

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского  
федерального университета

Дата подписания: 12.09.2023 17:32:05

Уникальный программный ключ: «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

# Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»

для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Передача и распределение электрической энергии в системах электроснабжения

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

## 1. Основные понятия к применению законов Кирхгофа к расчёту электрических цепей.

Электрический ток - упорядоченное движение электрических зарядов в указанном направлении.

$$i = \frac{Q}{t} \text{ при постоянном токе}$$

$$i = \frac{dQ}{dt} \text{ при переменном токе}$$

Т.о. сила электрического тока приравнивается к величине электрического заряда, проходящего через устройство в единицу времени.

Электрического напряжение – работа электрических сил по перемещению электрического заряда из одной точки электрического поля в другую .

$$u = \frac{A}{Q} \text{ при постоянно токе,}$$

$$u = \frac{dA}{dQ} \text{ при переменном токе}$$

Электрическая мощность- скорость изменения электрической энергии во времени.

Мгновенная электрическая мощность источника электрической энергии или элемента цепи с двумя электрическими зажимами равна произведению напряжения на ток.

$$p = u \cdot i = \frac{A}{Q} \cdot \frac{Q}{t} = \frac{A}{t} \text{ при постоянном токе,}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{dA}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{dA}{dt} \text{ при переменном токе}$$

Баланс электрической мощности – сумма мощностей всех приемников электрической цепи в любой момент времени равна сумме мощностей всех источников.

1.2 Схемы электротехнических устройств и электрических цепей, составленные из идеализированных элементов, называются схемами замещения этих устройств и цепей.

Схемы замещения источников электрической энергии содержат два вида активных элементов: источники напряжения (источники ЭДС) и источники тока.

Резистор – элемент электрической цепи, напряжение на котором пропорционально току.



$u = R \cdot i$ , где коэффициент пропорциональности  $R$  - сопротивление резистора.

Катушка индуктивности - элемент электрической цепи напряжение на которой пропорционально скорости изменения тока.



$u = L \frac{di}{dt}$ , где коэффициент пропорциональности  $L$  - индуктивность катушки.

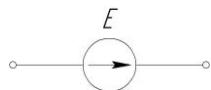
Конденсатор – элемент электрической цепи, ток в котором пропорционален скорости изменения напряжения.



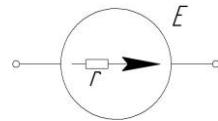
$i = C \frac{du}{dt}$ , где коэффициент пропорциональности  $C$  - ёмкость конденсатора.

Примечание: идеальная катушка индуктивности и идеальный конденсатор по определению не обладают омическим сопротивлением.

Идеальный источник напряжения (источник ЭДС) – источник, напряжение на зажимах которого не зависит от тока, протекающего через него.  $U=E$ .



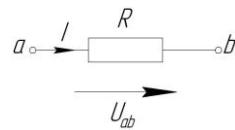
Реальный источник напряжения (источник ЭДС) – источник, напряжение на зажимах которого уменьшается с увеличением тока, протекающего через него



$U = E - I \cdot r$ , где  $r$  – внутреннее сопротивление источника напряжения (источника ЭДС).

Идеальный источник тока – источник, создающий ток в электрической цепи, независимый от значения напряжения на его зажимах.

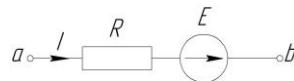
1.3. Закон Ома для участка цепи, не содержащей ЭДС.  $I = \frac{U}{R}$



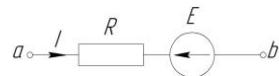
Ток, протекающий между точками «а» и «б» участка цепи прямо пропорционален напряжению, приложенному к этому участку и обратно пропорционален сопротивлению этого участка.

1.4. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

1.4.1. Ток, протекающий по участку цепи, содержащей ЭДС и направленной согласно току, определяется по формуле  $I = \frac{E - U_{ba}}{R}$



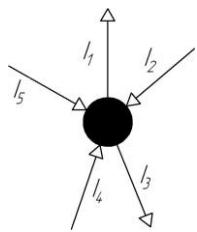
1.4.2. Ток, протекающий по участку цепи, содержащей ЭДС и направленной против тока, определяется по формуле:  $I = \frac{-E - U_{ba}}{R}$



## 1.5. Законы Кирхгофа

### 1.5.1. Первый Закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю.

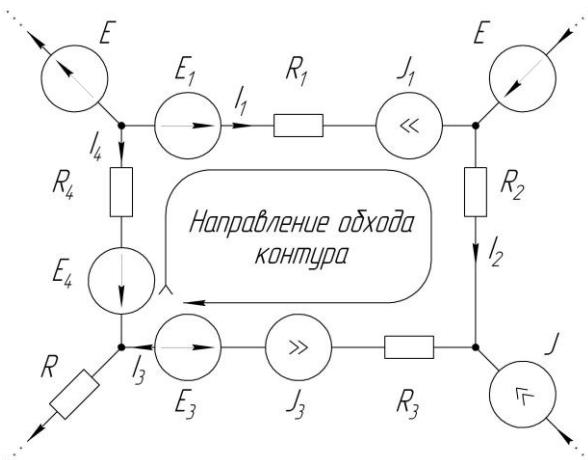


$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

### 1.5.2 Второй Закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма напряжений на всех пассивных элементах любого замкнутого контура, равна алгебраической сумме ЭДС вдоль того же контура.

Примечание. Падения напряжений на пассивных элементах контура и значения ЭДС вдоль того же контура входят в вышеуказанные суммы со знаком «+», если они совпадают с выбранным направлением обхода контура и со знаком «-», если не совпадают.



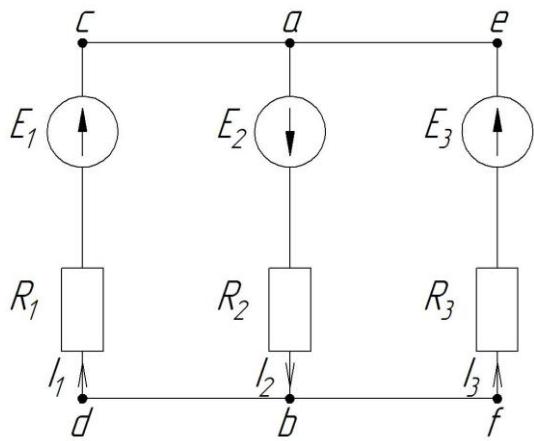
$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 = E_1 - E_3 - E_4 - J_1 - J_3$$

## 1.6. Применение законов Кирхгофа к расчёту сложной электрической цепи.

### 1.6.1 Необходимо рассчитать сложную электрическую цепь.

Расчет электрической цепи сводится к определению неизвестных токов в ветвях при заданных значениях сопротивлений и ЭДС.

Количество неизвестных токов равно количеству ветвей в заданной электрической цепи. Для их определения составляем  $n-1$  уравнений по первому закону Кирхгофа, где  $n$  число узлов в схеме. Далее составляем  $M-(n-1)$  уравнений по второму закону Кирхгофа, где  $M$ -количество ветвей в схеме.



В приведенной схеме имеем 2 узла «а» и «б». Для узла «а» уравнение по первому закону Кирхгофа выходит следующим образом

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Число ветвей равно трём. Следовательно необходимо составить 2 уравнения по второму закону Кирхгофа для (например) контура «с-а-б-д» и (например) контура «с-е-ф-д».

Для контура «с-а-б-д»:

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = E_1 + E_2.$$

Для контура «с-е-ф-д»:

$$I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 = E_1 - E_3$$

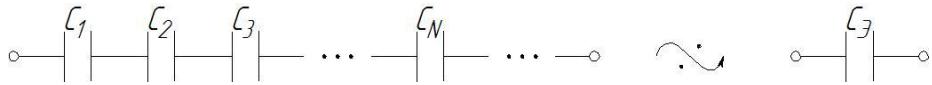
Т. о. имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными, которую решаем относительно искомых токов.

1.7. Если электрическая цепь содержит ряд последовательных или параллельных пассивных элементов, следует преобразовать схему и определить эквивалентное сопротивление или емкость.

1.7.1 В случае последовательного сопротивления соединения элементов:

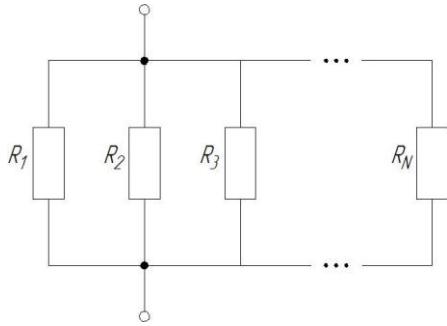


$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

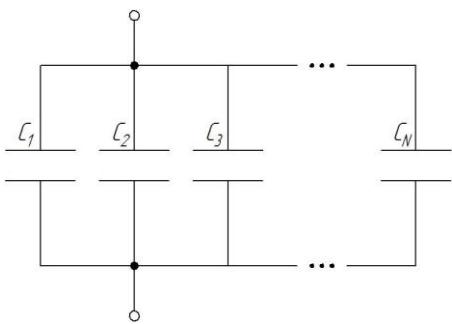


$$C_s = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdots C_n}{C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdots C_n + C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdots C_n + \cdots + C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdots C_{n-1}}$$

1.7.2. В случае параллельного соединения элементов:

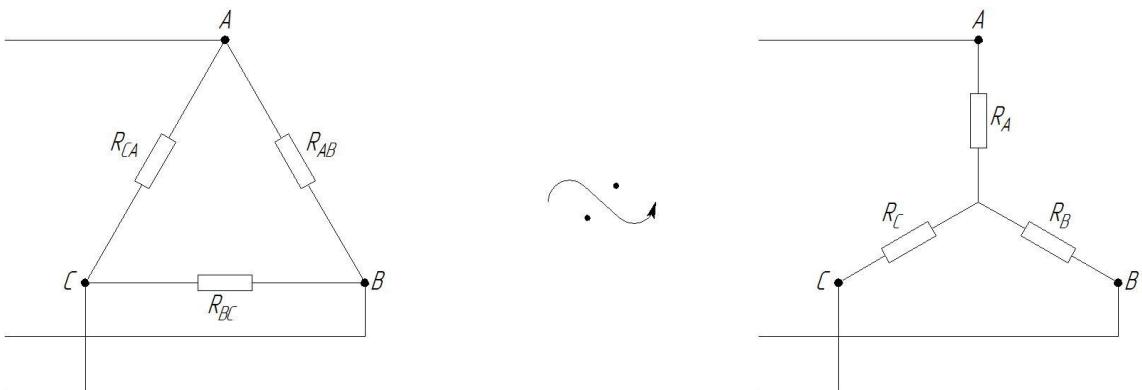


$$R_s = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_n}{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdots R_n + R_1 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdots R_n + \cdots + R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_{n-1}}$$



$$C_s = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$

1.7.3. Если необходимо преобразовать соединение элементов  $\Delta \Rightarrow Y$



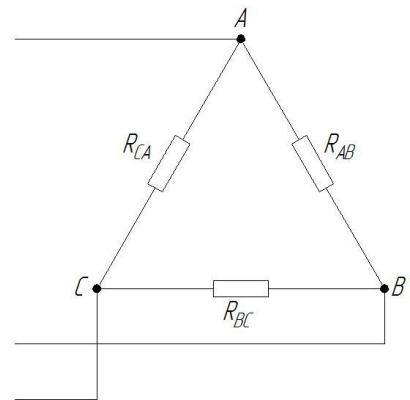
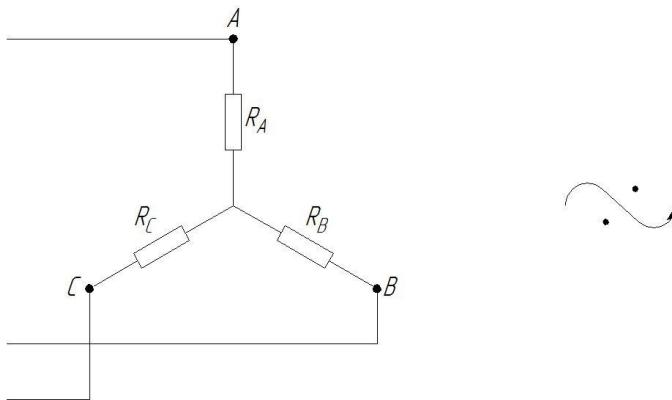
используем формулы:

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

$$R_B = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}},$$

$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

1.7.4. Если необходимо преобразовать соединение элементов  $Y \Rightarrow \Delta$



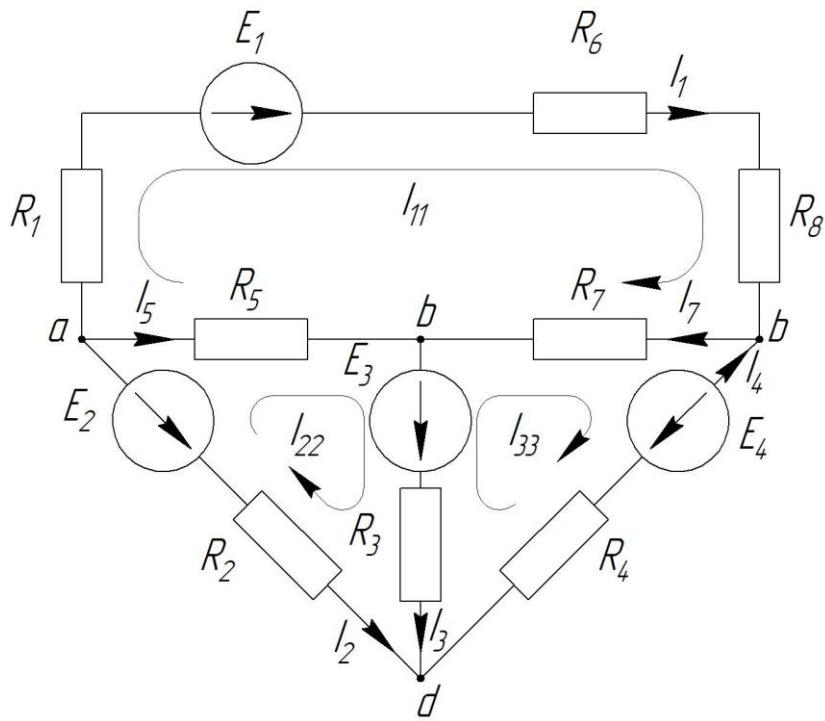
используем формулы:

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C},$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A},$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B}.$$

1.8. При расчете электрических цепей методом контурных токов полагают, что в каждом замкнутом контуре течёт «свой контурный ток». Следует учитывать, что это фиктивные токи, это математический приём, но уравнения составляются именно относительно контурных токов.



После чего определяют токи в ветвях.

Число неизвестных в этом методе определяется числом контурных токов, протекающих в независимых замкнутых контурах, для которых могут быть составлены уравнения по второму закону Кирхгофа.

1.8.1. Задаём в каждом из контуров контурные токи и направляем их по часовой стрелке.

1.8.2. Для каждого из независимых контуров составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_6 + I_{11} \cdot R_8 + (I_{11} - I_{33}) \cdot R_7 + (I_{11} - I_{22}) \cdot R_5 = E_1$$

$$I_{22} \cdot R_2 + (I_{22} - I_{11}) \cdot R_5 + (I_{22} - I_{33}) \cdot R_3 = -E_2 + E_3$$

$$I_{33} \cdot R_4 + (I_{33} - I_{22}) \cdot R_3 + (I_{33} - I_{11}) \cdot R_7 = -E_3 - E_4$$

Полученную систему уравнений приводим к виду:

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8) + I_{22} \cdot (-R_5) + I_{33} \cdot (-R_7) = E_1$$

$$I_{11} \cdot (-R_5) + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_5) + I_{33} \cdot (-R_3) = -E_2 + E_3$$

$$I_{11} \cdot (-R_7) + I_{22} \cdot (-R_3) + I_{33} \cdot (R_3 + R_4 + R_7) = -E_3 - E_4.$$

1.8.3. В матричной системе счисления система имеет решение:

$$I_{11} = \frac{\Delta_{I_{11}}}{\Delta}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_{I_{22}}}{\Delta}; \quad I_{33} = \frac{\Delta_{I_{33}}}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & -R_5 & -R_7 \\ -R_5 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_3 \\ -R_7 & -R_3 & R_3 + R_4 + R_8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{I_{11}} = \begin{vmatrix} E_1 & -R_5 & -R_7 \\ -E_2 + E_3 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_3 \\ -E_3 - E_4 & -R_3 & R_3 + R_4 + R_8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{I_{22}} = \begin{vmatrix} R_1 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & E_1 & -R_7 \\ -R_5 & -E_2 + E_3 & -R_3 \\ -R_7 & -E_3 - E_4 & R_3 + R_4 + R_8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{I_{33}} = \begin{vmatrix} R_1 + R_5 + R_6 + R_7 + R_8 & -R_5 & E_1 \\ -R_5 & R_2 + R_3 + R_5 & -E_2 + E_3 \\ -R_7 & -R_3 & -E_3 - E_4 \end{vmatrix}$$

1.8.4. Зная контурные токи, определяем искомые токи в ветвях:

$$I_1 = I_{11},$$

$$I_2 = -I_{22},$$

$$I_4 = -I_{33},$$

$$I_3 = I_{22} - I_{33},$$

$$I_5 = I_{22} - I_{11},$$

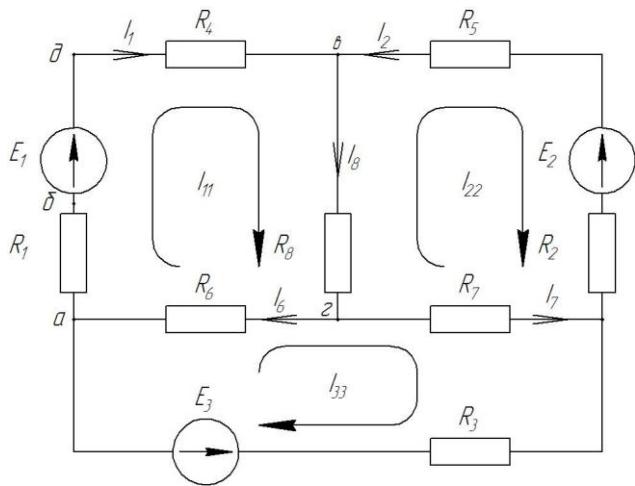
$$I_7 = I_{11} - I_{33}.$$

1.8.5. Правильность расчёта проверяем составлением баланса мощностей:

$$\sum_{i=1}^m E_i \cdot I_i = \sum_{k=1}^n I_k^2 \cdot R_k.$$

**Пример расчёта электрической цепи постоянного тока методом контурных токов**

Выполнить расчет электрической цепи постоянного тока методом контурных токов



Элементы цепи	$E_1$ , В	$E_2$ , В	$E_3$ , В	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$R_4$ , Ом	$R_5$ , Ом	$R_6$ , Ом	$R_7$ , Ом	$R_8$ , Ом
Параметры	24	12	6	0,3	0,2	0,1	9,7	9,8	50	50	20

1. Задаемся контурными токами  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  и направляем их по часовой стрелке.

2. Задаемся токами в ветвях  $I_1 \dots I_8$  и направление их выбираем произвольно.

3. Для каждого из контуров составляем уравнения по II закону Кирхгофа.

