. t=2 t_1. Тогда

$$S = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha \cdot 2t_1 = 2\upsilon_0 \cos\alpha \cdot \upsilon_0 \frac{\sin\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 34{,}6 \text{ м.}$$

Тангенциальное ускорение, по определению, $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$, а так как скорость

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$, и $\upsilon_x = \upsilon_{ox}$, а $\upsilon_y = \upsilon_{oy} - gt$, значит $\upsilon = \sqrt{\upsilon_{ox}^2 + (\upsilon_{oy} - gt)^2}$.

Следовательно

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\sqrt{\upsilon_{ox}^2 + (\upsilon_{oy} - gt)^2}}{dt} = \frac{(\upsilon_{oy} - gt) \cdot g}{\sqrt{(\upsilon_{oy} - gt)^2 + \upsilon_{ox}^2}}$$

В начальный момент времени t=0,

$$a_\tau = \frac{\upsilon_{oy} \cdot g}{\sqrt{\upsilon_{ox}^2 + \upsilon_{oy}^2}} = \frac{\upsilon_{oy} \cdot g}{\upsilon_0} = \frac{\upsilon_0 \cdot \sin\alpha \cdot g}{\upsilon_0} = g \cdot \sin\alpha = 5 \text{ м/с}^2 .$$

Полное ускорение движения тела, очевидно, равно ускорению свободного падения g.

Поэтому $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g$.

Откуда $a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = 8,66$ м/с^2 .

$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$. Следовательно $R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = 46,2$ м.

По определению,

Задача 4. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$, $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, где $A_1 = 4$ м/с, $B_1 = 8$ м/с^2, $C_1 = -16$ м/с^3, $A_2 = 2$ м/с, $B_2 = -4$ м/с^2, $C_2 = 1$ м/с^3. В какой момент времени t ускорение этих точек будут одинаковы? Найти скорости υ_1 и υ_2 точек в этот момент времени.

Дано:

$x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$

$x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$

$A_1 = 4$ м/с.

$A_2 = 2$ м/с.

$B_1 = 8$ м/с^2 .

$B_2 = -4$ м/с^2 .

$C_1 = -16$ м/с^3

$C_2 = 1$ м/с^3

$a_1 = a_2$

$t = ?$ $\upsilon_1 = ?$ $\upsilon_2 = ?$

Для одномерного движения ускорение есть вторая производная от координаты, то есть $a = d^2x/dt^2$ или первая производная от скорости то есть $a = d\upsilon/dt$.

Поэтому надо, вначале определить скорости точек:

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = (A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3)' = A_1 + 2B_1 t + 3C_1 t^2 \qquad (1)$$

$$\upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = (A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3)' = A_2 + 2B_2 t + 3C_2 t^2 \qquad (2)$$

Теперь найдем ускорения.

$$a_1 = \frac{d\upsilon_1}{dt} = (A_1 + 2B_1 t + 3C_1 t^2)' = 2B_1 + 6C_1 t \qquad (3)$$

$$a_2 = \frac{d\upsilon_2}{dt} = (A_2 + 2B_2 t + 3C_2 t^2)' = 2B_2 + 6C_2 t \qquad (4)$$

Приравняв (3) и (4), найдем t:

$$t = \frac{B_1 - B_2}{3(C_2 - C_1)} = \frac{8 - (-4)}{3(1 - (-16))} = 0,235 \text{ с}$$

.

Теперь подставим это значение t в (1) и (2):

$$\upsilon_1 = 4 + 2 \cdot 8 \cdot 0,235 + 3 \cdot (-16) \cdot (0,235)^2 = 5,1 \text{ м/с},$$

$$\upsilon_2 = 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 0,235 + 3 \cdot 1 \cdot (0,235)^2 = 0,286 \text{ м/с}.$$

Задача 5. Материальная точка движется на плоскости согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right); & x, y \text{ – в метрах,} \\ y = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right); & t \text{ – в секундах.} \end{cases}$$

Найти: 1) уравнение траектории;

2) координаты точки;

3) полную скорость;

4) полное ускорение;

5) тангенциальное и нормальное ускорение;

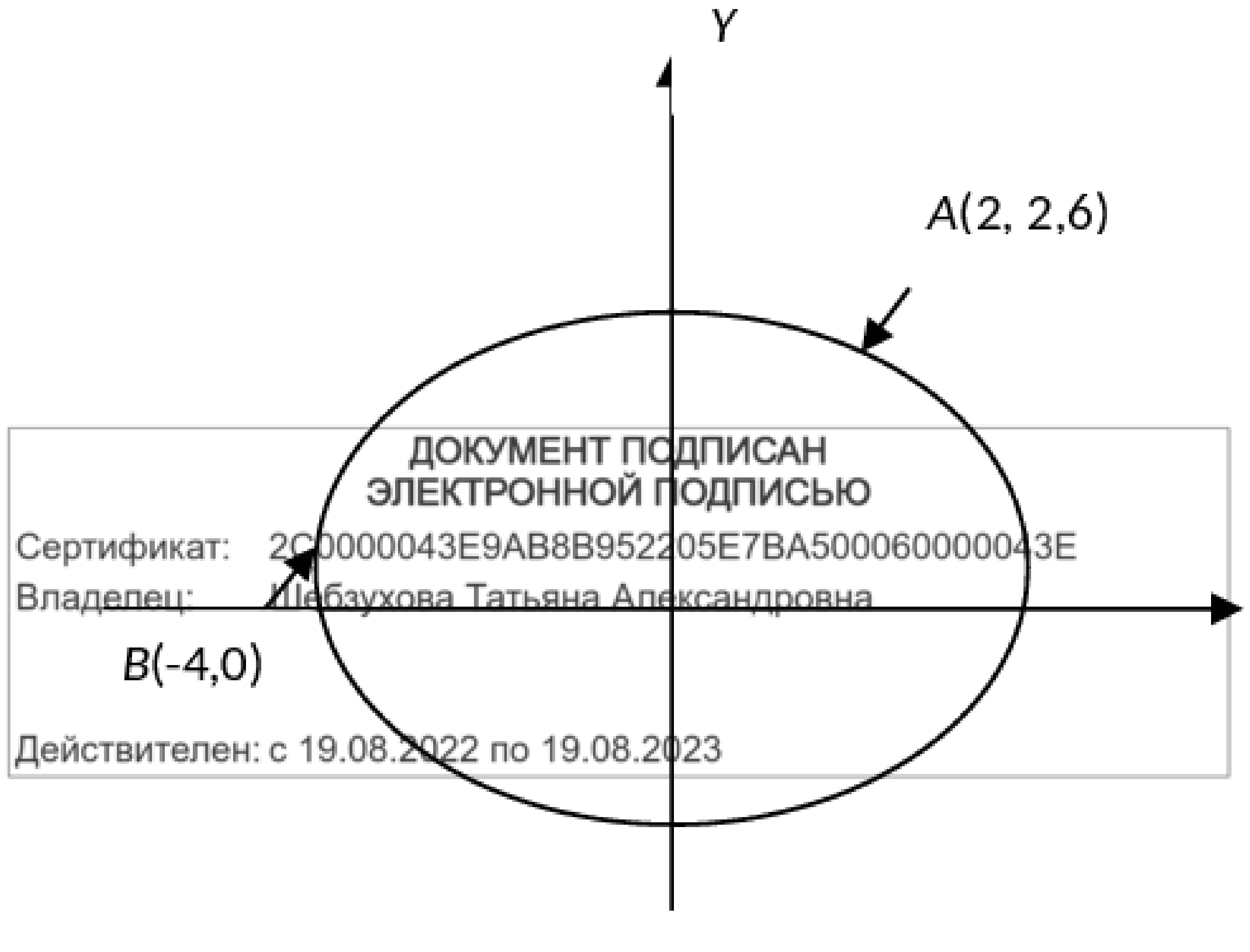
6) радиус кривизны траектории в моменты времени t_1=2 с и t_2=6 с.

Решение:

1. Для нахождения уравнения траектории (зависимости одной координаты от другой) исключим из уравнений переменную величину t:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \\ \dfrac{y}{3} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4^2} = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \\ \dfrac{y^2}{3^2} = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \end{cases} \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Это уравнение эллипса с полуосями a = 4 м; b = 3 м.



В момент t_1= 2с

$$x_1 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) \Rightarrow x_1 = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2 \text{ м}$$

$$y_1 = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) \Rightarrow y_1 = 3\sin\frac{\pi}{3} = 2,6 \text{ м}$$

В момент $t_2 = 6$ с: $x_2 = 4\cos(\pi) = -4$ м, $y_2 = 3\sin(\pi) = 0$ м.

Таким образом, в момент времени $t_1 = 0$ координаты точки: $A\ (x,y) = (2, 2, 6)$;

в момент времени $t_2 = 6$ с координаты точки: $B\ (x,y) = (-4, 0)$.

2. Для нахождения полной скорости найдем υ_x и υ_y в моменты $t_1 = 2$с и $t_2 = 6$с:

$$\upsilon_x = x' = \frac{dx}{dt} = \left(4\cos\frac{\pi}{6}\cdot t\right)' = -\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) = \frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$$

$$\upsilon_y = y' = \left(3\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)' = \frac{3\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) = \frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$$

$$\upsilon_{x1} = -\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) = -\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1{,}81 \text{ м/с.}$$

$$\upsilon_{y1} = \frac{1}{2}\pi\cos(60^\circ) = 0{,}785 \text{ м/с.}$$

$$\upsilon^{\text{полн. }1} = \sqrt{(-1{,}8)^2 + (0.785)^2} = 1{,}98 \text{ м/с.}$$

Аналогично находим, что

$$\upsilon_{x2} = -\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = 0 \text{ м/с,} \qquad \upsilon_{y2} = \frac{1}{2}\pi\cos(\pi) = -1{,}57 \text{ м/с.}$$

$$\upsilon_{\text{полн.}2} = 1{,}57 \text{ м/с.}$$

3. Для нахождения полного ускорения $a_{полн}$ найдем a_x и a_y в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 6$ с:

$$a_x = \upsilon_x' = -\frac{4}{6^2}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right), \qquad a_y = \upsilon_y' = -\frac{3}{6^2}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$$

$a_{x1} = -\frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) = -\frac{1}{9}\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,55$ м/с^2.

$a_{y1} = -\frac{1}{12}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) = -\frac{1}{12}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,71$ м/с^2.

$a_{полн.1} = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = 0,9$ м/с^2.

$a_{x2} = -\frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = -\frac{1}{9}\pi^2\cos(\pi) = 1,1$ м/с^2.

$a_{y2} = -\frac{1}{12}\pi^2\sin(\pi) = 0$ м/с^2.

$a_{полн.2} = 1,1$ м/с^2.

4. Найдем нормальное (центростремительное) ускорение: $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$, тангенциальное ускорение $a_x = \frac{d\upsilon}{dt}$.

Найдем $\upsilon_{полн.}$

$$\upsilon_{полн} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\pi^2\left(\frac{8}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)}{12\pi\sqrt{\frac{4}{9}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)}};$$

$a_{\tau 1} = 0,22$ м/с^2.

Следовательно $a_{n1} = \sqrt{a_{полн}^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{0,9^2 - 0,22^2} = 0,87$ м/с^2.

Т ак как $\upsilon_{полн1} = 1,98$ м/с, то радиус кривизны в точке A равен

$$R_A = \frac{\upsilon_1^2}{a_{n1}} = \frac{1,98^2}{0,81} 4,84 \text{ м.}$$

Аналогично:

$$a_{\tau 2} = \frac{25\pi\cos(\pi)\sin\pi}{12\cdot 18\sqrt{\frac{4}{9}\sin^2(\pi) + \frac{1}{4}\cos^2(\pi)}} = 0.$$

Следовательно

$$a_{n2} = a_2 = 1{,}1\,\text{м/с}^2 \Rightarrow R_B = \frac{1{,}57^2}{1{,}1} = 2{,}24\,\text{м}.$$

Вопросы и задания

1. Механическое движение. Система отсчета.
2. Материальная точка. Траектория. Перемещение и путь.
3. Скорость и ускорение, как производные от радиус-вектора по времени.
4. Тангенциальное и нормальное ускорения.
5. Кинематика вращательного движения материальной точки.
6. Угловая скорость и угловое ускорение, как производные от угла поворота по времени.
7. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1=A_1t+B_1t^2+C_1t^3$,

$x_2 = A_2t+B_2t^2+C_2t^3$, где A_1 = 4 м/с; B_1 = 8 м/с^2; C_1= - 16 м/с^3; A_2 = 2 м/с; B_2 = -4 м/с^2; C_2 = 1 м/с^3. Найти момент времени t , когда ускорения этих точек будут одинаковы. Найти скорости υ_1 и υ_2 точек в этот момент времени.

2. Точка движется по прямой согласно уравнению $x=At+Bt^3$, где A = 6 м/с; B = 1/8 м/с^3. Найти среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ точки в интервале времени от t_1=2 с до t_2= 6 с.

3. Движение точки по прямой задано уравнением $x=At+Bt^2$, где A = 2 м/с; B =

= -0,5м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ движения точки в интервале времени от t_1 =0с до t_2 =3с.

4. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью υ_0 =10м/с. Высота балкона над поверхностью земли h =12м. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ с момента бросания до момента падения на землю.

5. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью υ_0 =5 м/с. ерез t =2с мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.

6. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте

h =8,6м два раза с интервалом Δt =3с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость брошенного тела.

7. Вертикально вверх с начальной скоростью υ_0=20м/с брошен камень. Через τ=1с после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте h встретятся камни?

8. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью υ_0=20 м/с. Через какое время камень будет находиться на высоте h =15м? Найти скорость υ камня на этой высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять g =10 м/с^2.

9. Камень падает с высоты h =1200м. Какой путь s пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

10. С какой высоты H упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время t = 0,1с?

11. Тело брошено под некоторым углом α к горизонту. Найти величину этого угла, если горизонтальная дальность s полета тела в четыре раза больше максимальной высоты H траектории.

12. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h: спустя время t =10 с и t =50 с после выстрела. Определить начальную скорость υ_0 и высоту h.

13. Пуля пущена с начальной скоростью υ_0=200 м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Определить максимальную высоту H подъема, дальность s полета и радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

14. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью υ_0=30 м/с. Определить скорость υ, тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в конце второй секунды после начала движения.

15. Тело брошено под углом $\alpha =30^\circ$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

16. Диск радиусом r = 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

17. Диск радиусом r = 20 см вращается согласно уравнению $\varphi = A+Bt+Ct^3$, где A = 3 рад; B = -1 рад/с; C = 0, 1рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени t =10 с.

18. Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток времени Δt = 10с достиг частоты вращения n = 300 мин$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и число N оборотов, которое он сделал за это время.

19. Велосипедное колесо вращается с частотой n =5 с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени Δt = 1 мин. Определить угловое ускорение ε и число N оборотов, которое сделает колесо за это время.

20. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав N = 50 полных оборотов, оно изменило частоту вращения от n_1 =4 с$^{-1}$ до n_2 =6 с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε колеса.

Практическое занятие 2.

***Тема занятия.* Динамика материальной точки.**

Цель занятия. Изучить законы динамики материальной точки.

Теоретическая часть.

Динамика поступательного движения

Импульс абсолютно твердого тела массой m, движущегося со скоростью υ:

$$\vec{p}=m\cdot\vec{\upsilon}.$$

Второй закон динамики (Ньютона):

$$d\vec{p}=\vec{F}\,dt,$$

где $\vec{F}-$ результирующая сила, действующая на материальную точку.

Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости $F=-kx$;

где $k-$ коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость); $x-$ абсолютная деформация;

б) сила тяжести: $F=m\,g$;

в) сила трения (скольжения): $F=\mu\,N$,

где $\mu-$ коэффициент трения; $N-$ сила нормального давления.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы остается постоянным

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=const.$$

Для двух тел при абсолютно упругом ударе:

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ - скорости тел перед соударением, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2-$ скорости тел в момент после соударения.

Для абсолютно неупругого удара двух тел:

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2=(m_1+m_2)\,\vec{u}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На гладком столе лежит брусок массой 3 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола.

К концам шнуров подвешены гири массами m_1 = 2 кг и m_2= 3 кг. Найти ускорение *a*, с которым движется брусок и силу *T* натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь. Шнуры считать нерастяжимыми.

Дано:

m=3кг

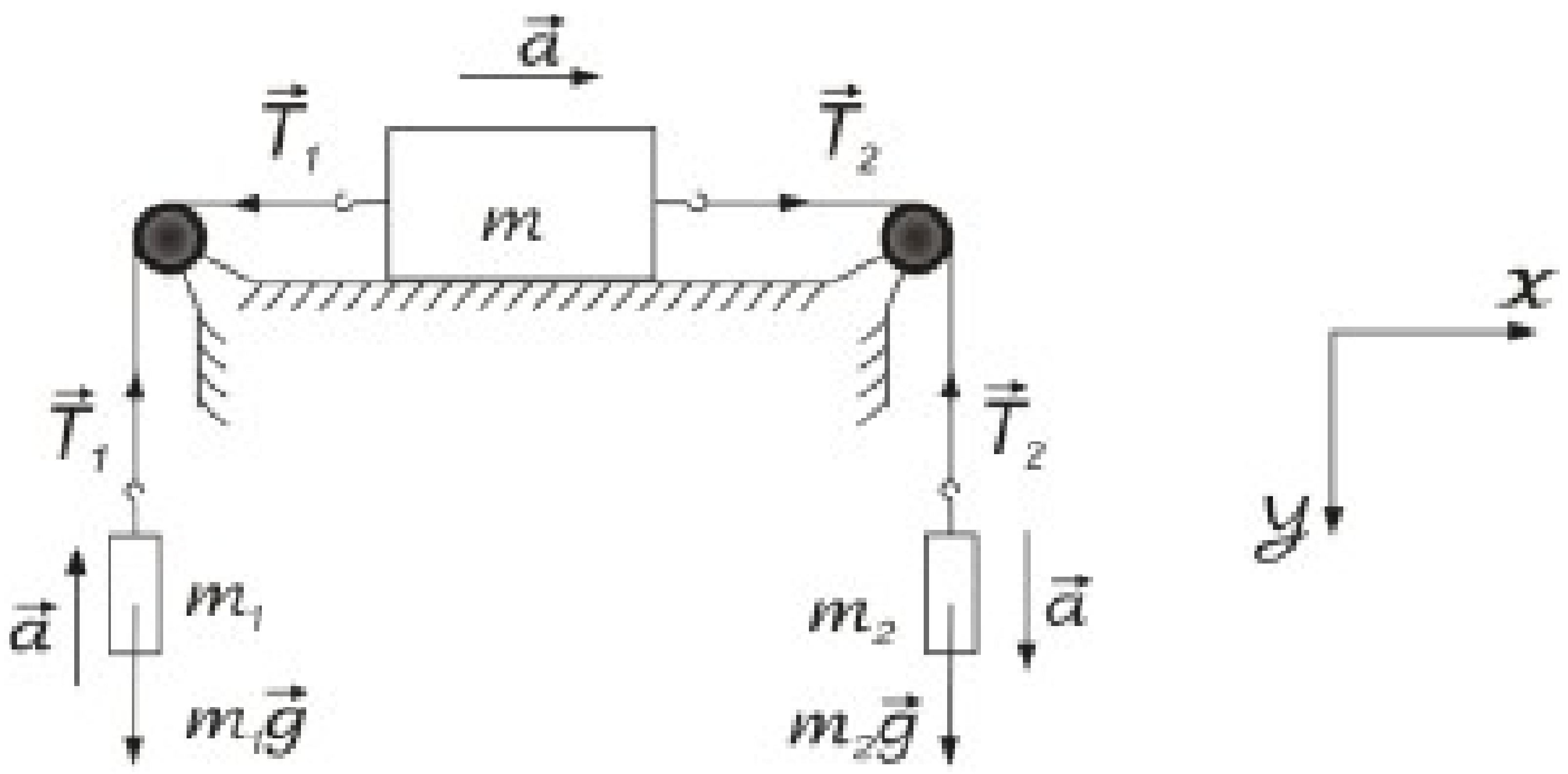
m_1 =2 кг

m_2= 3 кг.

a - ?

T_1 - ?

T_2 - ?



Распишем силы, действующие на тела. Выберем систему координат, как указано на рисунке (на груз *m*, лежащий на столе вообще-то действуют еще две силы: сила тяжести mg и сила реакции опоры N. Но так как трением в задаче пренебрегается, то действие этих сил из рассмотрения мы исключаем).

Запишем второй закон Ньютона для каждого участвующего в движении тела:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \\ m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \end{cases}$$

(Поскольку шнуры считаются нерастяжимыми, то все тела движутся с одинаковым ускорением *a*).

Выбираем направление ускорения, как указано на рисунке (по направлению часовой стрелки). Спроецируем систему уравнений на выбранные оси координат:

$$\begin{cases} -m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ ma = T_2 - T_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Из второго уравнения (1) вычитаем первое:

$$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g - (T_2 - T_1)$$

$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g - ma$

$(m_2 + m_1 + m)a = (m_2 - m_1)g$, тогда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m} g \qquad (2)$$

Подставляем численные значения:

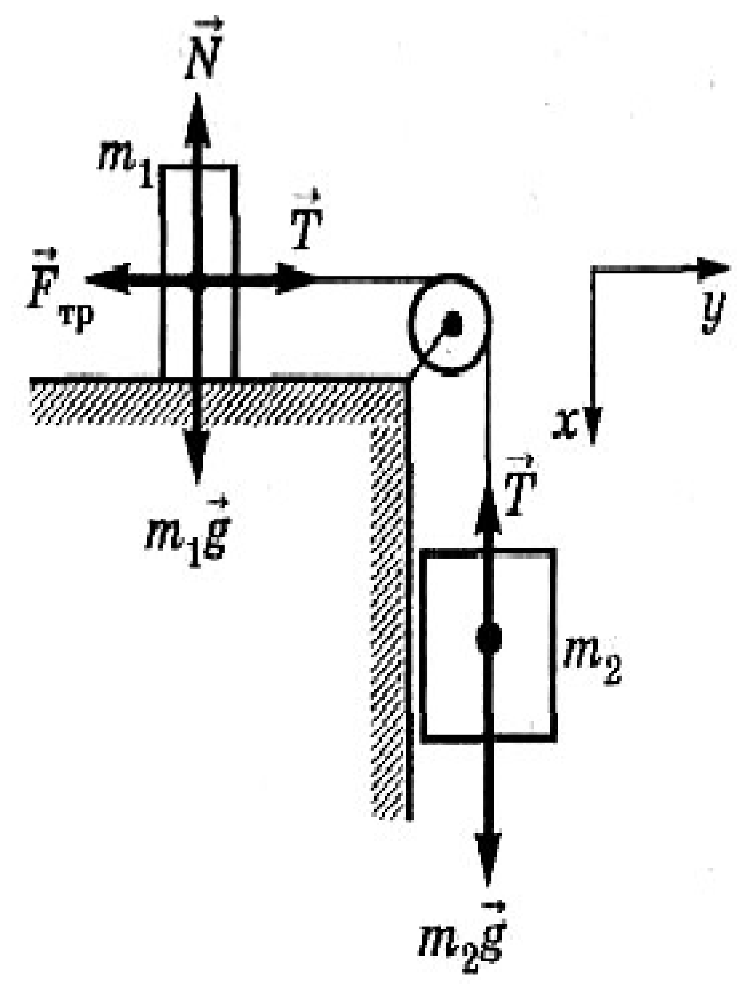
$a = \frac{3 - 2}{3 + 2 + 3} 10 = \frac{10}{8} = 1,25$ м/с^2.

$T_1 = m_1 g + m_1 a = m_1(g + a) = 2(10 + 1,25) = 22,5$ Н,

$T_2 = m_2(g - a) = 3(10 - 1,25) = 26,2$ Н.

Задача 2. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых (m_1 = 400 г) движется по поверхности стола, а другой (m_2 = 600 г) — вдоль вертикали вниз. Коэффициент f трения груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определить: 1) ускорение a, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения T нити.

<u>*Решение.*</u>



Выбрав оси координат (рис), запишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эти оси:

$$m_2 a = m_2 g - T$$

Учитывая, что

, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 a = T - f m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T, \end{cases}$$

откуда искомое ускорение:

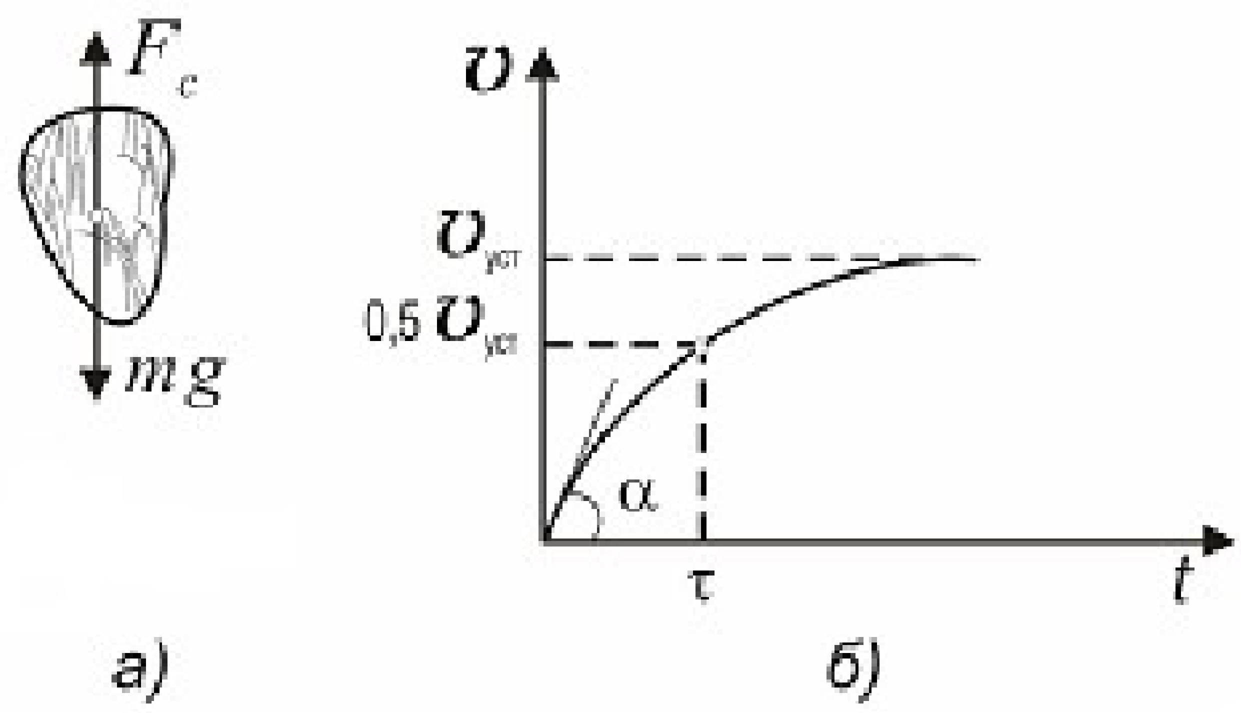
$$a = \frac{(m_2 - f m_1) g}{m_1 + m_2}$$

Силу натяжения нити найдем из второго уравнения системы:

$$T = m_2(g - a)$$

Вычисляя, получаем: 1) $a = 5{,}49$ м/с^2; 2) $T = 2{,}59$ Н.

Задача 3. При падении тела с большой высоты его скорость $\upsilon_{уст}$ при установившемся движении достигает 80 м/с. Определить время τ, в течение которого, начиная от момента начала падения, скорость становится равной $\upsilon_{уст}/2$. Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости тела.



