

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (14) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (15) - для точек на оси вблизи его концов.

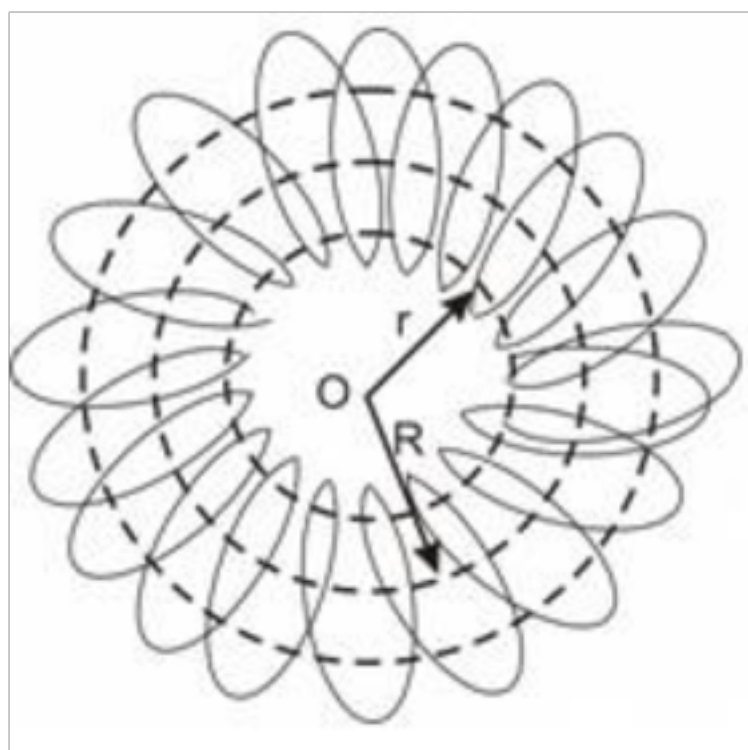


Рис.5.

Вне тороида магнитная индукция равна нулю.

С помощью теоремы о циркуляции вектора B можно решить и ряд других задач, например, найти индукцию в коаксиальном кабеле, который используется для передачи постоянного тока. Кроме того, этот закон используется при расчете магнитных цепей, где выполняет роль второго правила Кирхгофа.

Сила Ампера. Сила Лоренца

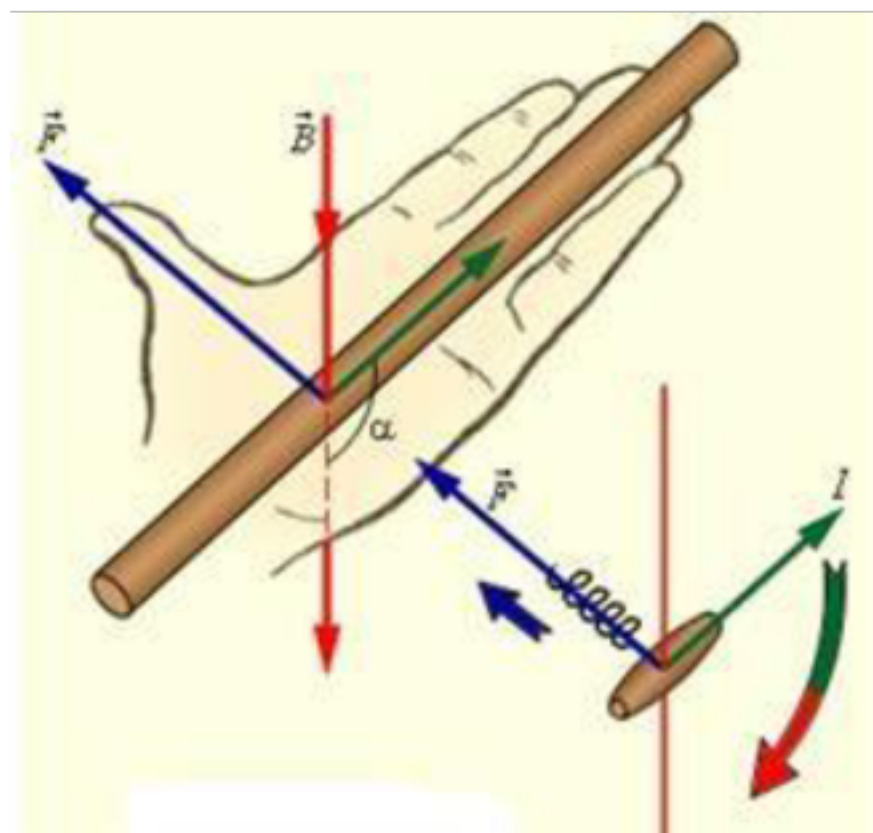


Рис.6.

Ампер на опыте установил, что на проводник с током **в магнитном поле действует сила**

$$F = I[l B], \quad (17)$$

модуль которой определяется по формуле:

$$F = I \cdot B \cdot \ell \cdot \sin \alpha,$$

а направление, по правилу правого винта или правилу «левой руки» (рис. 6).

Возникновение этой силы связано с тем, что магнитное поле действует на заряженные частицы, движущиеся в проводнике с некоторой скоростью $\vec{v}$. Сила, действующая на заряд в этом случае, называется **силой Лоренца**, и определяется по формуле:

$$F = q[\vec{v} B], \quad (18)$$

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha ,$$

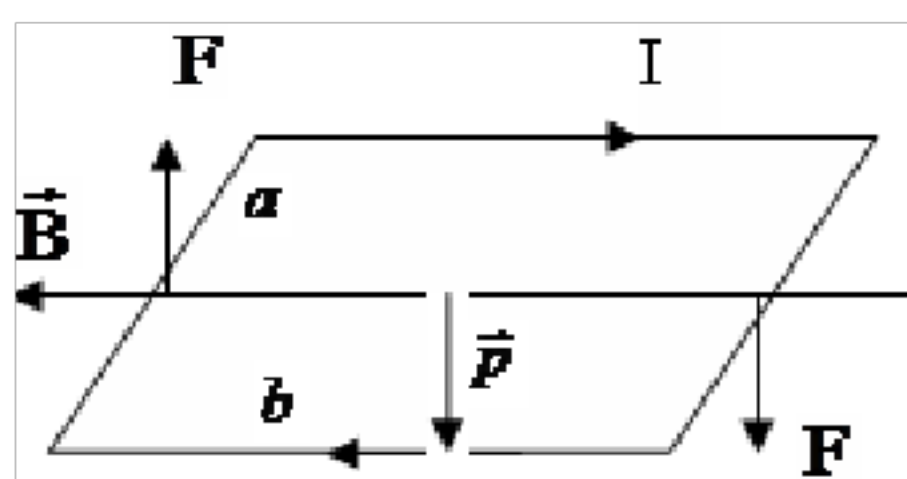
где α – угол между направлениями скорости частицы и вектора магнитной индукции.

Магнитное поле не действует на покоящийся заряд и в этом состоит существенное отличие магнитного поля от электрического. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы (ее перемещению) и поэтому работы не совершает, а, следовательно, не изменяет кинетическую энергию частицы. Выражение для силы Лоренца (18) позволяет определить характер движения заряженной частицы в магнитном поле. При $\alpha = 90^\circ$ частица движется по окружности радиуса $R = \frac{mv}{qB}$. Если угол α удовлетворяет условию

$0 < \alpha < 90^\circ$, то частица движется по спирали с радиусом R и шагом h . Если скорость частицы $\vec{v}$ составляет угол α с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то R и h уменьшаются. На этом основано явление фокусировки заряженных частиц в магнитном поле.

Контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, находящийся в однородном магнитном поле. Выделим элемент контура $d\vec{\ell}$. На него в магнитном поле будет действовать сила, согласно (17), равная $d\vec{F} = I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]$. Результирующая сила, действующая на контур, будет равна геометрической сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т.е.



$$\vec{F} = \oint_L I [d\vec{\ell} \cdot \vec{B}] = I \cdot \vec{B} \oint_L d\ell = 0 .$$

(19)

Следовательно, в однородном магнитном поле результирующая сила, действующая на контур с током, будет равна нулю, и контур

перемещаться не будет.

Рис.7.