3.1.  $I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_4 + R_8 \cdot (I_{11} - I_{22}) + R_6 \cdot (I_{11} - I_{33}) = E_1$  записываем его в виде:

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_6 + R_8) + I_{22} \cdot (-R_8) + I_{33} \cdot (-R_6) = E_1$$

3.2.  $I_{22} \cdot R_2 + I_{22} \cdot R_5 + R_8 \cdot (I_{22} - I_{11}) + R_7 \cdot (I_{22} - I_{33}) = -E_2$  его так же записываем в виде  $I_{11} \cdot (-R_8) + I_{22} \cdot (R_2 + R_5 + R_7 + R_8) + I_{33} \cdot (-R_7) = -E_2$

3.3.  $I_{33} \cdot R_3 + R_6 \cdot (I_{33} - I_{11}) + R_7 \cdot (I_{33} - I_{22}) = -E_3$  записываем его в виде:

$$I_{11} \cdot (-R_6) + I_{22} \cdot (-R_7) + I_{33} \cdot (R_3 + R_6 + R_7) = -E_3$$

4. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_6 + R_8) + I_{22} \cdot (-R_8) + I_{33} \cdot (-R_6) = E_1 \\ I_{11} \cdot (-R_8) + I_{22} \cdot (R_2 + R_5 + R_7 + R_8) + I_{33} \cdot (-R_7) = -E_2 \\ I_{11} \cdot (-R_6) + I_{22} \cdot (-R_7) + I_{33} \cdot (R_3 + R_6 + R_7) = -E_3 \end{cases}$$

Подставляем значения известных  $R$  и  $E$

$$\begin{cases} I_{11} \cdot 80 + I_{22} \cdot (-20) + I_{33} \cdot (-50) = 24 \\ I_{11} \cdot (-20) + I_{22} \cdot 80 + I_{33} \cdot (-50) = -12 \\ I_{11} \cdot (-50) + I_{22} \cdot (-50) + I_{33} \cdot 100,1 = -6 \end{cases}$$

5. В матричном исчислении система имеет решение:

$$I_{11} = \frac{\Delta I_{11}}{\Delta}; \quad I_{22} = \frac{\Delta I_{22}}{\Delta}; \quad I_{33} = \frac{\Delta I_{33}}{\Delta} \text{ . где :}$$

$$5.1. \quad \Delta = \begin{vmatrix} 80 & -20 & -50 \\ -20 & 80 & -50 \\ -50 & -50 & 100,1 \end{vmatrix} = 100600$$

$$5.2. \quad \Delta I_{11} = \begin{vmatrix} 24 & -20 & -50 \\ -12 & 80 & -50 \\ -6 & -50 & 100,1 \end{vmatrix} = 48168,$$

$$5.3. \quad \Delta I_{22} = \begin{vmatrix} 80 & 24 & -50 \\ -20 & -12 & -50 \\ -50 & -6 & 100,1 \end{vmatrix} = 11952$$

$$5.4. \quad \Delta I_{33} = \begin{vmatrix} 80 & -20 & 24 \\ -20 & 80 & -12 \\ -50 & -50 & -6 \end{vmatrix} = 24000$$

6. Рассчитываем контурные токи

$$I_{11} = \frac{48168}{100600} = 0,4788 [A]$$

$$I_{22} = \frac{11952}{100600} = 0,1188 [A]$$

$$I_{33} = \frac{24000}{100600} = 0,2385 [A]$$

7. Определяем токи в ветвях

$$I_1 = I_{11} = 0,4788 [A]$$

$$I_2 = -I_{22} = -0,1188 [A]$$

$$I_3 = -I_{33} = -0,2385 [A]$$

$$I_6 = I_{11} - I_{33} = 0,4788 - 0,2385 = 0,2403 [A]$$

$$I_7 = I_{22} - I_{33} = 0,1188 - 0,2385 = -0,1197 [A]$$

$$I_8 = I_{11} - I_{22} = 0,4788 - 0,1188 = 0,360 [A]$$

8. правильность расчета проверяем составлением баланса мощностей

$$\sum E_i I_i = \sum I_i^2 \cdot R_i$$

$$\sum E_i I_i = E_1 \cdot I_1 + E_2 I_2 + E_3 \cdot I_3 = 24 \cdot 0,4788 + 12 \cdot (-0,1188) + 6 \cdot (-0,2385) = 8,6346 [Bm]$$

учитываем, что источники ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  потребляет энергию

$$\sum I^2 R = I_1^2 \cdot (R_1 + R_4) + I_2^2 \cdot (R_2 + R_5) + I_3^2 \cdot R_3 + I_6^2 \cdot R_6 + I_7^2 \cdot R_7 + I_8^2 \cdot R_8 = 0,4788^2 \cdot 10 + (-0,1188)^2 \cdot 10 + (-0,2385)^2 \cdot 0,1 + 0,2403^2 \cdot 50 + (-0,1197)^2 \cdot 50 + 0,3600^2 \cdot 20 = 8,6349 [Bm]$$

9. Погрешность расчета

$$\gamma = \frac{\sum E_i I_i - \sum I_i^2 \cdot R_i}{\sum E_i I_i} \cdot 100\% = \frac{8,6346 - 8,6349}{8,6346} \cdot 100\% = -0,00347\%$$

10. Потенциальную диаграмму составляем для контура  $a-\delta-\partial-\vartheta-\varepsilon-e$ , полагая  $\varphi_a = 0 [B]$

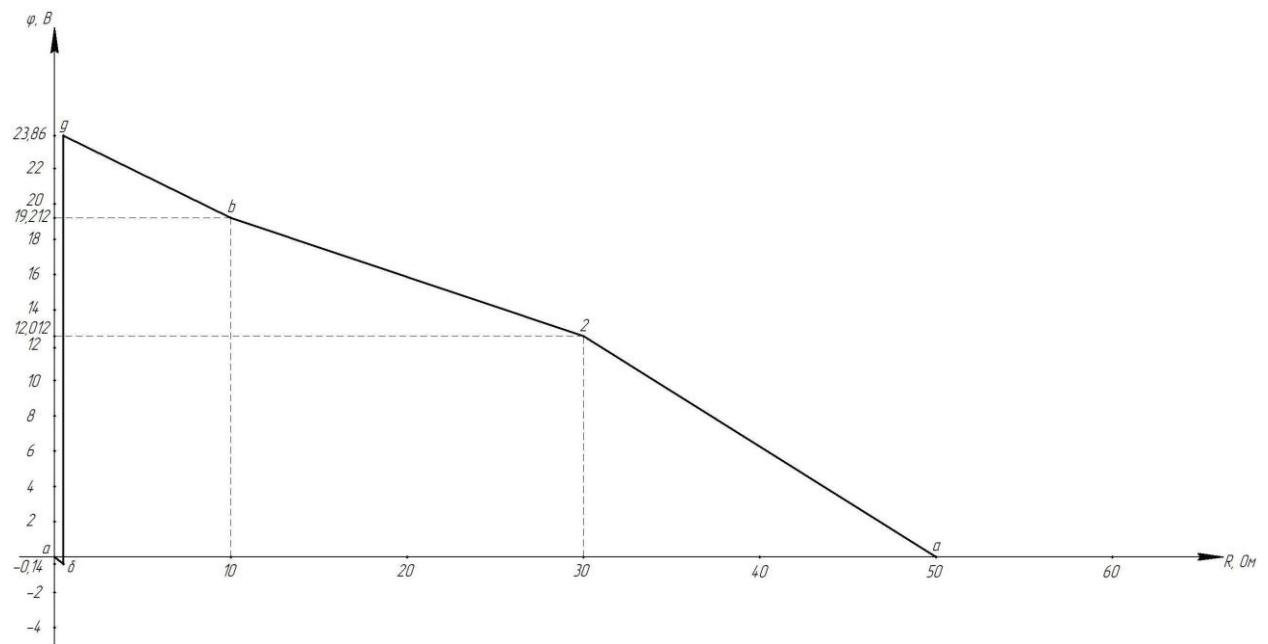
$$\varphi_\delta = \varphi_a - I_1 \cdot R_1 = 0 - 0,4788 \cdot 0,3 = -0,14 [B]$$

$$\varphi_\partial = \varphi_\delta + E_1 = -0,14 + 24 = 23,86 [B]$$

$$\varphi_\vartheta = \varphi_\partial - I_1 \cdot R_4 = 23,86 - 0,4788 \cdot 9,7 = 19,212 [B]$$

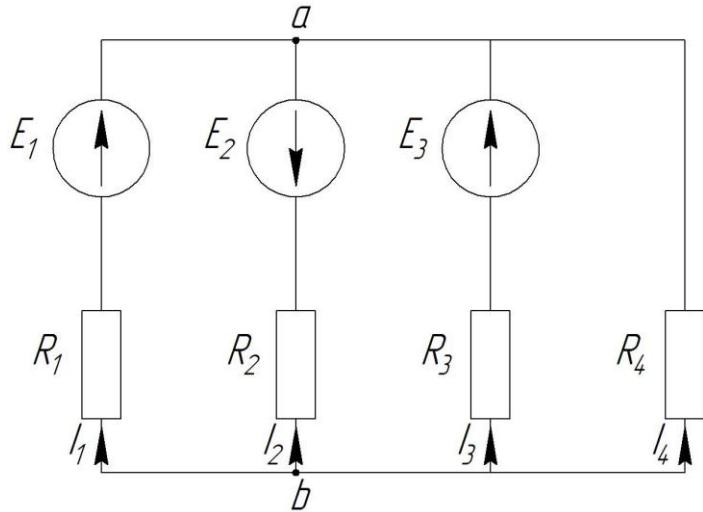
$$\varphi_\varepsilon = \varphi_\vartheta - I_8 \cdot R_8 = 19,212 - 0,3600 \cdot 20 = 12,012 [B],$$

$$\varphi_a = \varphi_e - I_6 \cdot R_6 = 12,012 - 0,2403 \cdot 50 \approx 0 [B]$$



1.9. Часто встречаются электрические цепи, содержащие всего два узла, но при этом в них может быть большое количество ветвей.

При расчете электрических цепей методом двух узлов вначале определяется разность потенциалов (напряжение) между этими узлами, а затем по закону Ома для участка цепи, содержащей ЭДС, определяют токи в ветвях.



$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{-E_2 - U_{ab}}{R_2},$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{ab}}{R_3},$$

$$I_4 = \frac{0 - U_{ab}}{R_4};$$

$$U_{ab} = \frac{E_1 \cdot g_1 + (-E_2) \cdot g_2 + E_3 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}.$$

**Пример расчета электрической цепи постоянного тока методом двух узлов с преобразованием схемы**

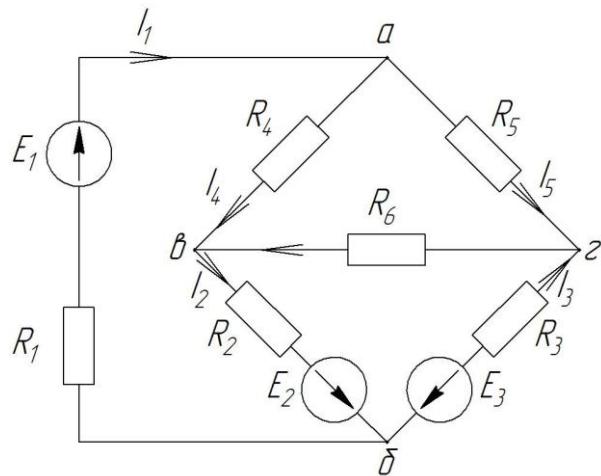
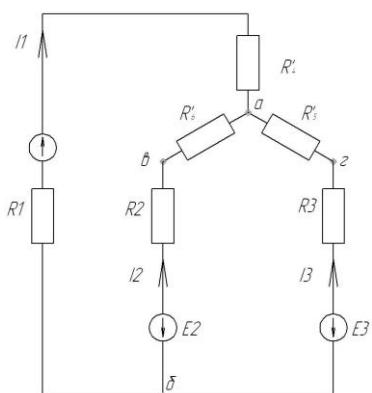


Рис. 1. Рассчитываемая схема

Элементы цепи	$E_1$ , В	$E_2$ , В	$E_3$ , В	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$R_4$ , Ом	$R_5$ , Ом	$R_6$ , Ом
Параметры	100	25	-25	12	6	1,83	15	40	20

Для получения схемы с двумя узлами необходимо соединение треугольником сопротивлений  $R_4-R_5-R_6$  преобразовать в соединение звездой. Рассчитываемая электрическая схема при этом примет вид:



В этой схеме

$$R_4' = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{15 \cdot 40}{15 + 40 + 20} = 8 \text{ [Ом]}$$

$$R_5' = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{20 \cdot 40}{15 + 20 + 40} = 10,67 \text{ [Ом]}$$

$$R_6' = \frac{R_6 \cdot R_4}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{15 \cdot 20}{15 + 20 + 40} = 4 [Om]$$

Рис. 2. Рассчитываемая схема после преобразования  $\Delta - Y$

Для расчета схемы методом двух узлов представим её в более наглядном виде:

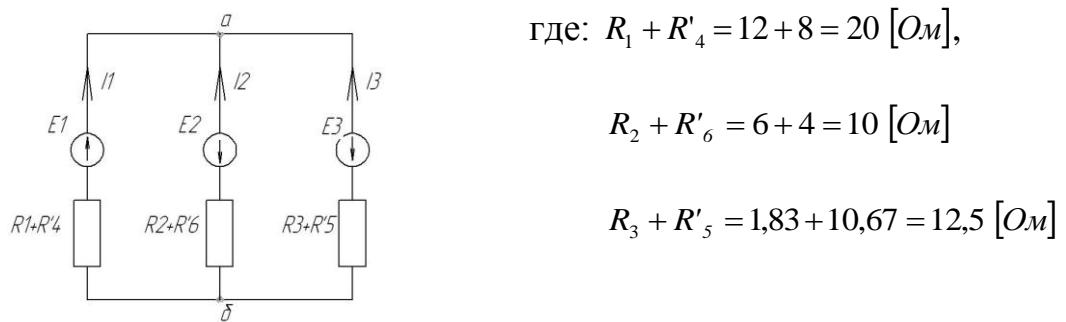


Рис.3. Рассчитываемая схема с выраженнымами двумя узлами

Для определения токов в ветвях этой схемы необходимо определить узловое напряжение  $U_{a\delta}$

$$U_{a\delta} = \frac{E_1 q_{(1+4')} + (-E_2) q_{(2+6')} + (-E_3) q_{(3+5')}}{q_{(1+4')} + q_{(2+6')} + q_{(3+5')}} = \frac{(100) \cdot \frac{1}{20} + (-25) \cdot \frac{1}{10} + [-(-25)] \cdot \frac{1}{12,5}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12,5}} = 19,565 [B]$$

При известном узловом напряжении определяем токи в ветвях схемы Рис.3.

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{a\delta}}{R_1 + R'_4} = \frac{100 - (19,565)}{20} = 4,022 [A]$$

$$I_2 = \frac{-E_2 - U_{a\delta}}{R_2 + R'_6} = \frac{-25 - (19,565)}{10} = -4,4565 [A]$$

$$I_3 = \frac{-E_3 - U_{a\delta}}{R_3 + R'_5} = \frac{-(-25) - (19,565)}{12,5} = 0,4348 [A]$$

Отмечаем полученные направления токов на схеме Рис.1. Ток в ветви R6 определяем по второму закону Кирхгофа, обходя контур R2-R6-R3 по часовой стрелке. Ток в ветви R6 полагаем текущим от "в" к "г".

$$-I_2R_2 + I_6R_6 - I_3R_3 = -E_2 + E_3 \text{ откуда}$$

$$I_6 = \frac{-E_2 + E_3 + I_2R_2 + I_3R_3}{R_6} = \frac{-25 + (-25) + 4,4565 \cdot 6 + 0,4348 \cdot 1,83}{20} = -1,123 [A],$$

Следовательно, истинное направление тока в ветви R6 от "г" к "в"

Токи в ветвях R4 и R5 определяем по первому закону Кирхгофа

$$I_4 + I_6 = I_2; \quad I_4 = I_2 - I_6 = 4,4565 - 1,123 = 3,3316 [A]$$

$$I_3 + I_5 = I_6; \quad I_5 = I_6 - I_3 = 1,123 - 0,4348 = 0,6822 [A]$$

Правильность расчета проверяем составлением баланса мощностей:

$$\sum_{i=1}^3 E_i I_i = \sum_{i=1}^6 I_i^2 \cdot R_i$$

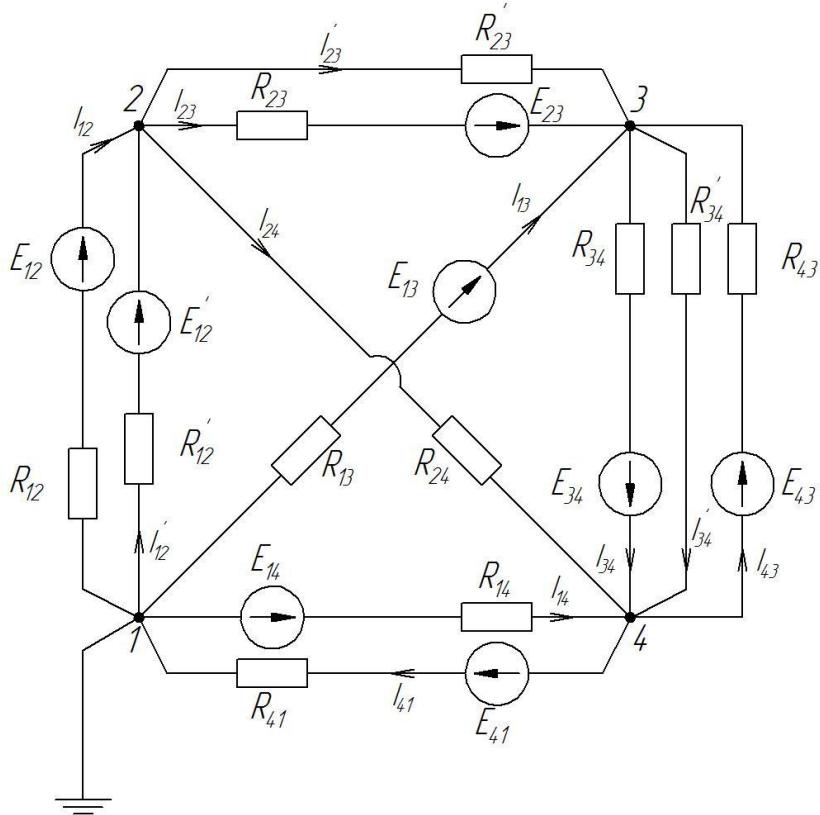
$$E_1 \cdot I_1 + E_2 I_2 + E_3 \cdot I_3 = 100 \cdot 4,022 + 25 \cdot 4,4565 + 25 \cdot 0,4348 = 524,4825 [Bm]$$

$$\sum_{i=1}^6 I_i^2 \cdot R_i = 4,022^2 \cdot 12 + 4,4565^2 \cdot 6 + 0,4348^2 \cdot 1,83 + 3,3316^2 \cdot 15 + 0,6822^2 \cdot 40 + 1,123^2 \cdot 20 = 524,2869 [Bm]$$

Погрешность расчета:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^3 E_i \cdot I_i - \sum_{i=1}^3 I_i^2 \cdot R_i}{\sum_{i=1}^3 E_i \cdot I_i} \cdot 100\% = \frac{524,4825 - 524,2869}{524,4825} \cdot 100\% = 0,037\%.$$

1.10. Расчет электрических цепей методом узловых потенциалов заключается в определении потенциалов узлов цепи с последующим определением токов ветвей, соединяющих эти узлы.



Условимся обозначать токи двумя индексами:

1-й – номер узла, от которого ток утекает,

2-й – номер узла, к которому ток подтекает.

Аналогично обозначаем сопротивления, ЭДС, источники тока, проводимости.

Т.к. любая точка цепи может быть заземлена без изменения токораспределения в этой цепи, то мысленно заземляем один из узлов (например «1»), т.е. полагаем, что  $\varphi_1 = 0$  В.

Число неизвестных в методе узловых потенциалов равно числу уравнений по первому закону Кирхгофа, которые необходимо составить для остальных узлов схемы.