Решение.

На падающее тело действуют две силы (рис. а): сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха F_c.

Сила сопротивления воздуха по условиям задачи пропорциональна скорости тела и противоположна ей по направлению:

$$F_c = -k\upsilon, \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы тела и от свойств окружающей среды.

Напишем уравнение движения тела в соответствии со вторым законом Ньютона в векторной форме: $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_c$. Заменив F_c согласно (1), получим:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = m\vec{g} - k\vec{\upsilon}. \tag{2}$$

Спроецируем все векторные величины на вертикально вниз направленную ось и напишем уравнение (2) для проекций:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \frac{dt}{m}.$$

Выполним интегрирование, учитывая, что при изменении времени от нуля до τ (искомое время) скорость возрастает от нуля до $\frac{1}{2}\upsilon_{уст}$ (рис. 1, б):

$$\int_0^{\frac{1}{2}\upsilon_{уст}} \frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}; \quad -\frac{1}{k}\left|\ln(mg - k\upsilon)\right|_0^{\frac{1}{2}\upsilon_{уст}} = \frac{\tau}{m}.$$

Из полученного выражения найдем искомое время:

$$\tau = \frac{m}{k}\ln\frac{mg}{mg - \frac{1}{2}k\upsilon_{уст}} \qquad (3)$$

Входящий сюда коэффициент пропорциональности k определим из следующих соображений. При установившемся движении (скорость постоянна) алгебраическая сумма проекций на вертикальную ось действующих на тело сил равна нулю, т. е. $mg - k\upsilon_{уст} = 0$, откуда $k = \dfrac{mg}{\upsilon_{уст}}$.

Подставим найденное значение k в формулу (3):

$$\tau = \frac{m\upsilon_{уст}}{mg}\ln\frac{mg}{mg - \frac{1}{2}\frac{mg}{\upsilon_{уст}}\upsilon_{уст}}$$

После сокращений и упрощений получим: $\tau = \dfrac{\upsilon_{уст}}{g}\ln 2$

Подставив численные значения, получим τ = 5,66 с. Проверка размерности результата в данном случае не обязательна, так как она очевидна.

Вопросы и задания

1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.
2. Взаимодействие тел. Сила, масса.
3. Импульс (количество движения).
4. Закон сохранения импульса.
5. Второй закон Ньютона.
6. Третий закон Ньютона.
7. Изолированная система материальных тел.

Задачи для самостоятельного решения

1. Самолет летит в горизонтальном направлении с ускорением a = 20 м/с^2. Какова перегрузка пассажира самолета? (Перегрузкой называется отношение силы F, действующей на пассажира, к силе тяжести P).

2. Автоцистерна с керосином движется с ускорением a =0,7 м/с^2. Под каким углом φ к плоскости горизонта расположен уровень керосина в цистерне?

3. Бак в тендере паровоза имеет длину l=4 м. Какова разность $\Delta\ l$ уровней воды у переднего и заднего концов бака при движении поезда с ускорением a = 0,5 м/с^3?

4. Катер массой m=2m трогается с места и в течение времени τ =10 с развивает при движении по спокойной воде скорость υ = 4 м/с. Определить силу тяги F мотора, считая ее постоянной. Принять силу сопротивления F_c движению пропорциональной скорости; коэффициент сопротивления k =100 кг/с.

5. Начальная скорость υ_0 пули равна 800 м/с. При движении в воздухе за время t = 0,8с ее скорость уменьшилась до υ =200. Масса m пули равна 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления k. Действием силы тяжести пренебречь.

6. Материальная точка массой m = 2 кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x=A+Bt+Ct^2+ Dt^3$, где C =1 м/с^2, D = - 0,2 м/с^3. Найти значения этой силы в моменты времени t_1=2 с и t_2 = 5 с. В какой момент времени сила равна нулю?

7. Наклонная плоскость, образующая угол α = 25˚с плоскостью горизонта, имеет длину l = 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время t = 2с. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость.

8. На гладком столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1=1 кг и m_2 = 2кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок, и силу T натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

9. Два бруска массами m_1=1 кг и m_2 = 4кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением a будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F = 10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила T натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить к первому бруску? Ко второму бруску? Трением пренебречь.

10. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перевешен шнур, к концам которого привязали грузы массами m_1 = 1,5 кг и m_2 = 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

Практическое занятие 3.

Тема занятия. Работа и энергия. Механика твердого тела**.**

Цель занятия. Изучить законы сохранения энергии. Кинематику и динамику вращательного движения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Работа. Работа переменной силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Связь между силой и потенциальной энергией. Энергия упруго деформированного тела. Кинетическая энергия и её связь с работой приложенных сил. Полная механическая энергия системы тел. Закон сохранения механической энергии. Диссипация энергии. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Закон сохранения энергии, а также законы динамики вращательного движения широко применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы остается постоянным

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const .$$

Для двух тел при абсолютно упругом ударе:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 ,$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ - скорости тел перед соударением, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2 -$ скорости тел в момент после соударения.

Для абсолютно неупругого удара двух тел:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{u} .$$

Кинетическая энергия T тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} , \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{(2m)} .$$

Потенциальная энергия Π :

а) упругодеформированной пружины:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} ,$$

где $k -$ жесткость пружины; $x -$ абсолютная деформация;

б) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести:

$$\Pi = mgh ,$$

где $g -$ ускорение свободного падения; $h -$ высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h << R$, где $R -$ радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии: если в системе действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы не меняется

$$E = T + \Pi = const .$$

Закон сохранения энергии при абсолютно упругом столкновении двух тел, движущихся в горизонтальной плоскости:

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1 u_1^2}{2}+\frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Закон сохранения энергии при абсолютно неупругом столкновении двух тел, движущихся в горизонтальной плоскости:

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1 u_1^2}{2}+\frac{m_2 u_2^2}{2}+Q,$$

где $Q-$ энергия нагревания тел и их остаточной деформации.

Скорости двух тел после абсолютно упругого столкновения:

$$u_1=\frac{(m_1-m_2)\upsilon_1+2m_2\upsilon_2}{(m_1+m_2)},$$

$$u_2=\frac{(m_2-m_1)\upsilon_2+2m_1\upsilon_1}{(m_1+m_2)}.$$

Работа, совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии:

$$A=\Delta T=T_2-T_1.$$

Динамика вращательного движения

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M}=J\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{M}-$ результирующий вектор моментов внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения; $\vec{\varepsilon}-$ вектор углового ускорения; $J-$ момент инерции системы относительно оси.

Моменты инерции некоторых тел массой m относительно оси вращения, проходящей через центр масс:

а) материальной точки: $J=mr^2$,

где $r-$ расстояние от материальной точки до оси;

б) стержня длиной ℓ относительно оси перпендикулярной стержню:

$$J=\frac{1}{12}m\ell^2;$$

в) обруча или тонкостенного цилиндра радиуса R относительно оси, совпадающей с осью цилиндра:

$$J=mR^2.$$

г) однородного (сплошного) диска (цилиндра) радиуса R относительно оси, совпадающей с осью диска:

$$J=\frac{1}{2}mR^2;$$

д) пустотелого цилиндра радиусами R_1 и R_2 с осью вращения, совпадающей с осью цилиндра:

$$J=\frac{1}{2}m\left(R_1^2+R_2^2\right);$$

е) шара с осью вращения, проходящей через его центр:

$$J=\frac{2}{5}mR^2.$$

Теорема Штейнера: момент инерции J_0 тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_c этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы *m* на квадрат расстояния *a* между этими осями

$$J_0=J_c+ma^2,$$

Момент импульса материальной точки массой m, имеющей скорость υ и находящуюся на расстоянии r от оси вращения:

$$L=m\upsilon r.$$

Момент импульса L тела, вращающегося относительно неподвижной оси с угловой скоростью ω:

$$L=J\omega.$$

Закон сохранения момента импульса систем тел, вращающихся вокруг неподвижной оси:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i\vec{\omega}_i=const.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T=\frac{J\omega^2}{2}, \quad \text{или} \quad T=\frac{L^2}{(2J)}.$$

Кинетическая энергия катящегося тела:

$$T=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Снаряд массой *m* = 5кг обладал скоростью υ= 300 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой *m* = 2 кг, получила скорость υ_1 = 500 м/с и полетела вперед под углом 60˚ к горизонту. Найти скорость υ_2 после разрыва второй, большей части, и под каким углом к горизонту она полетела.

Дано:

m = 5кг

υ = 300 м/с

υ_1 = 500 м/с

m_1=2 кг

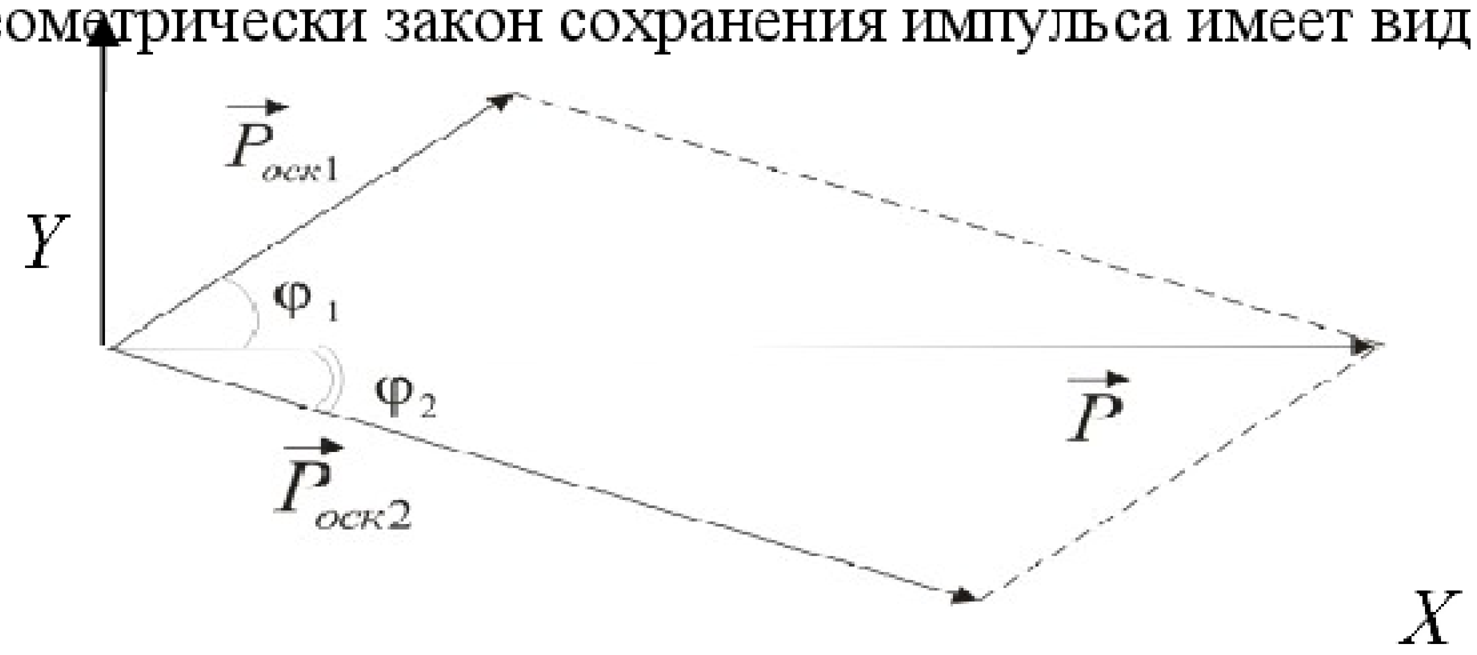
φ_1 = 60°

υ_2 – ?

φ_2 – ?

В верхней части траектории, снаряд двигался горизонтально.

Геометрически закон сохранения импульса имеет вид



$$\vec{P} = \vec{P}_{ОСК1} + \vec{P}_{ОСК2} \qquad \text{или} \qquad m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2. \qquad (1)$$

Используя теорему косинусов, найдем $\left|\vec{P}_{ОСК2}\right|$

$$(P_{ОСК2})^2 = P^2 + (P_{ОСК1})^2 - 2P \cdot P_{ОСК1} \cdot \cos\varphi_1. \qquad (2)$$

Так как $P_{оск2} = (m - m_1)\upsilon_2$ получим, что

$$\upsilon_2 = \frac{P_{ОСК2}}{m - m_1} = \frac{\sqrt{1500^2 + 1000^2 - 2 \cdot 1500 \cdot 1000 \cdot \cos 60^\circ}}{(5 - 2)} = 441 \text{ м/с}.$$

Спроецируем вектора $\vec{P}_{ОСК1}$ и $\vec{P}_{ОСК2}$ на направление $\vec{P}$. По теореме о проекции суммы векторов, получим

$P = P_{ОСК.1\bar{P}} + P_{ОСК.2\bar{P}}$, но $P_{ОСК.1\bar{P}} = \left|\vec{P}_{ОСК.1}\right| \cdot \cos\varphi_1$, а

$P_{ОСК.2\bar{P}} = \left|\vec{P}_{ОСК.2}\right| \cdot \cos(-\varphi_2)$, т.к. угол φ_2 лежит ниже оси P,

откуда

$$\cos(-\varphi_2) = \frac{P - (P_{ОСК.1}) \cdot \cos\varphi_1}{\left|\vec{P}_{ОСК.2}\right|} = \frac{1500 - 1000 \cdot \cos 60^\circ}{1322{,}9} = 0{,}756,$$

значит $-\varphi_2 = \arccos(0{,}756) = 40{,}8^\circ$, а $\varphi_2 = -40{,}8^\circ$

Эту задачу можно решить и другим способом.

Выберем оси координат, как на рисунке. Записав уравнение (1) в проекциях на оси координат и, учитывая, что $\upsilon_x = \upsilon$ и $\upsilon_y = 0$,

получим

$$m\upsilon = m_1\upsilon_1\cos\varphi_1 + m_2\upsilon_2\cos\varphi_2, \qquad (3)$$

$$0 = m_1\upsilon_1\sin\varphi_1 - m_2\upsilon_2\sin\varphi_2.$$

Или

$$m_2\upsilon_2\cos\varphi_2 = m\upsilon - m_1\upsilon_1\cos\varphi_1, \qquad (4)$$

$$m_2\upsilon_2\sin\varphi_2 = m_1\upsilon_1\sin\varphi_1.$$

Возводя в квадрат оба равенства, и сложив их, после тривиальных преобразований получим формулу (2) для вычисления импульса и скорости второго осколка. Из второго уравнения системы (4) получаем выражение

$$\sin\varphi_2 = -\frac{m_1\upsilon_1\sin\varphi_1}{m_2\upsilon_2},$$

φ_2.

из которого вычисляем угол

F

Задача 2. На пружине жесткостью $k = 5 10^3$ Н/м подвешен блок в форме диска массой 5 кг и радиусом 0,2 м. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг. Найти: 1) ускорение грузов и угловое ускорение блока; 2) силы натяжения шнура; 3) силу упругости пружины и удлинение пружины; 4) кинетическую энергию системы через 2 с; 5) изменение потенциальной энергии блока и грузов за 2 с; 6) найти ускорение центра масс грузов.

Дано:

$m_0 = 5$ кг Укажем все силы, действующие на каждое тело (см. рис.).

$m_1 = 2$ кг Напишем уравнение второго закона Ньютона в векторной

$m_2 = 3$ кг форме для каждого тела, при этом блок совершает

вращательное

$k = 5\cdot10^3$ Н/м движение. Учтем, также что $I = m_0r^2/2$ и

$r = 0,2$ м $a = \varepsilon\cdot r$ (проскальзывания нет) и линейное

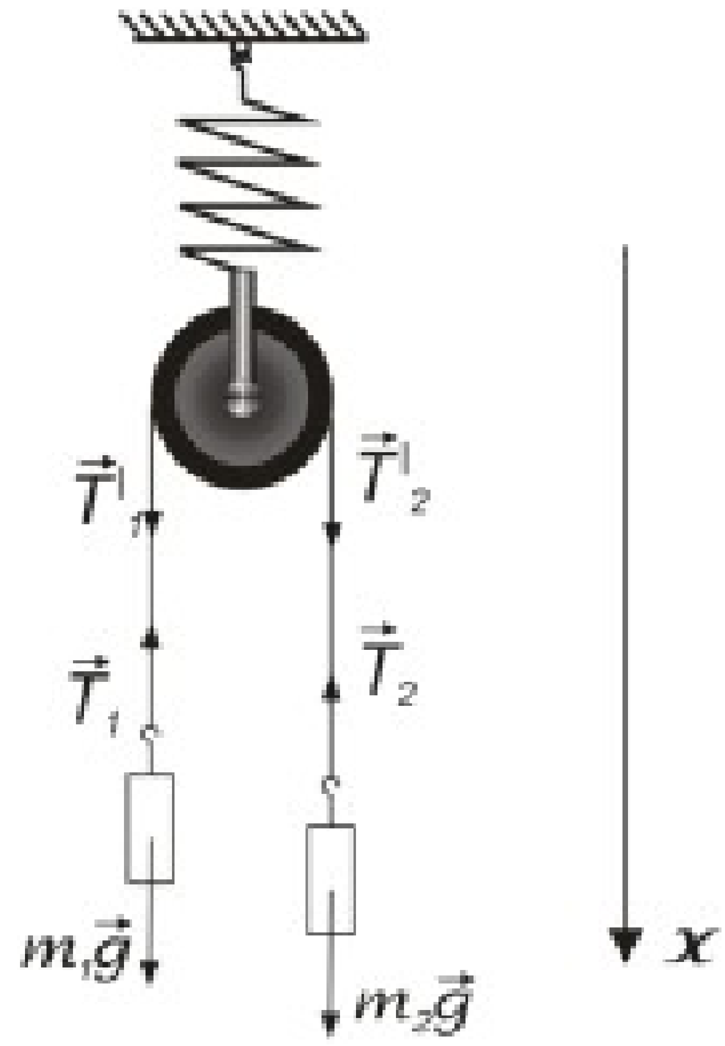
$t = 2$ с ускорение крайних точек блока равно

a - ? ε - ? ускорению точек шнура. Заметим, что

по третьему закону Ньютона $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$.

Для проекций сил на ось X получим

систему уравнений:



$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 \cdot r - T_1 \cdot r = \frac{1}{2} m_0 r^2 \cdot \frac{a}{r} \\ T_1 + T_2 + m_0 g - F = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Складывая первые три уравнения, получим

$$m_2 g - m_1 g = a\left(\frac{1}{2} m_0 + m_2 + m_1\right) \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2} m_0 + m_2 + m_1} g \Rightarrow \quad a = \frac{10 \cdot (3 - 2)}{7,5} = \frac{4}{3} \text{ м/с}^2 = 1,33 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{1,33}{0,2} = 6,66 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Из первого уравнения найдем: $T_2 = T_2' = m_2(g - a) = 26,0$ Н.

Из второго уравнения найдем: $T_1 = T_1' = m_1(g + a) = 22,7$ Н.

Из четвертого уравнения найдем F:

$$F = T_1 + T_2 + m_0 g = 98,7 \text{ Н}.$$

Удлинение пружины найдем из формулы закона Гука:

$$F = -k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{98,7}{5 10^3} = 0,0197 \text{ м} = 1,97 \text{ см}.$$

Это удлинение пружины при движущихся грузах. Если застопорить блок, то $F_1 = (m_1 + m_2 + m_0) \cdot g = 100\ H$, что вызовет удлинение пружины точно 2 см. С началом движения пружина сократится на $\approx$0,3 мм. Из системы уравнений (1) можно получить формулу для разности силы натяжения $\Delta F = F_1 - F$:

$$\Delta F = \frac{(m_2 - m_1)^2}{\frac{1}{2}m_0 + m_2 + m_1} g,$$

используя которую можно оценить изменение растяжения пружины

$$\Delta x' = \Delta F / k = 0{,}27 \text{ мм.}$$

Чтобы найти кинетическую энергию всей системы, найдем кинетическую энергию поступательного движения грузов $K_{гр}$ и кинетическую энергию вращательного движения блока $K_{бл}$:

$$K_{гр} = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2};$$

Так как $\upsilon = at \Rightarrow$ $K_{гр} = K_{гр} = \dfrac{(m_1 + m_2)a^2t^2}{2} = \dfrac{5 \cdot 1{,}33^2 \cdot 4}{2} \approx 17{,}7$ Дж.

$K_{бл} = \dfrac{I\omega^2}{2}$ так как $\omega = \upsilon / r$, и $I = m_0 r^2 / 2$, то $K_{бл} = \dfrac{m_0 r^2 \upsilon^2}{4 \cdot r^2} = 9$ Дж.

Таким образом полная кинетическая энергия $K = K_{гр} + K_{бл} = 26{,}7$ Дж.

Задача 3. Два свинцовых шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на нитях длиной $l = 70$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

__Решение.__

Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью υ, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon. \qquad (1)$$

где υ_1 и υ_2 — скорости шаров до удара. Скорость υ_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2},$$

откуда:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

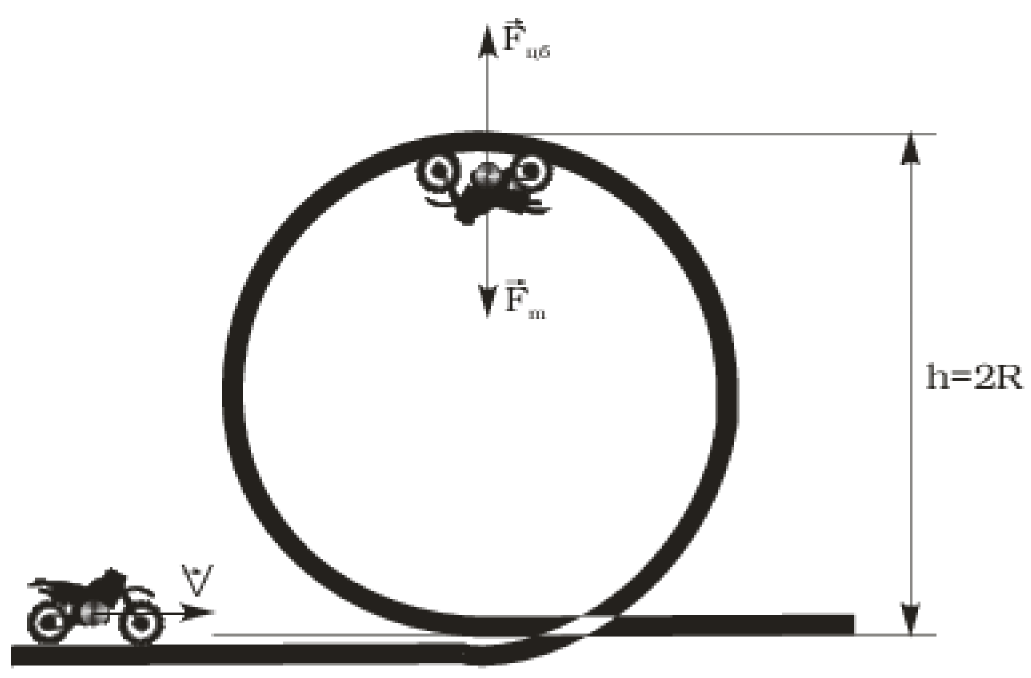
(учли, что $h_1 = l(1 - \cos\alpha)$).

Из выражений (1) и (2) при условии, что $\upsilon_2 = 0$, получим:

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}, \qquad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$



откуда искомая высота:

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l\sin^2\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}$$

(учли формулу (3)).

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2}\upsilon^2, \qquad (4)$$

или, подставив (2) в (4), находим:

$$\Delta T = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя, получаем: 1) h = 5,6 см; 2) ΔT = 4,12 Дж.

Задача 4. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость υ он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли» радиусом R = 4 м. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

R = 4 м | Запишем уравнение движения мотоциклиста в верхней точке

υ = ? | «мертвой петли»:

$$mg + N = ma.$$

Так как при минимальной скорости

N=0, то $a = \upsilon^2/R$, и следовательно

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R}=mg, \quad \text{и} \quad \upsilon_1=\sqrt{gR} \quad (1),$$

где υ_1 – скорость мотоцикла в верхней точке «мертвой петли».

По закону сохранения энергии, полная энергия мотоциклиста на горизонтальной дороге, равная его кинетической энергии $\frac{m\upsilon^2}{2}$, будет равна полной энергии в верхней точке «мертвой петли», то есть сумме потенциальной энергии mgh и кинетической $\frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Таким образом имеем $\frac{m\upsilon^2}{2}=mgh+\frac{m\upsilon_1^2}{2}.$ Из последнего равенства получим $\upsilon^2=2gh+\upsilon_1^2.$ Так как $h = 2R$, то $\upsilon_1^2=\upsilon^2-4gR.$ Подставляем полученное выражение в (1) найдем, что

$$\upsilon^2=4gR+gR=5gR, \quad \text{и} \quad \upsilon=\sqrt{5gR}=0,141 \text{ м/с} = 14,1 \text{ см/с}.$$

Задача 5. Груз массой m = 80 кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением a = 1 м/с^2. Длина наклонной плоскости l = 3м, угол α ее наклона к горизонту равен 30°, а коэффициент трения f = 0,15. Определить: 1) работу, совершаемую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

Решение.

Уравнение движения груза в векторной форме: $ma=F+F_1+F_2+F_{тр}+N$.

В проекциях на оси x и y (рис. 16) это уравнение примет вид $ma=F-F_1-F_{тр},\ 0=N-F_2$,

где $F_1=mg\sin\alpha,\ F_2=mg\cos\alpha,\ F_{тр}=fN=fmg\cos\alpha.$

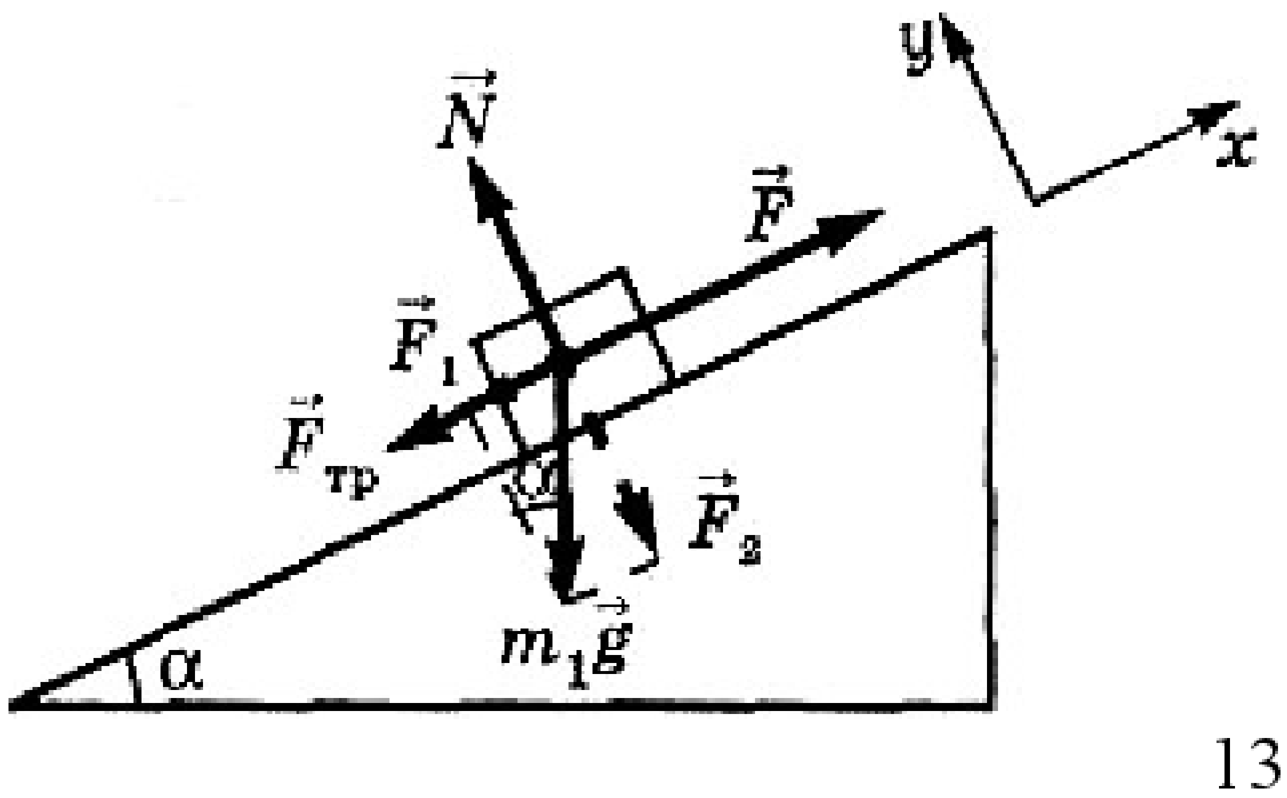
Поэтому

$$F=m(a+g\sin\alpha+fg\cos\alpha).$$

Работа, совершаемая подъемным устройством,

$$A=Fl=ml(a+g\sin\alpha+fg\cos\alpha).$$

Средняя мощность, развиваемая подъемным устройством,



где $t = \sqrt{2l/a}$ - время подъема груза. Следовательно, $\langle P \rangle = A\sqrt{\frac{a}{2l}}$.