Для простоты рассуждений возьмем прямоугольный контур со сторонами «а» и «b» (рис. 7). В магнитном поле на него будет действовать вращающий момент пары сил $\vec{F}$ и поэтому, контур будет вращаться. Вращающий момент пары сил $M = F \cdot b \cdot \sin \alpha$, но $F = I \cdot B \cdot a$, и, следовательно, $M = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \alpha$. Так как $a \cdot b = S$ – площадь контура, то $M = I \cdot B \cdot S \cdot \sin \alpha$. Введем вектор $\vec{p} = I \cdot S$ называемый **вектором магнитного момента** контура. Его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру, которая определяется с помощью правила правого винта. Тогда для вращающего момента, действующего на контур с током в магнитном поле, получим выражение:

$$M = pB \sin \alpha = [\vec{p} \vec{B}] .$$

(20)

Очевидно, что $M = 0$ при $\sin\alpha = 0$, т.е. контур с током в магнитном поле ориентируется так, чтобы его вектор магнитного момента был параллелен вектору магнитной индукции.

Рассмотрим контур, находящийся в неоднородном поле. Работа, совершаемая при повороте контура на угол $d\alpha$, определяется по формуле $dA = M \cdot d\alpha$. С учетом (20) получим:

$$dA = p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Полная механическая работа

$$A = \int dA = \int p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = -pB \cos\alpha. \quad (21)$$

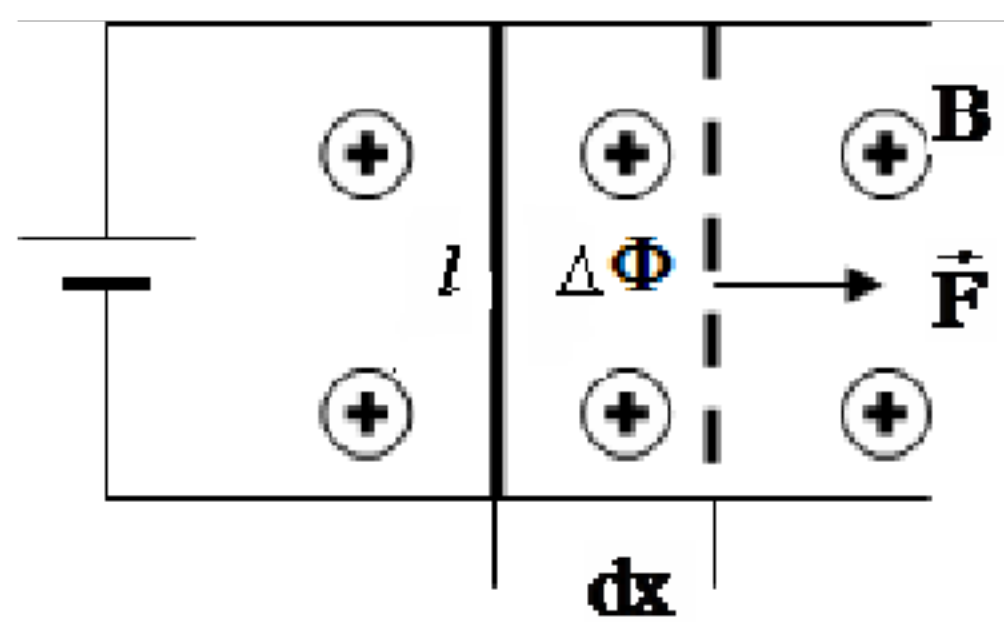
Механическая потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет определяться этим же выражением.

Ранее мы показали, что связь между силой и энергией $F_x = -\frac{dW}{dx}$ и, следовательно, на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать сила

$$F_x = p \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \cos\alpha. \quad (22)$$

При $\alpha < 90^\circ$, $F_x > 0$ контур втягивается в поле, при $\alpha > 90^\circ$, $F_x < 0$ контур выталкивается из поля.

В результате перемещения проводника с током или контура произвольной формы в магнитном поле совершается работа по преодолению сил поля. Не сложно получить формулу, определяющую эту работу.



Рассмотрим проводник длиной ℓ , с током I , способный свободно перемещаться в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно проводнику (рис. 8).

Рис.8.

В этом случае на проводник будет действовать сила Ампера $F = B \cdot I \cdot \ell$ и при перемещении проводника на расстояние dx , будет совершена работа $dA = I \cdot B \cdot \ell \cdot dx$, но $\ell \cdot dx = dS$, а элементарный магнитный поток $B \cdot dS = d\Phi$ и тогда элементарная работа $dA = I \cdot d\Phi$. Интегрируя данное выражение, получим, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле будет определяться выражением

$$A = I \cdot \Delta\Phi, \quad (23)$$

где $\Delta\Phi$ – магнитный поток, пересеченный проводником.

Примеры решения задач

Задача 1. По тонкому проводу, изогнутому в виде равностороннего треугольника, течет ток силой $I = 40 \text{ А}$. Длина стороны треугольника $a = 30 \text{ см}$. Определить индукцию $\vec{B}$ в точке пересечения высот треугольника.



Рис. 1. одинаковые величину и направление -

вертикально вниз (определяемое по правилу правого винта). Поэтому индукция в точке O будет равной $B = 3B_1$ и направленной вниз перпендикулярно рис 1.

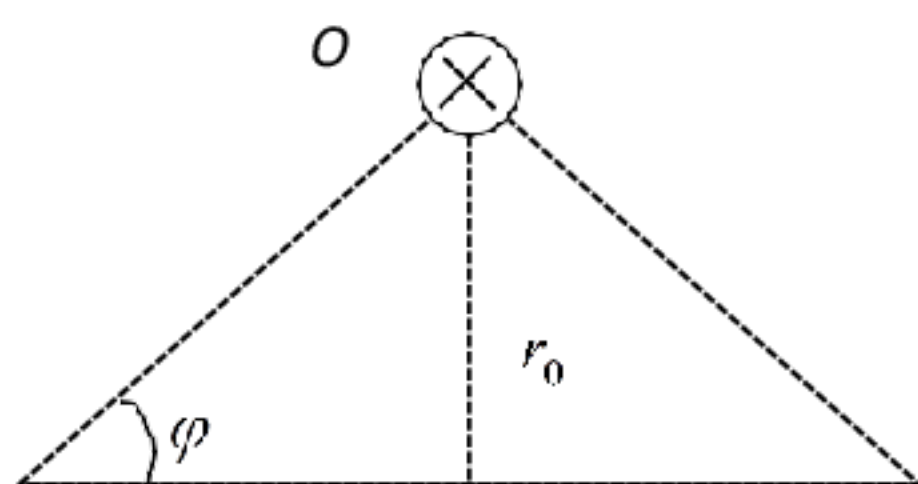


Рис. 2

Магнитную индукцию стороны треугольника B_1 найдем используя формулу для индукции, отрезка проводника при симметричном расположении его концов относительно точки O (рис.2). Треугольник токов равносторонний и его высоты являются также и медианами и биссектрисами. Таким образом, имеем

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos \varphi \text{ и } \varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, r_0 = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a} \text{ и } B = 3B_1 = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} = 240 \text{ мкТл.}$$

Задача 2. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,03$ Тл по окружности радиусом $r=10$ см. Определить скорость электрона.

Дано:

$$B=0,03 \text{ Тл}$$

$$r=10 \text{ см}=0,1 \text{ м}$$

$$e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

В магнитном поле на движущийся электрон действуют сила

Лоренца. Величина этой силы равна

$$F = e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

Так как траектория электрона – окружность, то сила Лоренца является центростремительной силой, и угол $\alpha = \pi/2$.

Следовательно,

$$F = \frac{mv^2}{r} = eBv.$$

Откуда имеем

$$v = \frac{eBr}{m}. \quad (1)$$

Подставив численные значения, получим

$$v = \frac{eBr}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-31}} = \frac{1,6}{3} \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 0,533 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

То есть скорость v сравнима со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Это означает, что при расчетах необходимо использовать элементы специальной теории относительности (СТО).

Формулы классической механики применимы в СТО, если считать, что масса тела зависит от его скорости по закону, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, где m_0 - масса покоя тела и $\beta = v/c$. Под-

ставим эти выражения в (1). После несложных преобразований получим релятивистское выражение для скорости электрона $v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Таким образом, релятивистское значение скорости равно $v_p = 0,525 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 3. В магнитном поле с индукцией $0,1$ Тл вращается рамка, содержащая 1000 витков площадью 150 см^2 каждый. Максимальное ЭДС, индуцируемое в рамке равно 94 В. Определить частоту вращения рамки.