1.10.1. Составляем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла «2»:

$$I_{12} + I'_{12} - I_{23} - I'_{23} - I_{24} = 0.$$

Согласно закону Ома для участка цепи:

$$[E_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot g_{12} + [E'_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot g'_{12} - [E_{23} - (\varphi_3 - \varphi_2)] \cdot g_{23} - [0 - (\varphi_3 - \varphi_2)] \cdot g'_{23} - [0 - (\varphi_4 - \varphi_2)] \cdot g_{42} = 0 \quad [1.10.1.]$$

Или

$$E_{12} \cdot g_{12} - \varphi_2 \cdot g_{12} + \varphi_1 \cdot g_{12} + E'_{12} \cdot g'_{12} - \varphi_2 \cdot g'_{12} + \varphi_1 \cdot g'_{12} - E_{23} \cdot g_{23} + \varphi_3 \cdot g_{23} - \varphi_2 \cdot g_{23} + \varphi_3 \cdot g'_{23} - \varphi_2 \cdot g'_{23} + \varphi_4 \cdot g_{24} - \varphi_2 \cdot g_{24} = E_{12} \cdot g_{12} + E' \cdot g'_{12} - E_{23} \cdot g_{23}$$

Преобразуем уравнение [1.10.1.] к виду (учитывая, что  $\varphi_1 \cdot g_{12} + \varphi_1 \cdot g'_{12} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_2 \cdot (g_{12} + g'_{12} + g_{23} + g'_{23} + g_{24}) - \varphi_3 \cdot (g_{23} + g'_{23}) - \varphi_4 \cdot (g_{24}) = \\ = E_{12} \cdot g_{12} + E'_{12} \cdot g'_{12} - E_{23} \cdot g_{23} \end{aligned} \quad [1.10.2.]$$

1.10.2. Обозначим:

$G_{22} = g_{12} + g'_{12} + g_{23} + g'_{23} + g_{24}$  - сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле «2»;

$G_{23} = G_{32} = -(g_{23} + g'_{23})$  - сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы «2» и «3», взятая со знаком минус;

$G_{24} = G_{42} = -(g_{24})$  - сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы «2» и «4», взятая со знаком минус;

$I_{22} = E_{12} \cdot g_{12} + E'_{12} \cdot g'_{12} - E_{23} \cdot g_{23}$  - так называемый узловой ток второго узла – алгебраическая сумма токов, сходящихся во втором узле. Причем в эту сумму со знаком «+» входят токи ветвей, подтекающих к узлу, а со знаком минус – токи ветвей, утекающих от узла.

С учетом принятых обозначений уравнение [1.10.2] примет вид:

$$\varphi_2 \cdot G_{22} + \varphi_3 \cdot G_{23} + \varphi_4 \cdot G_{24} = I_{22} \quad [1.10.3]$$

1.10.3. Составив аналогичные уравнения для узлов «3» и «4» и, преобразовав их, как показано выше, получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными потенциалами узлов «2», «3» и «4»:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \cdot G_{22} + \varphi_3 \cdot (-G_{23}) + \varphi_4 \cdot (-G_{24}) = I_{22} \\ \varphi_2 \cdot (-G_{32}) + \varphi_3 \cdot G_{33} + \varphi_4 \cdot (-G_{34}) = I_{33} \\ \varphi_2 \cdot (-G_{42}) + \varphi_3 \cdot (-G_{43}) + \varphi_4 \cdot G_{44} = I_{44} \end{aligned} \quad [1.10.4.]$$

1.10.4. В матричной системе счисления система [1.10.4.] имеет решение:

$$\varphi_2 = \frac{\Delta_{\varphi_2}}{\Delta}; \quad \varphi_3 = \frac{\Delta_{\varphi_3}}{\Delta}; \quad \varphi_4 = \frac{\Delta_{\varphi_4}}{\Delta}, \quad \text{где} \quad [1.10.5.]$$

$$\Delta = \begin{matrix} G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{matrix}$$

$$\Delta_{\varphi_2} = \begin{matrix} I_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ I_{33} & G_{33} & -G_{34} \\ I_{44} & -G_{43} & G_{44} \end{matrix}$$

[1.10.6.]

$$\Delta_{\varphi_3} = \begin{matrix} G_{22} & I_{22} & -G_{24} \\ -G_{32} & I_{33} & -G_{34} \\ -G_{42} & I_{44} & G_{44} \end{matrix}$$

$$\Delta_{\varphi_4} = \begin{matrix} G_{22} & -G_{23} & I_{22} \\ -G_{32} & G_{33} & I_{33} \\ -G_{42} & -G_{43} & I_{44} \end{matrix}$$

1.10.5. Зная потенциалы узлов, определяем токи в ветвях:

$$I_{12} = [E_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot g_{12};$$

$$I'_{12} = [E'_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot g'_{12};$$

$$I_{23} = [E_{23} - (\varphi_3 - \varphi_2)] \cdot g_{23};$$

$$I'_{23} = [0 - (\varphi_3 - \varphi_2)] \cdot g'_{23};$$

$$I_{24} = [0 - (\varphi_4 - \varphi_2)] \cdot g_{24};$$

$$I_{34} = [E_{34} - (\varphi_4 - \varphi_3)] \cdot g_{34}; \quad [1.10.7.]$$

$$I'_{34} = [0 - (\varphi_4 - \varphi_3)] \cdot g'_{34};$$

$$I_{43} = [E_{34} - (\varphi_3 - \varphi_4)] \cdot g_{43};$$

$$I_{13} = [E_{34} - (\varphi_3 - \varphi_1)] \cdot g_{13};$$

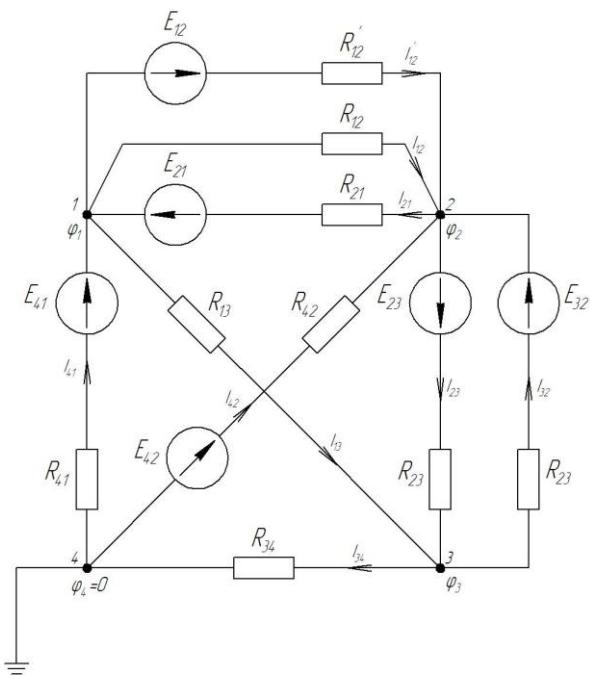
$$I_{14} = [E_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)] \cdot g_{14};$$

$$I_{41} = [E_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)] \cdot g_{41};$$

1.10.6. Правильность расчета проверяем составлением баланса мощностей:

$$\sum_{i=1}^m E_i \cdot I_i = \sum_{k=1}^n I_k^2 \cdot R_k \quad [1.10.8.]$$

**Пример расчета электрической цепи постоянного тока методом узловых потенциалов**



Элементы цепи	E <sub>1</sub> 2, B	E <sub>2</sub> 1, B	E <sub>2</sub> 3, B	E <sub>3</sub> 2, B	E <sub>4</sub> 1, B	E <sub>4</sub> 2, B	R <sub>1</sub> 2, О м	R' <sub>12</sub> , О м	R <sub>2</sub> 1, О м	R <sub>2</sub> 3, О м	R <sub>3</sub> 2, О м	R <sub>3</sub> 3, О м	R <sub>1</sub> 3, О м	R <sub>41</sub> , Ом	R <sub>4</sub> 2, О м
Параметры	6	12	12	6	24	24	8	0, 5	0, 4	0, 4	0, 5	4	10	12, 5	8

1. произвольно задаемся направлением токов в схеме.
2. мысленно заземляем узел «4», т.е. принимаем  $\varphi_4 = 0B$ .

3. Согласно первому закону Кирхгофа для узла «1»

$$I_{41} + I_{21} - I_{12} - I'_{12} - I_{13} = 0 \quad [1]$$

Токи узла «1» выразим через ЭДС ветвей, сходящихся в этом узле и потенциалы узлов, между которыми протекают эти токи

$$I_{41} = [E_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)] \cdot q_{41}$$

$$I_{21} = [E_{21} - (\varphi_1 - \varphi_2)] \cdot q_{21}$$

$$I_{12} = [0 - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot q_{12}$$

$$I'_{12} = [E_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)] \cdot q_{12}$$

$$I_{13} = [0 - (\varphi_3 - \varphi_1)] \cdot q_{13}$$

Полученные выражения для токов подставим в формулу [1], упростим и получим:

$$\varphi_1 \cdot G_{11} + \varphi_2 (-G_{12}) + \varphi_3 (-G_{13}) = I_{11} \quad [2]$$

где:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – потенциалы узлов соответственно «1», «2», «3»

$G_{11}$  – сумма проводимости ветвей, сходящихся в узле «1»;

$G_{12}$  – сумма проводимости ветвей, соединяющих узлы «1» и «2»;

$G_{13}$  – сумма проводимости ветвей, соединяющих узлы «1» и «3»

$I_{11}$  – т.н. узловой ток узла «1»

$$I_{11} = \frac{E_{41}}{R_{41}} + \frac{E_{21}}{R_{21}} - \frac{E_{12}}{R'_{12}}.$$

4. Составляем подобные [2] уравнения для узлов «2» и «3» и записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} + \varphi_2 \cdot (-G_{12}) + \varphi_3 \cdot (-G_{13}) = I_{11} \\ \varphi_1 \cdot (-G_{21}) + \varphi_2 \cdot G_{22} + \varphi_3 \cdot (-G_{23}) = I_{22} \\ \varphi_1 \cdot (-G_{31}) + \varphi_2 \cdot (-G_{32}) + \varphi_3 \cdot (-G_{33}) = I_{33} \end{cases} [3]$$

5. Определяем коэффициенты при искомых потенциалах

$$G_{11} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{41}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12,5} = 4,805 \text{ [Cм]};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{42}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{32}} = \frac{1}{0,5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{0,4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,5} = 9,25 \text{ [Cм]};$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{32}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,5} = 4,85 \text{ [Cм]};$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R'_{12}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} = \frac{1}{0,5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{0,4} = 4,625 \text{ [Cм]};$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{32}} = \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,5} = 4,5 \text{ [Cм]};$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ [Cм]}.$$

$$I_{11} = \frac{E_{41}}{R_{41}} + \frac{E_{21}}{R_{21}} - \frac{E'_{12}}{R'_{12}} = \frac{24}{12,5} + \frac{12}{0,4} - \frac{6}{0,5} = 19,92 \text{ [A]};$$

$$I_{22} = \frac{E'_{12}}{R'_{12}} + \frac{E_{32}}{R_{32}} + \frac{E_{42}}{R_{42}} - \frac{E_{21}}{R_{21}} - \frac{E_{23}}{R_{23}} = \frac{6}{0,5} + \frac{6}{0,5} + \frac{24}{8} - \frac{12}{0,4} - \frac{12}{0,4} = -33 \text{ [A]};$$

$$I_{33} = \frac{E_{23}}{R_{23}} - \frac{E_{32}}{R_{32}} = \frac{12}{0,4} - \frac{6}{0,5} = 18 \text{ [A]}.$$

6. Подставляя полученные коэффициенты, записываем систему уравнений [3] в виде:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot 4,805 + \varphi_2 \cdot (-4,625) + \varphi_3 \cdot (-0,1) = 19,92 \\ \varphi_1 \cdot (-4,625) + \varphi_2 \cdot 9,25 + \varphi_3 \cdot (-4,5) = -33 \\ \varphi_1 \cdot (-0,1) + \varphi_2 \cdot (-4,5) + \varphi_3 \cdot 4,85 = 18 \end{cases} [4]$$

7. В матричном исчислении система имеет решение:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta}; \quad \varphi_2 = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta}; \quad \varphi_3 = \frac{\Delta\varphi_3}{\Delta}, \text{ где}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4,805 & -4,625 & -0,1 \\ -4,625 & 9,25 & -4,5 \\ -0,1 & -4,5 & 4,85 \end{vmatrix} = 10,26353125$$

$$\Delta\varphi_1 = \begin{vmatrix} 19,92 & -4,625 & -0,1 \\ -33 & 9,25 & -4,5 \\ 18 & -4,5 & 4,85 \end{vmatrix} = 126,47475$$

$$\Delta\varphi_2 = \begin{vmatrix} 4,805 & 19,92 & -0,1 \\ -4,625 & -33 & -4,5 \\ -0,1 & 18 & 4,85 \end{vmatrix} = 84,61425$$

$$\Delta\varphi_3 = \begin{vmatrix} 4,805 & -4,625 & 19,92 \\ -4,625 & 9,25 & -33 \\ -0,1 & -4,5 & 18 \end{vmatrix} = 119,20725$$

$$\varphi_1 = \frac{126,47475}{10,26353125} = 12,3227 [B]$$

$$\varphi_2 = \frac{84,6125}{10,26353125} = 8,24399497 [B]$$

$$\varphi_3 = \frac{119,20725}{10,26353125} = 11,6146 [B]$$

8. Определяем токи в ветвях:

$$I_{41} = \frac{24 - (12,3227 - 0)}{12,5} = 0,93418 [A]$$

$$I_{21} = \frac{12 - (12,3227 - 8,24399497)}{0,4} = 19,8032 [A]$$

$$I_{12} = \frac{0 - (8,24399497 - 12,3227)}{8} = 0,50984 [A],$$

$$I'_{12} = \frac{6 - (8,24399497 - 12,3227)}{0,5} = 20,1574 [A]$$

$$I_{13} = \frac{0 - (11,6146 - 12,3227)}{10} = 0,07081 [A]$$

$$I_{42} = \frac{E_{42} - (\varphi_2 - \varphi_4)}{R_{42}} = \frac{24 - (8,24399497 - 0)}{8} = 1,9695 [A]$$

$$I_{23} = \frac{E_{23} - (\varphi_3 - \varphi_2)}{R_{23}} = \frac{12 - (11,6146 - 8,24399497)}{0,4} = 21,5735 [A]$$

$$I_{32} = \frac{E_{32} - (\varphi_2 - \varphi_3)}{R_{32}} = \frac{6 - (8,24399497 - 11,6146)}{0,5} = 18,7412 [A]$$

$$I_{34} = \frac{0 - (\varphi_4 - \varphi_3)}{R_{34}} = \frac{0 - (0 - 11,6146)}{4} = 2,90365 [A]$$

9. Правильность расчета проверяем составлением баланса мощностей

$$\sum E_i \cdot I_i = \sum I_i^2 R_i$$

$$\begin{aligned} \sum E_i \cdot I_i &= E_{12} \cdot I'_{12} + E_{21} \cdot I_{21} + E_{41} \cdot I_{41} + E_{23} \cdot I_{23} + E_{32} \cdot I_{32} + E_{42} \cdot I_{42} = \\ &= 6 \cdot 0,509 \dots + 12 \cdot 19,803 \dots + 24 \cdot 0,934 \dots + 12 \cdot 21,573 \dots + 6 \cdot 18,741 \dots + 24 \cdot 1,969 = 799,600 [Bm] \end{aligned}$$

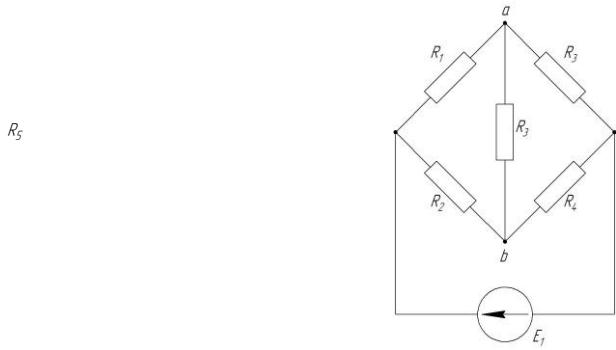
$$\begin{aligned} \sum I_i^2 \cdot R_i &= I_{41}^2 \cdot R_{41} + I_{13}^2 \cdot R_{13} + I_{21}^2 \cdot R_{21} + I_{12}^2 \cdot R_{12} + I'_{12}^2 \cdot R'_{12} + I_{42}^2 \cdot R_{42} + I_{23}^2 \cdot R_{23} + I_{32}^2 \cdot R_{32} + I_{34}^2 \cdot R_{34} \\ &= 0,934^2 \cdot 12,5 + 0,070^2 \cdot 10 + 19,803^2 \cdot 0,4 + 0,509^2 \cdot 8 + 20,157^2 \cdot 0,5 + 1,969^2 \cdot 8 + 21,573^2 \cdot 0,4 + \\ &+ 18,741^2 \cdot 0,5 + 2,903^2 \cdot 4 = 799,604 [Bm] \end{aligned}$$

10. Погрешность расчета

$$\gamma = \frac{\sum E_i \cdot I_i - \sum I_i^2 \cdot R_i}{\sum E_i \cdot I_i} \cdot 100\% = \frac{799,600 - 799,604}{799,600} \cdot 100\% = -0,0005\%$$

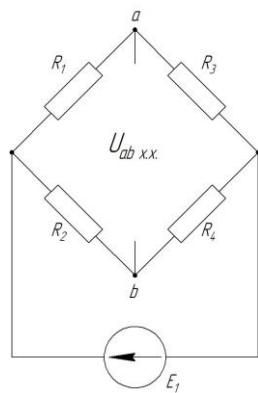
1.11. Метод эквивалентного генератора эффективен в том случае, когда необходимо определить ток лишь в одной ветви сложной электрической цепи. По отношению к выделенной ветви двухполюсник при расчёте можно заменить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Пусть необходимо определить ток в ветви  $ab$  мостовой схемы

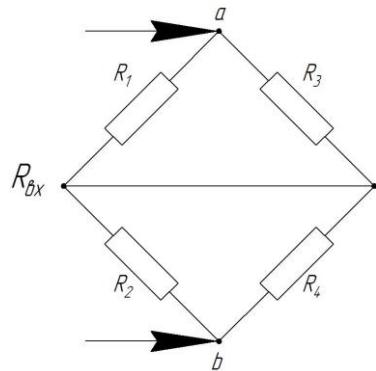


Последовательность расчета тока в выделенной ветви этим методом должна быть следующей:

-«размыкаем» эту ветвь и находим напряжение на её зажимах  $U_{abXX}$ .



-определяем входное сопротивление всей схемы  $R_{ex}$  по отношению к зажимам «ab» при закороченных источниках ЭДС.



- определяем ток в выделенной ветви по формуле:

$$I_{ab} = \frac{U_{abXX}}{R_5 + R_{ex}}.$$

## Пример расчета электрической цепи постоянного тока методом эквивалентного генератора.

Как известно, метод эквивалентного генератора следует применять, если необходимо рассчитать ток лишь в одной ветви сложной электрической схемы.