Максимальная мощность, развиваемая подъемным устройством: $P_{max} = Fv_{max} = Fat$. Подставляя значения, получаем $P_{max} = m\sqrt{2al}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha)$.

Вычисляя, находим: 1) A = 1,72 кДж; 2) $\langle P \rangle$ = 702 Вт; 3) P_{max} = 1,41 кВт.

Задача 6. Шарик массой m = 300 г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс p_1, полученный стеной, если в этот момент перед ударом шарик имел скорость 10м/с, направленную под углом $\alpha = 30$ к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

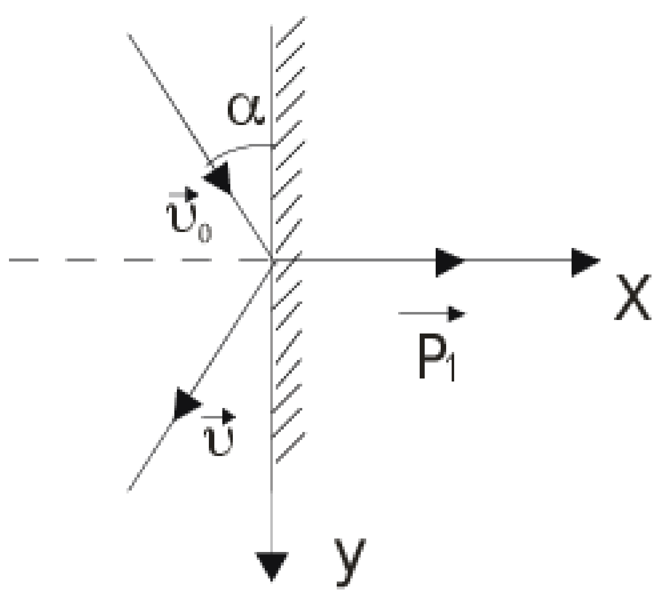
Решение:

По условию задачи удар абсолютно упругий, следовательно, скорость шарика по абсолютному значению до и после удара одинаковы, т.е. $v = v_0$.

Применим закон сохранения импульса(в проекциях на оси координат):

y: $p_{1y} = 0 = m(v_{0y} - v_y) = m(v_{0y} - v_{0y}) = 0$

x: $p_{1x} = p_1 = m(v_{0x} - (-v_{0x})) = 2mv_{0x}$,



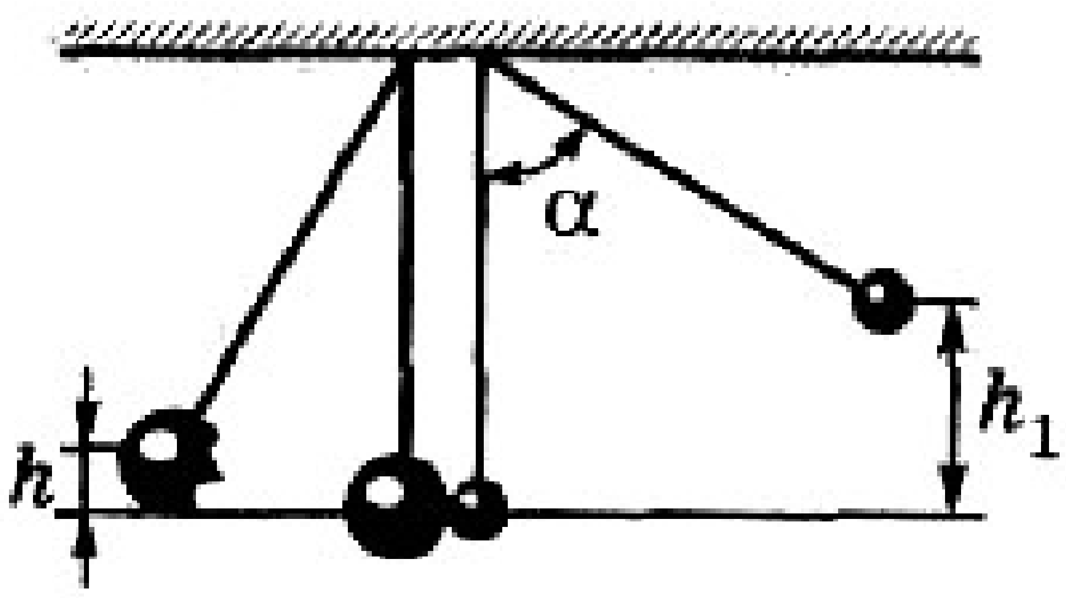
где $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$

$p_1 = 2mv_0 \sin\alpha$

тогда

$$P_1 = 2 \cdot 0{,}3кг \cdot 10м/с \cdot \sin 30^0 = 15\frac{кг \cdot м}{с}.$$

Задача 7. Два свинцовых шара массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг подвешены на нитях длиной l = 70см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол α = 60° и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить высоту h, на которую поднимутся шары после удара и энергию ΔT израсходованную на деформацию шаров при ударе.



Решение.

Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью υ, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon, \qquad (1)$$

где υ_1 и υ_2 — скорости шаров до удара. Скорость υ_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2},$$

откуда:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

(учли, что $h_1 = l(1 - \cos\alpha)$).

Из выражений (1) и (2) при условии, что $\upsilon_2 = 0$, получим:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}, \qquad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

откуда искомая высота:

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l\sin^2\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}$$

(учли формулу (3)).

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2}\upsilon^2, \qquad (4)$$

или, подставив (2) в (4), находим:

$$\Delta T = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя, получаем: 1) h = 5,6 см; 2) ΔT = 4,12 Дж.

Задача 8. Шар массой m = 5 кг и радиусом R = 5 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где A = 2 рад, B

$= 16$ рад/с^2, $C = -2$ рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар и определить момент сил M в момент времени $t = 2$с.

Дано:

$m = 5$ кг

$R = 5\cdot10^{-2}$ м

$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$

$A = 2$ рад

$B = 16$ рад/с^2

$C = -2$ рад/с^3.

$t = 2$ с

$M(t) = ?$ $M(2) = ?$

Так как момент инерции шара постоянный, основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

$$M = I\cdot\varepsilon, \quad (1)$$

где I – момент инерции, ε – угловое ускорение тела, M – момент сил, действующих на него. Для шара момент инерции

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \quad (2)$$

По определению угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота вращающегося тел по времени

$$\varepsilon = \ddot{\varphi}(t) = \left(A + Bt^2 + Ct^3\right)'' = \left(2Bt + 3Ct^2\right)' = 2B + 6Ct. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и используя численные значения A, B и C найдем закон изменения момента сил, действующих на шар.

$$M(t) = \frac{2}{5}mR^2\cdot(2B + 6Ct) = (0{,}16 - 0{,}06t)\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Для момента времени t=2 с, $M(2) = 0{,}0 4$ Н $\cdot$ м.

Задача 9. Диск радиусом $R = 0{,}5$ м и массой $m = 50$ кг раскручен до частоты вращения $n_1 = 10$ с$^{-1}$ и предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через 60с. Найти момент сил трения.

Дано:

$R = 0{,}5$ м

$m = 50$ кг

$n_1 = 10$ с$^{-1}$

$t = 60$ с

$M = ?$

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$dL_x/dt = M_x \quad (1)$$

где dL_x – изменение проекции на ось X момента импульса диска, вращающегося относительно оси X, совпадающей с геометрической осью диска, за интервал времени dt. M_x – проекция на ось X момента внешних сил (в данном случае сил трения), действующих на диск.

Считаем, что момент сил трения со временем не изменяется, тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$\Delta L_x = M_x \Delta t \tag{2}$$

Изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_x = I_x \cdot \Delta\omega, \tag{3}$$

где $I = mR^2/2$ момент инерции диска относительно оси X.

Из (2) и (3), имеем:

$$M_x \Delta t = mR^2/2 \cdot \Delta\omega. \tag{4}$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$.

Тогда из (4) получим

$$M_x = \frac{\pi m R^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}.$$

Так как $\Delta t = t$, а $n_2 = 0$ (диск остановился) то, подставив данные, получим, что

$$M = M_x = 65{,}4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Проверим размерность полученного результата:

$$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{с}^{-1}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\,\text{м} = \text{Н} \times \text{м}.$$

Задача 10. Человек массой 60 кг стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения n_1= 0,2 1/с. В вытянутых в сторону руках человек держит по гантели массой 6 кг каждая. Расстояние между гантелями 1,6 м. Определить: частоту вращения n_2 скамьи с человеком, после того, как он опустит руки, и расстояние между гантелями станет равным 0,4 м. При расчете моментов инерции человека принять за цилиндр радиусом 10 см, а скамью считать диском радиусом 0,4 м и массой 10 кг. Найти изменение энергии вращающейся системы. Трением пренебречь.

Дано:

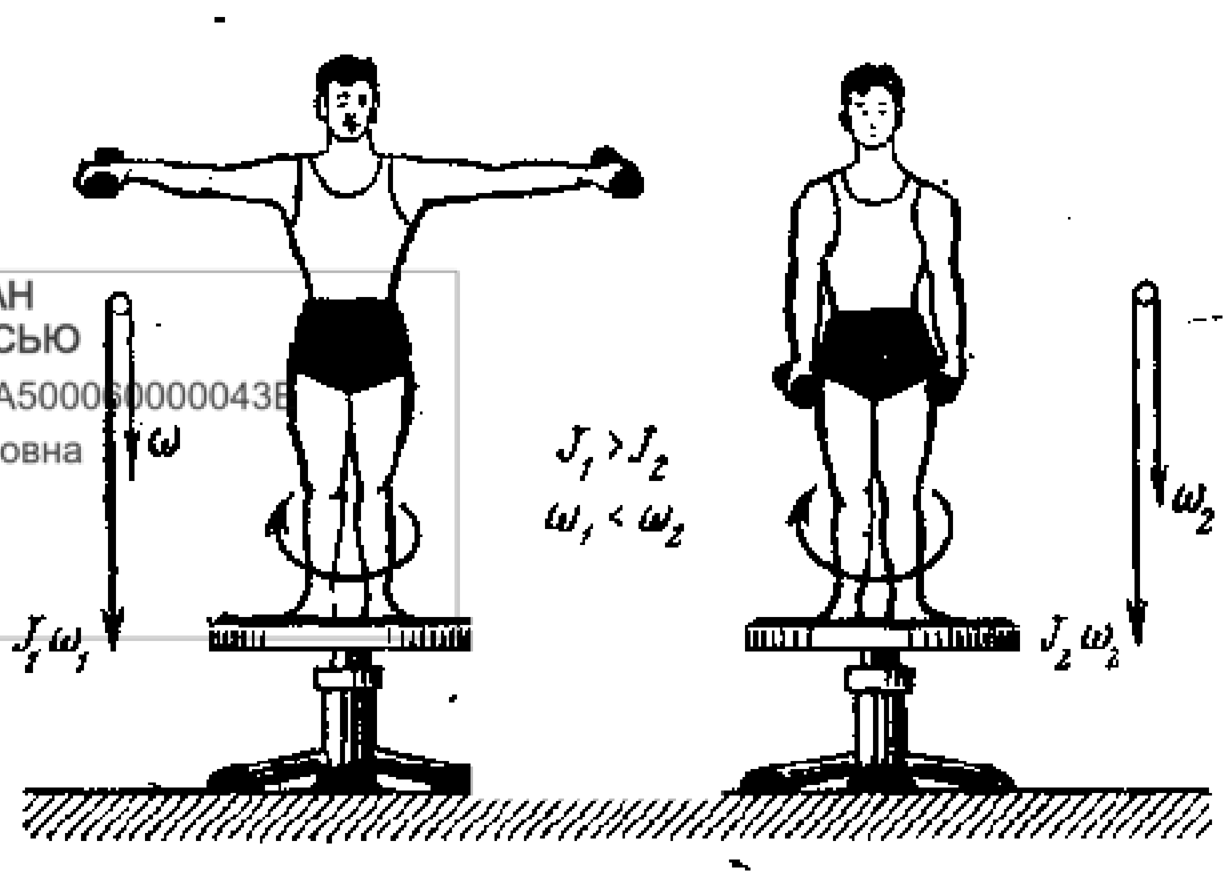
m_1= 60 кг

r_1= 0,1 м

m_2= 10 кг

r_2= 0,4 м

n_1= 0,2 с$^{-1}$



l_1= 0,4 м

l_2= 1,6 м

m_3= 6 кг

n_2 - ?

ΔW - ?

Человек вместе со скамьей составляет замкнутую систему, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Для такой системы справедлив закон сохранения момента импульса:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \tag{1}$$

где моменты импульса $I_1\omega_1$ и $I_2\omega_2$ в начальный и в любой другой момент времени.

Здесь I – момент инерции, ω – угловая скорость. I_1 состоит из моментов инерции скамьи $I_{ск}= m_2r_2^2/2$, человека – $I_ч=m_1r_1^2/2$ (скамья и человек считаются сплошными цилиндрами) и двух гантелей $I_г=2m_3(l_2/2)^2$.

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right)$$

Поэтому

Угловая скорость $\omega_1 = 2\pi n_1$. Аналогично, для второго положения гантелей имеем

$$I_2 = \left(\frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right); \quad \text{и} \quad \omega_2 = 2\pi n_2$$

Подставив эти выражения в(1) получим:

$$\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right)\cdot 2\pi n_1 = \left(\frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right)\cdot 2\pi n_2.$$

$$n_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}16 + \frac{1}{2}\cdot 60\cdot 0{,}01 + 12\cdot 0{,}64\right)\cdot 0{,}2}{\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}16 + \frac{1}{2}\cdot 60\cdot 0{,}01 + 12\cdot 0{,}04\right)} = \frac{1{,}756}{1{,}58} = 1{,}1\,\frac{\text{об}}{\text{с}}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела вычисляется по формуле $W=I\omega^2/2$.

$$W_1 = \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{8{,}78\cdot 1{,}58}{2} = 6{,}9\text{ Дж}; \quad W_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2} = \frac{1{,}58\cdot 48{,}7}{2} = 38{,}5\text{ Дж};$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 31{,}6\text{ Дж}.$$

Задача 11. Однородный тонкий стержень массой m_1 = 0,2 кг и длиной l = 1м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси Z, проходящей через точку O (см рис.) В точку A на стержне попадает пластилиновый шарик, массой m_2 = 10 г, летящий горизонтально со скоростью υ = 10 м/с и прилипает к стержню. Определить угловую скорость стержня ω в начальный момент времени, если $a=AO=l/3$.

Дано:

$m_1 = 0{,}2$ кг

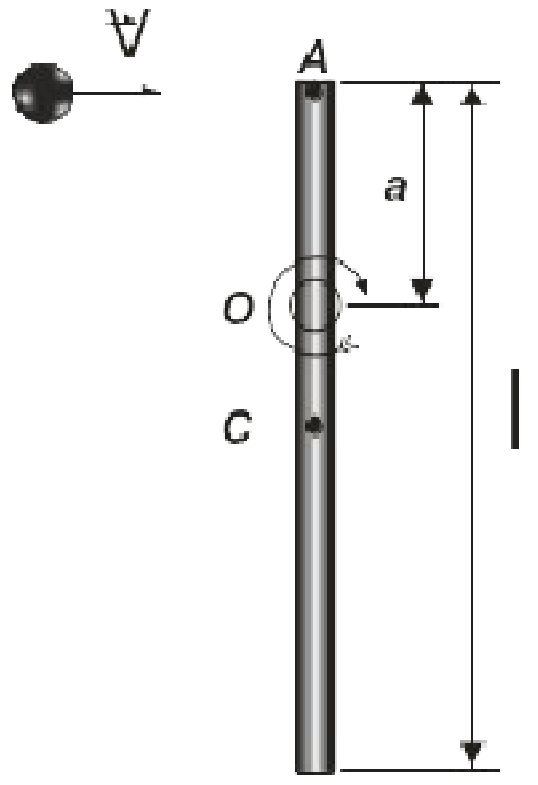
$l = 1$ м

$m_2 = 10$ г $= 0{,}01$ кг

$\upsilon = 10$ м/с

$a = l/3$

$\omega = ?$



Считая систему тел из шарика и стержня замкнутой, применим закон сохранения момента импульса: $L_0 = L$ (1)

В начальный момент удара угловая скорость стержня ω_0=0, поэтому его момент импульса L_{01} = 0. При этом летящий шарик попадает в точку A, следовательно относительно точки O (оси вращения) обладает моментом импульса $L_{02} = m_2\upsilon a$, где a – расстояние от точки попадания до точки O. Таким образом $L_0 = 0 + m_2\upsilon a$.

Прилипший к стержню шарик будем считать материальной точкой, вращающейся с угловой скоростью стержня ω и, его момент импульса равен $L_2 = m_2a^2\omega$. $I\omega$ – момент импульса стержня, где I – его момент инерции относительно оси вращения. Тогда момента импульса системы стержень—шарик будет равен $L_2 = I\omega + m_2a^2\omega$. Подставляя приведенные выше выражения в (1), получим

$$m_2\upsilon a = I\omega + m_2a^2\omega.$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{m_2\upsilon a}{I + m_2a^2}. \qquad (2)$$

Чтобы найти I относительно точки O, воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_0 + m_1(OC)^2,$$

где $I_0 = m_1l^2/12$ – момент инерции стержня относительно точки C (центра масс). Расстояние $OC = l/2 - l/3 = l/6$, тогда

$$I = \frac{m_1l^2}{12} + m_1\frac{l^2}{36} = \frac{m_1l^2}{9}.$$

С учетом (2) получим

$$\omega = \frac{m_2\upsilon\frac{l}{3}}{\frac{m_1l^2}{9} + \frac{m_2l^2}{9}} = \frac{3m_2\upsilon}{(m_1 + m_2)l} = \frac{3\cdot 0{,}01\cdot 10}{(0{,}01 + 0{,}2)\cdot 1} = 1{,}43\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Вопросы и задания.

1. Работа. Работа переменной силы.
2. Мощность.
3. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия.
4. Связь между силой и потенциальной энергией.
5. Энергия упруго деформированного тела.
6. Кинетическая энергия и её связь с работой приложенных сил.
7. Полная механическая энергия системы тел.
8. Закон сохранения механической энергии.
9. Диссипация энергии.
10. Понятие абсолютно твердого тела.
11. Поступательное и вращательное движения тела.
12. Число степеней свободы.
13. Центр инерции (масс) твердого тела.
14. Момент силы. Момент инерции.
15. Основной закон динамики вращательного движения.
16. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.
17. Работа по вращению тела.
18. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Задачи для самостоятельного решения

1. Снаряд массой m = 10 кг обладал скоростью υ =200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой m_1=3 кг получила скорость u_1 = 400м/с в прежнем направлении. Найти скорость u_2 второй, большей части после разрыва.

2. Грузик, привязанный к шнуру длиной l=50см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол φ образует шнур с вертикалью, если частота вращения n = 1с$^{-1}$.

3. Грузик, привязанный к нити длиной l = 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период T обращения, если нить отклонена на угол φ = 60° от вертикали.

4. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус R кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения μ колес о покрытие дороги равен 0,1 (гололед). При какой скорости v автомобиля начнется его занос?

5. Какую наибольшую скорость υ_{max} может развить велосипедист, проезжая закругление радиусом R=50м, если коэффициент трения скольжения μ между шинами и асфальтом равен 0,3? Каков угол φ отклонения велосипеда от вертикали, когда велосипедист движется по закруглению?

6. Камень скользит с наивысшей точки полусферы, радиуса R. Какой длины дугу опишет камень, прежде чем оторвется от ее поверхности? Трением пренебречь.

7. Ракета массой m=1m, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, поднимается с ускорением a=2g. Скорость υ струи газов, вырывающихся из сопла, равна 1200 м/с. Найти расход Q_m горючего.

8. Шарик массой m = 300 г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс p_1, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость υ_0 = 10

м/с, направленную под углом α=30° к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

9. Тело массой m=5 кг брошено под углом α=30° к горизонту с начальной скоростью υ_0 = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы F, действующей на тело, за время его полета; 2) изменение Δp импульса тела за время полета.

10. Материальная точка массой m = 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса r = 1,2 м в течение времени t = 10 с. Найти изменение Δp импульса точки.

11. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии T_1. Определить отношение k=M/m масс шаров.

12. Шар массой m = 1,8 кг сталкивается с покоящемся шаром большей массы М. В результате прямого упругого удара шар потерял 36% своей кинетической энергии T_1. Определить массу большего шара.

13. Шар, массой m_1 = 200 г, движущийся со скоростью υ_1 = 10 м/с, ударяет неподвижный шар массой m_2 = 200 г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости u_1 и u_2 шаров после удара?

14. Молотком, масса которого m_1 = 1 кг, забивают в стену гвоздь массой m_2 = 75 г. Определить КПД η удара молотка при данных условиях.

15. Боек свайного молота массой m_1 = 500 кг падает с некоторой высоты на сваю массой m_2 = 100 г. Найти КПД η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.

16. Молот массой m_1 = 5 кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить КПД η удара молота при данных условиях.

17. Молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в n = 3 раза больше другого. Пренебрегая начальной кинетической энергией и импульсом молекулы, определить кинетические энергии T_1 и T_2 атомов, если их суммарная кинетическая энергия T = 0,032 нДж.

18. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой m_1 = 5 кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью υ_2 = 1 м/с. Масса конькобежца m_1 = 60 кг. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири.

19. Ядро атома распадается на два осколка массами $m_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-25}$ кг и $m_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-25}$ кг. Определить кинетическую энергию T_2 второго осколка, если энергия T_1, первого осколка равна 18 нДж.

20. При выстреле из орудия снаряд массой m_1 = 10 кг получает кинетическую энергию T_1 = 1,8 кДж. Определить кинетическую энергию T_2 ствола орудия вследствие отдачи, если масса m_2 ствола орудия равна 600 кг.

21. Через неподвижный блок массой m = 0,2 кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами m_1=0,3 кг и m_2=0,5 кг. Определить силы T_1 и T_2 натяжения

шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

22. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой m_1= 100 г и m_2 = 110. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса m блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

23. Вал массой m =100 кг и радиусом R = 5 см вращался с частотой n = 8 $с^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F= 40 Н, под действием которой вал остановился через t = 10 с. Определить коэффициент трения μ.

24. На горизонтальную ось насажаны маховик и легкий шкив радиусом R= 5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 0,4 кг. Опускаясь равномерно, груз прошел путь s = 1,8 м за время t = 3 с. Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

25. Тонкий однородный стержень длиной l = 50 см и массой m = 400 г вращается с угловым ускорением ε = 3 рад/$с^2$ около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

26. Шар массой m=10 кг и радиусом R= 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi=A+Bt^2+Ct^3$, где B=4 рад/$с^2$; C=-1 рад/$с^2$. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M_1 в момент времени t_1 = 2 с.

27. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m=0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью υ =20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии r = 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·$м^2$?

Практическое занятие 4.

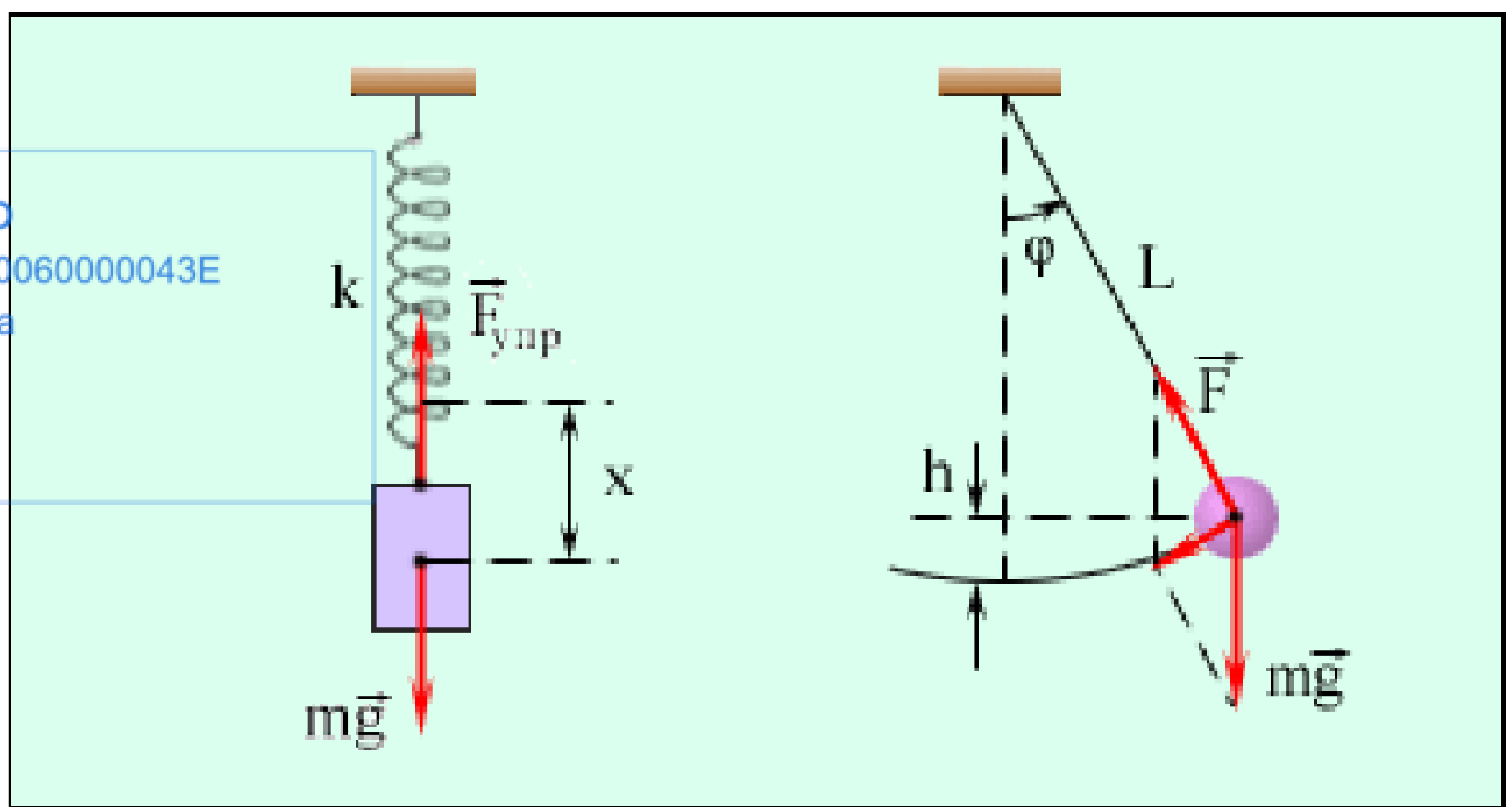
Тема занятия. **Механические колебания и волны**

Цель занятия. Изучить основные закономерности колебательных процессов в механике.