Дано:

$$B=0,1 \text{ Тл}$$

$$N=1000=10^3$$

По закону Фарадея для электромагнитной индукции имеем

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\psi}{dt}, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_i^{\max} = 94 \text{ В}$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

_____ где $\Phi = BS \cos \alpha$ – магнитный поток.

$n = ?$ В условиях данной задачи $\alpha = 2\pi \cdot n \cdot t$, где n - частота вращения рамки. Таким образом, закон Фарадея (1), после процедуры дифференцирования имеет вид

$$E_i = NBS 2\pi n \cdot \sin(2\pi n \cdot t).$$

Из полученного выражения следует, что максимальное значение ЭДС

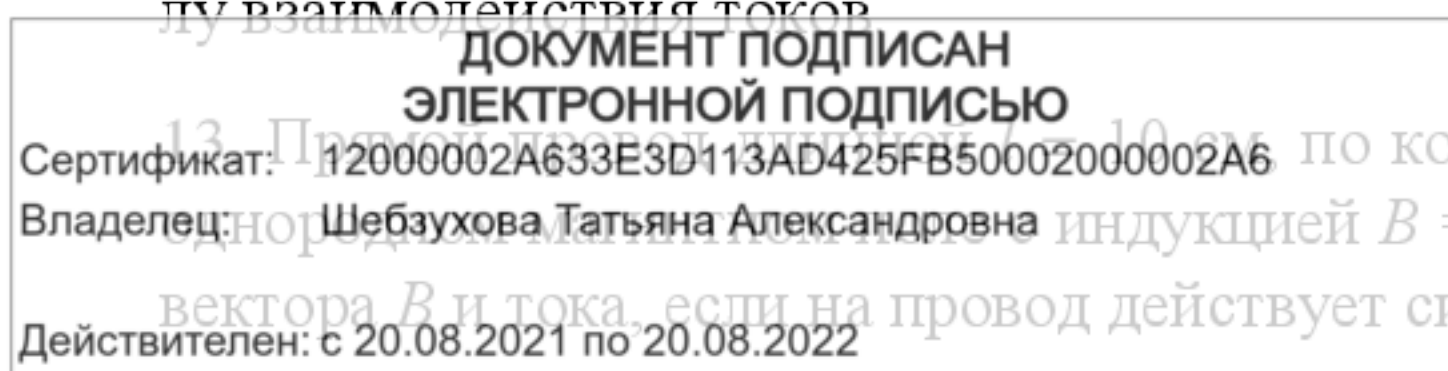
$E_i^{\max} = NBS \cdot 2\pi n$, возникает когда угол $\alpha = \pi/2$. Отсюда имеем

$$n = \frac{E_i^{\max}}{NBS \cdot 2\pi} = \frac{94}{10^3 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3,14} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Вопросы и задания.

1. Магнитное поле и его основные характеристики.
2. Закон Био - Савара - Лапласа и его применение.
3. Закон Ампера.- Взаимодействие параллельных токов.
4. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лоренца.
5. Движение заряженных частиц в магнитном поле.
6. Теорема о циркуляции вектора B . Магнитные поля соленоида и тороида.
7. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля.
8. Работа по перемещению проводника в магнитном поле.
9. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея.
10. Правило Ленца. Вращение рамки в магнитном поле. Вихревые токи.
11. Индуктивность контура. Самоиндукция.
12. Токи при размыкании и замыкании цепи.
13. Взаимная индукция.
14. Трансформаторы. Энергия магнитного поля.
15. Магнитные свойства вещества. Диа- и парамагнетики.
16. Магнитное поле в веществе.
17. Закон полного тока.
18. Ферромагнетики и их свойства.

1. Расстояние d между двумя длинными параллельными проводами равно 5 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи силой $I = 30$ А каждый. Найти напряженность H магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 4$ см от одного и $r_2 = 3$ см от другого провода.
2. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 15$ см течет ток силой $I = 60$ А. Найти магнитную индукцию B в точке, равноудаленной от центра кольца на $r = 20$ см.
3. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А в противоположных направлениях. Расстояние d между проводами равно 20 см. Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной на $r_1 = 25$ см от первого и на $r_2 = 40$ см от второго провода.
4. По двум бесконечно длинным параллельным проводам текут токи силой $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А в одном направлении. Расстояние d между проводами равно 10 см. Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние $r = 10$ см.
5. По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток силой $I = 40$ А. Длина a стороны треугольника равна 30 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения высот.
6. По контуру в виде квадрата идет ток силой $I = 50$ А. Длина a стороны квадрата равна 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.
7. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток силой $I = 60$ А. Длины сторон прямоугольника равны $a = 30$ см и $b = 40$ см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.
8. По двум одинаковым квадратным контурам со стороной $a = 20$ см текут токи силой $I = 10$ А в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответственными сторонами контуров равно 2 мм.
9. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом $R = 10$ см, текут одинаковые токи силой $I = 10$ А в каждом. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между центрами колец равно 1 мм.
10. По трем прямым параллельным проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи силой $I = 100$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F , действующую на отрезок длиной $l = 1$ м каждого провода.
11. По двум параллельным проводам длиной $l = 1$ м каждый текут токи одинаковой силы. Расстояние d между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой $F = 1$ мН. Найти силу тока I в проводах.
12. По двум параллельным прямым проводам длиной $l = 2,5$ м каждый, находящимся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи силой $I = 1$ кА. Вычислить силу взаимодействия токов.



13. Прямой провод длиной $l = 10$ см, по которому течет ток силой $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Найти угол α между направлениями вектора B и тока, если на провод действует сила $F = 10$ мН.

14. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл находится прямой провод длиной $l = 8$ см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток силой $I = 2$ А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние $s = 5$ см. Найти работу A сил поля.

15. Соленоид индуктивностью $L = 4$ мГн содержит $N = 600$ витков. Определить магнитный поток Φ , если сила тока I , протекающего по обмотке, равна 12 А.

16. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на $\Delta I = 0,1$ А в 1 с. Индуктивность L катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$.

Практическое занятие 11.

Тема занятия. Действие магнитного поля на движущийся заряд

Цель занятия. Изучить действие магнитного поля на движущийся заряд.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Сила Лоренца. Модуль силы Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Действие магнитного поля на движущийся заряд применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Сила Лоренца

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера:

$$dF = idl \times B. \quad (1)$$

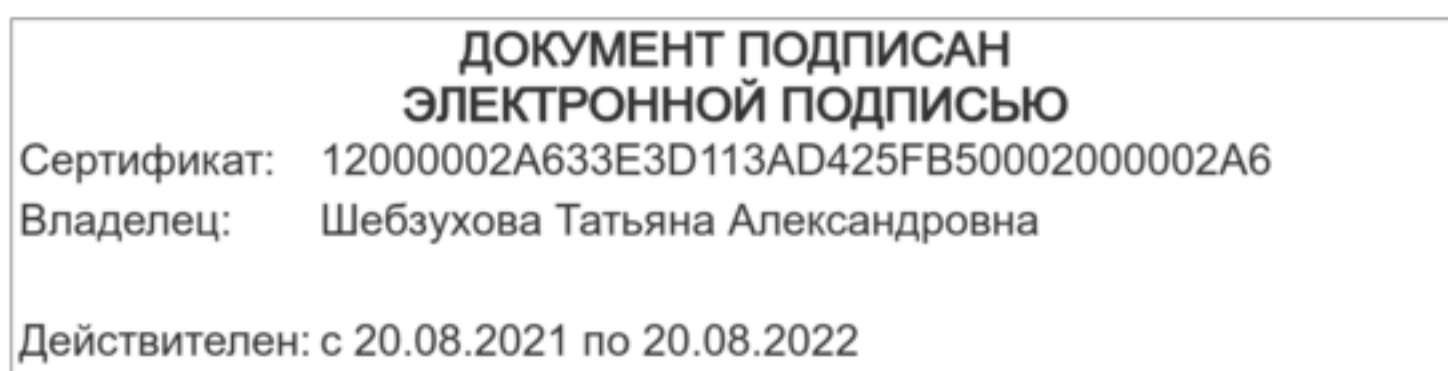
Сила Ампера обусловлена суммарным действием магнитного поля на все движущиеся в проводнике заряды. Определим силу, действующую на единичный движущийся в магнитном поле заряд.