Рассчитать ток в шестой ветви электрической схемы методом эквивалентного генератора

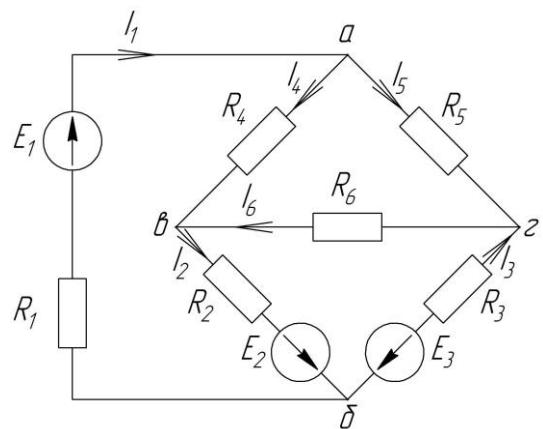


Рис.1. Рассчитываемая схема

Элементы цепи	$E_1$ , В	$E_2$ , В	$E_3$ , В	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$R_4$ , Ом	$R_5$ , Ом	$R_6$ , Ом
Параметры	100	25	-25	12	6	1,83	15	40	20

Последовательность расчета тока этим методом рекомендуется следующая:

1. Найти напряжение на зажимах разомкнутой ветви «вг»;
2. Определить входное сопротивление всей схемы  $R_{\text{вх}}$  по отношению к м «вг» при закороченных источниках ЭДС;
3. Подсчитать ток по формуле:

$$I = \frac{U_{\text{вг.хх.}}}{R_6 + R_{\text{вх}}}$$

1. Для нахождения напряжения  $U_{\text{вг.хх.}}$  размыкаем шестую ветвь, и рассчитываемая электрическая схема приобретает вид:

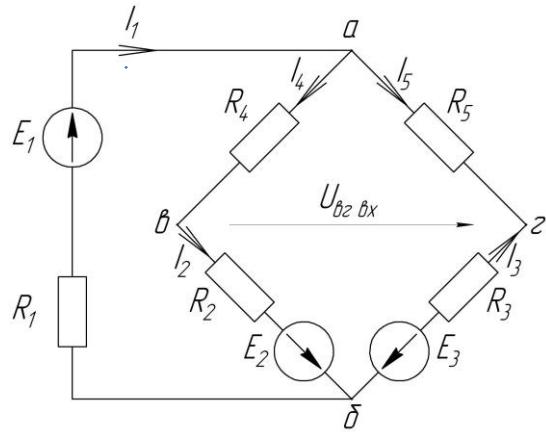


Рис.2. Рассматриваемая схема с разомкнутой ветвью

1.1 Применяя второй закон Кирхгофа для контура «*в-а-г-в*», имеем:

$$U_{\text{вг.хх.}} - I_5 \cdot R_5 + I_4 \cdot R_4 = 0, \text{ откуда } U_{\text{вг.хх.}} = I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4$$

1.2 Токи  $I_4$  и  $I_5$  наиболее просто определить, если рассчитать схему Рис. 2 методом двух узлов

$$I_4 = \frac{-E_2 - U_{\text{аб}}}{R_2 + R_4}; \quad I_5 = \frac{-E_3 - U_{\text{аб}}}{R_3 + R_5}, \text{ где}$$

$$U_{\text{аб}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{(-E_2)}{R_2 + R_4} + \frac{(-E_3)}{R_3 + R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3 + R_5}} = \frac{\frac{100}{12} + \frac{(-25)}{6+15} + \frac{[-(-25)]}{1,83+40}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{6+15} + \frac{1}{1,83+40}} = 49,984[\text{В}]$$

$$I_4 = \frac{-25 - 49,984}{6 + 15} = -3,571[\text{А}]$$

$$I_5 = \frac{-(-25) - 49,984}{1,83 + 40} = -0,597[\text{А}]$$

Т.к. искомые токи получены со знаком «-», следовательно, их истинное направление от узла «*а*» к узлу «*б*».

$$\text{Тогда } U_{\text{вг.хх.}} = 0,597 \cdot 40 - 3,571 \cdot 15 = -29,673[\text{В}].$$

Как видим, потенциал узда «*г*» выше потенциала узла «*в*», следовательно, ток в шестой ветви течет от «*г*» к «*в*».

2. При определении входного сопротивления всей схемы по отношению к

зажимам «вг» при закороченных источниках ЭДС рассчитываемая схема приобретает вид:

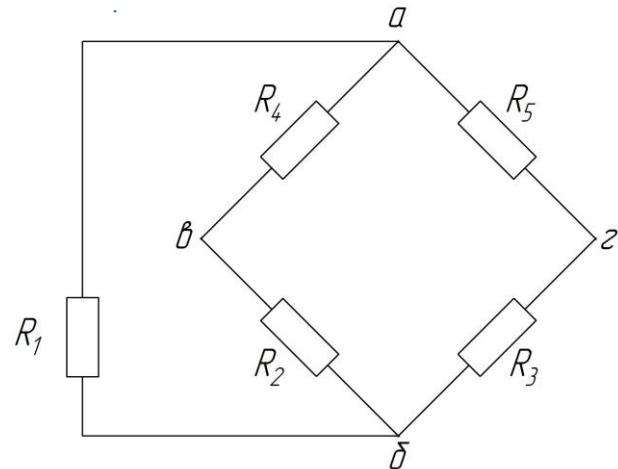


Рис.3. Рассчитываемая схема при закороченных источниках ЭДС

сопротивлений  $R_1$ - $R_3$ - $R_5$  необходимо преобразовать в Y, в результате чего схема приобретает вид, показанный на Рис.4.

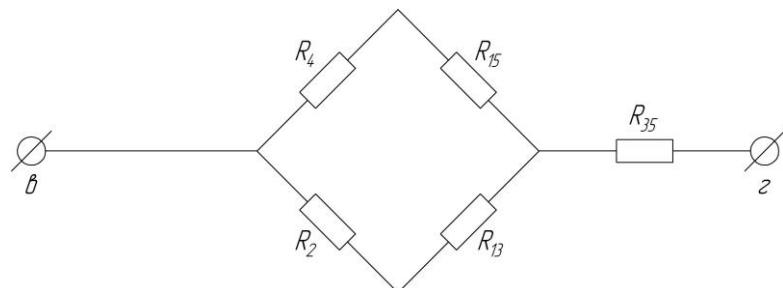


Рис.4. Рассчитываемая схема при закороченных источниках ЭДС после преобразования  $\Delta \rightarrow Y$

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{1.83 \cdot 40}{12 + 1.83 + 40} = 1,359[0\Omega]$$

$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{12 \cdot 1.83}{12 + 1.83 + 40} = 0,408 [0\Omega]$$

$$R_{15} = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{12 \cdot 40}{12 + 1.83 + 40} = 8,917[0\Omega]$$

$$\begin{aligned}
R_{\text{вг}} = R_{\text{вх}} &= R_{35} + \frac{(R_{15}+R_4) \cdot (R_{13}+R_2)}{(R_{15}+R_4)+(R_{13}+R_2)} = \\
&= 1,359 + \frac{(8,917 + 15) \cdot (0,408 + 6)}{8,917 + 15 + 0,408 + 6} = 6,414[\text{Ом}]
\end{aligned}$$

$$3. \text{ Ток шестой ветви } I_6 = I_{\text{вг}} = \frac{29,673}{20+6,414} = 1,123 [A]$$

Полученный результат полностью совпадает (по величине и по направлению) с результатом расчета, полученным при использовании метода двух узлов.

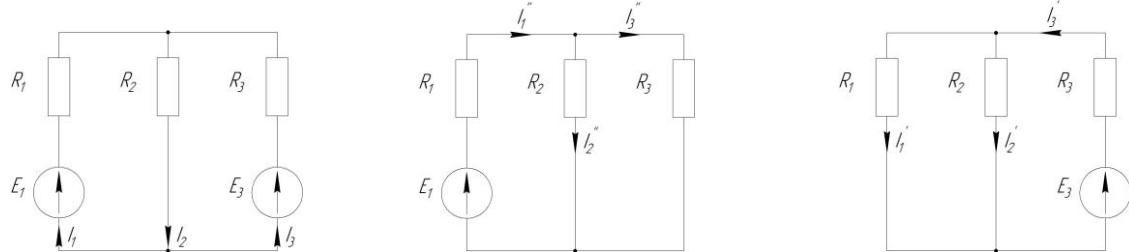
1.12. Принцип наложения базируется на том постулате, что ток в  $k$ -й ветви равен алгебраической сумме токов в этой ветви, вызываемых каждой из ЭДС схемы в отдельности:

$$I_k = E_1 \cdot g_{k1} + E_2 \cdot g_{k2} + E_3 \cdot g_{k3} + \dots + E_n \cdot g_{kn}.$$

Этот принцип справедлив для всех линейных электрических цепей.

Расчет по методу наложения производят следующим образом:

- поочерёдно рассчитывают токи, возникающие от действия каждой из ЭДС, мысленно удаляя остальные из схемы, но оставляя в схеме внутренние сопротивления источников;
- находят токи в ветвях путём алгебраического сложения частичных токов.



$$I_2 = I_2' + I_2''.$$

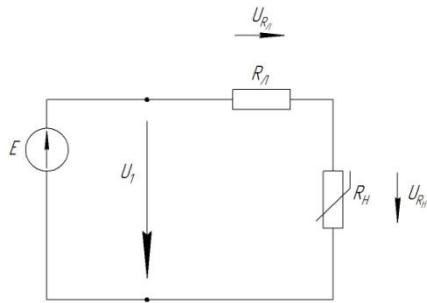
## 2. Общая характеристика методов расчёта нелинейных электрических цепей.

Существуют два основных метода расчёта электрических цепей.

2.1. При использовании первого метода расчёта последовательность операций сохраняется примерно той же, что и при расчётах линейных цепей,

только вместо сложения и вычитания отдельных значений напряжений и токов производится сложение или вычитание абсцисс или ординат соответствующих вольтамперных характеристик.

Пример 2.1.1.



Нелинейный двухполюсник состоит из последовательно включённых линейного резистора  $R_L=80\ \Omega$  и нелинейного резистора с характеристикой  $U_{R_H} = f(I)$ .

**Построить:** а) вольтамперную характеристику пассивного двухполюсника  $U_1 = f(I)$ ,

б) зависимость напряжения  $U_{R_H}$  на нелинейном элементе от входного напряжения  $U_1$ .

**Определить:** ток  $I$  при ЭДС  $E=30$  В.

**Решение:**

а) Цепь описывается уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа:

$$U_1(I) = R_L \cdot I + U_{R_H}(I) = U_{R_L}(I) + U_{R_H}(I).$$

Построение этой характеристики показано на Рис. 2.1.1. При последовательном соединении резисторов ток, протекающий по каждому из них одинаков. **Следовательно**, алгоритм построения состоит в том, что в ряде произвольно выбранных токов через резисторы напряжение, приложенное к двухполюснику, равно сумме напряжений, приложенных к каждому резистору.

б) Отмечая напряжение на входе цепи  $U_1$ , (кривая 3) и на нелинейном элементе  $U_{R_H}$  (кривая 2) при одинаковых значениях тока, строим зависимость  $U_{R_H} = f(U_1)$ , как показано на Рис. 2.1.2.

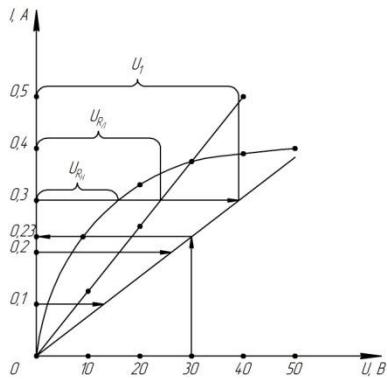


Рис.2.1.1.

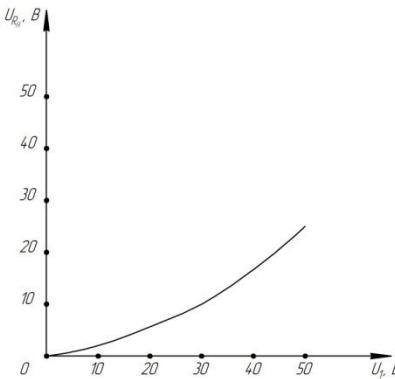


Рис.2.1.2.

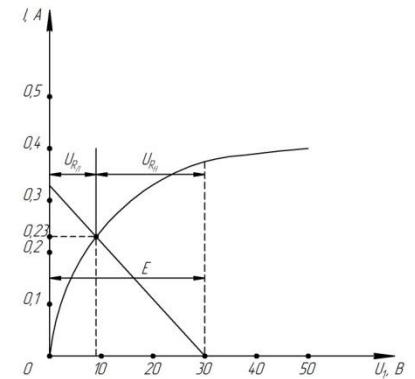
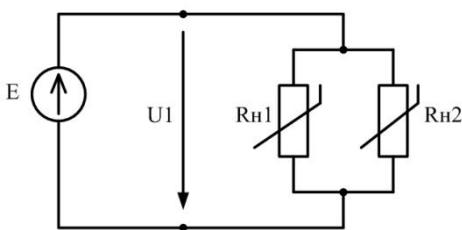


Рис.2.1.3.

При  $E=U_1=30$  В Ток  $I=0,23$ А определяем непосредственно по построенной вольтамперной характеристике двухполюсника – кривой 3 (Рис.2.1.1.).

Если вольт-амперная характеристика двухполюсника не строится, то ток может быть найден методом пересечений. Учитывая, что уравнение  $I \cdot R_{\Pi} + U_{R_H} = E$  представляют собой уравнение прямой, проходящей через точки  $I = E/R_{\Pi}$ ;  $U = U_{R_H} = 0$  и  $I = 0$ ;  $U_{R_H} = U = E$ , точка пересечения прямой с вольтамперной характеристикой  $R_H$  определяет режим работы цепи (Рис.2.1.3.).

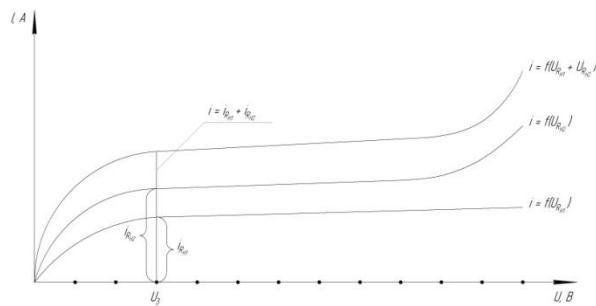
Пример 2.1.2.



Нелинейный двухполюсник состоит из двух параллельно соединённых резисторов  $R_{H1}$  и  $R_{H2}$  с заданными характеристиками.

Построить вольтамперную характеристику двухполюсника.

**Решение:** при параллельном соединении резисторов напряжение, приложенное к каждому из них одинаково. Следовательно, алгоритм построения состоит в том, что в ряде произвольно выбранных напряжений на заданных нелинейных характеристиках резисторов ток, протекающий через двухполюсник, равен сумме токов, протекающих через каждый резистор.



2.2. При использовании второго способа расчет производится в следующей последовательности:

Пример 2.2.1.

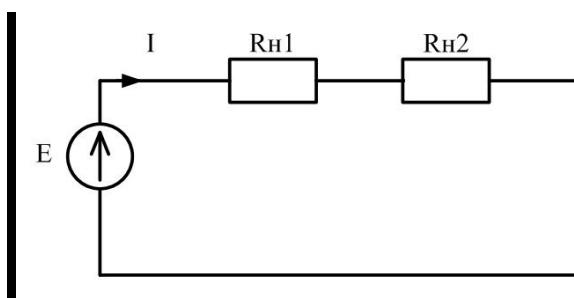


Рис.2.2.1.

В электрической цепи Рис .2.2.1. содержащей источник ЭДС  $E$  и два нелинейных сопротивления  $R_{H1}$  и  $R_{H2}$  с заданными в.а.х. (Рис 2.2.2) определить ток.

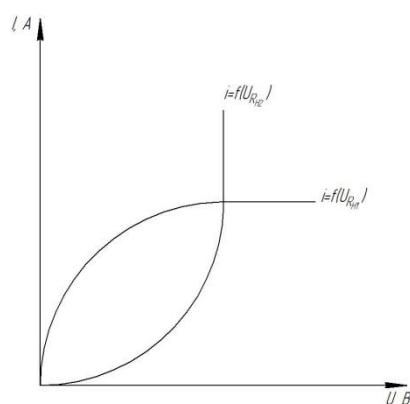


Рис.2.2.2.

**Решение:** согласно второму закону Кирхгофа  $U_{RH1} + U_{RH2} = E$ .

Т. к  $U_{RH2} = E - U_{RH1}$ , начало нелинейной зависимости  $I = f(U_{RH2})$ , располагаем в точке  $I=0$ ;  $U_1 = E$  и отсчет положительных значений  $U_2$  производим влево от этой точки.

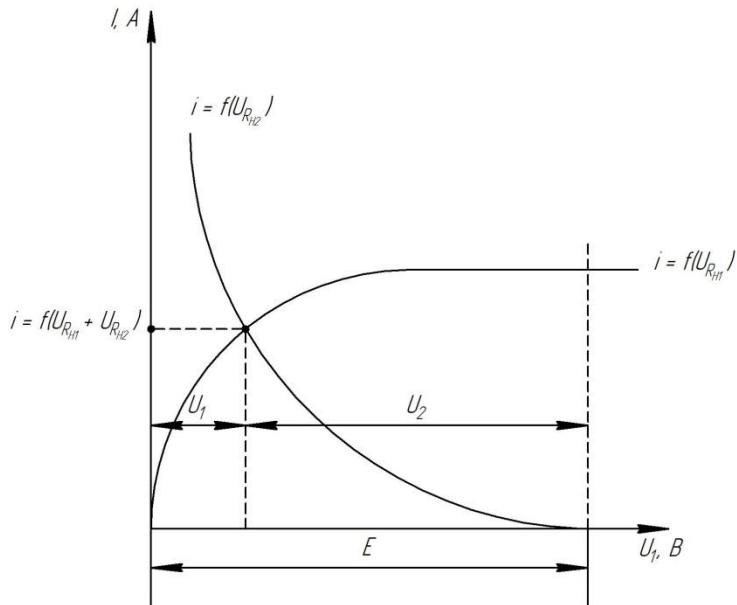


Рис.2.2.3.

Т.е кривая  $I = f(U_{RH2})$  на рис. 2.2.3. представляет собой зеркальное отражение кривой  $I = f(U_{RH2})$  на рис.2.2.2. относительно вертикальной прямой  $U_1 = E$ .

Точка пересечения кривых  $I = f(U_{RH1})$  и  $I = f(U_{RH2})$  дает решение задачи, как это показано на Рис 2.2.3

При изменении ЭДС источника вертикальная прямая  $U_1 = E$  скользит по оси абсцисс, давая новые значения тока  $I$ .

### 3. Магнитные цепи при постоянных магнитных потоках.

Для участка магнитной цепи:

- магнитная индукция  $B = \frac{\Phi}{S}$ , где

$\Phi$ - магнитный поток [вебер],

$S$ - поперечное сечение участка ( $\text{См}^2$ );

-магнитное напряжение  $U_m = H \cdot l$ , где

$H$ -напряжённость магнитного поля [а],

$l$ -средняя длина участка [ $\text{См}$ ].

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношениями .

$B = \mu_0 \mu H$  [Тл], где

$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [ $\text{Гн/м}$ ]-магнитная постоянная,

$\mu$  = относительная магнитная проницаемость материала участка.

При расчете магнитных полей при постоянных потоках зависимость между  $B$  и  $H$  для магнитных участков задается кривой намагничивания. Для воздуха и воздушных зазоров  $\mu = 1$ , следовательно

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} H &[a], \\ B &[Тл]. \end{aligned}$$

Магнитодвижущая сила (МДС)

$F = I \cdot \omega$ , где

$I$  - ток в обмотке [А],

$\omega$  -число витков в обмотке.

Под вебер-амперной характеристикой понимают зависимость магнитного потока  $\Phi$  по какому-либо участку магнитной цепи от падения магнитного напряжения на этом участке  $\Phi = f(U_m)$

3.1. Построение вебер-амперных характеристик.

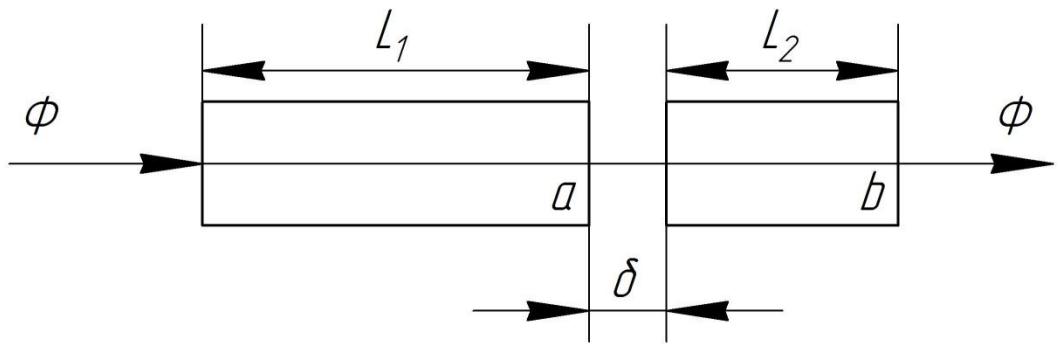


Рис.3.1. Участок ферромагнитной цепи

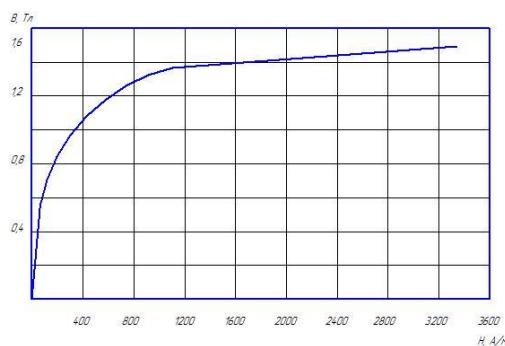


Рис. 3.2. Кривая намагничивания участка ферромагнитной цепи.