Теоретическая часть.

<u>Механическими колебаниями</u> называют движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени. Примерами простых колебательных систем могут служить груз на пружине или математический маятник.

Колебания широко распространены в природе и технике. Колебательные процессы лежат в основе таких отраслей техники как электротехника, радиотехника и.т.д).



В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему, различают: свободные, (собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

1. Свободные колебания, совершаются под действием **внутренних сил** системы, после того, как система была выведена из состояния равновесия. (Колебания груза на пружине или колебания маятника являются свободными колебаниями.).
2. Вынужденные - система подвергается воздействию внешней, периодически изменяющийся силы (колебание моста при прохождении солдат, идущих в ногу).
3. Автоколебания - система сама управляет внешним воздействием (маятник часов получает толчки в момент прохождения её через среднее положение).
4. Параметрические колебания - происходит периодическое изменение какого- либо параметра системы за счет внешнего воздействия (например длины нити математического маятника).

Основные характеристики гармонического колебания:

1. *x*- смещение- отклонение от положения равновесия в данный момент времени (может быть >0 и <0)/

2. *A* – амплитуда - максимальное отклонение от положения равновесия.

3. *T*- период - совершения одного полного колебания.

4. *wt*- фаза колебания - характеризует состояние колебательной системы в любой заданный момент времени.

5. *v*- частота - число колебаний в единицу времени.

Если к началу наблюдения фаза имела некоторое начальное значение ϕ_0, то уравнение запишется:

$$x = A \cdot \sin(\phi_0 + wt)$$ - гармоническое колебание с начальной фазой.

Скорость и ускорение гармонического колебания

Скорость - гармонических колебаний есть первая производная смещения по времени.

Известно, что скорость $v=\frac{dS}{dt}$ для гармонического колебания скорость определяется следующим образом $v=\frac{dx}{dt}=\frac{d(A\cdot\sin wt)}{dt}=A\cdot w\cdot\cos wt$;

$v=A\cdot w\cdot\cos wt$ -скорость гармонического колебания.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d(A\cdot w\cdot\cos wt)}{dt}=-A\cdot w^2\cdot\sin wt$$

$a=-A\cdot w^2\cdot\sin wt$ - ускорение при гармоническом колебании.

Колебательное движение выполняется под действием силы, которая может быть определена по второму закону Ньютона: $F=m\cdot a$, но ускорение при гармонических колебаниях определяется по формуле $a=-A\cdot w^2\cdot\sin wt$, подставим значение ускорения во второй закон Ньютона, то $F=-m\cdot A\cdot w^2\cdot\sin wt$, но $A\cdot\sin wt=x$, то

$F=-m\cdot x\cdot w^2$ - сила действующая на колеблющееся тело.

Она пропорциональна смещению, знак «-» указывает на, то что сила направлена в противоположную сторону относительно смещения. $k=m\cdot v^2$

$F=-k\cdot x$ - квазиупругая сила, вызывающая колебательные движения.

Энергия гармонического колебательного движения

Квазиупругая сила является консервативной и поэтому полная механическая энергия системы остаётся постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего максимального значения.

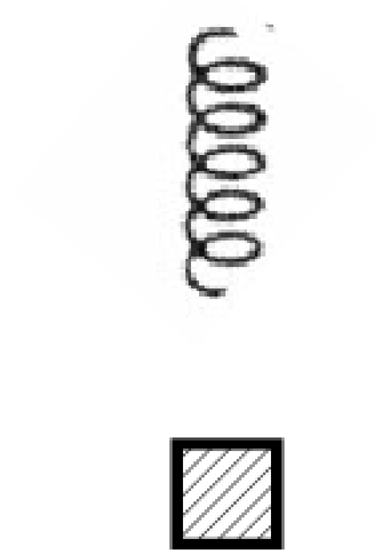
$E=E_{n.\max}=\frac{k\cdot A^2}{2}$, A- амплитуда

При прохождении системы через положение равновесия полная энергия состоит только из кинетической энергии, которая достигает своего максимума.

$$E = E_{кин.\max} = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2} = \frac{m \cdot A^2 \cdot w^2}{2}$$

Пружинный, математический и физический маятники

Пружинный маятник- это груз массой *m* подвешенный на упругой пружине и совершающий гармонические колебания.



m

Колебания маятника совершаются под действием угловой силы. $F = -k \cdot x$, *k*- коэффициент упругости, а в случае с пружиной он называется коэффициентом жёсткости.

Уравнение движения маятника записывается:

$$m \cdot a = -k \cdot x \qquad (3)$$

Ускорение- это вторая производная смещения по времени:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x \text{ , т.к } a = x''$$

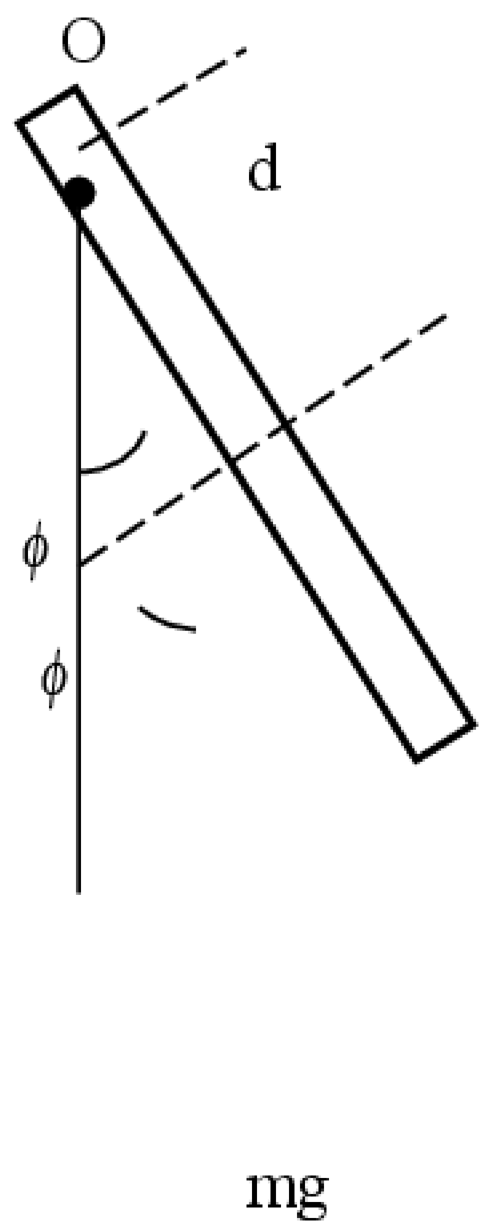
Разделим обе части уравнения на m, то получим

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \qquad (4)$$

Сравним между собой уравнения (2) и (4), очевидно, что $w^2 = \frac{k}{m}$, а $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $w = \frac{2\pi}{T}$; $T = \frac{2\pi}{w}$ - период колебания, подставим в формулу периода колебания значение *w*, через k и m, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ - период колебания пружинного маятника.

<u>Физический маятник</u> - твёрдое тело способное совершать колебания относительно оси, не совпадающей с центром масс.



Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$J\cdot\varepsilon=M$$, где

$$M=-m\cdot g\cdot d\cdot\sin\phi$$

Для малых колебаний можно поучить $J\cdot\varepsilon-M=0$

$$J\cdot\phi''+m\cdot g\cdot d\cdot\phi=0 \qquad (3)$$

Разделим уравнение (3) на J

Введём обозначение $w_0^2=\frac{m\cdot g\cdot d}{J}$, получим уравнение

$\phi''+w^2\phi=0$, которое аналогично полученному ранее.

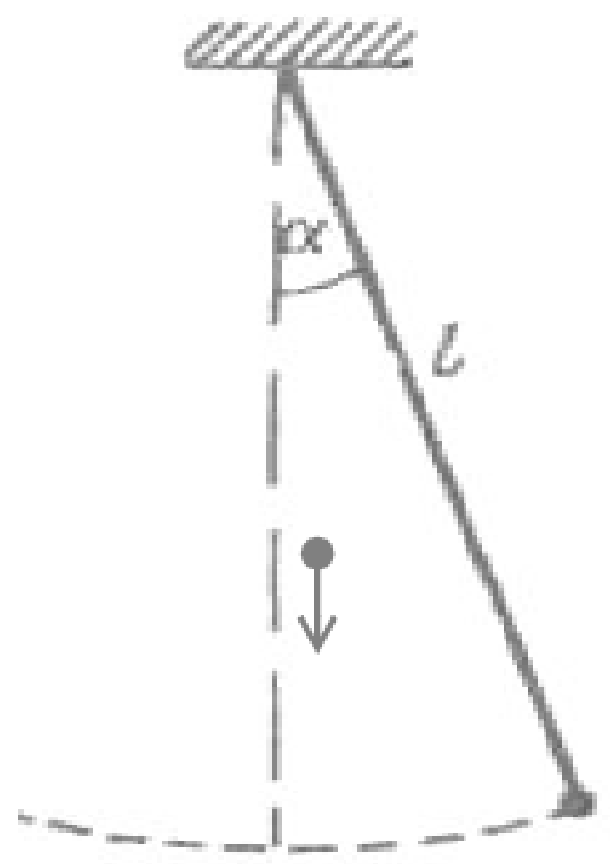
Период колебания физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{J}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot d}}$$

<u>Математический маятник</u> - материальная точка подвешенная на невесомой нерастяжимой нити.

Реальный маятник, у которого масса тела во много раз больше массы нити, а размеры тела во много раз меньше длинны нити, можно считать математическим.



mg

Учитывая, что момент силы тяжести $M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\alpha$ и момент инерции точки $J = m \cdot l^2$, из динамического уравнения вращательного движения получим: $J \cdot \varepsilon = M$.

$$m \cdot l^2 \cdot \alpha'' + m \cdot g \cdot l \cdot \alpha = 0 \qquad (4)$$

Разделим уравнение (4) на ml^2, получим

$$\alpha'' + \frac{m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2} \cdot \alpha = 0$$

$$\alpha'' + \frac{g}{l}\cdot\alpha = 0, \Rightarrow \qquad \alpha'' + w_0^2\cdot\alpha = 0 \qquad w_0^2 = \frac{g}{l}$$

Период колебания математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Мы приходим к выводу, что во всех случаях колебания описываются одним и тем же уравнением $x'' + w_0^2\cdot x = 0$, совпадающим с уравнением движения гармонического осциллятора.

Вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания

Вынужденными колебаниями называется незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на неё внешних сил, периодически изменяющихся с течением времени.

Сила, вызывающая вынужденные колебания, называется возмущающий (вынуждающий) силой.

Вынуждающая сила изменяется по закону:

$$F(t) = F_0\cdot\cos w\cdot t$$

F_0- амплитуда вынуждающей силы, w- циклическая частота.

Под действием этой силы в системе устанавливаются гармонические колебания с циклической частотой w.

$$\Delta x = A\cdot\cos\left(w\cdot t + \phi_1\right)$$

Где A- амплитуда вынужденных колебаний смещения. ϕ_1 - разность фаз между вынужденными колебаниями Δx и силой $F(t)$.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы и её частоты, зависимость амплитуды колебаний от частоты приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда вынужденного колебания достигает максимального значения. Это явление получило название *резонанса*, а соответствующая частота-*резонансной частоты*.

$\beta \neq 0$, то A достигнет максимального значения при частоте $w_{рез} \neq w_0$

$$w = w_{рез} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2} = w_0\sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{w_0^2}}$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $w_{рез}$ – называется *__резонансом__* , $w_{рез}$ – резонансная циклическая частота.

При наличии трения резонансная циклическая частота $w_{рез}$ несколько $\angle\, w_{зат} = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$ и меньше w_0.

Форма резонансных кривых зависит от значения β. Чем больше β, тем более пологими становятся кривые.

Примеры резонанса: явление резонанса используется в акустике - для анализа звуков, их усиления и.т.д.

Под действием периодически изменяющихся нагрузок в машинах и различных сооружениях могут возникнуть явления резонанса, которые могут быть опасны для эксплуатации машин.

__Автоколебания__- Колебательная система, совершающая незатухающие колебания за счёт источника энергии, не обладающего колебательными свойствами- называется *__автоколебательной системой__*.

Примеры решения задач

Задача 1. Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания с частотой ν= 0,2 Гц. Амплитуда колебаний A равна 5 см. Определить: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

__Решение__

Уравнение гармонического колебания

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Скорость и ускорение колеблющейся точки

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$
$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку,

$$F = ma = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$F = F_{max}$ при $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$, поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{max} = A\omega_0^2 m = 4\pi^2 \nu^2 A m$$

(учли, что $\omega_0 = 2\pi\nu$).

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2}.$$

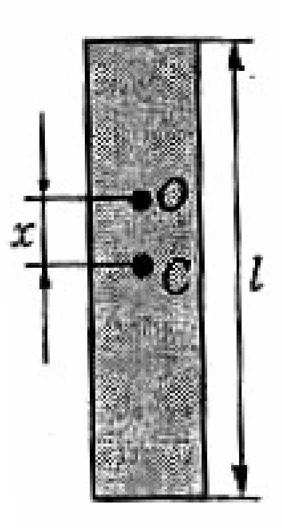
Подставив сюда ω_0, найдем искомую полную энергию:

$$E = 2\pi^2 m \nu^2 A^2.$$

Вычисляя, получаем: 1) $F_{\max}$ = 0,8 мН; 2) E = 19,7 мкДж.

Задача 2. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса O находится от центра масс C на расстоянии 20,2 см.

<u>*Решение*</u>



Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{J}}, \qquad (1)$$

где m — масса маятника; J — момент его инерции.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии x,

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \qquad (3)$$

Найдем экстремум функции (3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{6g(l^2 - 12x^2)}{x^{1/2}(l^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$l^2 - 12x^2 = 0,$$

т. е. искомая длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}x.$$

Вычисляя, получаем l = 70 см.

Задача 3. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos \pi t$ и $y = \cos \frac{\pi}{2} t$. Определить уравнение траектории точки.

Решение

По условию задачи,

$$x = \cos \pi t; \quad (1)$$

$$y = \cos \frac{\pi}{2} t. \quad (2)$$

Для определения уравнения траектории точки из уравнений (1) и (2) исключим время, тогда

$$\cos \pi t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - (1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} t) = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 1 = 2y^2 - 1,$$

откуда искомое уравнение траектории точки

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

представляет собой параболу.

Задача 4. Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Решение

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \quad (1)$$

где A_0 — амплитуда колебаний в момент $t = 0$; δ — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания $\Theta = \delta T$ ($T = 1/\nu$ — условный период затухающих колебаний). Тогда $\delta = \Theta \nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\Theta \nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\Theta \nu} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Число искомых полных колебаний

$$N = \frac{t}{T} = t\nu.$$

Вычисляя, получаем: 1) t = 6 с; 2) N = 300.

Задача 5. Груз массой m = 50 г, подвешенный на нити длиной l = 20 см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления r = 0,02 кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н. Определить: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

Решение

Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \qquad (1)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний системы; $\delta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания.

Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Подставив значения ω_0 и δ в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Подставив формулу (1) в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 - 4\delta^2\omega^2}},$$

где F_0 — амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи, F_0 = 0,1 Н), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}}.$$

Вычисляя, получаем: 1) $\omega_{\text{рез}}$ = 7 рад/с; 2) $A_{\text{рез}}$ = 71,4 см.

Вопросы и задания.

1. Гармонические колебания.
2. Основные характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, частота, период.

3. Динамика гармонических колебаний.
4. Пружинный, математический и физический маятники. Квазиупругие силы.
5. Кинетическая, потенциальная и полная энергия гармонического колебания.
6. Гармонический осциллятор.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 5 см, если за время t = 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Начертить график этого движения.

2. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 50 мм, периодом T = 4 с и начальной фазой $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при t = 0 и t = 1,5 с. Начертить график этого движения.

3. Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний T = 24 с, начальная фаза $\varphi = 0$.

4. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\dfrac{\pi}{2}t$ проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

5. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. При смещении точки от положения равновесия x_1 = 2,4 см скорость точки υ_1 = 3 см/с, а при смещении x_2 = 2,8 см ее скорость υ_2 = 2 см/с. Найти амплитуду A и период T этого колебания.

6. Уравнение колебаний материальной точки массой m = 10 г имеет вид $x = 5\sin\left(\dfrac{\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ см. Найти максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки.

7. Уравнение колебания материальной точки массой m = 16 г имеет вид $x = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ см. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергии точки.

8. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, W =30 мкДж; максимальная сила, действующая на тело, $F_{\max}$ = 1,5 мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний T = 2 с и начальная фаза $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

9. К пружине подвешен груз массой m = 10 кг. Зная, что пружина под влиянием силы F = 9,8 Н растягивается на l = 1,5 см, найти период T вертикальных колебаний груза.

10. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin \omega t$ м и $y = 2\cos \omega t$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

Раздел 2. Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамика

Практическое занятие 5.

Тема занятия. **Основы молекулярно-кинетической теории.**

Цель занятия. Изучить основные понятия и законы молекулярно-кинетической теории.

Теоретическая часть.

Представление о том, что все тела построены из мельчайших частиц – атомов, возникло еще в древности и было высказано греческим философом Демокритом (V в. до н. э.). Однако, в дальнейшем эти представления были забыты и лишь во второй половине XVII в. были разработаны в качестве научной теории, получившей название ***классической молекулярно-кинетической теории***.

Она основана на следующих положениях.

1. Все вещества состоят из очень маленьких частиц – *молекул*.

Каждое вещество состоит из одинаковых молекул. Сколько веществ в природе, столько и видов молекул.

Молекулы состоят из еще более мелких частиц – *атомов*.

Число атомов равно числу химических элементов и их изотопов (109 хим. элементов и более 1500 изотопов известно в наше время).

Молекулы – различные комбинации из атомов (молекулярно-кинетическая теория не рассматривает строение атома).

2. Между молекулами тела одновременно действуют силы взаимного притяжения (сцепления) и силы взаимного отталкивания, причем силы отталкивания с увеличением расстояния убывают быстрее, чем силы сцепления. Поэтому на определенном расстоянии друг от друга молекулы могут находиться в устойчивом равновесии. Согласно современным исследованиям, положение устойчивого равновесия соответствует ***минимуму их потенциальной энергии.***

3. Молекулы, образующие тело, находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения.

Скорость движения молекул возрастает с увеличением температуры, поэтому движение называется *тепловым движением*.

По мере увеличения интенсивности теплового движения, среднее расстояние между молекулами возрастает, следовательно, тело переходит из твердого состояния в жидкое. При дальнейшем нагреве расстояние между молекулами увеличивается настолько, что силы сцепления исчезают, следовательно, тело переходит в газообразное состояние.

Идеальный газ. Его параметры

<u>Идеальным газом</u> называется газ, между частицами которого отсутствуют силы взаимного притяжения. При соударениях между собой, частицы газа ведут себя как упругие шарики крайне малого размера.

Существующие в действительности газы при не слишком низких температурах и достаточно малых давлениях называются разряженными газами и по своим свойствам близки к идеальному газу.

Количество вещества (число молей)

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

где N – число молекул, N_A – постоянная Авогадро, m – масса вещества, M – молярная масса.

Уравнение Клапейрона-Менделеева $$pV = \nu RT,$$

где p – давление газа, V – его объем, R – универсальная газовая постоянная, T – термодинамическая температура.

Уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{1}{3} m n_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где n – концентрация молекул, $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы, m_0 – масса молекулы $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость.

Средняя энергия молекулы $$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – число степеней свободы молекулы, k – постоянная Больцмана.

Внутренняя энергия идеального газа $$U = \frac{i}{2} \nu RT.$$

Система из N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет 3N степеней свободы.

Молекулы газов, состоящие из одного атома (Ar, Xe, He) обладают тремя степенями свободы i=3; молекулы газов, состоящие из двух атомов (O2, H2, N2) обладают пятью степенями свободы i=5; молекулы газов, состоящие из трех и более атомов (CO2, CH4) обладают шестью степенями свободы i=6.

Скорость молекул:

средняя квадратичная $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT/m_0} = \sqrt{3RT/M}$;

средняя арифметическая $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}$.

наиболее вероятная $\upsilon_{\text{В}} = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}$.

Средняя длина свободного пробега молекулы $\langle \lambda \rangle = \left(\sqrt{2}\pi d^2 n \right)^{-1}$,

где d – эффективный диаметр молекулы.

Среднее число столкновений молекулы в единицу времени $\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle$.

Распределение молекул в потенциальном поле сил $n = n_0 \exp\left(-\dfrac{\Pi}{kT} \right)$,

где Π – потенциальная энергия молекулы.

Барометрическая формула $p = p_0 \exp\left(-\dfrac{m_0 g h}{kT} \right)$.

Уравнение диффузии

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt,$$

где D – коэффициент диффузии, ρ – плотность, dS – элементарная площадка, перпендикулярная оси OX.

Уравнение теплопроводности $dQ = -æ\dfrac{dT}{dx}dSdt$,

где æ – теплопроводность.

Сила внутреннего трения $dF = -\eta\dfrac{d\upsilon}{dx}dS$,

где η – динамическая вязкость.

$$D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle.$$

Коэффициент диффузии

Вязкость (динамическая)

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle = D\rho.$$

Теплопроводность æ $= \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle = \eta c_V$

,

где c_v – удельная изохорная теплоемкость.

Примеры решения задач

Задача 1. В баллоне вместимостью V = 6,9 л находится азот массой m = 2,3 г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации (отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа) α=0,2. Определить: 1) общее число N_1 молекул и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) концентрации n_2 молекул и n_3 атомов азота после нагревания.

Дано:

V = 6, 9 л = 6, 9·10^{-3} м^3

m=2,3 г = 2, 3·10^{-3} кг

α= 0,2

N_1 = ? n_1 = ?

n_2 =? n_3 = ?

По определению, концентрация частиц газа есть отношение числа газа к занимаемому газом объему:

$$n = \frac{N}{V}$$

1. Число молекул N_1 газа до нагревания найдем из соотношения

$$N_1 = \nu \cdot N_A = \frac{m}{M} \cdot N_A,$$

где ν – количество вещества; N_A – постоянная Авогадро; M – молярная масса (у азота M = 28 10^{-3} кг/моль).

Подставляя численные значения, получим

$$N_1 = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 28} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 4{,}94 \cdot 10^{23}$$ молекул, а

$$n_1 = \frac{N_1}{V} = \frac{4{,}94 \cdot 10^{23}}{6{,}9 \cdot 10^{-3}} м^{-3} = 7{,}16 \cdot 10^{25} \frac{1}{м^3}.$$

2. Концентрации молекул после нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{N_1(1-\alpha)}{V}$$

где N_2 – число молекул, не распавшихся на атомы. Подставим числовые значения:

$$n_2 = \frac{4{,}94 \cdot 10^{23}(1-0{,}2)}{6{,}9 \cdot 10^{-3}} м^{-3} = 5{,}73 \cdot 10^{25} м^{-3}.$$

Так как каждая молекула после распада дает два атома, то концентрация атомов после нагревания азота будет равна

$$n_3 = \frac{2N_1 \cdot \alpha}{V}$$

$$n_3 = \frac{2 \cdot 4{,}94 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}2}{6{,}9 \cdot 10^{-3}} м^{-3} = 2{,}86 \cdot 10^{25} м^{-3}.$$

Следовательно,

Задача 2. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определить удельный объем смеси.

Решение.

Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2. \quad (1)$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева имеем:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \quad и \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Найдя отсюда p_1 и p_2 и подставив в (1), получим:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT.$$

Удельный объем смеси:

$$=\frac{\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)\cdot RT}{\left(m_1+m_2\right)\cdot p}$$

Вычисляя, получаем = 8,63 м^3/кг.

Задача 3.

Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты диффузии азота (M_1 = 28 $\cdot 10^{-3}$ кг/моль) и углекислого газа (M_2 = 44 $\cdot 10^{-3}$ кг/моль), если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Решение.

Коэффициент диффузии газа:

$$D=\frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad (1)$$

где $\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ - средняя арифметическая скорость его молекул; $\langle l\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}d^2 n}$ — средняя длина свободного пробега молекул. Поскольку $p=nkT$, из условия задачи ($T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$) следует, что $n_1 = n_2$. Подставив значения $\langle v\rangle$, $\langle l\rangle$ в формулу (1) и учитывая условие задачи, найдем

$$\frac{D_1}{D_2}=\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Вычисляя, получаем $\frac{D_1}{D_2}$ = 1,25.

Вопросы и задания.

1. Термодинамический метод исследования. Температурные шкалы. Идеальный газ.
2. Газовые законы.
3. Уравнение состояния идеального газа.
4. Основное уравнение М.К.Т.
5. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям.
6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.
7. Длина свободного пробега молекул. Опыты, подтверждающие МКТ.

8. Явления переноса.

9. Внутренняя энергия.

10. Закон Больцмана о равномерном распределении молекул.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько молекул газа содержится в баллоне вместимостью $V=30$ *л* при температуре $T=300$ *К* и давлении $p = 5$ *МПа?*

2. В сосуде находится смесь кислорода и водорода. Масса m смеси равна 3,6 г. Массовая доля ω_1 кислорода составляет 0,6. Определить количества вещества ν смеси, а также ν_1 и ν_2 каждого газа в отдельности.

3. В баллоне вместимостью $V = 3$ л находится кислород массой $m = 4$ кг. Определить количество вещества ν газа и концентрацию n его молекул.

4. Определить количество вещества ν и число N молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью V=240 см^3 при температуре T=290 К и давлении p=50 кПа.

5. Определить среднее значение $< \varepsilon >$ полной кинетической энергии одной молекулы следующих газов: гелия, кислорода и водяного пара при температуре $T = 400$ К.

6. Определить число N молекул ртути, содержащихся в воздухе объемом V=1 м^3 в помещении, зараженном ртутью, при температуре t=20˚С, если давление p насыщенного пара ртути при этой температуре равно 0,13 Па.

7. Давление p газа равно 1 мПа, концентрация n его молекул равна 10^{10} см$^{-3}$. Определить: 1) температуру T газа; 2) среднюю кинетическую энергию $< \varepsilon_п >$ поступательного движения молекул газа.

8. В колбе вместимостью V=240 см^3 находится газ при температуре T=290 К и давлении p=50 кПа. Определить количество вещества ν газа и число N его молекул.

9. Определить кинетическую энергию, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре T=1 кК, а также среднюю кинетическую энергию $< \varepsilon_п >$ поступательного движения, $< \varepsilon_в >$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $< \varepsilon >$ молекулы.