Возьмем элемент длины проводника dl . Обозначим N - число заряженных частиц, движущихся в элементе dl , q - заряд каждой частицы, $\vec{v}$ - среднюю скорость их направленного движения. Тогда

$$idl = Nq\vec{v}. \quad (2)$$

Подставим выражение (4.46) в формулу для силы Ампера (4.45), получим:

$$dF = Nq\vec{v} \times B. \quad (3)$$



Здесь dF - суммарная сила, действующая со стороны магнитного поля на N носителей заряда. На одиночный электрический заряд в магнитном поле действует сила, равная

$$\vec{F}_n = \frac{dF}{N}. \quad (4)$$

Подставим в это выражение формулу (4.47), получим:

$$F_n = q\vec{v} \times B. \quad (5)$$

Эта сила называется *силой Лоренца*.

Свойства силы Лоренца определяются свойствами векторного произведения, поэтому она перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и B .

Для положительных зарядов ($q>0$) направление силы Лоренца совпадает с направлением векторного произведения $\vec{v} \times B$. Если заряд частицы отрицателен ($q<0$), то направления векторов F_n и $\vec{v} \times B$ противоположны.

Модуль силы Лоренца равен:

$$F_n = qvB \sin\alpha, \quad (6)$$

где α - угол между векторами $\vec{v}$ и B .

Из формулы (6) следует, что магнитное поле не действует на заряженную частицу в двух случаях:

- когда частица покоится ($v = 0$);
- когда частица движется вдоль линий магнитного поля ($v \parallel B$).

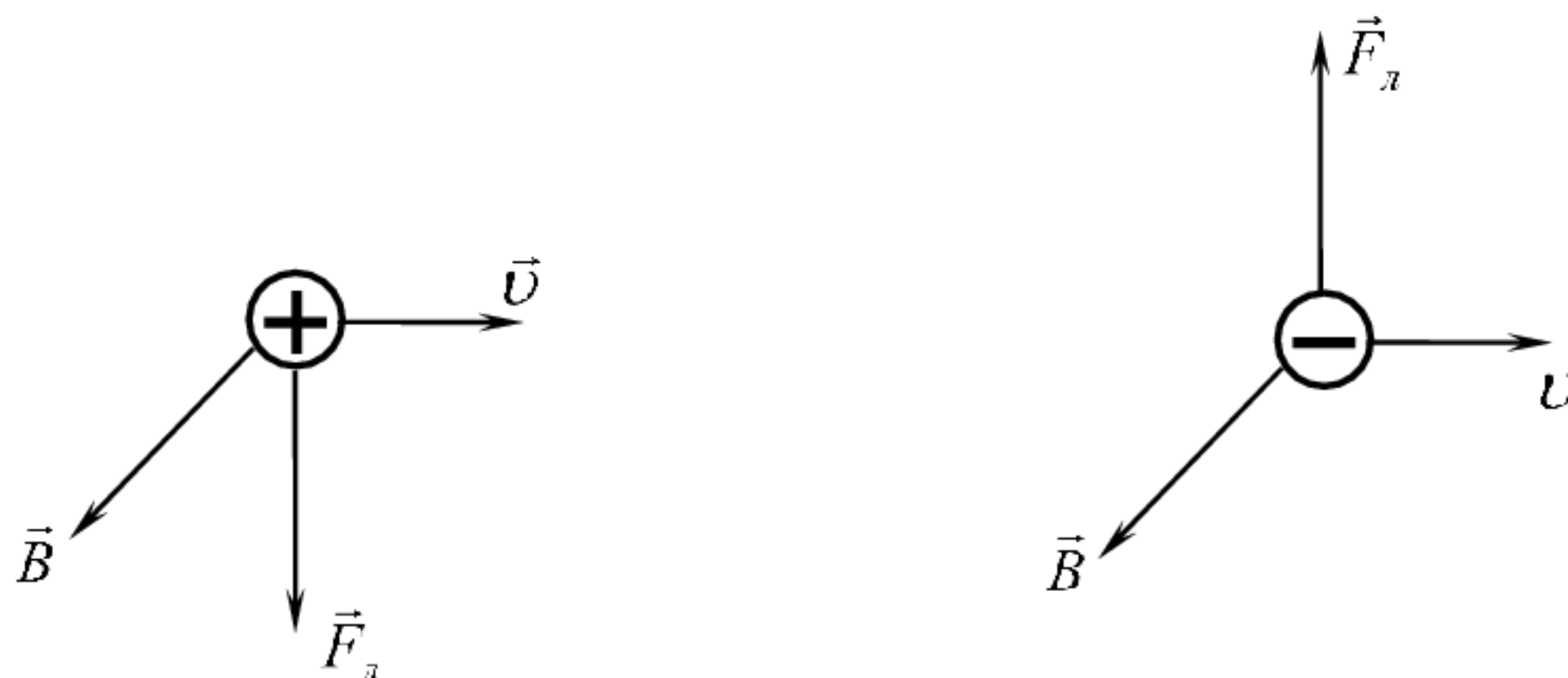


Рис.1 . Взаимная ориентация векторов $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{F}_L$.

Так как сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно вектору скорости, то она не совершает работы над частицей. Следовательно, постоянное магнитное поле не изменяет кинетическую энергию частицы.

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Пусть заряженная частица влетает в однородное поле с индукцией B .

Рассмотрим наиболее простой случай, когда скорость частицы перпендикулярна вектору магнитной индукции. На частицу будет действовать сила Лоренца, перпендикулярная к направлению ее движения. Так как $\vec{v} \perp \vec{B}$ ($\alpha=\pi/2$), то модуль силы Лоренца равен: $F_L = qvB$. В результате траекторией заряженной частицы будет окружность (рис.4.14).

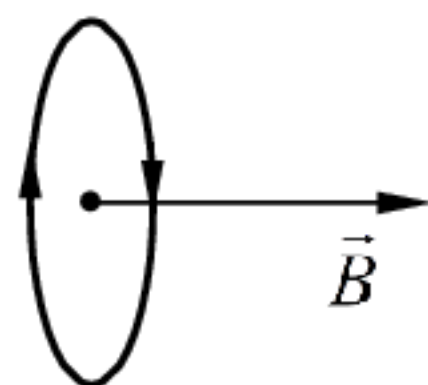


Рис. 2.

Сила Лоренца сообщает частице нормальное ускорение и играет роль центростремительной силы. Нормальное ускорение определяется выражением:

$$a_n = \frac{v^2}{R} , \quad (7)$$

где R - радиус окружности.

Запишем второй закон Ньютона для этого случая:

$$ma_n = F_L , \quad (8)$$

или

$$\frac{mv^2}{R} = qvB . \quad (9)$$

Для радиуса окружности получим выражение:

$$R = \frac{m\upsilon}{qB} . \quad (10)$$

Формулу (10) также можно записать в виде:

$$R = \frac{\upsilon}{\frac{q}{m} B} . \quad (11)$$

Здесь $\frac{q}{m}$ - удельный заряд частицы.

Период обращения частицы по окружности равен:

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} . \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражение для радиуса траектории и производя сокращения, получим:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{q}{m}\right) B} . \quad (13)$$

Из выражений (11) и (13) следует:

- радиус окружности тем меньше, чем больше магнитная индукция;
- период обращения частицы в магнитном поле не зависит от её скорости, а зависит от величины удельного заряда и от магнитной индукции поля.

Изменяется лишь направление скорости, а это означает, что заряженная частица в однородном магнитном поле должна двигаться точно по окружности, если нет составляющей скорости вдоль магнитного поля.

Рассмотрим случай, когда скорость частицы составляет с магнитным полем угол α , отличный от $\pi/2$.

Разложим вектор скорости на две составляющие: перпендикулярную магнитному полю $\upsilon_{\perp}$ и параллельную полю $\upsilon_{\parallel}$ (рис.3).