**Дано:**

1. Участок ферромагнитной цепи (Рис.3.1) где,

$$l_1=10\text{ см}, l_2=5\text{ см}, S=5\text{ см}^2, \delta=0; 0,005; 0,05\text{ см}.$$

2. Кривая намагничивания приведённого участка цепи (Рис 3.2.)

**Требуется:**

построить вебер-амперные характеристики приведённого участка магнитной цепи для трех приведённых значений воздушного зазора.

**Решение:**

задаемся рядом значений индукции  $B$  0; 0,5 ;0,8 ;1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4 ; 1,5;[Тл] и для каждого значения  $B$  находим напряжённость поля на всех участках ( $l_1, l_2, \delta$ ).

На участках из ферромагнитного материала ( $l_1$  и  $l_2$ ) напряжённости  $H_1=H_2$  (т.к.  $B_1=B_2$ ) находим по кривой намагничивания . Для неферромагнитного участка ( $\delta$ ):

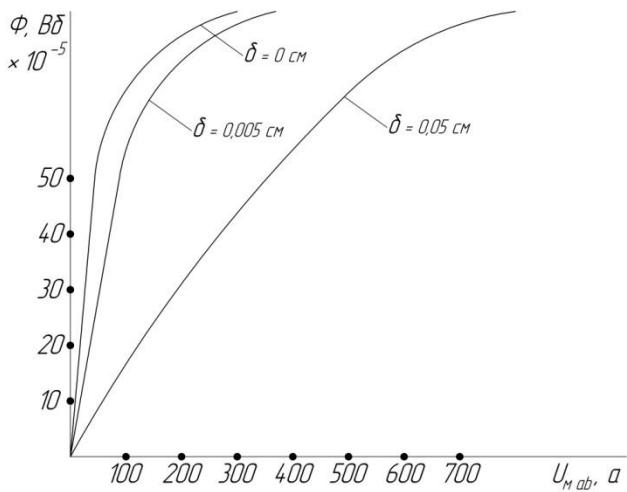
$$H \left[ \frac{A}{m} \right] = \frac{B \left[ Tl \right]}{\mu_0 \left[ \frac{1}{m} \right]} = \frac{B \left[ Tl \right]}{1,256 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{m} \right]} = 0,8 \cdot 10^6 B \left[ Tl \right] = 80 \cdot B \left[ Gc \right]$$

Падение магнитного напряжения определяем для зазора  $\delta=0,005$  см при магнитной индукции  $B=1$  Тл. По кривой намагничивания определяем что индукция  $B=1$  Тл соответствует напряжённость магнитного поля  $H=300$  а/м. Тогда  $U_{a\delta} = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_\delta \cdot \delta = 300 \cdot 0,1 + 300 \cdot 0,05 + 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 85a$ .

Значения  $U_{a\delta}$  при иных зазорах и индукциях находим аналогичным образом. Подсчеты сводим в таблицу:

$B$ , Тл	0,5	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$\Phi$ , Вб	$25 \cdot 10^{-5}$	$40 \cdot 10^{-5}$	$50 \cdot 10^{-5}$	$55 \cdot 10^{-5}$	$60 \cdot 10^{-5}$	$65 \cdot 10^{-5}$	$70 \cdot 10^{-5}$
$H_1 = H_2$ , а/м	40	130	300	440	700	1080	1800
$H_\delta$ , а/м	$4 \cdot 10^5$	$6,4 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^5$	$10,4 \cdot 10^5$	$11,2 \cdot 10^5$
$U_{a\delta}$ при $\delta = 0, a$	6	19,5	45	66	105	162	270
$U_{a\delta}$ при $\delta = 0,005 \text{ см}, a$	26	51,5	85	110	153	214	326
$U_{a\delta}$ при $\delta = 0,05 \text{ см}, a$	206	339,5	445	506	585	682	830

По полученным данным строим вебер-амперные характеристики для трех значений воздушного зазора  $\delta$ .



3.2. Методика определения МДС разветвлённой магнитной цепи по заданному потоку.

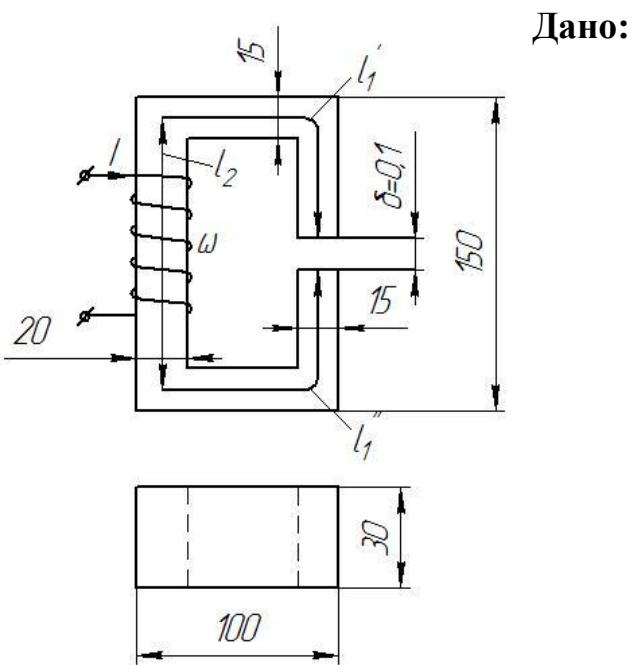


Рис. 3.2.1. Магнитопровод

$$B_\delta = 1,2 \text{ Тл},$$

$$I = 1 \text{ A}.$$

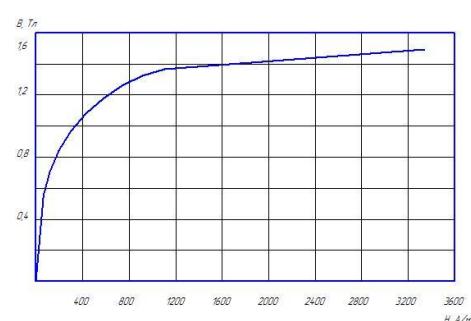


Рис. 3.2.2. Кривая намагничивания материала магнитопровода.

**Определить:** количество витков катушки, намотанной на магнитопровод, чтобы получить индукцию в его зазоре 1 Тл.

**Решение:** расчет магнитной цепи производим по линии средней длины магнитопровода; для чего магнитную цепь разбиваем на три участка:

$$1. \quad l_1 = l'_1 + l''_1 = 150 + 150 = 300[\text{мм}] = 30[\text{см}],$$

$$S_1 = 30 \cdot 15 = 450[\text{мм}^2] = 4,5[\text{см}^2].$$

$$2. \quad l_2 = 135\text{мм} = 13,5\text{см},$$

$$S_2 = 20 \cdot 30 = 600[\text{мм}^2] = 6[\text{см}^2].$$

$$3. \quad \delta = 0,1\text{мм} = 0,01\text{см},$$

$$S_\delta = S_1 = 4,5\text{см}^2.$$

$$4. \quad B_\delta = B_1 = 1,2\text{ Тл}.$$

Т.к. поток постоянен по всему сечению магнитного провода

$$\Phi_1 = \Phi_\delta = \Phi_2, \quad \text{то} \quad B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2 \quad \text{и}$$

$$B_2 = \frac{B_1 \cdot S_1}{S_2} = \frac{1,2 \cdot 4,5}{6} = 0,9[\text{Тл}].$$

Напряжённость магнитного поля на участках  $l_1$  и  $l_2$  определяем по кривой намагничивания магнитопровода для известных значений  $B_1$  и  $B_2$ :

$$H_1 = 550 \text{ а/м}; H_2 = 200 \text{ а/м}.$$

Напряжённость магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1,2 = 9,6 \cdot 10^5 \text{ [а/м]}.$$

По закону полного тока

$$I \cdot \omega = \sum_{k=1}^3 H_k \cdot l_k.$$

Для расчёта числа витков катушки необходимо подсчитать падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи:

$$\sum_{k=1}^3 H_k \cdot l_k = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_\delta \cdot l_\delta = 550 \cdot 0,3 + 200 \cdot 0,135 + 9,6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 288 \text{ а.}$$

Число витков в обмотке:

$$\omega = \frac{\sum_{k=1}^3 H_k \cdot l_k}{I} = \frac{288}{1} = 288 \text{ [витк.]}$$

3.3. Определение потока (индукции) в неразветвлённой магнитной цепи по заданной МДС

**Дано:**

1. Магнитопровод (См. пример 3.2)
2. Кривая намагничивания (См. пример 3.2)
3.  $I_\omega = 350 \text{ а.}$

**Определить:** магнитную индукцию в воздушном зазоре.

Для определения магнитной индукции в воздушном зазоре необходимо построить зависимость  $\Phi = f(\sum H_k \cdot l_k)$  (потока в функции от падения магнитного напряжения вдоль магнитной цепи), найти на ней рабочую точку (350 а) и определить  $B = \frac{\Phi}{S}$ .

**Решение:** Задаемся рядом значений  $B_\delta = 0,5; 1,1; 1,2 \text{ и } 1,3 \text{ Тл}$  и для каждого из них подсчитываем  $\sum H_k \cdot l_k$ .

3.2.1.  $B_\delta = B_1 = 0,5 \text{ Тл.}$

$$B_2 = \frac{B_1 \cdot S_1}{S_2} = \frac{0,5 \cdot 4,5}{6} = 0,375 \text{ Тл.}$$

Напряжённость магнитного поля для создания рассчитанной магнитной индукции (0,5 Тл и 0,375 Тл) определяем по кривой намагничивания материала магнитопровода (Рис .3.2.2.):

$$H_1 = 50 \text{ а/м}; H_2 = 25 \text{ а/м.}$$

Напряжённость магнитного поля в зазоре для создания поля магнитной индукции 0,5 Тл :

$$H_\delta = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,5 = 4 \cdot 10^5 \text{ [а/м].}$$

Падение магнитного напряжения в магнитопроводе при принятом значении магнитной индукции:

$$\sum H_k \cdot l_k = 50 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,135 + 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 58,4 \text{ [a].}$$

3.3.3. Аналогично подсчитываем падение магнитного напряжения для остальных значений магнитной индукции и результат вычислений записываем в таблицу 3.3.

Таблица 3.3

$B\delta, \text{ Тл}$	0,5	1,1	1,	1,3
$B_1, \text{ Тл}$	0,5	1,1	1,2	1,3
$B_2, \text{ Тл}$	0,375	0,825	0,9	0,975
$H_1, \text{ а/м}$	50	460	700	1025
$H_2, \text{ а/м}$	25	150	200	300
$H_\delta, \text{ а/м}$	$4 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^5$	$10,4 \cdot 10^5$
$\sum H_k \cdot l_k$	58,4	246,3	333	450,5

3.3.4. Итак: магнитной индукции в зазоре  $B = 1,1 \text{ Тл}$  соответствует магнитный поток

$$\Phi_{0,5} = B_{0,5} \cdot S_{0,5} = 0,5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} = 22,5 \cdot 10^{-5} \text{ [Вб]}$$

и падение магнитного напряжения в магнитопроводе 58,4 а;

магнитной индукции в зазоре 1,1 Тл –магнитный поток

$$\Phi_{1,1} = B_{1,1} \cdot S = 1,1 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} = 49,5 \text{ [Вб]}$$

и падение магнитного напряжения в магнитопроводе 246,3 а;

магнитной индукции в зазоре 1,2 Тл –магнитный поток

$$\Phi_{1,2} = B_{1,2} \cdot S = 1,2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} = 54 \cdot 10^{-5} \text{ [Вб]}$$

и падение магнитного напряжения в магнитопроводе 333а;

магнитной индукцией в зазоре 1,3 Тл - магнитный поток

$$\Phi_{1,3} = B_{1,3} \cdot S = 1,3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4} = 58,5 \cdot 10^{-5} \text{ [Вб]}$$

и падение магнитного напряжения в магнитопроводе 450,5 а.

3.3.5. На основании расчетов п. 3.3.4 строим вебер-амперную характеристику рассчитываемой электромагнитной системы:

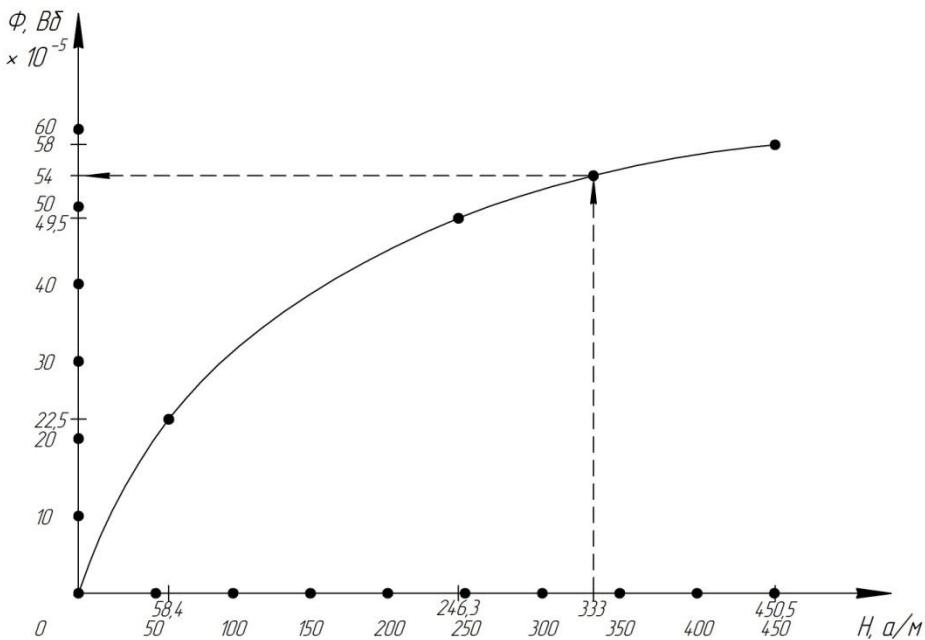


Рис.3.3.1. Вебер-амперная характеристика рассчитываемой магнитной системы

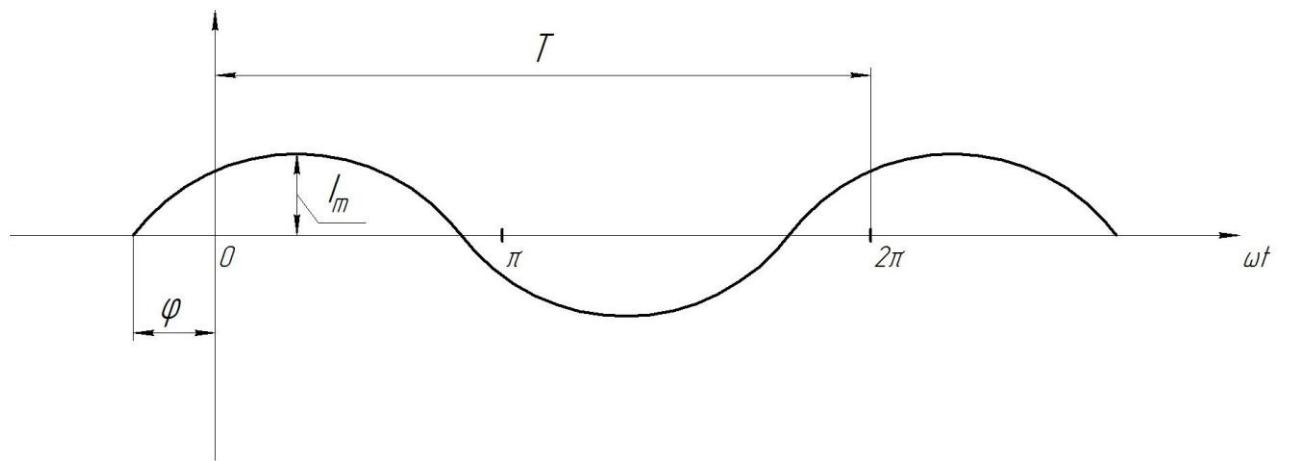
Для рабочей точки  $350 \text{ а} = I \cdot \omega$  определяем магнитный поток, который равен  $55 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$ ,

$$\text{следовательно } B_{\delta} = \frac{\Phi}{S_{\delta}} \frac{55 \cdot 10^{-5}}{4,5 \cdot 10^{-4}} = 1,21 [T_{\text{л}}]$$

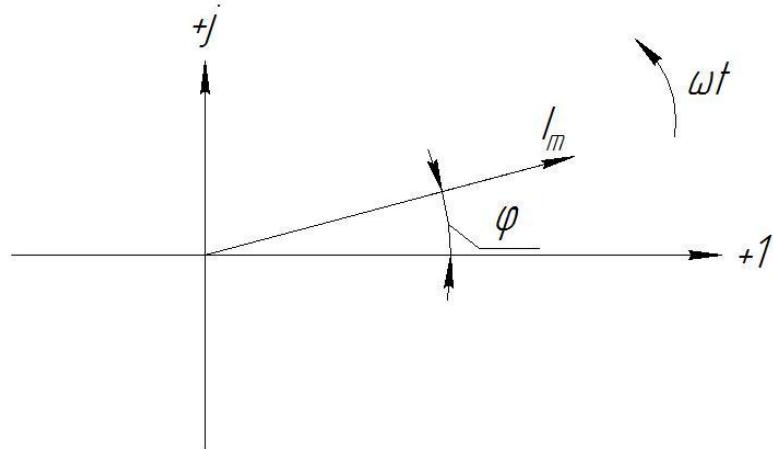
#### 4. Электрические цепи синусоидального тока

4.1. Электрический ток, изменяющийся по синусоидальному закону может быть представлен:

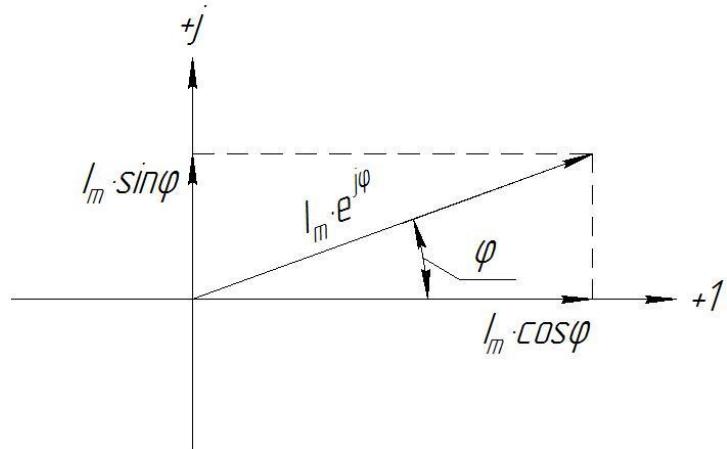
- в виде тригонометрической функции  
 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ ;
- в виде графика изменения во времени;



- в виде вращающегося вектора;



- в виде комплексных чисел;



$$I_m \cdot e^{j\varphi} = I_m \cos \varphi + j I_m \sin \varphi = a + jb$$

4.2. Сложение и вычитание синусоидальных функций удобнее производить в алгебраической форме:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 - jb_2) - (a_3 + jb_3) = (a_1 + a_2 - a_3) \pm j(b_1 - b_2 - b_3) = c + jd$$

Деление и умножение синусоидальных величин удобнее производить в показательной форме:

$$\frac{a_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{a_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$a_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot a_2 \cdot e^{j\varphi_2} = a_1 \cdot a_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

4.3. В ходе расчета электрических цепей постоянно возникает необходимость перехода от алгебраической формы записи к показательной и наоборот:

$$a + jb \rightarrow c \cdot e^{j\varphi}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

$$c \cdot e^{j\varphi} \rightarrow a + jb$$

$$a = c \cdot \cos \varphi, \quad b = c \cdot \sin \varphi$$

4.4. Если через активный резистор протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то по закону Ома падение напряжения на нем  $u = R \cdot I_m \sin \omega t$ .