10. Смесь гелия и аргона находится при температуре T=1,2 кК. Определить среднюю квадратичную скорость $< v_{кв} >$ и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.

11. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить диффузию D гелия.

12. Диффузия D кислорода при температуре $t = 0$ °С равна 0,19 см^2/с. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода.

13. Вычислить диффузию D азота: 1) при нормальных условиях; 2) при давлении $p = 100$ Па и температуре $T = 300$ К.

14. Определить, во сколько раз отличается диффузия D_1 газообразного водорода от диффузии D_2 газообразного кислорода, если оба газа находятся при одинаковых условиях.

15. Определить зависимость диффузии D от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном.

16. Определить зависимость диффузии D от давления p при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном.

17. Вычислить динамическую вязкость η кислорода при нормальных условиях.

18. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота при условии, что его динамическая вязкость η = 17 мкПа $\cdot$с.

19. Найти динамическую вязкость η гелия при нормальных условиях, если диффузия D при тех же условиях равна 1,06 $\cdot 10^{-4}$ м^2/с.

20. Определить зависимость динамической вязкости η от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

Практическое занятие 6.

Тема занятия. **Основы термодинамики.**

Цель занятия. Изучить основные понятия и законы термодинамики.

Теоретическая часть.

Термодинамика в отличие от молекулярно-кинетической теории не вдаётся в рассмотрение микроскопической картины явлений (оперирует с макропараметрами). Термодинамика рассматривает явления, опираясь на основные законы (начала), которые являются обобщением огромного количества опытных данных.

Внутренняя энергия – энергия физической системы, зависящая от её внутреннего состояния. Внутренняя энергия включает энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц системы (молекул, атомов, ионов и т.д.) и энергию взаимодействия этих частиц. Кинетическая энергия движения системы как целого и её потенциальная энергия во внешних силовых полях во внутреннюю энергию не входит. В термодинамике и её приложениях представляет интерес не само значение внутренней энергии, а её изменение при изменении состояния системы. Внутренняя энергия – функция состояния системы.

Работа термодинамической системы над внешними телами заключается в изменении состояния этих тел и определяется количеством энергии, передаваемой системой внешним телам при изменении объема.

- Уравнение состояния идеального газа:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT\ ,$$

где p - давление: V – объем; T - абсолютная температура; m – масса; μ - молярная масса; R = 8,314 Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная.

- Уравнение состояния ван-дер-ваальсовского газа (для одного моля):

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT\ ,$$

где V - объем, занимаемый молем газа при данных p иT, a и b - постоянные Ван-дер-Ваальса для данного газа.

- Закон Дальтона: *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений*(парциальное давление - это давление, которое оказывал бы на стенки сосуда один газ смеси в отсутствие остальных).
- Зависимость давления газа от высоты в поле силы тяжести в изотермическом приближении дается барометрической формулой:

$$p=p_0 e^{-\mu gh/RT}\ ,$$

где p_0 - давление на высоте h = 0, g = 9,8 м/с^2 - ускорение свободного падения.

- Первое начало термодинамики:

$$Q=\Delta U+A\ ,$$

где Q - количество тепла, сообщенное системе; A - работа, совершаемая системой; ΔU - приращение внутренней энергии системы.

- Работа, совершаемая газом:

$$A=\int_{V_1}^{V_2} pdV$$

- Теплоемкость системы:

$$C=\frac{\delta Q}{dT}$$

- Уравнение Майера:

$$C_p-C_V=R$$

где C_p, C_V - молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

- Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении определяются соотношениями:

$$C_V=\frac{i}{2}R\ ,\ \ C_p=\frac{i+2}{2}R\ ,\ \ \gamma=\frac{C_p}{C_v}=\frac{i+2}{i}\ ,$$

где i - число степеней свободы молекулы газа.

- Внутренняя энергия идеального газа:

$$U=\frac{m}{\mu}\cdot C_V T=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT}{\gamma-1}=\frac{pV}{\gamma-1}$$

- Молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе:

$$C=\frac{n-\gamma}{(n-1)(\gamma-1)}R$$

- Внутренняя энергия моля газа Ван - дер - Ваальса:

$$U=C_V T-\frac{C}{V}$$

- К. п. д. тепловой машины:

$$\eta = A/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1,$$

где Q_1 - тепло, получаемое рабочим телом; Q_2 - отдаваемое тепло.

- К.п.д. цикла Карно:

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1},$$

где T_1, T_2- температуры нагревателя и холодильника.

- Неравенство Клаузиуса:

$$\int\frac{\delta Q}{T}\leq 0,$$

где δQ - элементарное тепло, полученное системой.

- Приращение энтропии системы:

$$\Delta S=\oint\frac{\delta Q}{T}$$

- Основное уравнение термодинамики для обратимых процессов:

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

- Свободная энергия:

$$F = U - TS, \qquad A_{\mathrm{T}} = -\Delta F$$

- Связь между энтропией и статистическим весом Ω (термодинамической вероятностью):

$$S = k\cdot\ln\Omega,$$

где k - постоянная Больцмана.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить удельную теплоемкость c_V смеси азота и водорода, если количество вещества газов в смеси одинаковы и равны ν.

Решение:

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме c_V найдем из следующих соображений:

1) теплоту, необходимую для нагревания смеси газов на ΔT можно рассчитать по формуле:

$$Q = c_V (m_1 + m_2) \cdot \Delta T \tag{1}$$

2) ту же теплоту можно найти и другим способом:

$$Q = \left(c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2\right) \cdot \Delta T, \tag{2}$$

где c_{V_1} и c_{V_2} – удельные теплоемкости отдельных газов.

Приравнивая (1) и (2), получим

$$c_V (m_1 + m_2) \cdot \Delta T = \left(c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2\right) \cdot \Delta T,$$ откуда

$$c_V = \frac{c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

Так как $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}$, где i – число степеней свободы молекулы.

Поскольку молекулы азота и водорода – двухатомные, то $i = 5$. Поэтому

$$c_{V_1} = \frac{5}{2}\frac{R}{M_1},$$

$$c_{V_2} = \frac{5}{2}\frac{R}{M_2}.$$

Подставляя эти выражения в (3), получим

$$c_V = \frac{\frac{5}{2}R\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{5}{2}R(\nu_1 + \nu_2)}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{5}{2}R \cdot 2\nu}{m_1 + m_2} = \frac{5R\nu}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

Количество вещества $\nu = \frac{m}{M}$, и $m_1 = \nu \cdot M_1$, $m_2 = \nu \cdot M_2$.

В результате формула (4) примет вид

$$c_V = \frac{5R\nu}{\nu M_1 + \nu M_2} = \frac{5R}{M_1 + M_2}$$

Подставляем числовые значения:

$$c_V = \frac{5 \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}} = 1385 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Задача 2. Определить количество теплоты, поглощаемой водородом m = 0,2 кг при нагревании его от температуры t_1 = 0˚С до температуры t_2 = 100˚С при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Дано:

m = 0,2 кг

t_1 = 0˚С; T_1 = 273 К

t_2 = 100˚С; T_2 = 373 К

Q = ? ΔU = ? A = ?

Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = \frac{m}{M} \cdot C_p \cdot \Delta T \qquad (1)$$

где C_p – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Так как $C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R$, то (1) примет вид

$$Q = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} R \cdot \Delta T$$

Поскольку водород – двухатомный газ ($M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), и число степеней свободы его молекул i = 5, то

$$Q = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 100 = 291 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{кг} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \text{Дж} \right] = 291 \,\text{кДж}.$$

Внутренняя энергия $U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT$, следовательно

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T$$, тогда

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31100 = 208 \cdot 10^{3} \left[\frac{\text{кг} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \text{Дж} \right] = 208 \text{ кДж}.$$

Работу расширения газа найдем из выражения для первого начала термодинамики: $Q = \Delta U + A$, откуда

$$A = Q - \Delta U = 231 - 208 = 83 \text{ кДж}.$$

Задача 3. В цилиндре под поршнем находится водород массой m = 0,02 кг при температуре T_1 = 300К. Водород начал адиабатно расширяться, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, уменьшив свой объем в 5 раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A, совершенную газом.

Дано:

m = 0,02 кг | Из уравнения Пуассона для адиабатного процесса имеем T_1= 300K

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (1)$$

, где $\gamma=\dfrac{i+2}{i}$ *– показатель адиабаты.*

$V_2 = 5V_1$ | *а* $V_1=V_3$ по условию

T_2 = ? A =? | Так как водород двухатомный газ, то i =5 и γ = 1,4.

Из (1) $$T_2=T_1\cdot\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=300\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1}K=158K.$$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1=\frac{m}{M}C_V\cdot(T_1-T_2),$$ где $$C_V=\frac{i}{2}R.$$

Следовательно,

$$A_1=\frac{i}{2}\frac{m}{M}R(T_1-T_2)=\frac{5}{2}\cdot\frac{0,02}{2\cdot10^{-3}}\cdot8,31\cdot(300-158)\text{ Дж}=29,5\text{ кДж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2=-RT_2\cdot\frac{m}{M}\ln\frac{V_2}{V_3}=-8,31\cdot158\cdot\frac{0,02}{2\cdot10^{-3}}\ln5=-21,1\text{ кДж}$$

знак минус означает, что при сжатии работа газа совершена внешними силами.

Полная работа

$$A=A_1+A_2=8,8\text{ кДж}.$$

Задача 4. В цилиндре под поршнем находится водород массой m = 0,02 кг при температуре T_1 = 300 К. Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, уменьшив свой объем в 5 раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A, совершенную газом.

Решение:

Согласно уравнению Пуассона для адиабатного процесса

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (1)$$

где γ – показатель адиабаты, $\gamma=\dfrac{i+2}{i}$ (i = 5, т.к. водород двухатомный газ), т.е.

$$\gamma=\frac{5+2}{5}=1,4.$$

Из (1) $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1}$ $T_2 = 158\,K.$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} C_V \cdot (T_1 - T_2)$$, где $C_V = \frac{i}{2} R$, то есть

$$A_1 = \frac{i}{2}\frac{m}{M} R(T_1 - T_2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (300 - 158)\,Дж = 29,5 \cdot 10^3\,Дж = 29,5\,кДж.$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

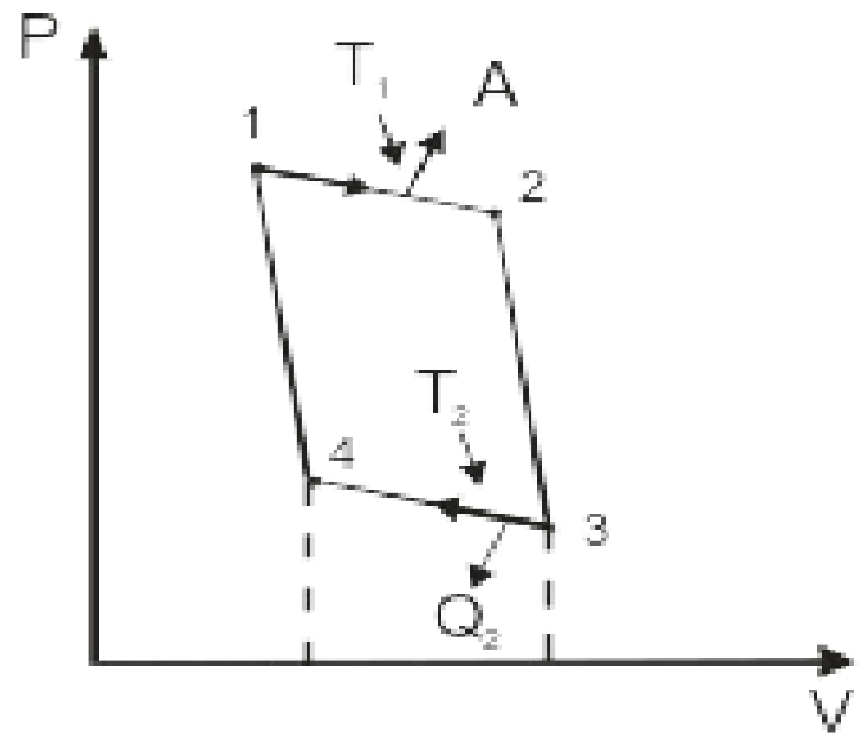
$$A_2 = -RT_2 \cdot \frac{m}{M} \ln\frac{V_2}{V_3} = -8,31 \cdot 158 \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \ln 5 = -21132\,Дж = -21\,кДж$$

знак «-» показывает, что при сжатии работа газа совершена внешними силами. Полная работа

$$A = A_1 + A_2 = 8,5\,кДж$$

Задача 5. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя равна 470 К, температура T_2 охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу A = 100 Дж. Определить термический к.п.д. η цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

<u>Решение:</u>



Термический к.п.д. цикла определяется выражением $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

Количество теплоты переданное охладителю при изотермическом сжатии $(3-4)$ равно работе совершенной над газом сторонними силами

$$A_{34} = -Q_2 = \nu R T_2 \ln\frac{V_1}{V_2}$$

$$Q_2 = \nu R T_2 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Учитывая, что работа газа при изотермическом расширении (1-2)

$$A = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \nu R = \frac{A}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}$$, имеем:

$$Q_2 = \frac{A}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} T_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = A\frac{T_2}{T_1}$$

Задача 6. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу A = 600 Дж. Температура T_1 нагревателя равна 500 К, T_2 холодильника — 300 К. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Решение.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A. \quad (1)$$

где $Q_1 = A/\eta$ — количество теплоты, полученной от нагревателя.

Подставив это выражение Q_1 в (1), найдем

$$Q_2 = A\left(\frac{1}{\eta} - 1\right).$$

Вычисляя, получаем: 1) η = 0,4; 2) Q_2 = 900 Дж.

Задача 7. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой m = 100 г от температуры t_1 = 0˚С до температуры t_2 = 100 ˚С и последующем превращении воды в пар при той же температуре.

Решение:

Определим изменение энтропии ΔS как сумму изменения энтропии ΔS_1 при нагреве воды и изменения энтропии ΔS_2 при ее превращении в пар:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Известно, что

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

При нагревании $dQ = mc \cdot dT$, где c – удельная теплоемкость воды, $c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot К}$, тогда

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc \cdot dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 0{,}1 \cdot 4200 \cdot \ln \frac{373}{273} = 132 \frac{Дж}{К}.$$

При превращении воды в пар температура не изменяется, значит

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T},$$

где Q – количество теплоты, переданное воде для превращения ее в пар,

$$Q = r \cdot m,$$

где r – удельная теплота парообразования,

$$r = 22{,}5 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг},$$

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T} = \frac{22{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1}{373} = 603 \frac{Дж}{К},$$ тогда

$$\Delta S = 132 \frac{Дж}{К} + 603 \frac{Дж}{К} = 735 \frac{Дж}{К}.$$

Задача 8. Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой m = 10 г, если давление газа уменьшилось от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 50 кПа.

Решение.

Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 \mathrm{d}Q = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом, $Q = A + \Delta U$. Для изотермического процесса ΔU = 0, поэтому $Q = A$. Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем ΔS = 2,06 Дж/К.

Вопросы и задания.

1. Основные законы термодинамики.
2. Первое начало термодинамики.
3. Работа, совершаемая газом при изменении объема. Работа газа при различных процессах.
4. Адиабатический процесс.
5. Энтропия. Неравенство Клаузиуса.
6. Статистическое истолкование энтропии.
7. Второе начало термодинамики.
8. Тепловой двигатель. Теорема Карно.
9. Холодильная машина.
10. Цикл Карно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определить показатель адиабаты γ такой смеси.

2. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой m_1=10 г и водород массой m_2=4 г.

3. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и равных объемах. Определить удельную теплоемкость c_p смеси.

4. Определить удельную теплоемкость c_v смеси газов, содержащей V_1=5 л водорода и V_2=3 л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

5. Каковы удельные теплоемкости c_v и c_p смеси газов, содержащей кислород массой m_1=10 г и азот массой m_2=20 г ?

6. Определить показатель адиабаты γ частично диссоциировавшего газообразного азота, степень диссоциации α которого равна 0,4.

7. Азот массой m=5 кг, нагретый на ΔT=150 К, сохранил неизменный объем V. Найти: 1) количество теплоты Q, сообщенное газу; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) совершенную газом работу A.

8. Водород занимает объем V_1=10 м^3 при давлении p_1=100 кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления p_2=100 кПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу A; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

9. Наименьший объем V_1 газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем V_3, если объем V_2 в конце изотермического расширения и объем V_4 в конце изотермического сжатия соответственно равны: 600 л и 189 л.

10. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты Q_1=4,2 кДж, совершил работу A=590 Дж. Найти термический КПД η этого цикла. Во сколько раз температура T_1 нагревателя больше температуры T_2 охладителя?

11. Идеальный газ, совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в три раза выше температуры T_2 охладителя. Нагреватель передал газу количество теплоты Q_1=42 кДж. Какую работу A совершил газ?

12. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура T_2 охладителя равна 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя.

13. Идеальный многоатомный газ совершат цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД η цикла.

14. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества ν=1 моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем V_{min}=10 л, наибольший V_{max}=20 л, наименьшее давление p_{min}=246 кПа, наибольшее p_{min}=410 кПа. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический КПД η.

15. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты Q_1=4 кДж. Определить работу A газа при протекании цикла, если его термический КПД η = 0,1.

16. Кусок льда массой m=200 г, взятый при температуре t_1= - 10 °С, был нагрет до температуры t_2=0°С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры t_3=10°С. Определить изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

17. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой m=4 г от объема V_1=5 л до объема V_2=9 л.

18. Кислород массой m=2 кг увеличил свой объем в n=5 раз один раз изотермически, другой – адиабатически. Найти изменения энтропии в каждом из указанных процессов.

Раздел 3. Электричество

Практическое занятие 7.

Тема занятия. **Электростатика**

Цель занятия. Изучить основные законы электростатики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электрические свойства тел. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Электрическое поле. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса. Вычисление напряженностей полей заряженных тел различной геометрии. Работа сил электрического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал поля точечного заряда. Разность потенциалов. Проводники в электрическом поле. Электрическое поле внутри заряженного проводника. Распределение зарядов в проводниках. Электроемкость проводников. Конденсаторы. Энергия электростатического поля. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные законы электростатики применяются при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

<u>Закон Кулона</u>: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r_{12} между ними.

В скалярной форме закон Кулона:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}^2}.$$

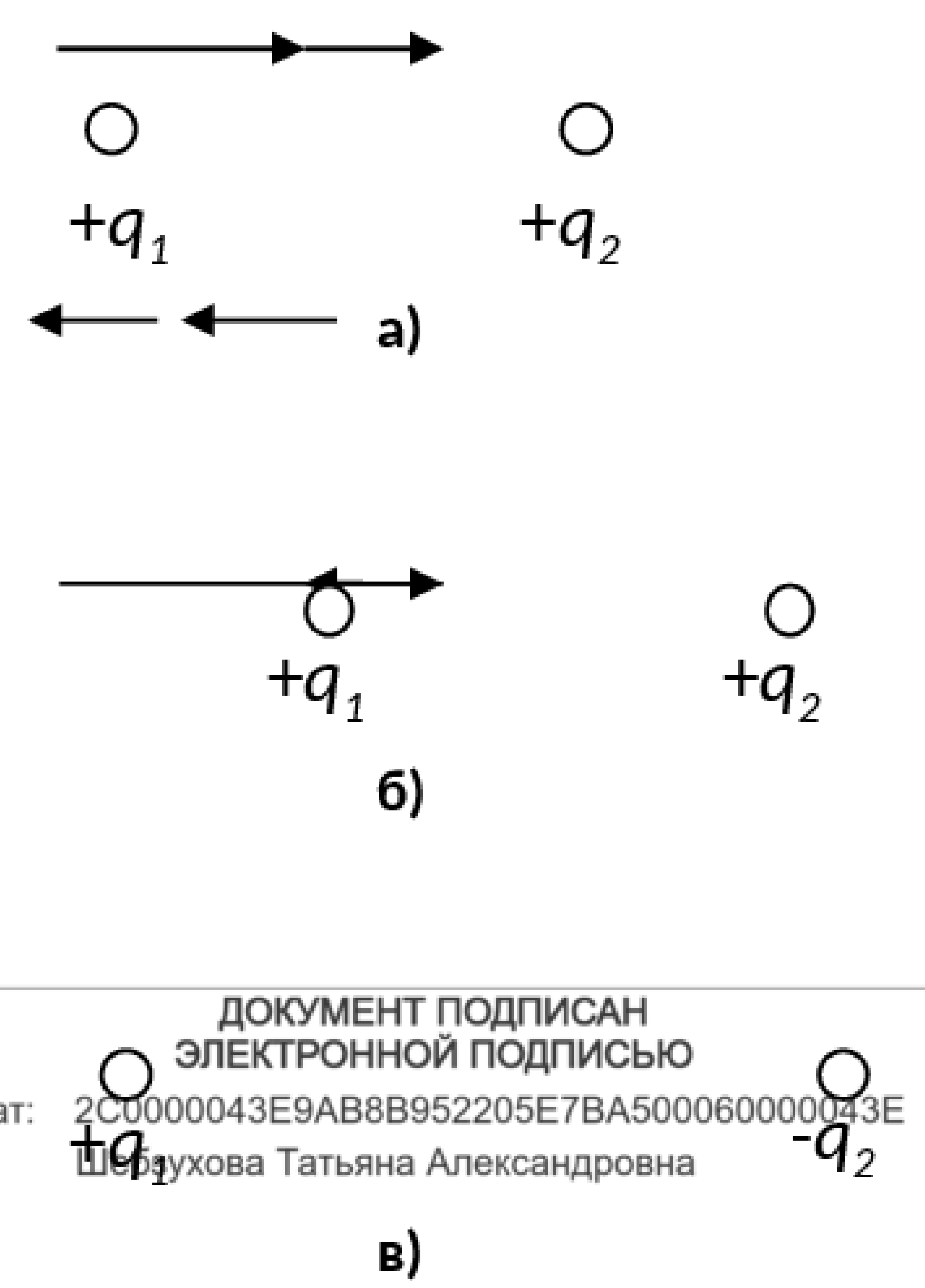


Рис. 1

Здесь: ε_0 – электрическая постоянная; $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/Н$\cdot$м^2 (размерность может быть приведена к виду Ф/м); ε – диэлектрическая проницаемость среды, показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме превышает силу взаимодействия их в среде, т.е. $\varepsilon = \frac{F_0}{F}$ (F_0 – сила Кулона в вакууме, F – в среде); диэлектрическая проницаемость вакуума ε = 1, воздуха ε = 1. Закон Кулона, записанный в векторной форме (1), (2), определяет силу, действующую на заряды q_2 и q_1 со стороны q_1 и q_2 соответственно.

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \tag{1}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{21}^3} \vec{r}_{21}. \tag{2}$$

Сила F_{12} действует на заряд q_2 со стороны q_1, при этом радиус-вектор r_{12} фиксирует положение заряда q_2 относительно начала системы координат, помещенного в точку, где находится заряд q_1. Радиус-вектор r_{12} направлен от q_1 к q_2 (рис.1а). Сила F_{21} действует на заряд q_1 со стороны q_2, радиус-вектор r_{21} (начало координат помещается в точку, где находится заряд q_2) направлен от q_2 к q_1 (рис.1б). Сила Кулона направлена в ту же сторону (рис.1а,б), что и радиус-вектор r при одинаковых знаках зарядов ($q_1 q_2 > 0$), и в сторону, противоположную радиус-вектору r (рис.1в) – при различных знаках зарядов q_1 и q_2 ($q_1 q_2 < 0$).

Силы F_{12} и F_{21} по третьему закону Ньютона равны по величине и противоположны по направлению:

$$F_{12} = - F_{21}.$$

Напомним, что точечным зарядом называется наэлектризованное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других тел, с которыми оно взаимодействует.

Взаимодействие точечного заряда с распределенным зарядом

Заряд, сообщенный телу, может распределяться по его поверхности (металл) или по объему (диэлектрик).

Характеристиками распределенного заряда служат:

1. Линейная плотность заряда (τ).
2. Поверхностная плотность заряда (σ).
3. Объемная плотность заряда (ρ).

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Здесь ΔQ – заряд, находящийся соответственно на элементе длины Δl, поверхности ΔS, объема ΔV заряженного тела.

Напряженность поля точечного заряда

Вектор напряженности электростатического поля в некоторой точке является физической величиной, численно равной силе, действующей на помещенный в эту точку единичный положительный заряд (пробный).

Направление вектора напряженности в некоторой точке поля совпадает с направлением силы, действующей на помещенный в данную точку электростатического поля положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{F}{q'}, \qquad (3)$$

q' - заряд, помещенный в данную точку поля. Размерность Е следует из выражения (3):

$$[E] = \frac{Н}{Кл}.$$

Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом q в точке на расстоянии r от заряда находят, используя выражение (3) и закон Кулона:

$$E = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2 q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \qquad (4)$$

Чтобы найти направление вектора напряженности в точке А (рис. 2), следует поместить в эту точку пробный положительный заряд q' и найти направление силы Кулона, действующей на q' со стороны заряда, создающего поле. Вектор напряженности поля, создаваемого положительным зарядом в точке А (рис. 2а), направлен в сторону от заряда (сравните с рис. 1), а в случае отрицательного заряда направлен в сторону заряда (рис. 2б). Для нахождения напряженности поля, создаваемого системой зарядов, следует воспользоваться принципом суперпозиции электрических полей: вектор напряженности электрического поля системы зарядов равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности.

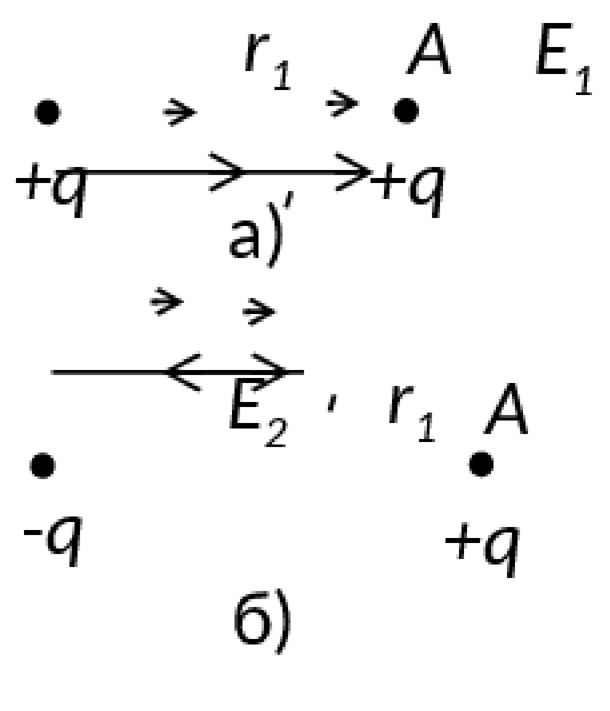


Рис.2

Работа сил поля при перемещении заряда, потенциал, разность потенциалов, потенциальная энергия системы зарядов.

Работа по перемещению заряда в поле.

Потенциал

Пусть пробный заряд q' перемещается в поле точечного заряда q на бесконечно малый отрезок dl (рис. 3). Элементарная работа, совершаемая полем при перемещении заряда:

$$dA = Fdl\cos\alpha\,, \tag{5}$$

Где F – сила, действующая на заряд q' на отрезке dl, α - угол между F и dl (рис. 3).