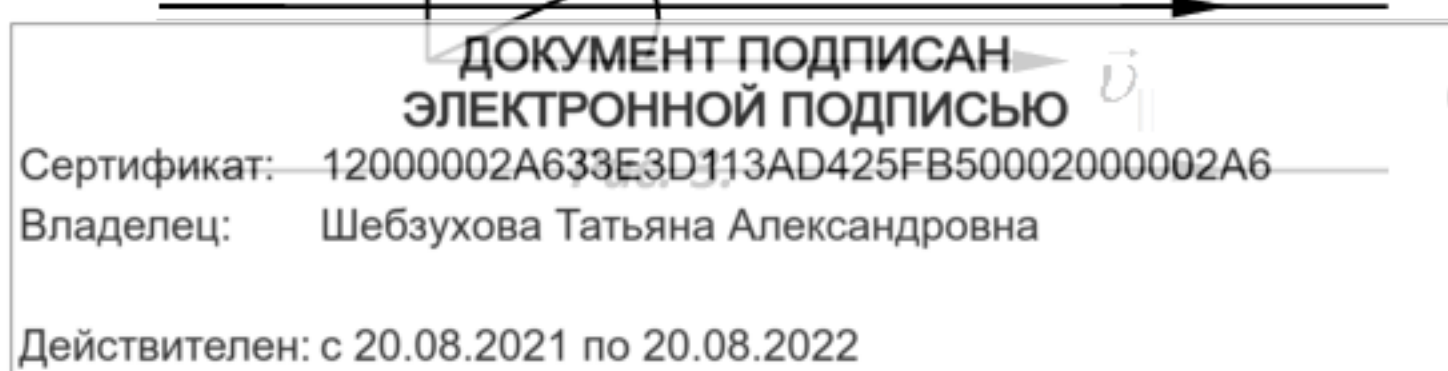
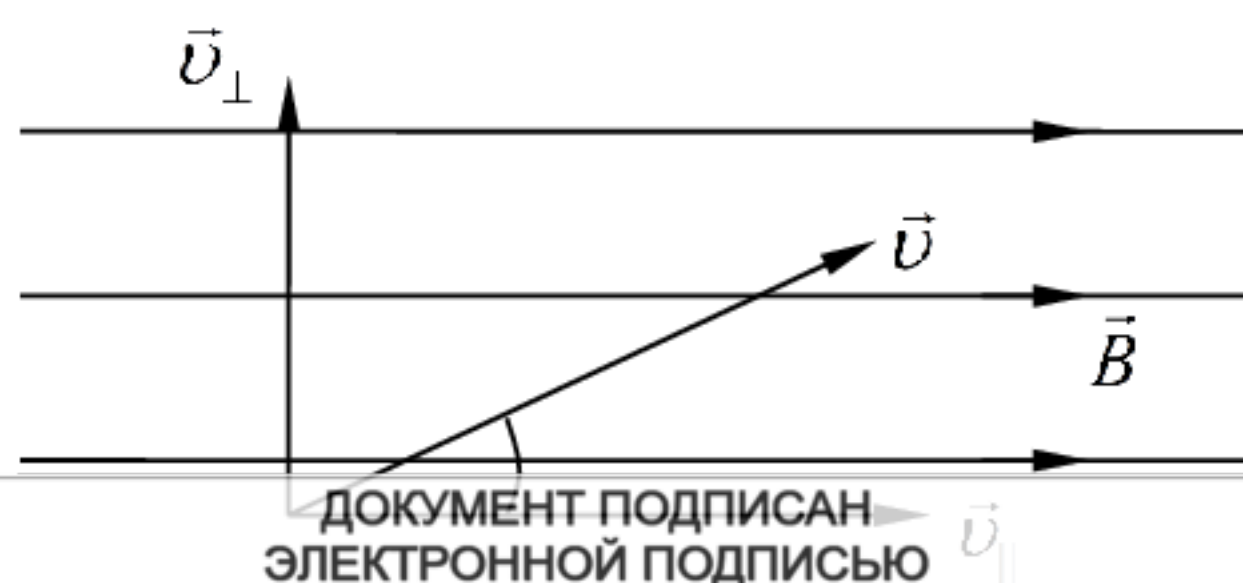
Модули этих составляющих равны:

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \cdot \sin\alpha ,$$

$$\upsilon_{\parallel} = \upsilon \cdot \cos\alpha .$$

Сила Лоренца обусловлена только составляющей $\upsilon_{\perp}$ и равна (по модулю):

$$F_{\perp} = q\upsilon B \sin\alpha . \quad (14)$$



Заряженная частица будет участвовать в двух движениях:

- в равномерном движении в направлении вектора $\vec{B}$ со скоростью $v_{\parallel}$;
- в движении по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению вектора $\vec{B}$, со скоростью $v_{\perp}$.

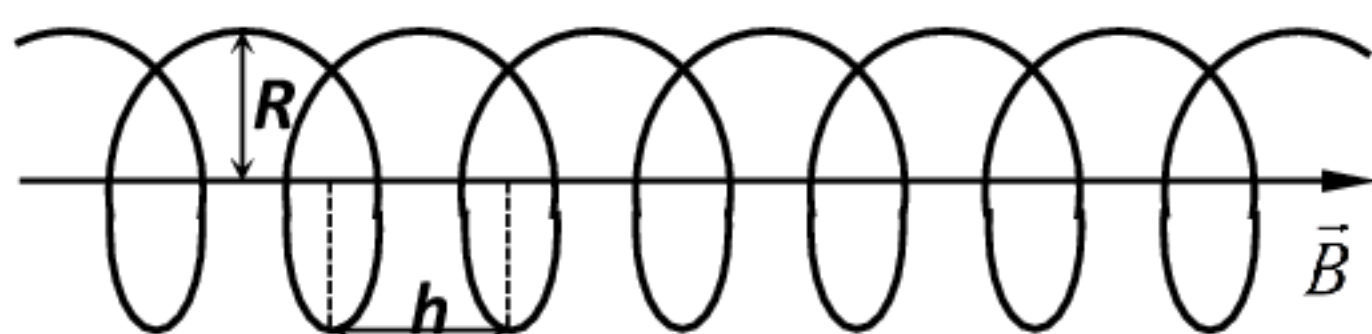


Рис. 4. Винтовая линия

В результате наложения этих двух движений траекторией частицы будет винтовая линия (рис.4.).

Определим параметры траектории частицы. Радиус винтовой линии будет равен:

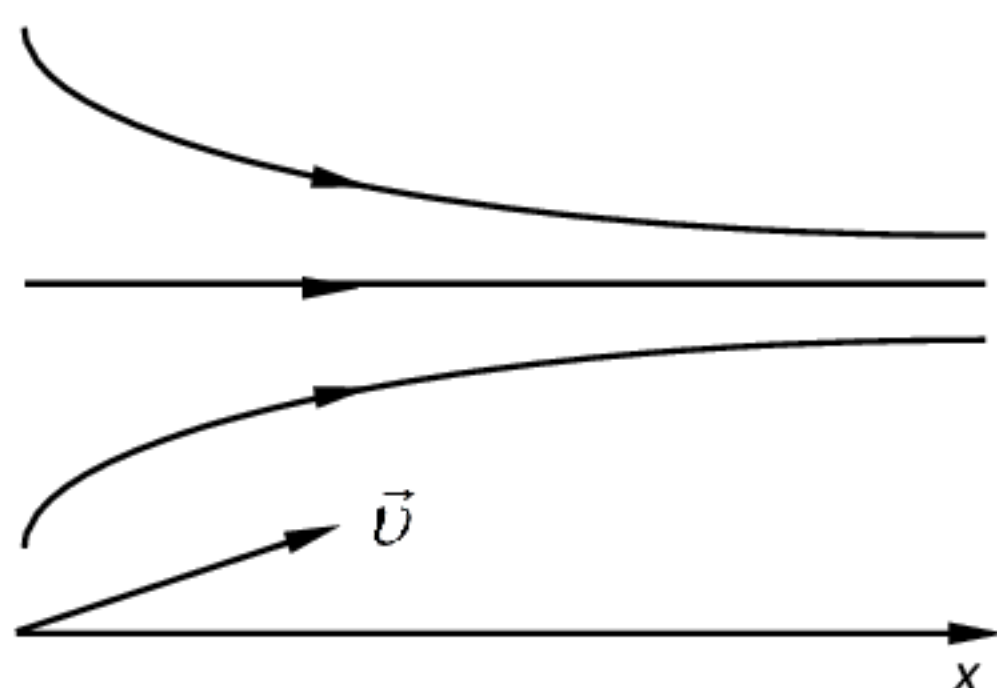
$$R = \frac{v_{\perp}}{\left(\frac{q}{m}\right)B} = \frac{v \sin \alpha}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \quad (15)$$

Шаг винтовой линии

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \alpha \frac{2\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда заряженная частица влетает в неоднородное магнитное поле. Пусть магнитная индукция возрастает в направлении x (рис.3). Тогда заряженная частица будет двигаться по винтовой линии, радиус и шаг которой уменьшаются.