Таким образом ток, протекающий через активный резистор и напряжение на нем, совпадают по фазе.

Сопротивление  $R$  активного резистора называют активным сопротивлением.

4.5. Если через индуктивность  $L$  течет ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то в катушке наводится ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L \cdot I_m \cos \omega t = \omega L \cdot I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

Падение напряжения на индуктивности:

$$u = -e_L = \omega L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Таким образом, протекающий через индуктивность ток на  $90^\circ$  отстает от напряжения.

Произведение  $\omega L = X_L$  называют индуктивным сопротивлением и по закону Ома:

$$I_m = X_L \cdot U_m$$

4.6. Если к конденсатору приложено переменное напряжение  $u = U_m \cdot \sin \omega t$ , то он будет периодически перезаряжаться, что сопровождается протеканием по нему зарядного тока

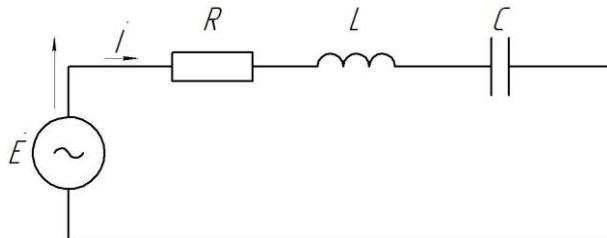
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot U_m \sin \omega t) = \omega C \cdot U_m \cos \omega t = \omega C \cdot U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Таким образом, протекающий через конденсатор ток на  $90^\circ$  опережает напряжение.

По закону Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega \cdot c}} = \frac{U_m}{X_C}$$

$X_C = \frac{1}{\omega \cdot c}$  – называют емкостным сопротивлением.



4.7. Как известно Законы Кирхгофа носят универсальный характер и для последовательной  $R - L - C$  цепи уравнение, составленное на основании второго Закона Кирхгофа, может быть записано для мгновенных значений  $u_R + u_L + u_C = e$

или

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int i dt = e$$

в том числе и в комплексной форме

$$I_m R + I_m \cdot j\omega L + I_m \left( \frac{-j}{\omega c} \right) = \dot{E}_m$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega c}} = \frac{\dot{E}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega c}}$$

Величину  $Z = R + j\omega L + \frac{-j}{\omega c} = Ze^{j\varphi}$  называется комплексным сопротивлением электрической цепи переменному току.

Тогда уравнение  $I = \frac{\dot{E}}{Z}$  представляет собой закон Ома для цепи синусоидального тока.

В общем случае  $Z$  имеет некоторую действительную часть  $R$  и некоторую мнимую часть  $jX$ , где

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega c}$$

4.8. Под комплексной проводимостью  $Y$  понимают величину, обратную комплексному сопротивлению  $Z$ :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} - j \frac{X}{R^2+X^2} = g - jb,$$

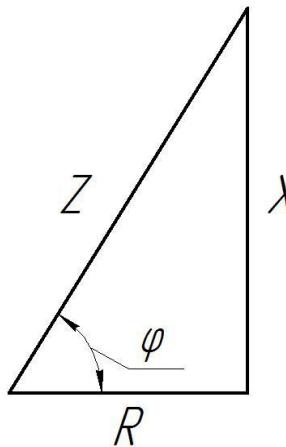
где:

$$g = \frac{R}{R^2+X^2} \quad ; \quad b = \frac{X}{R^2+X^2}$$

и

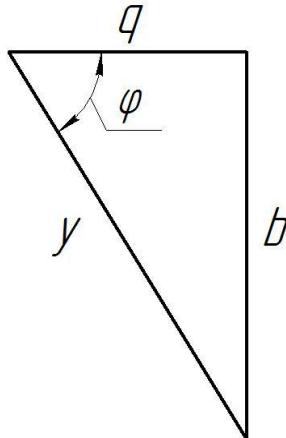
$$y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

4.9. Так как  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ , то  $Z$  можно представить как гипотенузу треугольника – треугольника сопротивлений, один катет которого равен  $R$ , а другой  $X$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

4.10. Аналогично можно представить и треугольник проводимостей



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{y}$$

4.11. Приведенные выше выкладки и формулы составляют основу расчета электрических цепей синусоидального тока.

4.12. Полная (кажущаяся) мощность участка цепи переменного тока определяется по формуле:

$$S = \dot{U} \cdot \hat{I} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cos \varphi + jU \cdot I \sin \varphi = P + jQ$$

где

$\hat{I}$  – сопряженный комплекс тока;

$P$  – активная мощность участка цепи;

$Q$  - реактивная мощность участка цепи.

4.13. Мгновенные значения и комплексы трехфазной системы ЭДС имеют вид:

$$e_A = E \sin \omega t ; \quad \dot{e}_A = E \cdot e^{j0^\circ}$$

$$e_B = E \sin(\omega t + 120^\circ) ; \quad \dot{e}_B = E \cdot e^{j120^\circ}$$

$$e_C = E \sin(\omega t + 240^\circ) ; \quad \dot{e}_C = E \cdot e^{j240^\circ}$$

4.14. В симметричной трехфазной цепи комплексные сопротивления составляющих ее фаз одинаковы.

4.15. Для симметричной трехфазной системы при соединении звездой существуют следующие зависимости между линейными и фазными напряжениями и токами:

$$U_A = \sqrt{3} \cdot U_\Phi ; \quad I_a = I_\Phi$$

4.16. Для симметричной трехфазной системы при соединении треугольником, линейные и фазные напряжения и токи связаны соотношениями:

$$U_1 = U_\Phi ; \quad I_1 = \sqrt{3} \cdot I_\Phi$$

4.17. Расчеты несимметричных трехфазных цепей проводятся также с помощью законов Кирхгофа.

Если к трехфазному генератору, соединенному звездой, подключен приемник энергии, также соединенный звездой, то напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_{oo'}$  между нейтральными (нулевыми) точками генератора ( $O$ ) и приемника ( $O'$ ) определяется по формуле:

$$U_{oo'} = \frac{\dot{E}_A \cdot Y_A + \dot{E}_B \cdot Y_B + \dot{E}_C \cdot Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

где

$\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$  – фазные напряжения (ЭДС) генератора;

$Y_A, Y_B, Y_C, Y_N$  – проводимости отдельных фаз и нейтрального провода.

4.18. Токи в фазах и в нейтральном проводе определяются по формулам:

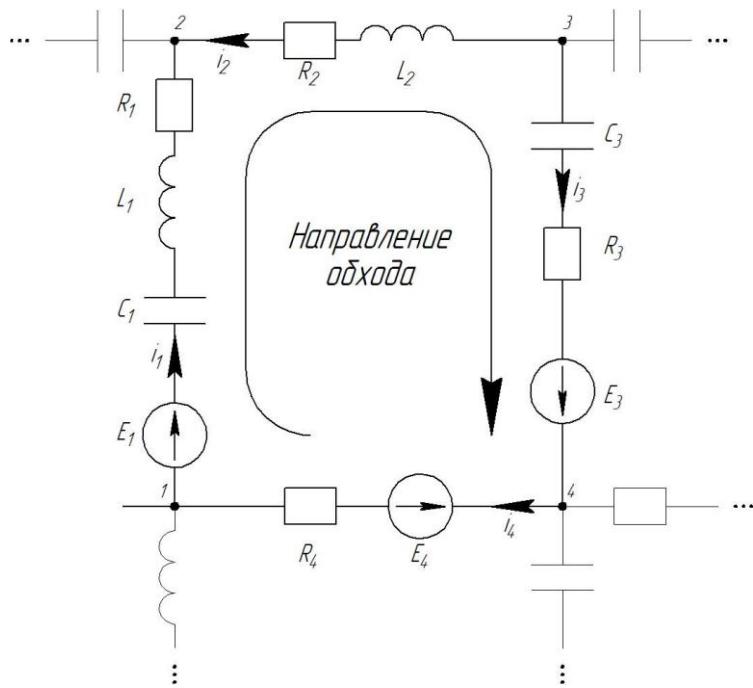
$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{oo'}}{Z_A} ; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{oo'}}{Z_B} ; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{oo'}}{Z_C}$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

4.19. Следует помнить, что для любой трехфазной системы сумма комплексных линейных напряжений равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$$

4.20. Электрическая цепь может быть сколь угодно сложной, но для замкнутого контура принцип составления уравнения по второму закону Кирхгофа неизменен. Например:



$$\frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i_1 \cdot dt + L \cdot \frac{di_1}{dt} + i_1 \cdot R_1 - i_2 \cdot R_2 - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_3} \cdot \int_0^t i_3 \cdot dt + i_3 \cdot R_3 + i_4 \cdot R_4 = E_1(t) + E_3(t) - E_4(t).$$

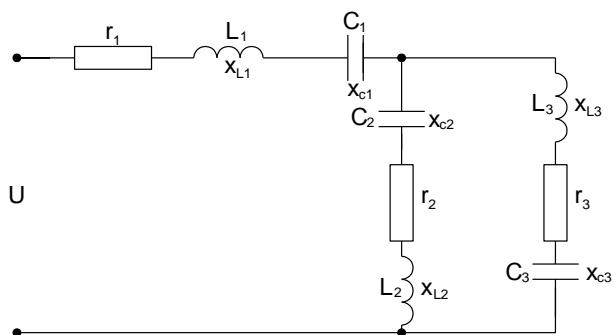
Или в комплексной форме:

$$\dot{I}_1 \cdot \left( -\frac{j}{\omega \cdot C_1} \right) + \dot{I}_1 \cdot j \cdot \omega \cdot L_1 + \dot{I}_1 \cdot R_1 - \dot{I}_2 \cdot R_2 - \dot{I}_2 \cdot j \cdot \omega \cdot L_2 + \dot{I}_3 \cdot \left( -\frac{j}{\omega \cdot C_3} \right) + \dot{I}_3 \cdot R_3 + \dot{I}_4 \cdot R_4 = \dot{E}_1 + \dot{E}_3 - \dot{E}_4$$

### Пример расчета электрической цепи переменного синусоидального тока

#### символическим методом

Определить токи и падение напряжений на всех элементах электрической схемы.



Элементы цепи	U, В	f, Гц	r <sub>1</sub> , Ом	L <sub>1</sub> , мГ	C <sub>1</sub> , мкФ	r <sub>2</sub> , Ом	L <sub>2</sub> , мГ	C <sub>2</sub> , мкФ	r <sub>3</sub> , Ом	L <sub>3</sub> , мГ	C <sub>3</sub> , мкФ
Параметры	220	50	30	30	30	260	159	30	40	63,7	50

$$\dot{U} = 220 \cdot e^{j0^\circ} \text{ В} \quad f = 50 \text{ Гц}$$

Определяем неизвестные сопротивления индуктивностей второй и третьей ветвей:

$$X_{L2} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_2 = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 159 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_3 = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 63,7 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом}.$$

Алгоритм расчёта электрической цепи переменного тока выглядит следующим образом:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{123}}, \quad Z_{123} = Z_1 + Z_{23}, \quad Z_{23} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

Рассчитываем сопротивления ветвей:

$$Z_1 = 30 + j(30 - 30) = 30 \text{ [Ом]}$$

$$Z_2 = 260 + j(50 - 30) = 260 + j20 = \sqrt{260^2 + 20^2} \cdot e^{j\arctg \frac{20}{260}} = 260,77 \cdot e^{j4,4^\circ} \text{ [Ом]}$$

$$Z_3 = 40 + j(20 - 50) = 40 - j30 = 50 \cdot e^{-j36,87^\circ} \text{ [Ом]}$$

Рассчитываем эквивалентное сопротивление второй и третьей ветви:

$$Z_{23} = \frac{260 \cdot e^{j4,4^\circ} \cdot 50 \cdot e^{-j36,87^\circ}}{260 + j20 + 40 - j30} = \frac{13038,5 \cdot e^{-j32,47^\circ}}{100,17 e^{-j1,91^\circ}} = 43,44 \cdot e^{-j30,56^\circ} = 37,4 - j22,09 \text{ [Ом]}$$

Рассчитываем эквивалентное сопротивление всей схемы:

$$Z_{123} = 30 + 37,4 - j22,09 = 67,4 - j22,09 = 70,93 \cdot e^{-j18,15^\circ}$$

Ток первой ветви определяем по приведенной выше формуле:

$$\dot{I}_1 = \frac{220 e^{j0^\circ}}{70,93 \cdot e^{-j18,15^\circ}} = 3,1 \cdot e^{j18,15^\circ} \text{ [А]}$$

Токи второй и третьей ветвей, а также напряжение, приложенное к ним, определяем по формулам:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_2}, \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_3}, \quad U_{23} = \dot{I}_1 \cdot Z_{23}$$

$$\dot{U}_{23} = 3,1 \cdot e^{j18,15^\circ} \cdot 43,44 \cdot e^{-j30,56^\circ} = 134,74 \cdot e^{-j12,41^\circ}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{134,74 \cdot e^{-j12,41^\circ}}{260,77 \cdot e^{j4,4^\circ}} = 0,517 \cdot e^{-j16,81^\circ} \text{ [А]}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_3} = \frac{134,74 \cdot e^{-j12,41^\circ}}{50 \cdot e^{-j36,87^\circ}} = 2,69 \cdot e^{j24,46^\circ} \text{ [А]}$$

Рассчитываем полную мощность:

$$S = \dot{U} \cdot \dot{I} = 220 \cdot e^{j0^\circ} \cdot 3,1 \cdot e^{-j18,15^\circ} = 682 \cdot e^{-j18,15^\circ} = 648,07 - j212,45 \text{ [ВА]}$$

Правильность расчета определяем составлением баланса мощностей

$$P = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 = 3,1^2 \cdot 30 + 0,517^2 \cdot 260 + 2,69^2 \cdot 40 = 647,24 \text{ [Bm]}$$

т.е.  $P \approx \text{Re } S$

$$Q = I_1^2(X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2(X_{L2} - X_{C2}) + I_3^2(X_{L3} - X_{C3}) = 3,1^2(30 - 30) + 0,517^2(50 - 30) + 2,69^2(20 - 50) = -211,73 \text{ [BAP]}$$

т.е.  $Q \approx \text{Im } S$

Для построения векторной диаграммы рассчитываем падение напряжений на всех элементах схемы:

$$\dot{U}_{RI} = \dot{I}_1 \cdot R_1 = 3,1 \cdot e^{j18,15^\circ} \cdot 30 = 93 \cdot e^{j18,15^\circ}$$

$$\dot{U}_{XL1} = \dot{I}_1 \cdot X_{L1} = 3,1 \cdot e^{j18,15^\circ} \cdot 30 \cdot e^{j90^\circ} = 93 \cdot e^{j108,15^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{XC1} = \dot{I}_1 \cdot X_{C1} = 3,1 \cdot e^{j18,15^\circ} \cdot 30 \cdot e^{-j90^\circ} = 93 \cdot e^{-j71,85^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2 \cdot R_2 = 0,517 \cdot e^{-j16,81^\circ} \cdot 260 = 134,42 \cdot e^{-j16,81^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{XL2} = \dot{I}_2 \cdot X_{L2} = 0,517 \cdot e^{-j16,81^\circ} \cdot 50 \cdot e^{j90^\circ} = 25,85 \cdot e^{j73,19^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{XC2} = \dot{I}_2 \cdot X_{C2} = 0,517 \cdot e^{-j16,18^\circ} \cdot 30 \cdot e^{-j90^\circ} = 15,51 \cdot e^{-j106,81^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{R3} = \dot{I}_3 \cdot R_3 = 2,69 \cdot e^{j24,46^\circ} \cdot 40 = 107,6 \cdot e^{j24,46^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{XL3} = \dot{I}_3 \cdot X_{L3} = 2,69 \cdot e^{j24,46^\circ} \cdot 20 \cdot e^{j90^\circ} = 53,8 \cdot e^{j114,46^\circ} \text{ [B]}$$

$$\dot{U}_{XC3} = \dot{I}_3 \cdot X_{C3} = 2,69 \cdot e^{j24,46^\circ} \cdot 50 \cdot e^{-j90^\circ} = 134,5 \cdot e^{-j65,54^\circ} \text{ [B]}$$

### Построение векторной диаграммы токов и напряжений, действующих в последовательно-параллельной цепи синусоидального тока

Отсчет углов производим относительно горизонтальной оси (ось «X», ось абсцисс); причем положительные углы откладываем против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой стрелке.

Алгоритм построения векторной диаграммы следующий:

1. Из начала координат проводим направления токов:
  - $\dot{I}_1$  –  $18,15^\circ$  против часовой стрелки относительно оси  $X$ ;
  - $\dot{I}_2$  –  $16,81^\circ$  по часовой стрелке;
  - $\dot{I}_3$  –  $24,46^\circ$  против часовой стрелки.
2. Построение начинаем с «далней» (третьей) ветви:
  - 2.1. Падение напряжения на  $R_3$  совпадает с направлением тока  $\dot{I}_3$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{R3}$  в масштабе откладываем в направлении тока  $\dot{I}_3$ .
  - 2.2. Падение напряжения на  $L_3$  на  $90^\circ$  опережает ток  $\dot{I}_3$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{L3}$  в масштабе откладываем перпендикулярно направлению тока  $\dot{I}_3$  с опережением на  $90^\circ$  начиная с конца вектора  $\dot{U}_{R3}$ .
  - 2.3. Падение напряжения на  $C_3$  на  $90^\circ$  отстает от тока  $\dot{I}_3$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{C3}$  в масштабе откладываем перпендикулярно направлению тока  $\dot{I}_3$  с отставанием на  $90^\circ$  начиная с конца вектора  $\dot{U}_{R3}$ .
  - 2.4. Векторы  $\dot{U}_{L3}$  и  $\dot{U}_{C3}$  имеют противоположное направление; их результирующий вектор  $\dot{U}_{P3}$  (реактивное напряжение третьей ветви) равен их

геометрической разности и, в данном случае, направлен перпендикулярно току  $\dot{I}_3$  с отставанием на  $90^\circ$ .

2.5. Геометрическая сумма активного и реактивного падений напряжений третьей ветви (геометрическая сумма векторов  $\dot{U}_{R3}$  и  $\dot{U}_{P3}$ ) определит полное падение напряжения на третьей ветви  $\dot{U}_3$ .

3. Аналогично строим вектор падения напряжения на второй ветви:

3.1. Падение напряжения на  $R_2$  совпадает с направлением тока  $\dot{I}_2$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{R2}$  в масштабе откладываем в направлении тока  $\dot{I}_2$ .

3.2. Падение напряжения на  $L_2$  на  $90^\circ$  опережает ток  $\dot{I}_2$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{L2}$  в масштабе откладываем перпендикулярно направлению тока  $\dot{I}_2$  с опережением на  $90^\circ$  начиная с конца вектора  $\dot{U}_{R2}$ .

3.3. Падение напряжения на  $C_2$  на  $90^\circ$  отстает от тока  $\dot{I}_2$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{C2}$  в масштабе откладываем перпендикулярно направлению тока  $\dot{I}_2$  с отставанием на  $90^\circ$  начиная с конца вектора  $\dot{U}_{R2}$ .

3.4. Векторы  $\dot{U}_{L2}$  и  $\dot{U}_{C2}$  имеют противоположное направление; их результирующий вектор  $\dot{U}_{P2}$  (реактивное напряжение второй ветви) равен их геометрической разности и, в данном случае, направлен перпендикулярно току  $\dot{I}_2$  с опережением на  $90^\circ$ .

3.5. Геометрическая сумма активного и реактивного падений напряжений второй ветви (геометрическая сумма векторов  $\dot{U}_{R2}$  и  $\dot{U}_{P2}$ ) определит полное падение напряжения на второй ветви  $\dot{U}_2$ .

4. Т.к. вторая и третья ветви параллельны, то, естественно,  $\dot{U}_2 = \dot{U}_3$ , т.е. векторы  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  совпадают по величине и по направлению. Обозначим этот вектор  $\dot{U}_{23}$ .

5. Полное падение напряжения на всех элементах схемы представляет собой геометрическую сумму векторов  $\dot{U}_{23}$  и  $\dot{U}_1$  (вектор полного падения напряжения на элементах первой ветви).