По закону Кулона

$$F = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,. \tag{6}$$

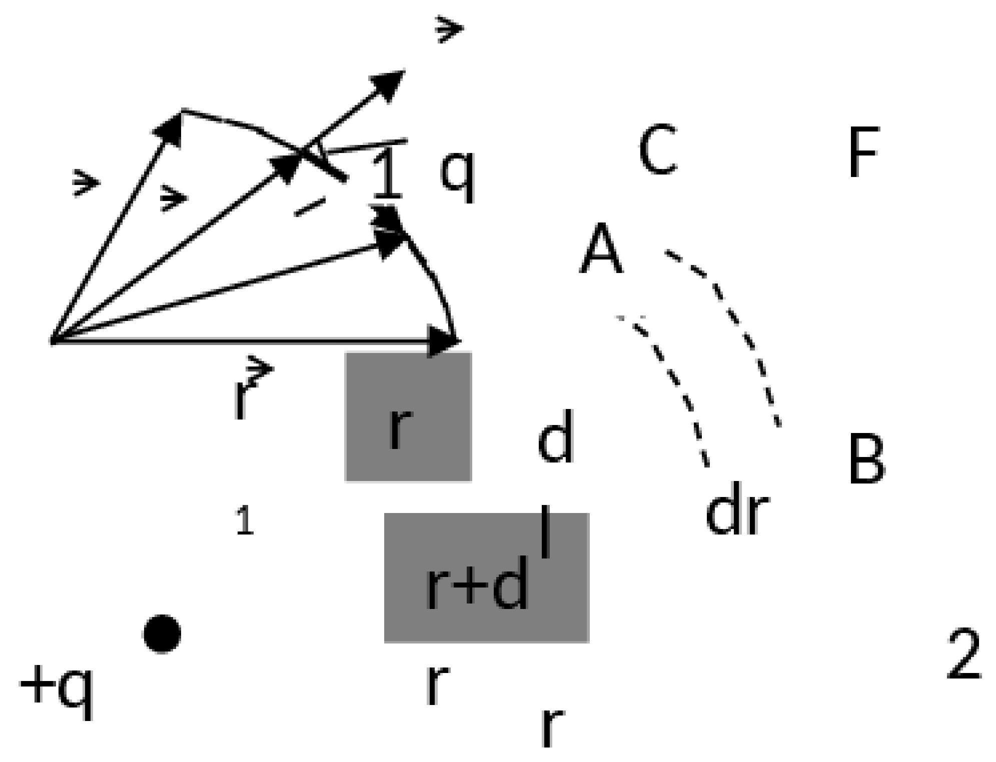


Рис. 3

Из ΔABC (рис. 13) найдем, что приращение длины радиус-вектора r численно равно:

$$dr = dl \cdot \cos\alpha. \tag{7}$$

Подставив выражения (6) и (7) в выражение (5), получим:

$$dA = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,dr\,. \tag{8}$$

Для нахождения полной работы, совершаемой полем при перемещении пробного заряда q' из положения 1 в положение 2 (рис.13), следует выражение (8) проинтегрировать по всему пути:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = q'\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = q'\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

то есть

$$A_{12} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}\,. \tag{9}$$

Будем перемещать пробный заряд q' из точки 1 за пределы поля, т.е. в бесконечность, где напряженность электрического поля E_∞ равна 0. При этом в формуле (9) $r_2=\infty$, и для $A_{1\infty}$ получим

$$A_{1\infty} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}\,. \tag{10}$$

Поделив выражение (10) на q', получим величину, которая называется электрическим потенциалом данной точки поля:

$$\varphi = \frac{A_{1\infty}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\,. \tag{11}$$

То есть, потенциал данной точки поля численно равен работе, которую совершат силы поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечно удаленную. Потенциал определяется с точностью до постоянной С. Для бесконечно удаленной точки пространства удобно принимать C=0. (В выражении (11) C принята равной 0). Единица измерения потенциала может быть найдена из выражения:

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{Дж}{Кл} = \frac{Кл \cdot В}{Кл} = В.$$

Как следует из выражения (11), потенциал поля точечного заряда в заданной точке поля вычисляют по формуле:

$$\varphi_{Т.З.} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \qquad (12)$$

Здесь q – заряд, который создает поле, r - расстояние от заряда до точки, в которой вычисляется потенциал.

Разность потенциалов

Разделив выражение (9) на q', получим:

$$\frac{A_{12}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Отсюда:

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (13)$$

Величина $(\varphi_1 - \varphi_2)$ называется *разностью потенциалов*. Разность потенциалов двух точек измеряется работой, совершаемой силами поля при перемещении положительного единичного заряда из первой точки во вторую.

Потенциал поля системы точечных зарядов

равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами. То есть для потенциала, так же как и для напряженности поля, справедлив принцип суперпозиции электрических полей. При этом потенциал поля системы зарядов рассчитать всегда легче, чем напряженность, т.к. потенциал – величина скалярная (энергетическая характеристика поля). Поэтому в случаях, когда надо найти напряженность и потенциал в какой-либо точке поля, следует найти сначала потенциал, а напряженность поля искать, используя связь между напряженностью и потенциалом:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}. \qquad (14)$$

Напряженность поля численно равна изменению потенциала на единицу длины, отсчитанной в направлении по силовой линии, и направлена в сторону убывания потенциала (этим объясняется знак минус в (14)).

Если поле неоднородно, то составляющая вектора напряженности электрического поля в данной точке по любому направлению равна производной от потенциала по этому направлению в той же точке, взятой со знаком минус:

$$E_X = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad E_Y = -\frac{d\varphi}{dy}; \quad E_Z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Для однородного поля во всех его точках напряженность одна и та же. Если φ_1 – потенциал точки 1, а φ_2 – потенциал точки 2, расстояние между точками d, то:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

и выражение (14) для однородного поля имеет вид:

$$E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}.$$

Потенциал поля заряженной сферы (шара) определяется как потенциал поля точечного заряда (формула 12). При этом считается, что заряд сосредоточен в центре сферы, т.е. расстояние r (формула 12) отсчитывается от центра сферы.

Решение задачи по нахождению потенциала поля, создаваемого системой точечных зарядов в данной точке, не вызывает затруднений, поэтому примеры решения задач на эту тему здесь не рассматриваются.

Более сложно решение задач по нахождению потенциала в точках поля распределенного заряда, на этом остановимся подробнее.

Расчет работы,

совершаемой полем при перемещении заряда, и потенциальной энергии системы зарядов.

Работа сил поля, создаваемого зарядом Q, по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 подсчитывается по формуле (9), т.е.

$$A_{12} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Из этого выражения следует, что величина работы по перемещению заряда в электростатическом поле не зависит от пути движения заряда q, а зависит лишь от его начального и конечного положений.

При нахождении работы считается, что перемещающийся заряд (обычно меньший по величине, чем заряд Q, который создает поле) не изменяет электростатического поля, в котором он движется.

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов q и Q равна:

$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + W_\infty.$$

Обычно для упрощения расчетов бесконечно удаленную точку ($r_2 = \infty$) принимают за начало отсчета энергии, т.е. $W_\infty = 0$. Тогда:

$$W(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \tag{15}$$

Сравните (15) и (12).

Из (15) следует, что потенциал поля в данной точке численно равен потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля. Работа, как мера изменения энергии (в данном случае потенциальной):

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Итак, работа сил поля по перемещению заряда:

а) $A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$,

б) $A = \int F dl,\ \ \textbf{если}\ \ F = const:\ \ A = Fl = qEl$.

(однородное поле, заряд движется по силовой линии)

в) $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

г) $A_{12} = W_1 - W_2$.

Потенциал поля точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Связь между потенциалом и напряженностью $E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$.

Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора $F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon \cdot S}$,

где S – площадь пластин.

Электроемкость:

уединенного проводника $C = \frac{q}{\varphi}$;

плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$;

слоистого конденсатора $$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum d_i / \varepsilon_i},$$

шара $$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R,$$

где d – расстояние между пластинами конденсатора, d_i – толщина i-го слоя диэлектрика, ε_i – его диэлектрическая проницаемость, R – радиус шара.

Электроемкость батареи конденсаторов, соединенных:

параллельно $$C = \sum C_i;$$

последовательно $$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

Энергия поля:

заряженного проводника $$W_э = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2};$$

заряженного конденсатора $$W_э = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2 V,$$

где V – объем конденсатора.

Объемная плотность энергии электрического поля $$W_э = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{ED}{2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Тонкий стержень длиной 20 см несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью τ = 2 мкКл/м. На расстоянии 30 см от стержня находится заряд 20 нКл, равноудаленный от концов стержня. Найти силу взаимодействия заряда и стержня.

Дано:

l = 20 см = 0,2 м

τ = 2 мкКл/м = $2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м

r_0 = 30см = 0,3 м

Q = 20 нКл = $2 \cdot 10^{-8}$ Кл

$F = ?$

Выделим на стержне элементарный участок длиной dl. Заряд его $dQ = \tau dl$ можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона сила взаимодействия между Q_1 и dQ равна

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot dl}{r^2},$$

где r – расстояние от выделенного участка до заряда Q_1 (см. рис.). Из рисунка следует, что $r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$, $dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}$, где r_0 – расстояние от Q_1 до стержня.

Подставив выражения для r и dl в формулу для силы dF получим, что

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot r d\alpha}{\frac{r_0^2}{\cos^2\alpha} \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot r_0 \cdot d\alpha}{\frac{r_0^2 \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{Q_1 \tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Это векторная величина; разложим dF на составляющие:

перпендикулярную стержню dF_1 и параллельную ему dF_2. Очевидно,

$$dF_1 = dF \cdot \cos\alpha, \quad dF_2 = dF \cdot \sin\alpha,$$ тогда

$$dF_1 = \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha, \quad dF_2 = \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha$$

Проинтегрируем полученные выражения для сил в пределах изменения угла α от $-\beta$ до β.

$$F_1 = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \left|\sin\alpha\right|_{-\beta}^{+\beta} = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta$$

$$F_2 = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = - \frac{Q_1 \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \left|\cos\alpha\right|_{-\beta}^{+\beta} = 0.$$

В результате получим, что $F = F_1 = \dfrac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta$.

Величину $\sin\beta$ определим из рисунка:

$$\sin\beta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$$

и подставим в выражение для силы F.

$$F = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}3} \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{4 \cdot (0{,}3)^2 + (0{,}2)^2}} = 0{,}76 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}$$

Задача 2. Тонкий стержень длиной l = 10 см несет равномерно распределенный заряд Q = 1 нКл. Определить потенциал φ электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии a = 20 см от ближайшего его конца.

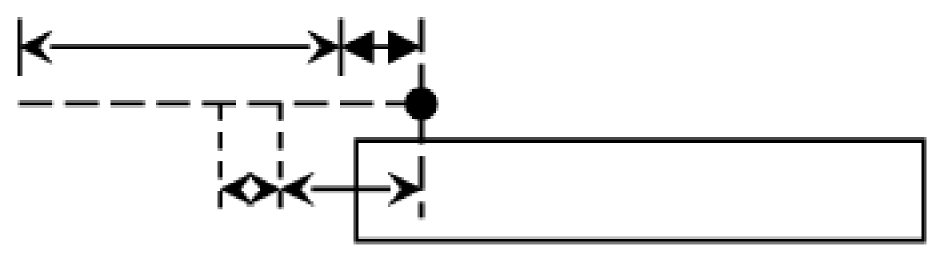
Дано:

l = 10 см = 0,1 м

Q = 1нКл = 10^{-9} Кл

a = 20 см = 0,2 м

φ – ?



Выделим на стержне элементарный участок длиной dr. Заряд на стержне распределен равномерно, следовательно, его линейная плотность $\tau = \dfrac{Q}{l}$ и на участке длиной dr размещен заряд $dQ = \tau \cdot dr$. Этот заряд можно считать точечным. Тогда потенциал электрического поля этого заряда в точке A равен

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} \qquad (1)$$

где r – расстояние от элементарного участка dr до точки A.

Из принципа суперпозиции следует, что общий потенциал равен сумме потенциалов всех элементарных зарядов стержня.

Поэтому интегрируем выражение (1) для $d\varphi$ в пределах изменения dr от a до $l+a$:

$$\varphi = \int_a^{l+a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_a^{l+a}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+a}{a} = \frac{10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1}\cdot\ln\frac{0{,}1+0{,}2}{0{,}2} = 36{,}5\ \text{В}.$$

Задача 3. Конденсатор емкостью C_0 = 20 мкФ заряжают до разности потенциалов U_0 = 400В и подключают к конденсатору емкостью C = 1 мкФ, в результате чего последний заряжается. Отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор той же емкости (C = 1мкФ), затем третий, четвертый и т.д. Затем конденсаторы соединяют последовательно. Какую максимальную разность потенциалов можно получить таким образом?

Дано:

C_0 = 20 мкФ=$20\cdot10^{-6}$ Ф

U_0 = 400 В

C = 1мкФ

U = ?

Начальный заряд конденсатора емкостью C_0 будет равным $Q_0 = C_0 \cdot U$. После подключения к нему конденсатора емкостью C заряд Q_0 распределяется между C_0 и C. После отсоединения C от C_0 на обоих конденсаторах будет одинаковая разность потенциалов (т.к. их соединение было параллельным).

$$U_1 = \frac{Q_0}{C_0 + C} = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C}.$$

На конденсаторе C_0 останется заряд

$$Q_1 = C_0 \cdot U_1 = \frac{C_0^2 U_0}{C_0 + C}.$$

При последующем подключении второго конденсатора C на конденсаторе C_0 останется заряд $Q_2 = C_0 \cdot U_2$.

Причем

$$U_2 = \frac{C_0 U_1}{C_0 + C} = \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^2 U_0.$$

Повторяя эту операцию n раз, мы будем иметь набор конденсаторов, заряженных до напряжений U_1, U_2, U_3,…, $U_n\,(n=1,2,3,...)$. $U_n = U_0\left(\dfrac{C_0}{C_0+C}\right)^n$.

Общее напряжение после последовательного соединения всех n конденсаторов будет равно

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C}\left(1 + \frac{C_0}{C_0 + C} + \frac{C_0^2}{(C_0 + C)^2} + ... + \frac{C_0^n}{(C_0 + C)^n}\right).$$

Просуммировав полученную бесконечную убывающую геометрическую прогрессию найдем её сумму равную максимальной разности потенциалов U:

$$U = \frac{C_0 U_0}{C} = \frac{20\cdot 10^{-6}\cdot 400}{10^{-6}} = 8000\ \text{В}.$$

Задача 4. Батарею, состоящую из двух конденсаторов емкостями 4 и 5 мкФ каждый, соединили последовательно и включили в сеть с напряжением 220 В. Потом батарею отключили от сети, а конденсаторы разъединили и соединили параллельно обкладками, имеющими одноименные заряды. Каким будет напряжение на зажимах полученной батареи?

Дано:

U_1 = 220 В

C_1 =4 мкФ = $4\cdot10^{-6}$ Ф

C_2 = 5 мкФ = $5\cdot10^{-6}$ Ф

U_2 = ?

Так как конденсаторы соединены последовательно, то заряд каждого из них и батареи в целом одинаковы:

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q.$$

Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов вычисляется по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}.$$

Емкость батареи из двух конденсаторов равна $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$,

а их заряд $Q = CU_1 = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U_1$.

При отключении конденсаторов заряд каждого из них сохранится. При параллельном их соединении будет равен сумме зарядов конденсаторов $Q' = Q_1 + Q_2 = 2Q$, а емкость батареи будет равна сумме емкостей $C' = C_1 + C_2$.

Общее напряжение станет равным

$$U_2 = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{2Q}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя в полученное выражение формулу для Q, получим:

$$U_2 = \frac{2C_1C_2U_1}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 220}{(4 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6})^2} = 108{,}6 \text{ В}$$

Задача 5. Какое количество теплоты Q выделится при разрядке плоского воздушного конденсатора, если разность потенциалов между пластинами равна 10 кВ, расстояние d=0,5 мм, а площадь S каждой пластины равна 100 см^2?

Дано:

U=10 кВ=10^4 В

d=0,5 мм=$5 \cdot 10^{-4}$ м

S=100 см^2=10^{-2} м^2

Q = ?

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты Q, выделившееся в конденсаторе при его разрядке, равно энергии заряженного конденсатора

$$Q = \frac{CU^2}{2}$$

Емкость плоского конденсатора определяется по формуле

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха ε =1). Значит

$$Q = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{8}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 8{,}85 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 8{,}85 \text{ мДж}.$$

Вопросы и задания.

1. Электрический заряд и его свойства. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.

2. Напряженность электростатического поля. Линии напряженности электростатического поля. Поток вектора напряженности.

3. Принцип суперпозиции. Поле диполя.

4. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.

5. Применение теоремы Гаусса к расчету полей в вакууме.

6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

7. Потенциал электростатического поля. Разность потенциалов.

8. Связь между напряженностью и потенциалом. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля.

9. Диэлектрики. Поляризованность диэлектриков. Напряженность поля в диэлектрике.

10. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.

11. Проводники в электростатическом поле. Электроемкость. Соединение конденсаторов в батареи.

12. Энергия системы зарядов и уединённого проводника. Энергия конденсатора. Энергия электростатического поля

Задачи для самостоятельного решения

1. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью σ_1 = 10 нКл/м^2 и σ_2 = -30 нКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 1 м^2.

2. Две прямоугольные одинаковые параллельные пластины, длины сторон которых a = 10 см и b = 15 см, расположены на малом (по сравнению с линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд Q_1 = 50 нКл, на другой – заряд Q_2 = 150 нКл. Определить напряженность E электрического поля между пластинами.

3. На отрезке тонкого прямого проводника длиной l = 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=3 мкКл/м. Вычислить напряженность E, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное его длине.

4. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды Q = 0,3нКл каждый. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в положении равновесия?

5. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами Q_1 = 40 нКл и Q_2 = –10 нКл, находящимися на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на r_1 = 12см и от второго на r_2 = 6см.

6. Три одинаковых заряда Q=1 нКл каждый расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в положении равновесия? Будет ли это равновесие устойчивым?

7. Тонкая нить длиной l = 20см равномерно заряжена с линейной плотностью τ = 10 нКл/м. На расстоянии a = 10см от нити, против ее середины, находится точечный заряд Q = 1 нКл. Вычислить силу F, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.

8. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a=10 см расположены точечные заряды Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ (Q=0,1 мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд Q, лежащий в плоскости шестиугольника, равноудаленный от его вершин и равный заряду Q.

9. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии a=20 см от его конца находится точечный заряд Q = 10 нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

10. Расстояние между двумя точечными зарядами Q_1=1 мкКл и Q_2 = - Q_1 равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд Q=0.1 мкКл, удаленный на r_1 = 6 см от первого и на r_2=8 см от второго зарядов.

11. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии d = 0,5 см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 = 0,2 мкКл/м^2 и σ_2 = 0,3 мкКл/м^2. Определить разность потенциалов U между плоскостями.

12. Определить потенциальную энергию $П$ системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной длиной a = 10см. Заряды одинаковы по абсолютному значению Q = 10нКл, но два из них отрицательны. Рассмотреть два возможных случая расположения зарядов.

13. Какова потенциальная энергия $П$ системы четырех одинаковых точечных зарядов Q = 10нКл, расположенных в вершинах квадрата со стороной a = 10см?

14. Два конденсатора электроемкостями C_1 = 3мкФ и C_2 = 6мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС E = 120В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

15. Конденсатор электроемкостью C_1 = 0,2мкФ был заряжен до разности потенциалов U_1 = 320В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов U_2 = 450В, напряжение U на нем изменилось до 400В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора.

16. Электрическое поле создано заряженной (Q = 0,1 мкКл) сферой радиусом R = 10 см. Какова энергия W поля, заключенная в объеме, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раза больше радиуса сферы.

17. Шар радиусом R_1=8 см заряжен до потенциала φ_1=500 В, а шар радиусом R_2=4 см - до потенциала φ_2=300 В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

18. Шар радиусом R_1=6 см заряжен до потенциала φ_1=300 В, а шар радиусом R_2=4 см – до потенциала φ_2=500 В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

19. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2. Найти плотность энергии $\boldsymbol{w}$ поля конденсатора.

20. Какое количество теплоты Q выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние d = 1 мм, диэлектрик – слюда и площадь S каждой пластины равна 300 см?

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 8.

Тема занятия. **Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в диэлектриках**

Цель занятия. Изучить проводники в электрическом поле.

Теоретическая часть.

Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Поляризация диэлектриков. Поляризационные заряды.

Вектор поляризации (поляризованность) – это дипольный момент единицы объема, он определяется соотношением $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$, где $\chi-$ диэлектрическая восприимчивость. Вектор электрической индукции (или вектор электрического смещения определяется выражением $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$.

Поляризуемость. Диэлектрическая проницаемость зависит от поляризумости молекул вещества, $\vec{p}=\beta\varepsilon_0\vec{E}$. Тензор поляризуемости. В общем случае дипольный момент молекулы не совпадает по направлению с внешним магнитным полем, поэтому $p_i=\beta_{ij}\,\varepsilon_0 E_j$.

Плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком. В этой системе связанные заряды будут только на поверхности, и существует связь $|\vec{P}|=\sigma$, где $\sigma-$ поверхностная плотность связанных зарядов.

Теорема Гаусса для диэлектриков

Для диэлектриков выполняются следующие соотношения:

$$\oint\vec{P}\,d\vec{S}=-q', \qquad div\{\vec{P}=-\rho';¿$$

$$\oint\vec{D}\,d\vec{S}=Q, \qquad div\{\vec{D}=\rho.¿$$

Поле точечного заряда в диэлектрике

Закон Кулона для бесконечного однородного диэлектрика имеет вид

$$\vec{F}=\frac{q_1q_2}{4\,\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\,.$$

Условия на границе раздела двух диэлектриков во внешнем электрическом поле.

На границе раздела диэлектриков выполняется равенство тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$: $\vec{E}_{1t}=\vec{E}_{2t}$ и равенство нормальных составляющих вектора $\vec{D}$: $\vec{D}_{1n}=\vec{D}_{2n}$. Уравнение Пуассона для однородных диэлектриков имеет вид

$$\vec{\nabla}\left(\varepsilon\vec{\nabla}\phi\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Энергия системы электрических зарядов в диэлектрике. Энергия поля в диэлектриках. Плотность энергии электрического поля в диэлектриках определяется выражением $w=\frac{\vec{D}\vec{E}}{2}$.

Электрический ток в проводниках

Плотность тока, плотность тока и ток связаны соотношением $\int\vec{j}\,d\vec{S}=I$. Уравнение неразрывности (закон сохранения заряда)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\vec{j}=0.$$

Закон Ома для плотности тока. Удельная проводимость, удельное сопротивление

Между плотностью тока и напряженностью электрического поля существует линейная связь, $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ (закон Ома в дифференциальной форме). Закон Ома для однородного проводника записывается в виде $I=\frac{U}{R}$. Закон Джоуля – Ленца задает количество тепла, которое выделяется в проводнике при протекании тока в единицу времени:

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{U^2}{R}.$$

Правильное описание движения зарядов в проводниках дает только квантовая теория. Примитивная электронная теория протекания тока через металл основывается на движении зарядов как классических частиц, на которые действует сила со стороны электрического поля и сила трения со стороны среды.

Примеры решения задач

Задача 1. Диполь с электрическим моментом P=50 пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E=30\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$. Найти работу, необходимую для поворота диполя на угол α=30˚.

Дано:

P=50пКл·м=5·10^{-11} Кл·м

$E = 30\,\dfrac{\text{кВ}}{\text{м}} = 3\cdot 10^4\,\dfrac{\text{В}}{\text{м}}$

α=30°

A = ?

Элементарная работа при повороте диполя на угол $d\alpha$

$$dA = M\cdot d\alpha,$$

где $M = P\cdot E\cdot \sin\alpha$ - механический момент сил, действующий на диполь. α – угол между векторами E и P.

Таким образом $dA = P\cdot E\cdot \sin\alpha\cdot d\alpha.$

При свободном положении диполь в электрическом поле $\alpha = 0$, значит полная работа может быть рассчитана по формуле

$$A = \int_0^{\alpha} P\cdot E\sin\alpha\cdot d\alpha = -PE\cdot\cos\alpha\Big|_0^{\alpha}.$$

$$A = -5\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 10^4\left(\cos 30^\circ - \cos 0^\circ\right) = 2\cdot 10^{-7}\ \text{Дж}=0{,}2\ \text{мкДж}.$$

Вопросы и задания.

1. Диэлектрики в электростатическом поле.
2. Поляризация диэлектриков, вектор поляризации.
3. Связь вектора поляризации с объемной и поверхностной плотностью связанных зарядов.
4. Теорема Гаусса для диэлектриков.
5. Поле точечного заряда в диэлектрике.

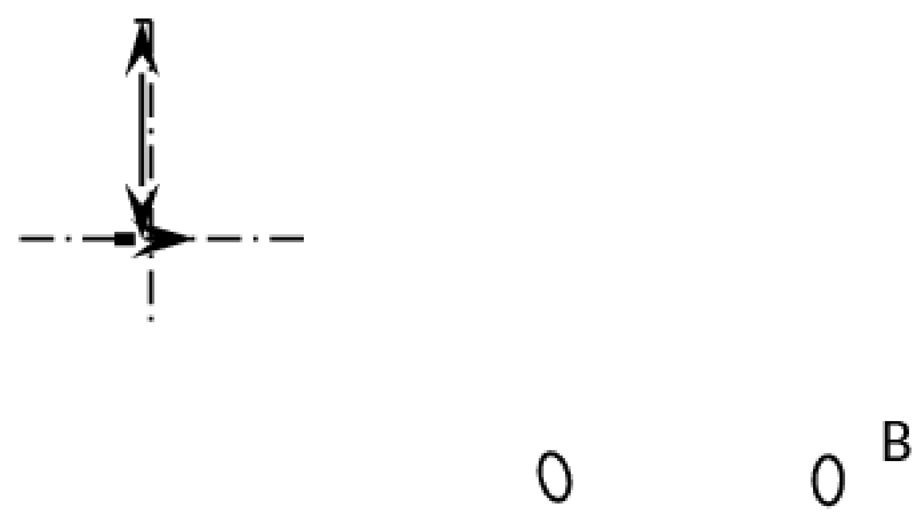
Задачи для самостоятельного решения

1. Точечный диполь с электрическим моментом p = 100 пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью E = 9 МВ/м. Диполь повернули на малый угол и предоставили самому себе. Определить частоту ν собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции J диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен 4·10^{-12} кг·м^2.

2. Диполь с электрическим моментом p = 100 пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью E = 10 кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии $\Delta П$ диполя при повороте его на угол α = 60°.

3 .Диполь с электрическим моментом p = 100 пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью E = 150 кВ/м. Вычислить работу A, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол α = 180°.

4.Определить напряженность E и потенциал φ поля, созданного точечным диполем в точках A и B. Его электрический момент p = 1 пКл·м, а расстояние r от точек A и B до центра диполя равно 10 см. (см.рисунок).



5. Расстояние l между зарядами Q= ±3,2 нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал φ поля, созданного диполем в точке, удаленной на r=8 см как от первого, так и от второго заряда.

6. Два точечных диполя с электрическими моментами p_1 = 1 пКл·м и p_2 = 4 пКл·м находятся на расстоянии r = 2 см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

7. Два точечных диполя с электрическими моментами p_1 = 20пКл·м и p_2 = 50пКл·м находятся на расстоянии r = 10 см друг от друга так, что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.

8. Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого точечным диполем с электрическим моментом p = 4 пКл·м на расстоянии r = 10 см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$с вектором электрического момента.

Практическое занятие 9.