Таким образом, заряженные частицы, влетающие в постоянное магнитное поле, изменяют направление своего движения и "навиваются" на линии вектора $\vec{B}$. Этим свойством пользуются в некоторых приборах, чтобы удерживать пучки заряженных частиц от расплывания.



Сущность метода магнитной фокусировки (в кратком варианте) состоит в следующем. Если частица движется точно вдоль линии вектора $\vec{B}$, то магнитное поле не оказывает на нее никакого воздействия. Если частица по каким-то причинам получит составляющую скорости, перпендикулярную к линиям поля, то она все равно не уйдет далеко в сторону от основной траектории и будет двигаться по винтовой линии.



ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

частицы в неоднородном магнитном поле

Примеры решения задач

Задача 1. α -частица, ускоренная разностью потенциалов 250 В, влетает в однородное магнитное поле индукцией 25 мТл, перпендикулярно линиям магнитной индукции и движется по окружности. Найдите радиус окружности и период обращения α -частицы.

Запишем краткое условие задачи.

Дано:	СИ
$e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
$m_p=1,67 \cdot 10^{-27}$ кг	
$U=250$ В	
$B=25$ мТл	$=25 \cdot 10^{-3}$ Тл
$\alpha=90^\circ$.	
R, T-?	

Решение:

Работа электрического поля затрачивается на увеличение кинетической энергии частицы:

$$qU = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

В магнитном поле на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца: $F_L = qBv \sin \alpha$, угол $\alpha=90^\circ$ и $\sin \alpha = 1$. Согласно второму закону Ньютона $F_L = ma_n$, где $a_n = \frac{mv^2}{R}$ - центростремительное ускорение частицы, движущейся по окружности радиуса R. Получаем $qBv = \frac{mv^2}{R}$. Окончательно радиус окружности:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m \sqrt{\frac{2qU}{m}}}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

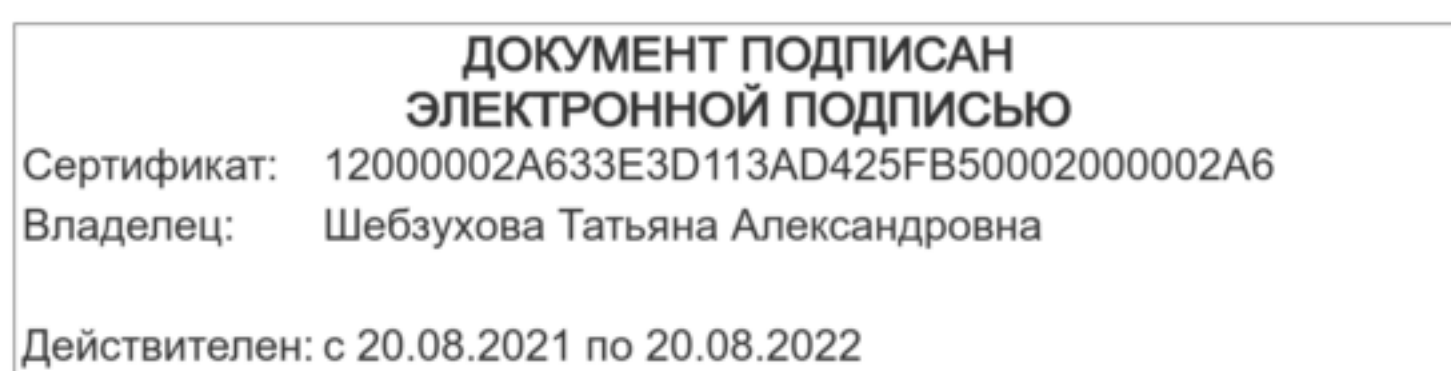
Период обращения частицы найдем, разделив длину окружности на скорость частицы:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Заряд α -частицы: $q = 2e = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл = $3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл, ее масса

$m = 4m_p = 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг = $6,68 \cdot 10^{-27}$ кг

Проведем проверку размерности:



$$[R] = \frac{1}{T_{\text{Л}}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{1}{\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{Кл}^2}} =$$

$$\frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{Кл}} \sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{А} \cdot \text{с}} \sqrt{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}} \sqrt{\text{Н}^2 \cdot \text{с}^2} = \text{м}$$

$$[c] = \frac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Н}} = \text{с}$$

Произведем вычисления: $R = \frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \cdot 6,68 \cdot 10^{-27} \cdot 250}{3,2 \cdot 10^{-19}}} = 0,13 \text{ м}$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,68 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

Ответ: 0,13 м; $5,2 \cdot 10^{-6}$ с.

Вопросы и задания.

1. Сила Лоренца.
2. Модуль силы Лоренца
3. Движение заряженных частиц в магнитном поле.

Задачи для самостоятельного решения

1. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 3 В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии 4 мм от него. Какая сила будет на него действовать, если по проводнику пропустить ток силой 5 А?
2. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 5 В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии 4 мм от него. Какое ускорение приобретет электрон, если по проводнику пропустить ток силой 10 А?
3. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?
4. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, впадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?
5. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10 В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поле равна 0,01 Тл. Определите радиус кривизны траектории электрона.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

6. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,001 Тл. Определить период и частоту обращения электрона по окружности.
7. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории альфа-частицы больше радиуса кривизны траектории протона?
8. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз период обращения альфа-частицы больше периода обращения протона?
9. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле так, что направление его скорости составляет угол 30° с направлением силовых линий. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить радиус кривизны траектории электрона.
10. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,01 Тл. Чему равны тангенциальное и нормальное ускорения электрона?
11. Протон, ускоренный разностью потенциалов 1000В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить тангенциальное и нормальное ускорение протона.
12. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 30° . Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить тангенциальное и нормальное ускорение электрона.
13. Протон, ускоренный разностью потенциалов 5000В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 45° . Индукция поля равна 0,005 Тл. Определить тангенциальное и нормальное ускорение протона.
14. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 60 В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 30° . Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить радиус кривизны траектории электрона и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
15. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 30В, влетает в магнитное поле соленоида под углом 30° к его оси. Число ампер-витков соленоида равно 5000. Длина соленоида 25 см. Определить шаг винтовой траектории электрона в магнитном поле соленоида.
16. Протон влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 30° . Индукция поля равна 0,1 Тл. Определить кинетическую энергию протона, если радиус кривизны его траектории 1,5 см.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН	
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

17. Электрон влетает в однородное поле с индукцией $B = 10$ мТл перпендикулярно линиям индукции. Электрон влетает в поле с кинетической энергией $K = 30$ эВ. Определить радиус кривизны траектории электрона.