6. Построение вектора полного падения напряжения на элементах первой ветви (вектора  $\dot{U}_1$ ) производим следующим образом:

6.1. С конца вектора  $\dot{U}_{23}$  проводим линию, параллельную направлению тока  $\dot{I}_1$ .

6.2. Падение напряжения на  $R_1$  совпадает с направлением тока  $\dot{I}_1$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{R1}$  в масштабе откладываем в направлении тока  $\dot{I}_1$ .

6.3. Падение напряжения на  $L_1$  на  $90^\circ$  опережает ток  $\dot{I}_1$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{L1}$  в масштабе откладываем перпендикулярно направлению тока  $\dot{I}_1$  с опережением на  $90^\circ$  начиная с конца вектора  $\dot{U}_{R1}$ .

6.4. Падение напряжения на  $C_1$  на  $90^\circ$  отстает от тока  $\dot{I}_1$ . Поэтому вектор  $\dot{U}_{C1}$  в масштабе откладываем перпендикулярно направлению тока  $\dot{I}_1$  с отставанием на  $90^\circ$  начиная с конца вектора  $\dot{U}_{R1}$ .

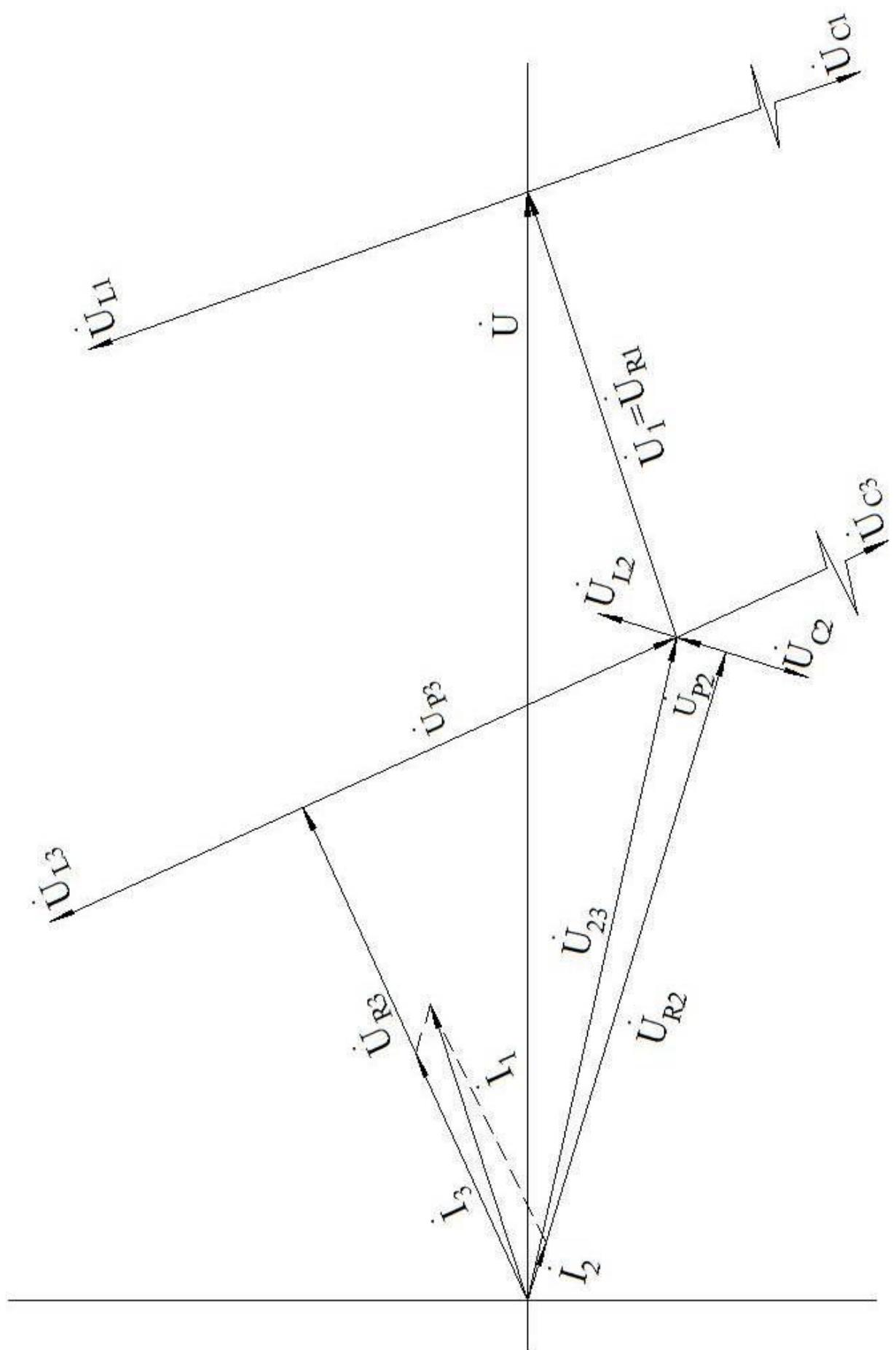
6.5. Векторы  $\dot{U}_{L1}$  и  $\dot{U}_{C1}$  имеют противоположное направление; их результирующий вектор  $\dot{U}_{p1}$  (реактивное напряжение первой ветви) равен их геометрической разности и, в данном случае, равен нулю, т.е. в первой ветви мы наблюдаем резонанс напряжений.

6.6. Геометрическая сумма активного и реактивного падений напряжений первой ветви (геометрическая сумма векторов  $\dot{U}_{R1}$  и  $\dot{U}_{p1}$ ) определит полное падение напряжения на первой ветви  $\dot{U}_1$  и, в данном случае, оно по величине и по направлению совпадает с вектором  $\dot{U}_{R1}$ .

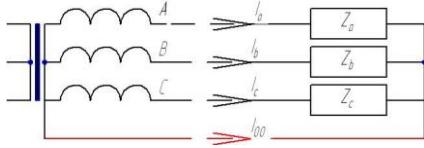
Обозначим его « $\dot{U}_{R1} = \dot{U}_1$ ».

7. Как отмечалось выше, полное падение напряжения на всех элементах схемы представляет собой геометрическую сумму векторов  $\dot{U}_{23}$  и  $\dot{U}_1$ , которую обозначаем  $\dot{U}$ .

8. Вектор тока  $\dot{I}_1$  представляет собой геометрическую сумму векторов  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$ , которую строим в выбранном удобном масштабе токов на уже проведенных направлениях.



Рассчитать токи и напряжения во вторичной обмотке трёхфазного трансформатора, к которому подключена несимметричная нагрузка, согласно задания:



$U_\phi$ , B	$R_a$ , Ом	$X_a$ , Ом	$R_b$ , Ом	$X_b$ , Ом	$R_c$ , Ом	$X_c$ , Ом
50	4	-5	8	-10	4	12

### 1.1. Расчет цепи без нулевого провода:

$$\dot{U}_A = 50 \cdot e^{j0^\circ} B;$$

$$\dot{U}_B = 50 \cdot e^{j120^\circ} B;$$

$$\dot{U}_C = 50 \cdot e^{j240^\circ} B;$$

$$Z_a = 4 - j5 = 6,403 \cdot e^{-j51,34^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_b = 8 - j10 = \sqrt{8^2 + (-10)^2} \cdot e^{j\arctg\left(\frac{-10}{8}\right)^\circ} = 12,806 \cdot e^{-j51,34^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_c = 4 + j12 = 12,649 \cdot e^{j71,57^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{oo'}}{Z_a}; \quad \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{oo'}}{Z_b}; \quad \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{oo'}}{Z_c}$$

$$\dot{U}_{oo'} = \frac{\dot{U}_A \cdot Y_a + \dot{U}_B \cdot Y_b + \dot{U}_C \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c};$$

$$Y_a = \frac{1}{Z_a} = \frac{1}{6,403 \cdot e^{-j51,34^\circ}} = 0,156 \cdot e^{j51,34^\circ} = 0,0976 + j0,1218 \text{ [См]};$$

$$Y_b = \frac{1}{Z_b} = \frac{1}{12,806 \cdot e^{-j51,34^\circ}} = 0,0781 \cdot e^{j51,34^\circ} = 0,0488 + j0,0610 \text{ [См]};$$

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{12,649 \cdot e^{j71,57^\circ}} = 0,0791 \cdot e^{-j71,57^\circ} = 0,0250 - j0,0750 \text{ [См]}$$

$$\dot{U}_{oo'} = \frac{200 \cdot e^{j0^\circ} \bullet 0,0462 \cdot e^{-j33,69^\circ} + 200 \cdot e^{j120^\circ} \bullet 0,0371 \cdot e^{j68,20^\circ} + 200 \cdot e^{j240^\circ} \bullet 0,0606 \cdot e^{-j14,04^\circ}}{0,0385 - j0,0256 + 0,0138 + j0,0344 + 0,0588 - j0,0147} =$$

$$= 152,331 \cdot e^{j244,56^\circ} = -65,435 - j137,56 \text{ [B]}$$

$$\dot{U}'_a = 200 - (-65,435 - j137,56) = 265,435 + j137,56 = 298,962 \cdot e^{j27,4^\circ} \text{ [B]};$$

$$\dot{U}'_b = -100 + j173,205 - (-65,435 - j137,56) = -34,565 + j310,765 = 312,681 \cdot e^{j96,35^\circ} \text{ [B]};$$

$$\dot{U}'_c = -100 - j173,205 - (-65,435 - j137,56) = -34,565 - j35,645 = 49,652 \cdot e^{j225,88^\circ} [B]$$

$$\dot{I}'_a = \frac{298,962 \cdot e^{j27,4^\circ}}{21,633 \cdot e^{j33,69^\circ}} = 13,82 \cdot e^{-j6,29^\circ} = 13,737 - j1,514 [A];$$

$$\dot{I}'_b = \frac{312,681 \cdot e^{j96,35^\circ}}{26,926 \cdot e^{-j68,20^\circ}} = 11,613 \cdot e^{j164,55^\circ} = -11,193 + j3,094 [A];$$

$$\dot{I}'_c = \frac{49,652 \cdot e^{j225,88^\circ}}{16,492 \cdot e^{j14,04^\circ}} = 3,011 \cdot e^{j211,84^\circ} = -2,558 - j1,588 [A].$$

(Правильность расчета проверяется:  $\sum(\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c) = 0$ ).

## 1.2. Расчет цепи с нулевым проводом.

Т.к. по условию  $Z_{\text{трансф}}$  и  $Z_{\text{л.}}$  не заданы, то полагаем их равными нулю.

Тогда:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A; \dot{U}_b = \dot{U}_B; \dot{U}_c = \dot{U}_C \text{ и:}$$

$$\dot{I}'_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = \frac{200 \cdot e^{j0^\circ}}{21,633 \cdot e^{j33,69^\circ}} = 9,245 \cdot e^{-j33,69^\circ} = 7,692 - j5,128 [A];$$

$$\dot{I}'_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{200 \cdot e^{j120^\circ}}{26,926 \cdot e^{-j68,2^\circ}} = 7,428 \cdot e^{j188,2^\circ} = -7,352 - j1,059 [A];$$

$$\dot{I}'_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{200 \cdot e^{j240^\circ}}{16,492 \cdot e^{j14,04^\circ}} = 12,127 \cdot e^{j225,96^\circ} = -8,43 - j8,717 [A].$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}'_a + \dot{I}'_b + \dot{I}'_c = -8,09 - j14,904 = 16,958 \cdot e^{j241,5^\circ} [A]$$

На основании расчетных данных строим векторную диаграмму.

## 5. Периодические несинусоидальные токи в линейных электрических цепях

Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Известно, что любую периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье и записать в виде:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot \sin(x + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(2x + \varphi_2) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(kx + \varphi_k), \text{ где:}$$

$A_k$  – амплитуда  $k$ - гармоники ряда Фурье;

$\varphi_k$  - фаза  $k$ - гармоники ряда Фурье.

В случае графического метода определения гармоник ряда Фурье период функции  $f(x)$  равный  $2\pi$  разбивают на  $n$  равных частей  $\Delta x$ .

Тогда :

-амплитуда постоянной составляющей

$$A_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(x)$$

-амплитуда синусной составляющей  $k$ - гармоники

$$A'_k = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(x) \cdot \sin_p kx$$

-амплитуда косинусной составляющей  $k$ - гармоники

$$A''_k = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(x) \cdot \cos_p kx$$

(здесь  $\sin_p kx$  и  $\cos_p kx$  - соответственно значения функций  $\sin kx$   $\cos kx$  при  $x=(p-0,5) \cdot \Delta x$ , т.е. в середине  $p$ -интервала)

-амплитуда  $k$ - гармоники

$$A_k = \sqrt{(A'_k)^2 + (A''_k)^2}$$

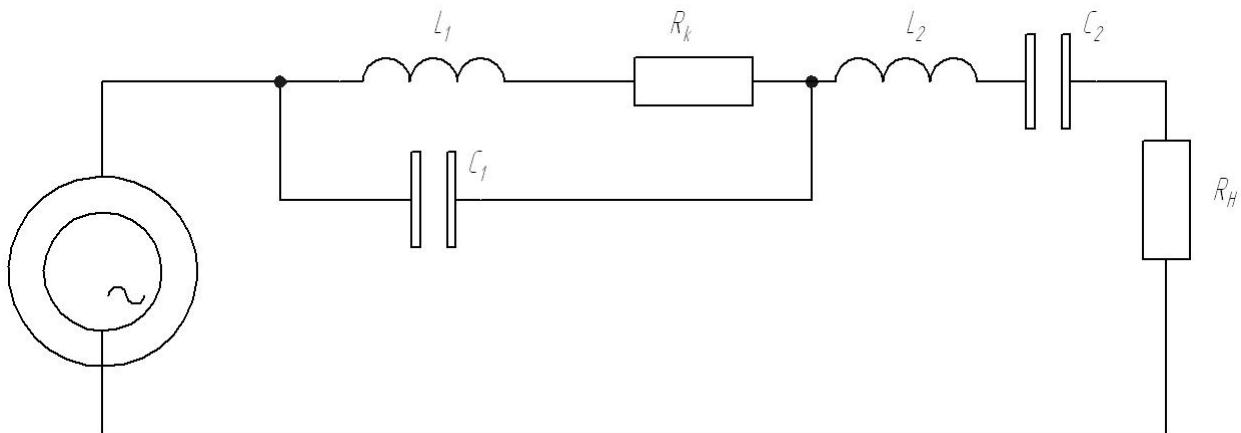
-фаза  $k$ - гармоники

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{A''_k}{A'_k}.$$

Расчёт несколько упрощается, если периодические кривые имеют некоторую симметрию.

Рассчитать электрическую цепь, в которой действует несинусоидальная ЭДС, согласно задания.

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
0	4,22	8,32	11,5	13,4	13,6	12,3	9,96	7,37	5,18	3,89	3,71	4,48	5,74	6,81	7,07	6,05	3,6



$R_h$ , Ом	$R_k$ , Ом	$L_1$ , Гн	$C_1$ , мкФ	$L_2$ , Гн	$C_2$ , мкФ	f. Гц

200	10	-	-	0,507	20	50
-----	----	---	---	-------	----	----

Т.к. кривая симметрична относительно оси «X», то  $A_0=0$  и ряд будет состоять только из нечетных гармоник.

Амплитуда синусной составляющей первой гармоники:

$$A_1^{\sin} = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} f_p(x) \cdot \sin_p x = \frac{4}{36} \left( \begin{array}{l} 0 \cdot \sin 0^\circ + 4,22 \cdot \sin 10^\circ + 8,32 \cdot \sin 20^\circ + 11,5 \cdot \sin 30^\circ + \\ + 13,4 \cdot \sin 40^\circ + 13,6 \cdot \sin 50^\circ + 12,3 \cdot \sin 60^\circ + 9,96 \cdot \sin 70^\circ + \\ + 7,37 \cdot \sin 80^\circ + 5,18 \cdot \sin 90^\circ + 3,89 \cdot \sin 100^\circ + \\ + 3,71 \cdot \sin 110^\circ + 4,48 \cdot \sin 120^\circ + 5,74 \cdot \sin 130^\circ + \\ + 6,81 \cdot \sin 140^\circ + 7,07 \cdot \sin 150^\circ + 6,05 \cdot \sin 160^\circ + \\ + 3,6 \cdot \sin 170^\circ \end{array} \right) = 9,6678$$

Амплитуда косинусной составляющей первой гармоники:

$$A_1^{\cos} = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} f_p(x) \cdot \cos_p x = 2,5925$$

Тангенс угла  $\phi_1$ , на который начало первой гармоники смещено по отношению к началу кривой  $f(x)$ :

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{A_1^{\cos}}{A_1^{\sin}} = \frac{2,5925}{9,6678} = 0,2682, \text{ откуда } \phi_1 = 15^\circ.$$

Амплитуда первой гармоники:

$$A_1 = \sqrt{(A_1^{\sin})^2 + (A_1^{\cos})^2} = \sqrt{9,6678^2 + 2,5925^2} = 10,0094.$$

Амплитуда синусной составляющей третьей гармоники:

$$A_3^{\sin} = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} f_p(x) \cdot \sin(3x) = \frac{4}{36} \left( \begin{array}{l} 0 \cdot \sin(3 \cdot 0^\circ) + 4,22 \cdot \sin(3 \cdot 10^\circ) + 8,32 \cdot \sin(3 \cdot 20^\circ) + 11,5 \cdot \sin(3 \cdot 30^\circ) + \\ + 13,4 \cdot \sin(3 \cdot 40^\circ) + 13,6 \cdot \sin(3 \cdot 50^\circ) + 12,3 \cdot \sin(3 \cdot 60^\circ) + 9,96 \cdot \sin(3 \cdot 70^\circ) + 7,37 \cdot \sin(3 \cdot 80^\circ) + \\ + 5,18 \cdot \sin(3 \cdot 90^\circ) + 3,89 \cdot \sin(3 \cdot 100^\circ) + 3,71 \cdot \sin(3 \cdot 110^\circ) + 4,48 \cdot \sin(3 \cdot 120^\circ) + \\ + 5,74 \cdot \sin(3 \cdot 130^\circ) + 6,81 \cdot \sin(3 \cdot 140^\circ) + 7,07 \cdot \sin(3 \cdot 150^\circ) + 6,05 \cdot \sin(3 \cdot 160^\circ) + \\ + 3,6 \cdot \sin(3 \cdot 170^\circ) \end{array} \right) = 4,4812$$

$$A_3^{\cos} = \frac{4}{n} \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} f_p(x) \cdot \cos(3x) = -2,6003;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{A_3^{\cos}}{A_3^{\sin}} = \frac{-17,32...}{14,56...} = -1,189193721, \text{ откуда } \varphi_3 = -50^\circ;$$

$$A_3 = \sqrt{(A_3^{\sin})^2 + (A_3^{\cos})^2} = \sqrt{14,56...^2 + 17,32...^2} = 22,637.$$

$$A_5^{\sin} = \frac{4}{36} \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} f_p(x) \cdot \sin(5x) = 0,066926008;$$

$$A_5^{\cos} = \frac{4}{36} \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} f_p(x) \cdot \cos(5x) = -0,043932753;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_5 = \frac{A_5^{\cos}}{A_5^{\sin}} = \frac{-0,043...}{0,066...} = -0,656; \varphi_5 = -33,3^\circ;$$

$$A_5 = \sqrt{(A_5^{\sin})^2 + (A_5^{\cos})^2} = 0,08.$$

Т.о.:

$$f(\omega t) = 99,94 \cdot \sin(\omega t + 10^\circ) + 22,64 \cdot \sin(3\omega t - 50^\circ) + 0,08 \cdot \sin(5\omega t - 33,3^\circ)$$

Сопротивление цепи первой гармонике

$$X_{L_2}^{(1)} = 2\pi f^{(1)} L_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,225 = 70,69 \text{ [Ом];}$$

$$X_{C_2}^{(1)} = \frac{1}{2\pi f^{(1)} C_2} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 636,62 \text{ [Ом].}$$