Тема занятия. **Законы постоянного тока.**

Цель занятия. Изучить законы постоянного тока

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Источники тока. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Закон Ома для полной цепи. Разветвленные цепи. Законы Кирхгофа. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца. Тепловое действие электрического тока и его применение в технике. Элементарная классическая теория электропроводности металлов. Границы применимости классической терии электропроводности. Контактные явления. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные понятия и законы постоянного тока применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Характеристики электрического тока и условия его существования

В электростатике изучались явления, обусловленные неподвижными зарядами. Если по какой-либо причине возникает упорядоченное движение зарядов и через поверхность переносится заряд, отличный от нуля, то говорят, что возникает электрический ток.

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока – величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Если за время dt через поверхность переносится заряд dq, то сила тока равна:

$$I=\frac{dq}{dt}$$

Единицей силы тока является ампер (А). За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды или направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов. Свободные заряды, которые перемещаются в среде, называются носителями тока.

Электрический ток может быть распределен неравномерно по поверхности, через которую он течет. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока $\vec{j}$. Пусть заряженные частицы движутся в определенном направлении со скоростью $\vec{u}$. Вектором плотности тока $\vec{j}$ называется вектор, по направлению совпадающий с направлением скорости положительных зарядов (или против направления скорости отрицательных зарядов), а по абсолютной величине равный отношению силы тока dI через элементарную площадку $dS_{¿}$, расположенную в данной точке пространства перпендикулярно к направлению движения носителей, к ее площади.

$$j=\frac{dI}{dS_{¿}}$$

Число носителей тока в единице объема n называется плотностью носителей тока. Заряд отдельного носителя будет обозначаться e.

Если свободными зарядами являются, например, электроны, а положительные заряды неподвижны (это имеет место в металлах), то плотность носителей будет совпадать с числом свободных электронов в единице объема.

Вектор плотности тока можно выразить через плотность носителей тока и скорость их движения. Количество заряда, перенесенного за время dt через некоторую поверхность S, перпендикулярную к вектору скорости (рис. 20.1), равно $dq=n\cdot e\cdot u\cdot dt\cdot S$. За время dt площадку S пересекут все свободные заряды в параллелепипеде с основанием S и длиной udt. Если площадка S достаточно мала, то плотность

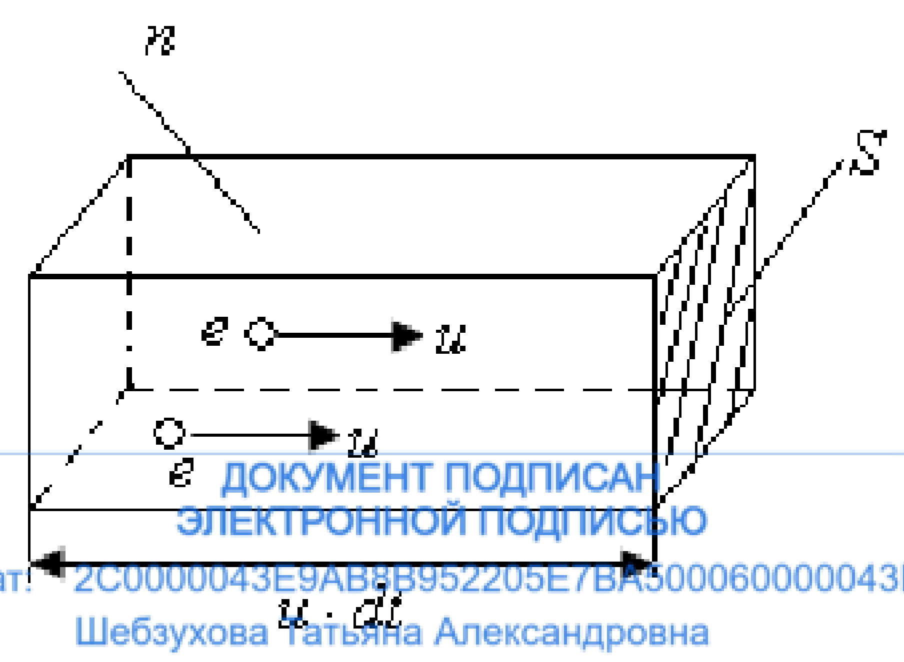


Рис. 20.1

тока в её пределах можно считать постоянной и тогда: $j=\frac{I}{S}=\frac{dq}{Sdt}=\frac{n\cdot e\cdot u\cdot dt\cdot S}{S\cdot dt}=n\cdot e\cdot u$.

В векторной форме:

$$\vec{j}=n\cdot e\cdot\vec{u}$$

$Рис.20.1$

Сила тока через произвольную поверхность

$$I=\int_S \vec{j}\,d\vec{S}$$

Электрический <u>ток, обусловленный движением свободных зарядов</u> в проводниках различной природы, называется <u>током проводимости</u>.

Свободные заряды в проводнике испытывают столкновения с атомами проводника. За время «свободного пробега» τ между двумя столкновениями заряд в проводнике приобретает <u>направленную скорость</u> вдоль внешнего электрического поля:

$$\vec{u}=\vec{w}\,\tau=\frac{e\vec{E}}{m_0}\tau$$

где $\vec{E}$ напряженность электрического поля в проводнике. После очередного столкновения скорость теряется. Затем, до следующего столкновения, происходит новое наращивание направленной скорости.

Из вышеизложенного следует, что ***условиями существования тока*** является:

а) Наличие свободных зарядов;

б) Наличие электрического поля внутри проводника, чтобы поддерживать перемещение зарядов.

Электродвижущая сила, напряженность

Если бы на носитель тока действовали только силы электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из места с большим потенциалом к месту с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это <u>привело бы к выравниванию потенциалов, и в результате ток бы прекратился</u>. Чтобы этого не произошло, должны иметься участки на которых перенос положительных зарядов происходит в сторону возрастания ϕ , т.е. против сил электростатического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью <u>сил не электростатического происхождения, называемых сторонними силами</u>. Физическая природа сторонних сил может быть различна. Например, химическая (как в аккумуляторах), механическая, магнитная и другие.

<u>Величина, равная отношению работы сторонних сил по перенесению заряда к величине этого заряда называется электродвижущей силой (ЭДС)</u>.

ЭДС измеряется в тех же единицах что и потенциал, т.е. в вольтах (В).

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде $\vec{F}_{стор}=\vec{E}_{стор}q$, где $\vec{E}_{стор}$ - напряженность поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом на некотором участке 1-2:

$$A_{стор}^{1-2}=q\int_1^2 \vec{E}_{стор}d\vec{l}$$

Разделив обе части согласно определению ЭДС на заряд, получим:

$$\varepsilon_{12}=\frac{A_{стор}^{1-2}}{q}=\int_1^2 \vec{E}_{стор}d\vec{l}$$

Для замкнутой цепи:

$$\varepsilon=\oint \vec{E}_{стор}d\vec{l}$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{F}_E=q\vec{E}$. Результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд, равна:

$$\vec{F}=\vec{F}_E+\vec{F}_{стор}=q\left(\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1-2, определяется выражением $A_{12}=q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}+q\int_1^2 \vec{E}_{стор}d\vec{l}$. Т.к. $q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}=q\left(\phi_1-\phi_2\right)$, а $q\int_1^2 \vec{E}_{стор}d\vec{l}=q\varepsilon_{12}$, тогда работа равна $A_{12}=q\left(\phi_1-\phi_2\right)+q\varepsilon_{12}$.

Разделим обе части на q. В левой части отношение $\frac{A_{12}}{q}$ обозначим U_{12}. Величина, численно равная отношению работы и электростатических и сторонних сил по перемещению заряда к величине этого заряда называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи U_{12}.

Таким образом (рис. 20.2),

Рис. 20.2

$$U_{12}=\phi_1-\phi_2+\varepsilon_{12}$$

Заметим, что если на участке отсутствует ЭДС, то $U_{12}=\phi_1-\phi_2$. (Для замкнутой цепи точки 1 и 2 совпадают, $\phi_1=\phi_2$ и, тогда $U_{12}=\varepsilon_{12}$.) Можно показать, что $U_{12}=IR$, где R - полное сопротивление цепи и тогда

$$IR=\phi_1-\phi_2+\varepsilon_{12}$$

Это уравнение выражает закон Ома для неоднородного участка цепи (с ЭДС).

Классическая электронная теория электропроводимости металлов и ее недостаточность

Внутренняя структура металлов характеризуется кристаллической решеткой. В узлах кристаллической решетки находятся положительные ионы; в пространстве между ними практически свободно движутся обобществленные электроны. Немецкий физик П. Друде предположил, что электроны ведут себя как частицы идеального газа, и предложил использовать для описания их поведения известные формулы кинетической теории газов.

Система свободных обобществленных в кристаллической решетке электронов называется электронным газом. В отличие от молекул газа, пробег которых определялся соударением молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами образующими кристаллическую решетку метала. Этими столкновениями обусловлено в частности, сопротивление металла электрическому току.

Хаотическое тепловое движение электронов в металлах можно характеризовать средней скоростью $¿\upsilon>=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\cdot m_e}}$ (для комнатных температур $\langle\upsilon\rangle\sim10^3\,м/с$). При наличии внешнего поля электроны обладают еще некоторой средней скоростью направленного движения $\vec{u}$. Обычно $u\sim10^{-2}\div10^{-3}\,м/с$, то есть $u<<\langle\upsilon\rangle$.

Вывод законов Ома и Джоуля-Ленца из электронных представлений

Закон Ома.

Средний путь, проходимый свободно движущимися электронами между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки называется средней длинной свободного пробега λ. Среднее время между двумя столкновениями $\tau=\frac{\lambda}{\upsilon}$ (определяется скоростью хаотического движения). При наличии поля $\vec{E}$ направленная скорость электронов накапливается за время свободного пробега и к моменту следующего соударения достигает максимальной величины:

$$\vec{u}_{max}=\vec{w}\,\tau=\frac{e\vec{E}}{m}\frac{\lambda}{\upsilon}.$$

Скорость $\vec{u}$ изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее за пробег значение равно половине максимального значения.

$$¿\vec{u}>=\frac{1}{2}\vec{u}_{\max}=\frac{1}{2}\frac{e\vec{E}}{m}\frac{\lambda}{\upsilon}$$

Плотность тока:

$$\vec{j}=n\cdot e\cdot ¿\vec{u}>=\frac{n\cdot e^2\cdot\lambda}{2m\upsilon}\vec{E}$$

Коэффициент пропорциональности между $\vec{j}$ и $\vec{E}$ обозначим $\sigma=\frac{n\cdot e^2\cdot\lambda}{2m\upsilon}$ (σ - проводимость). В результате получим закон Ома в локальной форме (параметры относятся к данной точке сечения проводника).

$$\vec{j}=\sigma\cdot\vec{E}$$

Плотность тока в проводнике пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{E}$. Коэффициентом пропорциональности является проводимость. (Замечание. Сравним полученную формулу с известной $I=\frac{U}{R}$. Проводимость σ обратно пропорциональна удельному сопротивлению ρ $\sigma=\frac{1}{\rho}$. Плотность тока $j=\frac{I}{S}$. Напряженность поля $E=\frac{U}{l}$ (l - длинна проводника). Тогда $\frac{I}{S}=\frac{1}{\rho}\frac{U}{l}$, или $I=\frac{U}{\rho\cdot l}S=\frac{U}{R}$, что и требовалось.)

Закон Джоуля – Ленца.

К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, среднее значение которой равно:

$$¿\Delta E_k>=\frac{m\cdot u_{\max}^2}{2}=\frac{e^2\lambda^2}{2m\upsilon^2}E^2$$

(Напомним: $u_{\max}=\frac{eE\lambda}{m\upsilon}$).

Столкнувшись с атомом, электрон, по предположению, полностью передает приобретенную им энергию кристаллической решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляясь в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем $z=\dfrac{\upsilon}{\lambda}$ соударений. Обозначим число электронов проводимости в единице объема n, тогда полная энергия, переданная электронами за единицу времени в единице объема будет равняться:

$$W=n\cdot z<\Delta E_k>=n\cdot z\cdot\frac{e^2\lambda^2}{2m\upsilon^2}E^2=\frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}\frac{\lambda}{\upsilon}\frac{\upsilon}{\lambda}E^2=\frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}E^2 .$$

Зная, что $\sigma=\dfrac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}$ в результате получим закон Джоуля – Ленца в локальной форме:

$$W=\sigma\cdot E^2$$

Тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема при протекании электрического тока пропорциональна квадрату напряженности поля.

Переходя от σ и E к ρ и j: ($\sigma=\dfrac{1}{\rho}$, $E=\dfrac{j}{\sigma}$), получим $W=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{j}{\sigma}\right)^2=\rho\cdot j^2$, или

$$W=\rho\cdot j^2$$

Получили другую форму закона Джоуля – Ленца. (Объемная плотность тепловой мощности равна произведению удельного сопротивления на квадрат плотности тока).

Затруднения классической электронной теории электропроводности металлов

Классическая теория смогла объяснить полученные ранее экспериментально законы Ома и Джоуля – Ленца, но есть и существенные затруднения. Основными являются следующие:

1. Теоретическое значение проводимости изменяется с температурой $\sigma_{теор}\sim\dfrac{1}{\sqrt{T}}$, экспериментальная же зависимость $\sigma=\dfrac{1}{T}$.

2. Классическая теория не в состоянии объяснить такое явление как сверхпроводимость.

Имеются и другие затруднения и в этом недостаточность классической теории.

Современная квантовая теория электропроводимости металлов показывает, что все трудности классической теории связаны с тем, что представление об электронах как идеальном газе является грубым приближением. На самом деле электроны внутри металла не являются такими свободными, как это следует из классической теории.

В современной квантовой теории показывается, что электроны внутри металла, как и электроны в атоме не могут иметь любую энергию, а лишь вполне дискретные значения энергии – энергия электронов квантуется.

5. Законы Кирхгофа

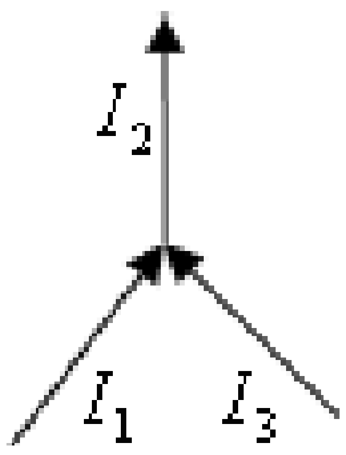


Рис. 20.3

1. Первый закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum I_k = 0$$

При этом токи, идущие к узлу, принято считать положительными, а от узла – отрицательными (можно и наоборот – это несущественно).

Заметим, что узел – это точка, где сходятся три и более тока. Например, для рис. 20.3 первый закон запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

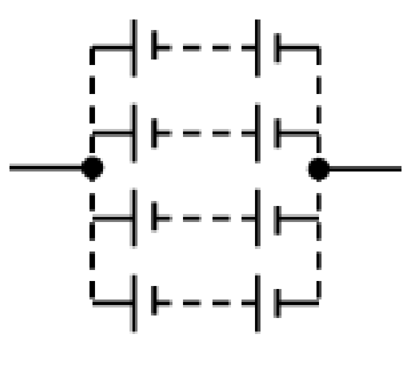
2. Второй закон Кирхгофа (он относится к любому выделенному в цепи замкнутому контуру):

Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления (сумма падений напряжений) равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$\sum I_k R_j = \sum \varepsilon_i$$

Примеры решения задач

Задача 1. Даны 12 элементов с ЭДС $\mathcal{E}$ =1,5 В и внутренним сопротивлением r=0,4Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление R=0,3 Ом? Определить максимальную силу тока I_{max}.



Дано:

N=12

$\mathcal{E}$ =1,5 *В*

r=0, 4 *Ом*

R=0, 3 *Ом*

$I_{max} = ?$

Предположим, что соединение состоит из m параллельно соединенных ветвей по n последовательно соединенных элементов в каждой (см. рис.). Очевидно, $N = m \cdot n$, При последовательном соединении ЭДС и внутреннего сопротивления элементов складываются; поэтому ЭДС каждой ветви $\mathcal{E}_{В} = n\mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление $r_{В} = n \cdot r$.

При параллельном соединении $\mathcal{E}$ системы равна $\mathcal{E}$ отдельного элемента и $\frac{1}{r_c} = \sum_1^m \frac{1}{r_i}$. Следовательно, ЭДС соединения равна ЭДС отдельной ветви $\mathcal{E}_С = \mathcal{E}_Б$, а внутреннее сопротивление соединения $r_c = \frac{r_Б}{m}$.

Таким образом, для батареи элементов имеем $\mathcal{E}_С = n\mathcal{E}$, и $r_c = \frac{nr}{m}$.

По закону Ома для замкнутой цепи получим

$$I = \frac{\mathcal{E}_C}{r_C + R} = \frac{n\mathcal{E}}{\frac{nr}{m} + R} = \frac{n \cdot n\mathcal{E}}{nr + mR} = \frac{N\mathcal{E}}{n \cdot r + mR} \qquad (1)$$

Так как $N = m \cdot n$ и $n = \frac{N}{m}$, то окончательно получим

$$I = \frac{N\mathcal{E}}{\frac{N}{m} r + mR} = \frac{N\mathcal{E} \cdot m}{Nr + m^2 R} \qquad (2)$$

Исследуем на экстремум функцию $I(m)$, представленную формулой (2).

$$I'(m) = \left(\frac{N\mathcal{E} \cdot m}{Nr + m^2 R} \right)' = \frac{N\mathcal{E} \cdot (Nr + m^2 R) - N\mathcal{E} \cdot m \cdot (2mR)}{(Nr + m^2 R)^2} \qquad (3)$$

Приравнивая (3) к нулю $\frac{N\mathcal{E}(Nr + m^2 R) - 2N\mathcal{E} \cdot m^2 R}{(Nr + m^2 R)^2} = 0$, найдем максимальное значение m. В результате получим

$$m = \sqrt{\frac{Nr}{R}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,4}{0,3}} = 4, \text{ и } \quad n = \frac{N}{m} = \frac{12}{4} = 3.$$

Таким образом:

$$I_{\max} = \frac{N\mathcal{E}}{nr + mR} = \frac{12 \cdot 1,5}{3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3} = 7,5 \text{ А}.$$

Ответ: соединение состоит из четырех ветвей по 3 последовательно соединенных элементов, максимальный ток 7,5 А.

Задача 2. При силе тока I_1=3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность P_1=18 Вт, при силе тока I_2=1 А – соответственно P_2=10 Вт. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи.

Дано:

I_1=3 А

P_1=18 Вт

I_2=1 А

P_2=10 Вт

$\mathcal{E}$ = ?

r = ?

Так как мощность $P = I \cdot U$, то напряжение в первом случае $U_1 = \frac{P_1}{I_1}$, а во втором $U_2 = \frac{P_2}{I_2}$.

Из закона Ома для замкнутой цепи - $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$.

Из приведенных выше равенств следует

$$\begin{cases} \mathcal{E} = I_1 r + U_1 \\ \mathcal{E} = I_2 r + U_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = I_1 r + \frac{P_1}{I_1} \\ \mathcal{E} = I_2 r + \frac{P_2}{I_2} \end{cases}$$

$$I_1 r + \frac{P_1}{I_1} = I_2 r + \frac{P_2}{I_2} \Rightarrow r = \frac{P_2 I_1 - P_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = 2 \text{ Ом},$$

и $\mathcal{E} = I_1 r + \frac{P_1}{I_1} = 12$ В.

Задача 3. По железному проводнику, диаметром $d = 0{,}6$ мм, течет ток 16 А. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ направленного движения электронов, считая, что концентрация n свободных электронов равна концентрации n' атомов проводника.

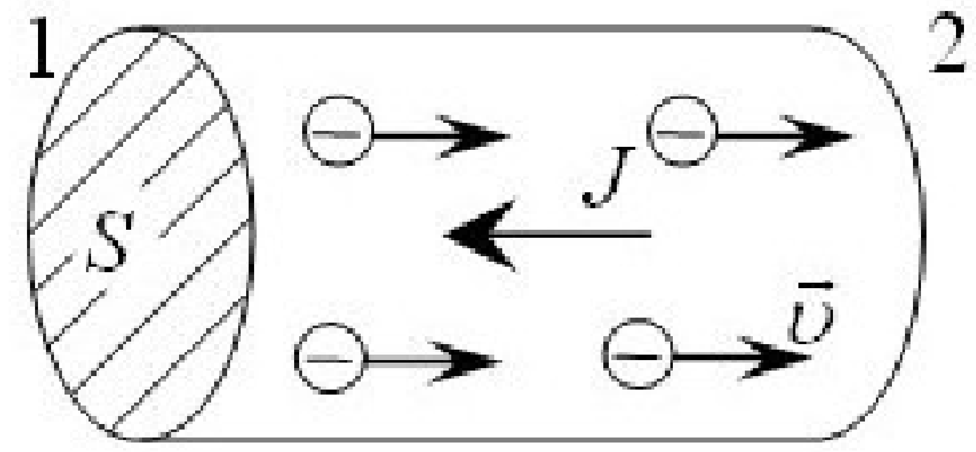
Дано:

$d = 0{,}6$ мм$=6\cdot10^{-4}$м

I=16 А

$n = n'$

$\langle v \rangle$=?



Средняя скорость упорядоченного движения электронов

$$\langle v \rangle = \frac{l}{t} \tag{1}$$

где t – время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся между сечениями 1 и 2, пройдя сечение 2 (см. рис.), перенесут заряд $Q = e \cdot N$, создавая ток силой

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t} \tag{2}$$

где e – элементарный заряд, N – число электронов проводника, l – его длина.

Очевидно число электронов $N = n \cdot V = n \cdot l \cdot S$ (3)

где V- объем, а S – площадь сечения проводника. По условию, $n = n'$, следовательно

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \cdot \rho}{M}, \tag{4}$$

где N_A – число Авогадро, ρ – плотность железа $\left(\rho = 7{,}87 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$,

M – молярная масса железа $\left(M = 56 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right)$.

Подставляя (4) в (3), а затем в (2), окончательно получим

$$I = \frac{N_A \cdot \rho \cdot l \cdot S \cdot e}{M \cdot t},$$

откуда $$l = \frac{IMt}{N_A \rho S e}.$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

Подставим полученное выражение в (1), считая, что

После преобразования найдем, что

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{4IM}{\pi d^2 N_A \cdot \rho \cdot e} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot \left(6 \cdot 10^{-4}\right)^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23} \cdot 7{,}87 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{м/с} = 4{,}2\,\text{мм}$$

Вопросы и задания.

1. Постоянный электрический ток и его характеристики. Закон Ома для участка цепи.

2. Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для замкнутой цепи.

3. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца.

4. Классическая электронная теория электропроводимости металлов и ее недостаточность

5. Обобщенный закон Ома. Правила Кирхгофа.

6. Электрический ток в металлах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Три батареи с ЭДС E_1= 12 В, E_2= 5 В и E_3 = 10 В и одинаковыми внутренними сопротивлениями r, равными 1 Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов I, идущих через каждую батарею.

2. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС Е каждого элемента равна 1,2 В, внутреннее сопротивление r = 0,2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R = 1,5 Ом. Найти силу тока I во внешней цепи.

3. Внутреннее сопротивление r батареи аккумуляторов равно 3 Ом. Сколько процентов от точного значения ЭДС составляет погрешность, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением $R_В$ = 200 Ом, принять ее равной ЭДС?

4. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до I = 10 А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление $R_а$ амперметра равно 0,02 Ом и сопротивление $R_ш$ шунта равно 5 мОм?

5. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от I_0 = 0 до I = 3 А в течение времени t = 10 с. Определить заряд Q, прошедший в проводнике.

6. Даны 12 элементов с ЭДС E = 1,5 В и внутренним сопротивлением r = 0,4 Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление R = 0,3 Ом? Определить максимальную силу тока I_{max}.

7. Два элемента (E_1=1,2 В, r_1=0,1 Ом; E_2=0,9 В, r_2=0,3 Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно 0,2 Ом. Определить силу тока I в цепи.

8. Определить силу тока короткого замыкания источника тока, если при внешнем сопротивлении R_1=50 Ом сила тока в цепи I_1=0,2 А, а при R_2=110 Ом сила тока в цепи I_2=0,1 А.

9. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением $R_в$=1 кОм. Показания амперметра I=0,5 А, вольтметра U = 100 В. Определить сопротивление R катушки. Сколько процентов от точного значения сопротивления катушки составит погрешность, если не учитывать сопротивления вольтметра?

10. К источнику тока с ЭДС E =1,5 В присоединили катушку с сопротивлением R=0,1Ом. Амперметр показал силу тока, равную I_1=0,5 А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока.

11. По проводнику сопротивлением R = 3 Ом течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время τ =8 с, равно 200 Дж. Определить количество электричества q,протекшее за это время по проводнику. В начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.

12. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 12 Ом равномерно убывает от I_0 = 5А до I = 0 в течение времени t = 10 с. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

13. Сила тока в проводнике сопротивлением r = 100 Ом равномерно нарастает от I_0 = 0 до I_{max} = 10 А в течение времени τ=30 с. Определить количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике.

14. При силе тока I_1 = 3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделятся мощность P_1 = 18 Вт, при силе тока I_2 = 1 А – соответственно P_2 = 10 Вт. Определить ЭДС E и внутреннее сопротивление r батареи.

15. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через t_1 = 15 мин, если только вторая, то через t_2 = 30 мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? Параллельно?

16. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС E батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление r = 1 Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность P=80 Вт. Вычислить силу тока I в цепи и КПД η нагревателя.

17. ЭДС Е батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока I = 4А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R_1 КПД будет равен 99%?

18. К батарее аккумуляторов, ЭДС Е которой равна 2 В и внутреннее сопротивление r равно 0,5 Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность P, которая при этом выделяется в проводнике.

19. ЭДС батареи аккумуляторов Е =12 В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

20. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение U на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление R реостата равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность P=120 Вт. Найти силу тока в цепи.

21. В медном проводнике длиной l=2 м и площадью S поперечного сечения, равной 0,4 мм^2, идет ток. При этом ежесекундно выделяется количество теплоты Q=0,35 Дж. Сколько электронов N проходит за 1 секунду через поперечное сечение этого проводника?

22. Плотность тока j в медном проводнике равна 3 А/мм^2. Найти напряженность E электрического поля в проводнике.

23. Плотность тока j в алюминиевом проводе равна 1 А/мм^2. Найти среднюю скорость $<\upsilon>$ упорядоченного движения электронов, предполагая, что число

свободных электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 см^3 алюминия равно число атомов.

24. Определить среднюю скорость $< \upsilon >$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока I = 10 А и сечении S проводника, равном 1 мм^2. Принять, что каждый атом меди приходится два электрона проводимости.

25. Сила тока I в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение проводника S= 4 мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится n=22,5·10^{22} свободных электронов, определить среднюю скорость $<\upsilon>$ их упорядоченного движения.

26. В медном проводнике объемом V=6 см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время t=1 мин выделилось количество теплоты Q=216 Дж. Вычислить напряженность E электрического поля в проводнике.

27. Металлический проводник движется с ускорением a=100 м/с^2. Используя классическую теорию электропроводности металлов, определить напряженность E электрического поля в проводнике.

28. Медный диск радиусом R=0,5 м равномерно вращается (ω=10^4 рад/с) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциалов U между центром диска и его крайними точками.

29. Металлический стержень движется вдоль своей оси со скоростью υ=200 м/с. Определить заряд Q, который протечет через гальванометр, подключаемый к концам стержня, при резком его торможении, если длина l стержня равна 10 м, а сопротивление R всей цепи (включая цепь гальванометра) равно 10 мОм.