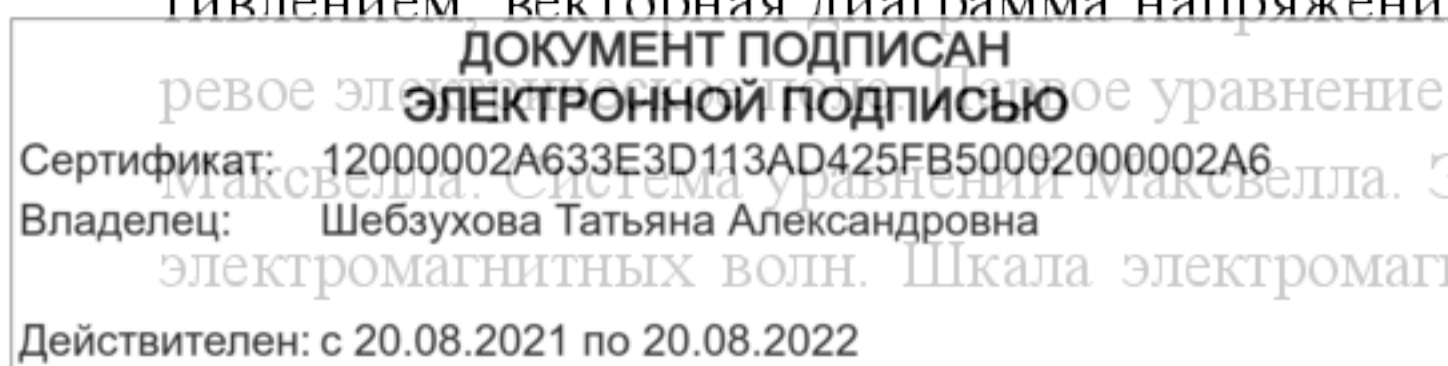
18. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 71 В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 37° , и описывает спираль радиусом 54 мм. Определить индукцию магнитного поля и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
19. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10 В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 53° . Индукция поля равна 0,1 Тл. Определить радиус кривизны траектории и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
20. Определить кинетическую энергию протона, движущегося по дуге окружности радиусом 60 см в магнитном поле, индукция которого $2 \cdot 10^{-3}$ Тл.
21. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью 106 м/с. Индукция магнитного поля 0,3 Тл. Радиус окружности 4 см. Определить заряд частицы, если известно, что ее энергия равна 12 кэВ.
22. В однородное магнитное поле с индукцией 0,01 Тл перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с кинетической энергией 30 кэВ. Определить радиус кривизны траектории движения частицы.
23. Протон и альфа-частица попадают в однородное магнитное поле, двигаясь перпендикулярно линиям индукции. Сравнить радиусы кривизны их траекторий, если они имеют одинаковую энергию.
24. Электрон, влетевший в однородное магнитное поле с индукцией 0,02 Тл перпендикулярно направлению магнитного поля, движется в нем по окружности радиусом 2 см. Определить разность потенциалов, которую прошел электрон перед тем, как влетел в магнитное поле.
25. Электрон, прошедший некоторую разность потенциалов, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $1,5 \cdot 10^{-2}$ Тл перпендикулярно магнитным силовым линиям. В магнитном поле электрон описывает окружность радиусом 114 мм. Определить разность потенциалов, которую прошел электрон перед тем, как влетел в магнитное поле.

Практическое занятие 12.

Тема занятия. Электромагнитные колебания в колебательном контуре.

Цель занятия. Изучить электромагнитные колебания в колебательном контуре.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электрические колебания в колебательном контуре, дифференциальное уравнение собственных электрических колебаний. Затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс. Переменный ток, его промышленное получение. Переменный ток в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением, векторная диаграмма напряжений и токов. Электромагнитная индукция. Вихревое электрическое поле. Второе уравнение Максвелла. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла. Система уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Основные свойства электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн. Владеет способностью приме-



нять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Электромагнитные колебания в колебательном контуре применяются при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Электромагнитные колебания в колебательном контуре

Уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний

Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R . В **идеальном колебательном контуре** считается, что сопротивление R пренебрежимо мало ($R \approx 0$), что позволяет в **идеальном контуре** (рис. 18), состоящем только из катушки индуктивности и конденсатора, получить **незатухающие электромагнитные колебания**.

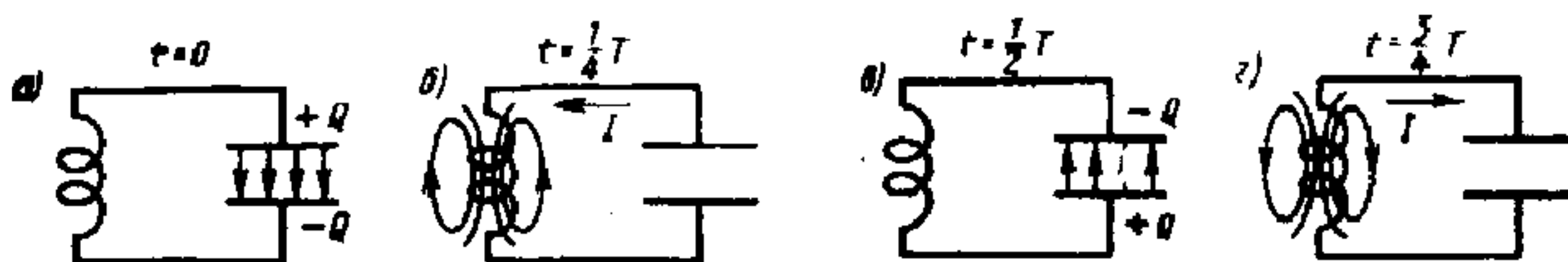


Рис. 18

Для возбуждения в контуре колебаний предварительно заряжают конденсатор, сообщая его обкладкам заряд $\pm q$. Тогда в начальный момент времени $t=0$ (рис. 18, а) между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле. Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, конденсатор начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток I . Когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля конденсатора полностью перейдет в энергию магнитного поля катушки (рис. 18, б). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать, и, следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, тогда в ней согласно закону Фарадея индуцируется ток, который течет в соответствии с правилом Ленца в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который, в конце концов, обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 18, в). Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 18, г), и система к моменту времени $t=T$ (T – период колебаний) придет в первоначальное состояние (рис. 18, а). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора, то есть начнутся периодические незатухающие колебания величины заряда q на обкладках конденсатора, напряжения U_C на конденсаторе, а также величины тока I текущего через катушку индуктивности. Согласно закону Фарадея напряжение U_C на конденсаторе определяется скоростью изменения силы тока в катушке индуктивности идеального контура, то есть:

$$U_C = \mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}.$$

Исходя из того, что $U_C = q/C$, а $I = dq/dt$, получаем **дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q \quad \text{или} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция $q(t)$, то есть **уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $q(t)$ – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени t ;

q_0 – амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора;

ω_0 – круговая (или циклическая) частота колебаний ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$);

$\omega_0 = 2\pi/T$ (T – период колебаний, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – **формула Томсона**);

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t ;

φ_0 – начальная фаза колебаний, то есть фаза колебаний в момент времени $t=0$.

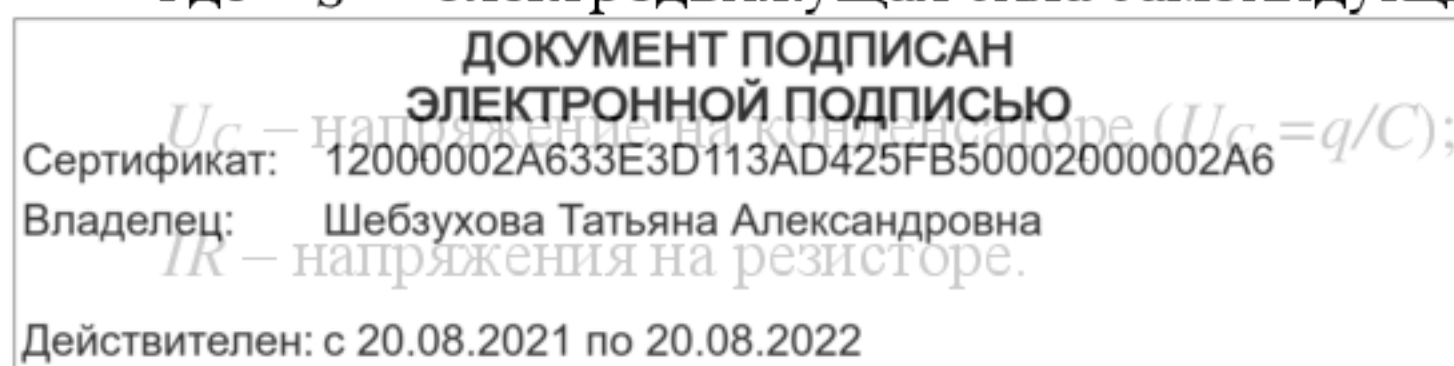
Уравнение свободных затухающих гармонических колебаний.

В реальном колебательном контуре учитывается, что, кроме катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C , в цепи также имеется резистор сопротивлением R , отличным от нуля, что является причиной затухания колебаний в реальном колебательном контуре. Свободные **затухающие колебания** – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Для цепи реального колебательного контура напряжения на последовательно включенных конденсаторе емкостью C и резисторе сопротивлением R складываются. Тогда с учетом закона Фарадея для цепи реального колебательного контура можно записать:

$$U_C + IR = \mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt},$$

где $\mathcal{E}_S$ – электродвижущая сила самоиндукции в катушке;



Исходя из того, что $I=dq/dt$, получаем **дифференциальное уравнение свободных затухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 ,$$

где δ – коэффициент затухания колебаний ($\delta = \frac{R}{2L}$), $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Решением полученного дифференциального уравнения является функция $q(t)$, то есть **уравнение свободных затухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $q(t)$ – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени t ;

$q_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора в момент времени t ;

q_0 – начальная амплитуда затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора;

– круговая (или циклическая) частота колебаний ($\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$);

$(\omega t + \varphi)$ – фаза затухающих колебаний в момент времени t ;

φ – начальная фаза затухающих колебаний.