Ток в цепи первой гармоники

$$I^{(1)} = \frac{\dot{U}^{(1)}}{Z_1}, \text{ где } Z^{(1)} - \text{сопротивление цепи первой гармонике,}$$

$$Z^{(1)} = R_K + X_{L_2} + X_{C_2} + R_H = 10 + j70,69 - j636,62 + 500 = 510 - j565,93 = 761,82 \cdot e^{-j48^\circ} \text{ [Ом];}$$

$$I^{(1)} = \frac{99,94 \cdot e^{j10^\circ}}{761,82 \cdot e^{-j48^\circ}} = 0,131 \cdot e^{j58^\circ} \text{ [А];}$$

Действующие значения тока и напряжения первой гармоники:

$$U_\delta^{(1)} = \frac{U^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{99,94}{\sqrt{2}} = 70,67 \text{ [В];}$$

$$I_\delta^{(1)} = \frac{I^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{0,131}{\sqrt{2}} = 0,093 \text{ [А];}$$

Угол сдвига фазы между током и напряжением первой гармоники:

$$\psi^{(1)} = \varphi_U^{(1)} - \varphi_I^{(1)} = 10^\circ - 58^\circ = -48^\circ.$$

$$X_{L_2}^{(3)} = 2\pi \cdot f^{(3)} \cdot L_2 = 2\pi \cdot (3 \cdot 50) \cdot 0,225 = 212 \text{ [Ом];}$$

$$X_{C_2}^{(3)} = \frac{1}{2\pi \cdot f^{(3)} \cdot C_2} = \frac{1}{2\pi \cdot (3 \cdot 50) \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 212 \text{ [Ом];}$$

$$Z^{(3)} = 10 + j212 - j212 + 500 = 510 \text{ [Ом];}$$

$$I^{(3)} = \frac{22,64 \cdot e^{-j50^\circ}}{510} = 0,0444 \cdot e^{-j50^\circ} \text{ [А];}$$

$$U_{\delta}^{(3)} = \frac{22,64}{\sqrt{2}} = 16,0 \text{ [B]};$$

$$I_{\delta}^{(3)} = \frac{0,125}{\sqrt{2}} = 0,03 \text{ [A]};$$

$$\psi^{(3)} = -50^\circ - (-50^\circ) = 0^\circ$$

$$X_{L_2}^{(5)} = 2\pi \cdot f^{(5)} \cdot L_2 = 2\pi \cdot (5 \cdot 50) \cdot 0,225 = 353 \text{ [Ом]};$$

$$X_{C_2}^{(5)} = \frac{1}{2\pi \cdot (5 \cdot 50) \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 127 \text{ [Ом]};$$

$$Z^{(5)} = 10 + j353 - j127 + 500 = 510 + j226 = 557 \cdot e^{j24^\circ} \text{ [Ом]};$$

$$I^{(5)} = \frac{0,08 \cdot e^{-j33,5^\circ}}{557 \cdot e^{j24^\circ}} = 144 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-j57,5^\circ} \text{ [A]};$$

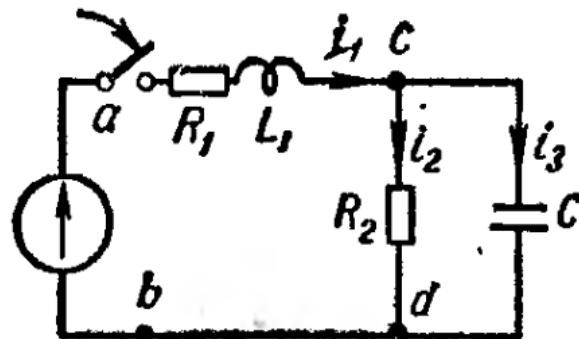
$$I_{\delta}^{(5)} = 102 \cdot 10^{-6} \text{ [A]}; \quad U_{\delta}^{(5)} = 0,0057 \text{ [B]}; \quad \psi^{(5)} = 24^\circ.$$

Мощность, потребляемая от источника:

$$\begin{aligned} P &= I_{\delta}^{(1)} \cdot U_{\delta}^{(1)} \cdot \cos \psi^{(1)} + I_{\delta}^{(3)} \cdot U_{\delta}^{(3)} \cdot \cos \psi^{(3)} + I_{\delta}^{(5)} U_{\delta}^{(5)} \cdot \psi^{(5)} = \\ &= 0,093 \cdot 70,67 \cdot \cos(-48^\circ) + 0,03 \cdot 16 \cdot \cos(0^\circ) + 102 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0057 \cdot \cos(24^\circ) \approx \\ &\approx 7,05 \text{ [Вт]}. \end{aligned}$$

## 6. Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях

Под переходным процессом в энергетической системе (электрической цепи) понимают переход от одного режима работы энергетической системы (электрической цепи) (обычно периодического) к другому (также периодическому), но чем – либо отличающегося от предыдущего (амплитудой, фазой, частотой и т.д.).



Для расчёта послекоммутационной схемы составляются уравнения по законам Кирхгофа для полных токов и напряжений:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + R_1 \cdot i_1 + i_2 \cdot R_2 = E$$

$$i_2 \cdot R_2 - \frac{1}{C} \cdot \int i_3 \cdot dt = 0$$

В этих уравнениях  $i_1, i_2, i_3$  - полные токи. Каждый из них состоит из свободного и принужденного токов.

Из математики: общий интеграл линейного дифференциального уравнения равен сумме частного решения неоднородного уравнения плюс общее решение однородного уравнения. Частное решение уравнения – решение установившегося состояния электрической цепи. Однородное уравнение получаем из исходного, если вся правая часть системы уравнений равна 0. Т.е., чтобы от этой системы уравнений перейти к уравнениям для свободных токов, «освободим» систему от вынуждающих ЭДС.

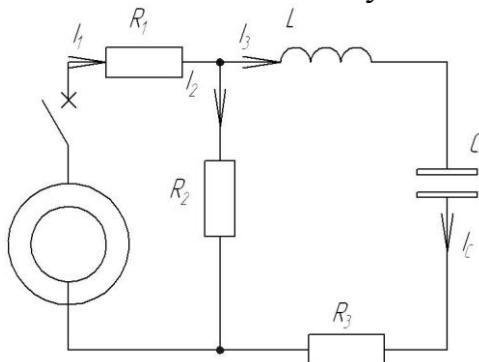
$$i_{1_{ce}} - i_{2_{ce}} - i_{3_{ce}} = 0$$

$$L_1 \cdot \frac{di_{1_{ce}}}{dt} + R_1 \cdot i_{1_{ce}} + i_{2_{ce}} \cdot R_2 = 0$$

$$i_{2_{ce}} \cdot R_2 - \frac{1}{C} \cdot \int i_{3_{ce}} \cdot dt = 0$$

Из математики: решение однородного дифференциального уравнения записывается в виде показательной функции  $A \cdot e^{pt}$ . Т.о. уравнение для каждого свободного тока можно представить в виде  $i_{ce} = A \cdot e^{pt}$ . Постоянная интегрирования (A) для каждого свободного тока своя (или свои), а вот показатели затухания  $p$  одинаковы для всех свободных токов, т.к. вся электрическая цепь охвачена единым (общим) переходным процессом.

Выполнить расчет переходного процесса в эл. цепи при подключению её к источнику постоянного напряжения



E, В	R <sub>1</sub> , кОм	R <sub>2</sub> , кОм	C, мкФ	L, Гн	R <sub>3</sub> , кОм
100	1	2	20	5	0,452

Т.к. в схеме нулевые начальные условия и нет магнитосвязанных катушек, то изображение тока  $i_1(t)$ :

$$\begin{aligned}
I_1(p) &= \frac{E(p)}{Z_{\text{ee}}(p)} \\
Z_{\text{ee}}(p) &= R_1 + \frac{R_2 \cdot \left( R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right)}{R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp}} = \\
&= \frac{(R_1 + R_2) \cdot L \cdot Cp^2 + C \cdot p \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3) + (R_1 + R_2)}{L \cdot C \cdot p^2 + (R_2 + R_3) \cdot C \cdot p + 1}
\end{aligned}$$

Т.к.  $E = \text{const}$  и  $E(p) = \frac{E}{p}$ , то

$$\begin{aligned}
I_1(p) &= \frac{E \cdot [L \cdot C \cdot p^2 + (R_2 + R_3) \cdot C \cdot p + 1]}{p \cdot [(R_1 + R_2) \cdot L \cdot C \cdot p^2 + C \cdot p \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3) + R_1 + R_2]} = \\
&= \frac{100 \cdot [5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + (2000 + 452) \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot p + 1]}{p \cdot [(1000 + 2000) \cdot 5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 20 \cdot 10^{-6} \cdot p \cdot (1000 \cdot 2000 + 1000 \cdot 452 + 2000 \cdot 452) + 1000 + 2000]} = \\
&= \frac{100 \cdot [0,0001 \cdot p^2 + 0,04904 \cdot p + 1]}{p \cdot [0,3 \cdot p^2 + 67,12 \cdot p + 3000]} = \frac{N(p)}{M(p)}
\end{aligned}$$

$M(p)$  имеет корни:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -61,725$ ;  $p_3 = -162$ .

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$$

$$M'(p) = 3 \cdot 0,3 \cdot p^2 + 2 \cdot 67,12 \cdot p + 3000 = 0,9 \cdot p^2 + 134,24 \cdot p + 3000.$$

$$N(p_1) = 100; M'(p_1) = 3000;$$

$$N(p_2) = -164,6; M'(p_2) = -1856,986;$$

$$N(p_3) = -432,008; M'(p_3) = 4872,72 \text{ Тогда:}$$

$$i_1(t) = \frac{100}{3000} \cdot e^{0t} + \frac{-164,6}{-1856,986} \cdot e^{-62t} + \frac{-432,008}{4872,72} \cdot e^{-162t} = 0,0333 + 0,0886 \cdot e^{-62t} - 0,0886 \cdot e^{-162t} [A]$$

..;

Изображение тока  $i_2(t)$ :

$$I_2(p) = \frac{I_1(p) \cdot Z_{23}}{R_2}; \quad Z_{23}(p) = \frac{R_2 \cdot \left( R_3 + L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p} \right)}{R_2 + R_3 + L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p}} = \frac{R_2 \cdot (L \cdot C \cdot p^2 + R_3 \cdot C \cdot p + 1)}{L \cdot C \cdot p^2 + (R_2 + R_3) \cdot C \cdot p + 1},$$

откуда:

$$\begin{aligned}
I_2(p) &= \frac{E \cdot [L \cdot C \cdot p^2 + (R_2 + R_3) \cdot C \cdot p + 1] \cdot R_2 \cdot (L \cdot C \cdot p^2 + R_3 \cdot C \cdot p + 1)}{R_2 \cdot p \cdot [(R_1 + R_2)LC \cdot p^2 + C \cdot p \cdot (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + R_1 + R_2] \cdot [LC \cdot p^2 + (R_2 + R_3)C \cdot p + 1]} = \\
&= \frac{E \cdot (LC \cdot p^2 + R_3 C \cdot p + 1)}{p \cdot [(R_1 + R_2)LC \cdot p^2 + C \cdot p (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + R_1 + R_2]} = \\
&= \frac{100 \cdot (5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 452 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot p + 1)}{p \cdot [0,3 \cdot p^2 + 67,12 \cdot p + 3000]} = \frac{100 \cdot [0,0001 p^2 + 0,00904 p + 1]}{p \cdot [0,3 p^2 + 67,12 p + 3000]} = \frac{N(p)}{M(p)}
\end{aligned}$$

$M(p)$  имеет те же корни:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -61,725$ ;  $p_3 = -162$ .

$$M'(p) = 0,9p^2 + 134,24p + 3000$$

$$N(p_1) = 100; \quad M'(p_1) = 3000;$$

$$N(p_2) = 82,3; \quad M'(p_2) = -1856,986$$

$$N(p_3) = 215,992; \quad M'(p_3) = 4872,72.$$

$$i_2(t) = 0,0333 - 0,0443 \cdot e^{-62t} + 0,0443 \cdot e^{-162t} [\text{A}].$$

$$I_3(p) = \frac{I_1(p) \cdot Z_{23}}{Z_3(p)} = \frac{E \cdot [LC \cdot p^2 + (R_2 + R_3)C \cdot p + 1]}{p \cdot [(R_1 + R_2)LC \cdot p^2 + C \cdot p(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + R_2 + R_3]} *$$

$$* \frac{R_2 [LC \cdot p^2 + R_3 C \cdot p + 1] \cdot C \cdot p}{[LC \cdot p^2 + (R_2 + R_3)C \cdot p + 1]} * \frac{1}{[LC \cdot p^2 + R_3 C \cdot p + 1]} =$$

$$= \frac{E \cdot R_2 \cdot C}{[(R_1 + R_2)LC \cdot p^2 + C \cdot p(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + R_1 + R_2]} = \frac{4}{0,3p^2 + 67,12p + 3000} = \frac{N(p)}{M(p)};$$

$$M(p) \text{ имеет 2 корня: } p_1 = -61,725; \quad p_2 = -162.$$

$$M' = 0,6p + 67,12.$$

$$N(p_1) = 4; \quad M'(p_1) = 30,085;$$

$$N(p_2) = 4; \quad M'(p_2) = -30,085;$$

$$i_3(t) = 0,1329 \cdot e^{-62t} - 0,1329 \cdot e^{-162t} [\text{A}].$$

$$U_C(p) = I_3(p) * \frac{1}{C \cdot p} = \frac{E \cdot R_2 \cdot C}{C \cdot p (0,075p^2 + 25,9825p + 1500)} = \frac{2000000}{p(0,3p^2 + 67,12p + 3000)} =$$

$$= \frac{N(p)}{M(p)}.$$

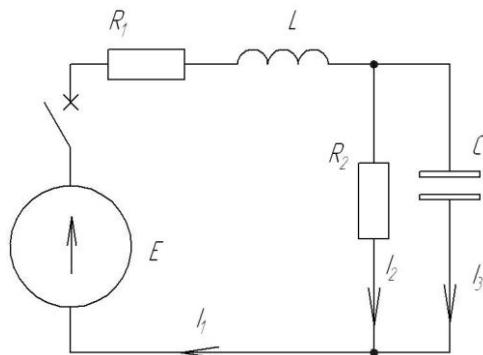
$$M(p) \text{ имеет корни: } p_1 = 0; \quad p_2 = -61,725; \quad p_3 = -162.$$

$$M'(p) = 0,9p^2 + 134,24p + 3000.$$

$$M'(p_1) = 3000; \quad M'(p_2) = -1856,986; \quad M'(p_3) = 4872,72.$$

$$U_C(t) = 66,7 - 107,5 \cdot e^{-62t} + 40,8 \cdot e^{-162t} [\text{B}].$$

Выполнить расчет переходного процесса в эл. цепи при подключению её к источнику постоянного напряжения



E, В	R <sub>1</sub> , кОм	R <sub>2</sub> , кОм	C, мкФ	L, Гн	R <sub>3</sub> , кОм
20	0,2	0,5	10	10	-

Т.к. в схеме нулевые начальные условия и нет магнитосвязанных катушек, то изображение тока  $i_1(t)$ :

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z_{ex}(p)}$$

$$Z_{ex}(p) = R_1 + Lp + \frac{\frac{R_2}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = R_1 + Lp + \frac{R_2}{R_2 Cp + 1} =$$

$$= \frac{R_2 LCp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2}{R_2 Cp + 1}$$

Т.к.  $E = \text{const}$  и  $E(p) = \frac{E}{p}$ , то

$$I_1(p) = \frac{E \cdot (R_2 Cp + 1)}{p \cdot [R_2 LCp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]} =$$

$$= \frac{20 \cdot (500 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot p + 1)}{p \cdot [500 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + (200 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6} + 10) \cdot p + 200 + 500]} =$$

$$= \frac{20 \cdot [0,005 \cdot p + 1]}{p \cdot [0,05 \cdot p^2 + 11 \cdot p + 700]} = \frac{N(p)}{M(p)}$$

$M(p)$  имеет корни:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -110 + j43,589$ ;  $p_3 = -110 - j43,589$ .

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k t} \quad \text{при одной паре комплексных сопряжённых корней:}$$

$$i_1(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} \right)$$

$$M'(p) = 3 \cdot 0,05 \cdot p^2 + 2 \cdot 11 \cdot p + 700 = 0,15 \cdot p^2 + 22 \cdot p + 700.$$

$$N(p_1) = 20; M'(p_1) = 700;$$

$$N(p_2) = 9 + j4,359 = 10 \cdot e^{j25,84^\circ}; M'(p_2) = -190 - j479,479 = 515,752 \cdot e^{j248,38^\circ};$$

Тогда:

$$i_1(t) = \frac{20}{700} \times e^{0 \times t} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{10 \times e^{j25,84^\circ}}{515,752 \times e^{j248,38^\circ}} \times e^{(-110 + j43,589) \times t} \right) = 0,02857 + 0,03878 \cdot e^{-110t} \times \sin(43,589t - 132,54^\circ) [A]$$

Изображение тока  $i_2(t)$ :

$$I_2(p) = \frac{I_1(p) \cdot Z_{23}(p)}{R_2}; \quad Z_{23}(p) = \frac{\frac{R_2}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{C \cdot p}} = \frac{R_2}{R_2 Cp + 1}, \text{ откуда:}$$

$$I_2(p) = \frac{E(R_2 Cp + 1)R_2}{p[R_2 LCp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2](R_2 Cp + 1) \cdot R_2} = \frac{E}{p[R_2 LCp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2]} =$$

$$= \frac{20}{p[500 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + (200 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6} + 10) + 200 + 500]} = \frac{20}{p(0,05 p^2 + 11p + 700)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

$M(p)$  имеет те же корни:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -110+j43,589$ ;  $p_3 = -110-j43,589$ .

Тогда:  $i_2(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} \right)$

$$M'(p) = 0,15p^2 + 22p + 700$$

$$N(p_1) = 20; \quad M'(p_1) = 700;$$

$$N(p_2) = 20; \quad M'(p_2) = -190-j479,479 = 515,752 \cdot e^{j248,38^\circ};$$

Тогда:

$$i_2(t) = 0,02857 + 0,07755 \cdot e^{-110t} \cdot \sin(43,589t - 158,38^\circ) [A].$$

$$\begin{aligned} I_3(p) &= \frac{I_1(p) \cdot Z_{23}}{Z_3(p)} = \frac{E \cdot (R_2 Cp + 1) \cdot R_2 \cdot Cp}{p \cdot [R_2 L Cp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2] \cdot (R_2 Cp + 1)} = \\ &= \frac{ER_2 C}{R_2 L Cp^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} + (200 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6} + 10)p + 200 + 500} = \\ &= \frac{0,1}{0,05p^2 + 11p + 700} = \frac{N(p)}{M(p)}. \end{aligned}$$

$M(p)$  имеет 2 корня:  $p_1 = -110+j43,589$ ;  $p_2 = -110-j43,589$ .

Тогда:  $i_3(t) = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right)$

$$M' = 0,1p + 11.$$

$$N(p_1) = 0,1; \quad M'(p_1) = j4,359;$$

Тогда:

$$i_3(t) = 0,0229 \cdot e^{-110t} \cdot \sin 43,589t [A].$$

$$U_C(p) = I_3(p) * \frac{1}{Cp} = \frac{E \cdot R_2 \cdot C}{C \cdot p [R_2 L Cp + (R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2]} = \frac{10000}{p(0,05p^2 + 11p + 700)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

$M(p)$  имеет корни:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -110+j43,589$ ;  $p_3 = -110-j43,589$

$$U_C(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} \right)$$

$N(p) = 10000$  при любых корнях характеристического уравнения.

$$M'(p) = 0,15p^2 + 22p + 700.$$

$$M'(p_1) = 700; \quad M'(p_2) = -190-j479,479 = 515,752 \cdot e^{j248,38^\circ};$$

$$U_C(t) = 14,2857 + 38,7783 \cdot e^{-110t} \cdot \sin(43,589t - 158,38^\circ) [B].$$

## Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники, М., «Юрайт», 2013.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Сборник задач, М., «Юрайт», 2016.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Общая электротехника. – М.: «Энергоиздат», 2002.