30. Удельная проводимость γ металла равна 10 МСм/м. Вычислить среднюю длину $< l >$ свободного пробега электронов в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{28} м$^{-3}$. Среднюю скорость u хаотического движения электронов принять равной 10^6 м/с.

Раздел 4. Магнетизм. Электромагнитные колебания и волны

Практическое занятие 10.

Тема занятия. **Понятие о магнитном поле. Закон Био – Савара – Лапласа.**

Цель занятия. Изучить основные проявления магнитного поля постоянного тока.

Теоретическая часть.

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля.

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для вектора B

Термин магнитное поле ввел в 1845 году английский физик М.Фарадей, считавший, что как электрическое, так и магнитное взаимодействия осуществляются посредством единого материального поля.

Источниками макроскопического магнитного поля являются намагниченные тела, проводники с током и движущиеся электрически заряженные тела. Природа этих источников едина: магнитное поле возникает в результате движения заряженных микрочастиц.

Магнитное поле – силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции B. Значение B определяет силу, действующую в данной точке поля на движущийся электрический заряд и на тела, имеющие магнитный момент.

Вектор B можно ввести одним из трех эквивалентных способов:

а) исходя из силового действия магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу;

б) основываясь на силовом действии магнитного поля на малый элемент проводника с током;

в) исходя из силового действия магнитного поля на небольшую рамку с током.

Например, **магнитная индукция** – векторная величина, модуль которой определяется отношением максимальной силы $F_{\max}$, действующей со стороны магнитного поля на участок проводника с током, к силе этого тока I и длине участка Δl проводника.

$$B = \frac{F_{\max}}{I \cdot \Delta l}, \qquad [B] = Тл \qquad (1)$$

Для графического изображения стационарного магнитного поля пользуются методом линий индукции. Линиями магнитной индукции (силовыми линиями магнитного поля) называются линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора B магнитной индукции в этой точке поля. Линии магнитной индукции нигде не обрываются, т. е. не начинаются и не кончаются. Они либо замкнуты, либо идут из бесконечности на бесконечность.

Магнитное поле называется однородным, если во всех его точках вектор магнитной индукции B имеет одно и то же значение. В противном случае магнитное поле называется неоднородным.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле B, создаваемое несколькими источниками, равно векторной сумме полей B_i, порождаемых каждым источником в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i. \tag{2}$$

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца. Поэтому поток вектора B через любую замкнутую поверхность S равен нулю. Следовательно, **теорема Гаусса для вектора** B формулируется следующим образом:

$$\Phi_B = \oint B dS = 0. \qquad [\Phi_B] = Вб \tag{3}$$

Наряду с индукцией B используется понятие напряжённости магнитного поля H, как меры воздействия на проводники с током и магнитную стрелку (размерность её - *А/м*). Напряженность H характеризует магнитное поле, создаваемое макроскопическими токами и поэтому определяется их величинами, конфигурацией в пространстве и не зависит от свойств среды. Вектор индукции магнитного поля B связан с напряженностью магнитного поля H соотношением

$$\mathrm{B} = \mu\mu_0\mathrm{H}, \tag{4}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $Гн/м$ – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды.

Закон Био – Савара - Лапласа для элемента тока.

Расчет магнитных полей

На основании анализа опытных данных для магнитных полей постоянных токов бы установлен **закон Био – Савара – Лапласа** вида:

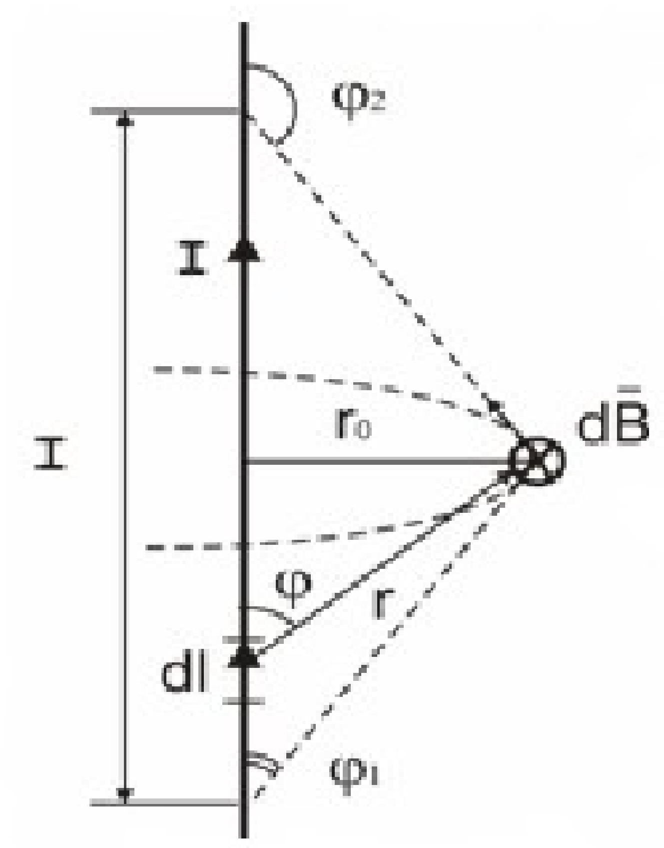
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl \sin\varphi}{r^2}, \tag{5}$$

где r – радиус-вектор, проведенный из элемента проводника в рассматриваемую точку поля; φ – угол между векторами dl и r.

Направление вектора dB можно найти по правилу Максвелла (правилу буравчика): если ввинчивать буравчик с правой резьбой по направлению вектора плотности тока в элементе проводника, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление вектора dB магнитной индукции.

I. *Магнитное поле прямого тока.*

Найдем с помощью закона Био-Савара-Лапласа магнитное поле прямолинейного проводника с током I (рисунок 1). Пусть r_0 – расстояние от точки, в которой определяется поле, до проводника с током. Тогда расстояние r от участка проводника dl можно выразить так: $r = r_0/\sin\varphi,$ где φ – угол между векторами dl и r. Длина dl связана с углом φ, под которым виден этот участок проводника из рассматриваемой точки:



$$dl = \frac{r d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2\varphi}. \tag{6}$$

Подставим эти значения в формулу (5)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot r_0\cdot d\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\sin^2\varphi}{r_0^2\cdot\sin^2\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}\cdot\sin\varphi d\varphi. \tag{7}$$

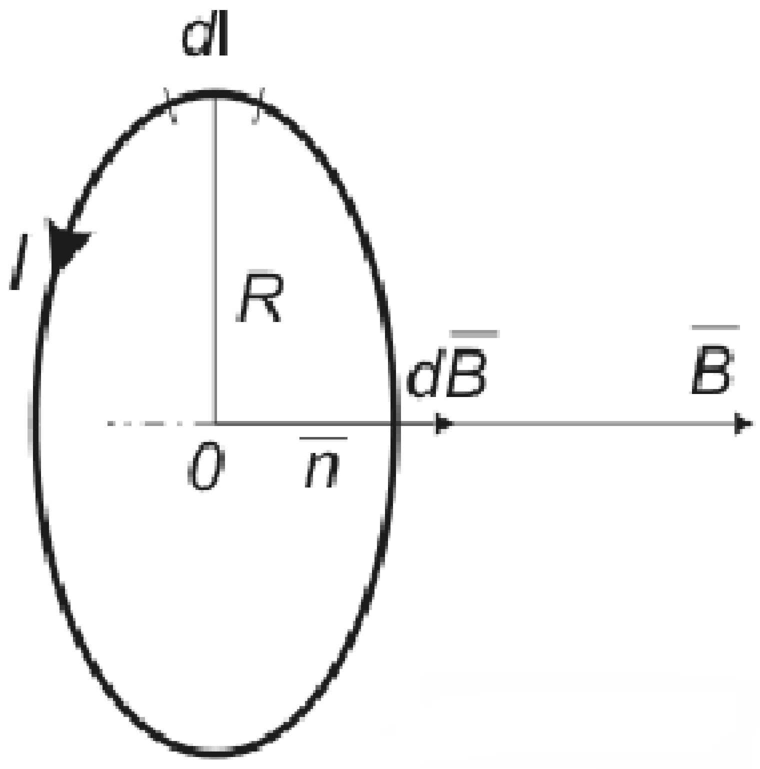
В соответствии с принципом суперпозиции (2) магнитная индукция для участка проводника B равна:

$$B = \int dB = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}\cdot\sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2), \tag{8}$$

где φ_1 и φ_2 – углы между вектором плотности тока в проводнике и радиус-векторами, проведенными в рассматриваемую точку из начала и конца участка проводника.

Рис.2.

Если проводник бесконечно длинный, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ и индукция магнитного поля, как следствие закона Био – Савара – Лапласа, в любой точке пространства



вычисляется по простой формуле вида:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0}.$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей.

2. *Магнитное поле в центре кругового проводника с током.*

Как следует из рисунка 2, все элементы кругового проводника с током создают в его центре магнитное поле одинакового направления – вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов dB можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиус-вектору (*sinφ=1*) и расстояния всех элементов проводника до центра кругового тока одинаковы и равны R , то согласно (5)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} dl. \tag{10}$$

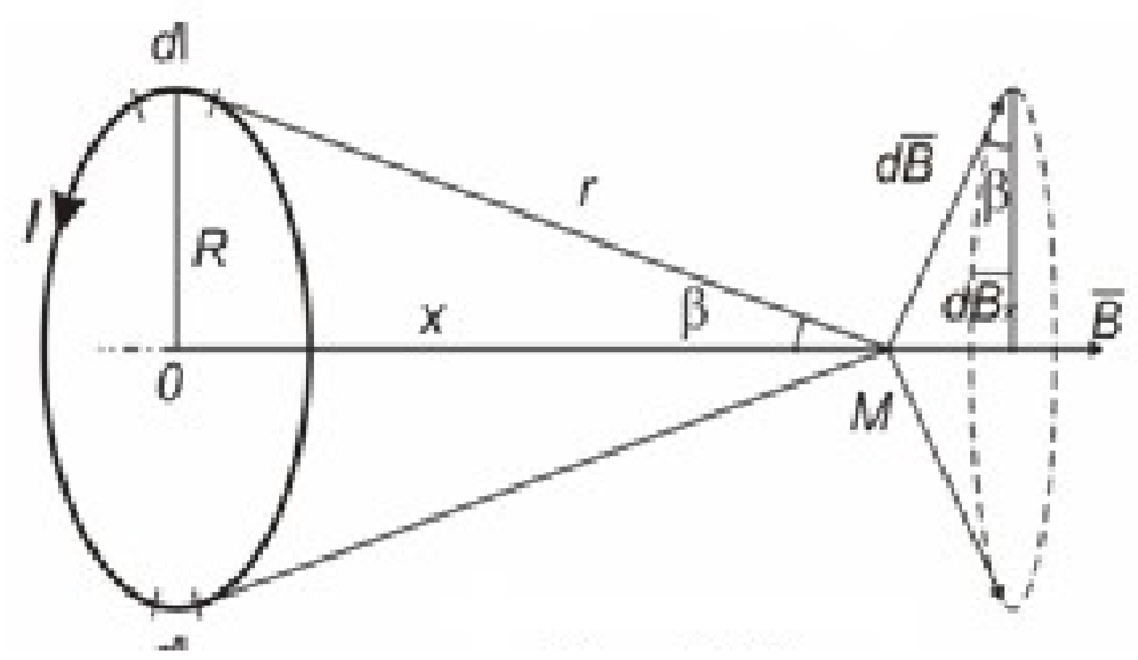
Тогда интеграл, взятый по контуру проводника,

$$B_0 = \oint_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl,$$

Так как $\oint dl = 2\pi R.$, то магнитная индукция в центре кругового проводника с током в вакууме равна

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}. \tag{11}$$

3. *Магнитное поле на оси кругового витка с током.*



Индукция магнитного поля вдоль оси, проведенной через центр кругового тока перпендикулярно его плоскости, будет уменьшаться по мере удаления от кругового тока. Если на оси выбрать точку M (рис. 3), то результирующая индукция B определяется как сумма проекций dB_x, выраженных формулой.

$$dB_x = \sin\beta dB = \frac{R}{r} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl. \tag{12}$$

Откуда несложно получить, интегрируя (16.12)

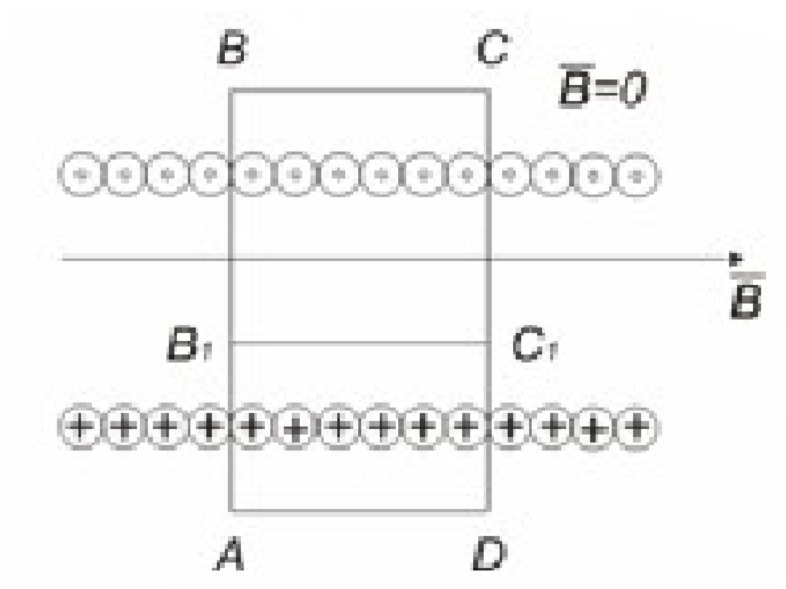
$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\oint_L dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{IR}{r^3}\cdot 2\pi R. \qquad (13)$$

Циркуляция вектора B. Магнитное поле соленоида и тороида

В целях упрощения в вычислении магнитных полей используется теорема о циркуляции результирующего вектора B, которая формулируется на основании определения циркуляции с учетом индукций магнитных полей B_k, создаваемых каждым из токов по (16.9) в соответствии с законом Био – Савара – Лапласа, в виде:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{m} I_k, \qquad (14)$$

где индексом "*k*" обозначены лишь токи, охватываемые контуром. Следовательно, **теорема:** ***циркуляция вектора магнитной индукции*** B ***по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на*** μ_0.



Характерным примером использования теоремы о циркуляции B (или напряжённости H; закона полного тока) для получения расчётных формул являются поле бесконечно длинного соленоида, а также тороида.

Соленоид – свёрнутый в спираль изолированный проводник, по которому течёт электрический ток.

Рис. 4.

Поле бесконечного соленоида аксиально симметрично и может иметь лишь компоненту, параллельную оси соленоида (витки намотаны очень плотно, рис. 4).

Для определения B внутри соленоида применим закон полного тока к контуру AB_1C_1DA, в нём N витков. Интеграл не равен нулю только на участке B_1C_1 и поэтому

$$B_{B1C1}\cdot l = n\cdot l\cdot I\cdot \mu_0, \qquad (13)$$

Из (13) видно, что **поле внутри соленоида** однородно и его индукция равна:

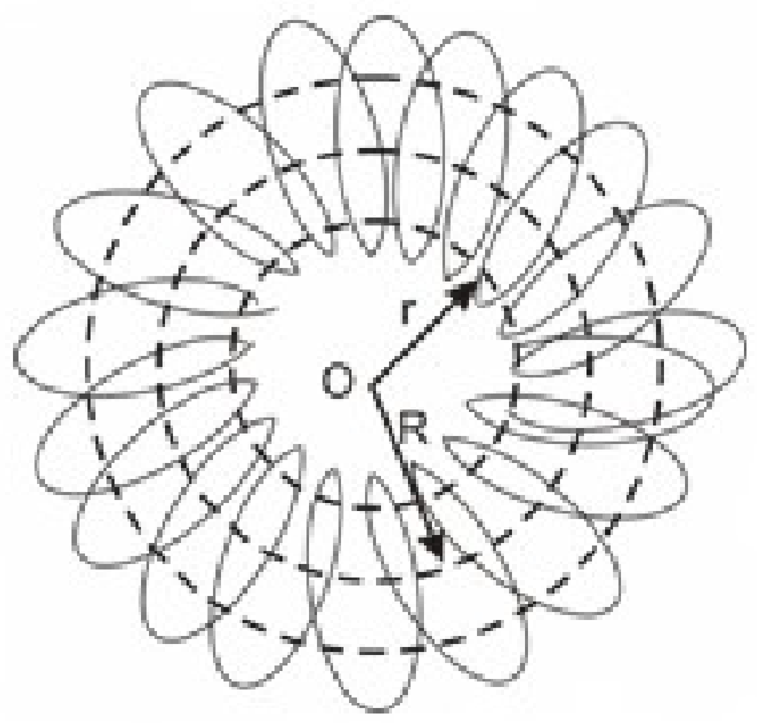
$$B = \mu_0 nI \text{, где } n = N/l \qquad (14)$$

Произведение nI называется числом ампер-витков на метр.

В магнитную индукцию на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад. Поэтому у конца полубесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (16.14)

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI. \qquad (15)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (14) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (15) - для точек на оси вблизи его концов.



Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму радиально изогнутого цилиндра, у которого входное и выходное сечения совпадают (рис.5).

Формула для определения магнитной индукции внутри тороида получается на основании теоремы о циркуляции B аналогичным образом, и имеет вид:

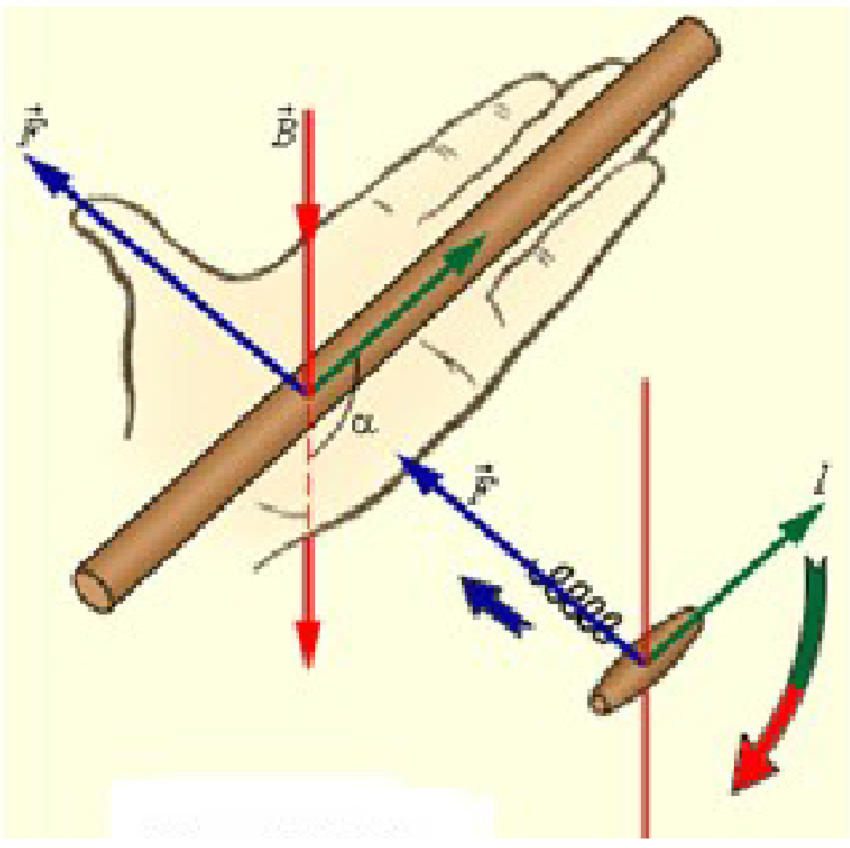
$$B = \mu_0 nI \cdot \frac{R}{r}. \qquad (16)$$

Рис.5.

Вне тороида магнитная индукция равна нулю.

С помощью теоремы о циркуляции вектора B можно решить и ряд других задач, например, найти индукцию в коаксиальном кабеле, который используется для передачи постоянного тока. Кроме того, этот закон используется при расчете магнитных цепей, где выполняет роль второго правила Кирхгофа.

Сила Ампера. Сила Лоренца



Ампер на опыте установил, что на проводник с током **в магнитном поле действует сила**

$$F = I[lB], \qquad (17)$$

модуль которой определяется по формуле:

$$\mathrm{F} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{B} \cdot \ell \cdot \sin\alpha,$$

а направление, по правилу правого винта или правилу «левой руки» (рис. 6).

Рис.6.

Возникновение этой силы связано с тем, что магнитное поле действует на заряженные частицы, движущиеся в проводнике с некоторой скоростью v. Сила, действующая на заряд в этом случае, называется **силой Лоренца,** и определяется по формуле:

$$F = q[\upsilon B], \qquad (18)$$

а ее модуль

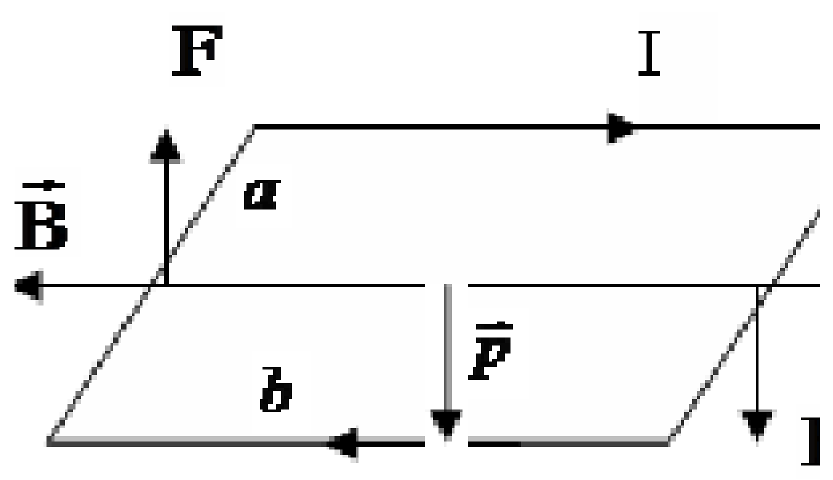
$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями скорости частицы и вектора магнитной индукции.

Магнитное поле не действует на покоящийся заряд и в этом состоит существенное отличие магнитного поля от электрического. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы (ее перемещению) и поэтому работы не совершает, а, следовательно, не изменяет кинетическую энергию частицы. Выражение для силы Лоренца (18) позволяет определить характер движения заряженной частицы в магнитном поле. При $\alpha = 90^\circ$ частица движется по окружности радиуса $R = \dfrac{mv}{qB}$. Если угол α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 90^\circ$, то частица движется по спирали с радиусом R и шагом h. Если скорость частицы v составляет угол α с вектором магнитной индукции B неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то R и h уменьшаются. На этом основано явление фокусировки заряженных частиц в магнитном поле.

<u>Контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле</u>

Рассмотрим контур с током, находящийся в однородном магнитном поле. Выделим элемент контура $d\ell$. На него в магнитном поле будет действовать сила, согласно (17), равная $dF = I\left[d\ell \cdot B\right]$. Результирующая сила, действующая на контур, будет равна геометрической сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т.е.



$$F = \oint_L I\left[dl \cdot B\right] = I \cdot B \oint_L dl = 0 \qquad (19)$$

Следовательно, в однородном магнитном поле результирующая сила, действующая на контур с током, будет равна нулю, и контур перемещаться не будет.

Рис.7.

Для простоты рассуждений возьмем прямоугольный контур со сторонами «а» и «b» (рис. 7). В магнитном поле на него будет действовать вращающий момент пары сил F и поэтому, контур будет вращаться. Вращающий момент пары сил $M = F \cdot b \cdot \sin\alpha$, но $F = I \cdot B \cdot a$, и, следовательно, $M = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha$. Так как $a \cdot b = S$ – площадь контура, то $M = I \cdot B \cdot S \cdot \sin\alpha$. Введем вектор $p = I \cdot S$ называемый **вектором магнитного момента** контура. Его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру, которая определяется с помощью правила правого винта. Тогда для вращающего момента, действующего на контур с током в магнитном поле, получим выражение:

$$M = pB\sin\alpha = [pB] \quad (20)$$

Очевидно, что $M = 0$ при $\sin\alpha = 0$, т.е. контур с током в магнитном поле ориентируется так, чтобы его вектор магнитного момента был параллелен вектору магнитной индукции.

Рассмотрим контур, находящийся в неоднородном поле. Работа, совершаемая при повороте контура на угол $d\alpha$, определяется по формуле $dA = M \cdot d\alpha$. С учетом (20) получим:

$$dA = p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Полная механическая работа

$$A = \int dA = \int p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = -pB\cos\alpha. \quad (21)$$

Механическая потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет определяться этим же выражением.

Ранее мы показали, что связь между силой и энергией $F_x = -\dfrac{dW}{dx}$ и, следовательно, на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать сила

$$F_x = p \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \cos\alpha. \quad (22)$$

При $\alpha < 90^\circ$, $F_x > 0$ контур втягивается в поле, при $\alpha > 90^\circ$, $F_x < 0$ контур выталкивается из поля.

В результате перемещения проводника с током или контура произвольной формы в магнитном поле совершается работа по преодолению сил поля. Не сложно получить формулу, определяющую эту работу.

Рассмотрим проводник длиной ℓ, с током I, способный свободно перемещаться в магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно проводнику (рис. 8).

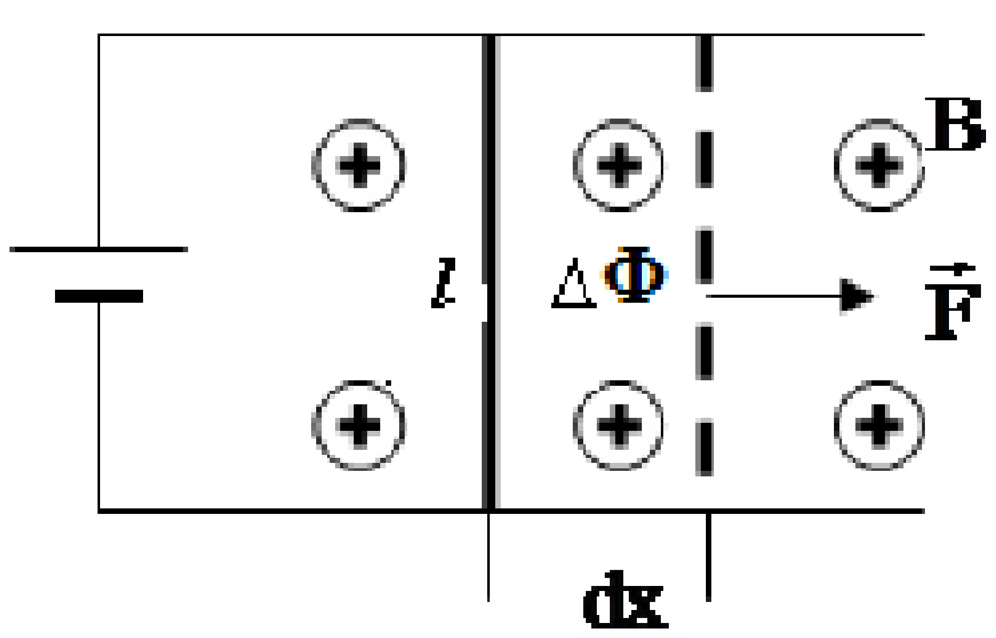


Рис.8