Электромагнитные волны. Вектор Умова-Пойнтинга

Согласно теории Максвелла электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость распространения которых определяется выражением:

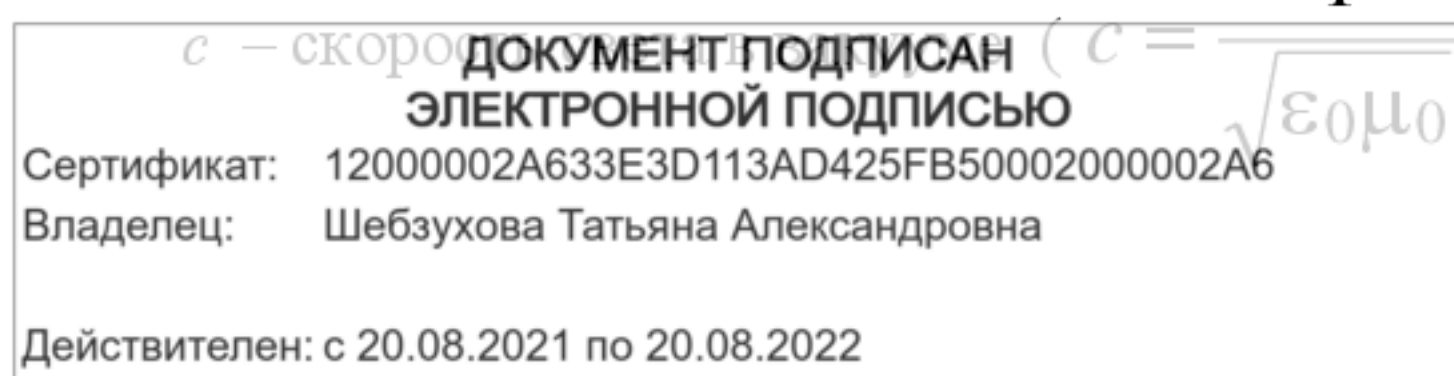
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные,

ϵ и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды,

1

c – скорость света ($c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$).



В вакууме ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью света (c), что согласуется с теорией Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны.

По теории Максвелла **электромагнитные волны** являются **поперечными**, то есть векторы E и H напряженностей электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору U

скорости распространения волны, причем векторы E , H и U образуют правовинтовую систему (рис. 19).

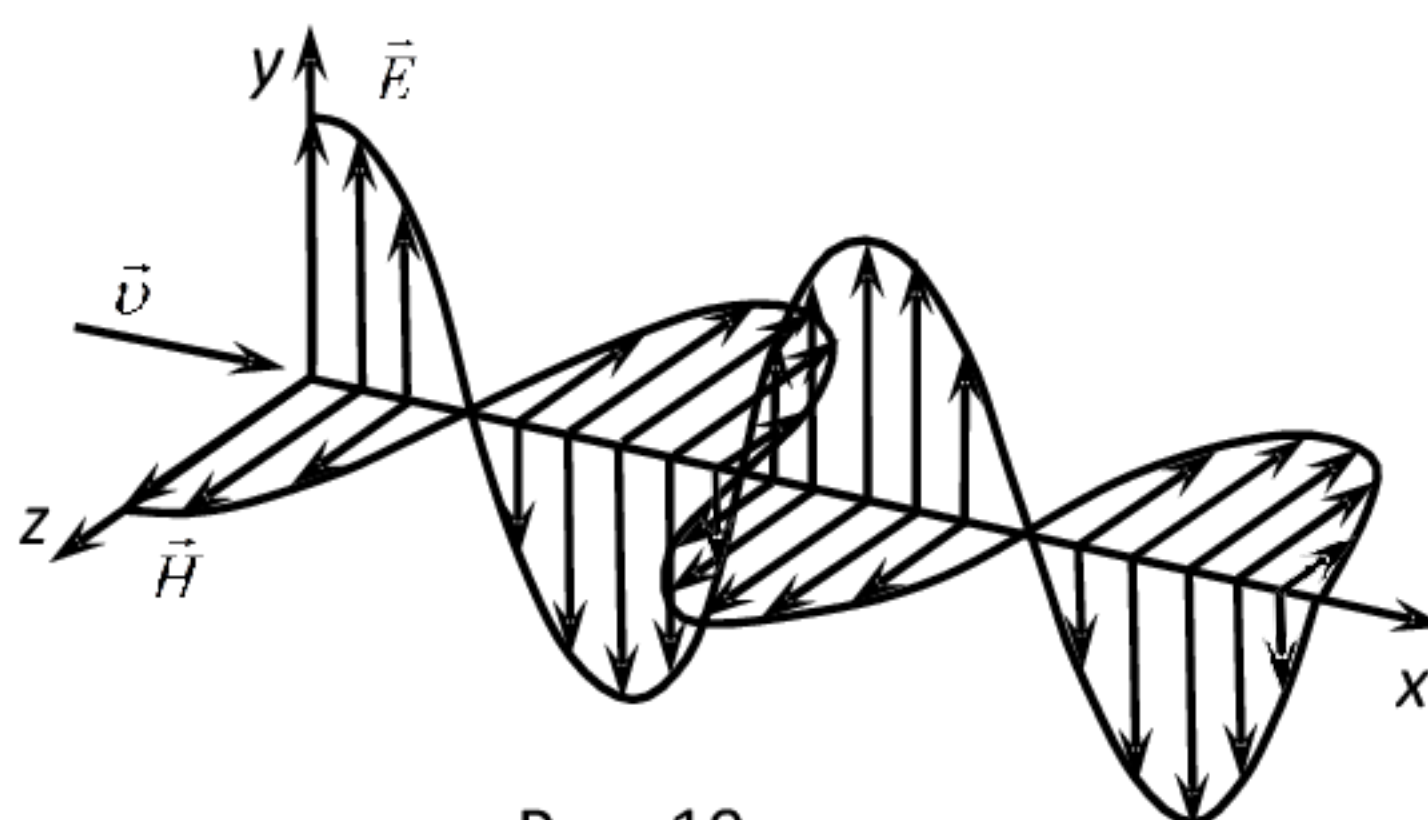


Рис. 19

Из теории Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы E и H колеблются в одинаковых фазах (рис. 19), то есть значения напряженностей E и H электрического и магнитного полей одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль, причем мгновенные значения E и H связаны соотношением:

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны (индексы y и z при E и H подчеркивают лишь то, что векторы E и H направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей в соответствии с рис. 19):

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

ω – круговая частота волны, $\omega = 2\pi / T$ (T – период колебаний),

k – волновое число, $k = 2\pi / \lambda$ (λ – длина волны),

φ – начальная фаза колебаний (начальная фаза колебаний φ имеет одинаковое значение как для колебания электрического, так и магнитного векторов, так как в электромагнитной волне эти колебания происходят в одинаковых фазах).

Энергия электромагнитных волн. Электромагнитные волны переносят энергию. Объемная плотность w энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей $w_{эл}$ электрического и $w_{м}$ магнитного полей:

$$w = w_{э} + w_{м} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Учитывая выражение связи между величинами E и H , можно получить, что суммарная плотность энергии электрического и магнитного полей:

$$w = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} E H.$$

Умножив плотность энергии w на скорость распространения волны в среде, получим модуль плотности потока энергии:

$$S = w v = E H.$$

Так как векторы E и H взаимно перпендикулярны, то произведение $E H$ совпадает с модулем вектора $\begin{bmatrix} E & H \end{bmatrix}$ ($\begin{bmatrix} E & H \end{bmatrix}$ – векторное произведение векторов E и H). Кроме того,

направление вектора $\begin{bmatrix} E & H \end{bmatrix}$ совпадает с направлением распространения волны, то есть с направлением переноса энергии, что позволило ввести **вектор S** , равный векторному произведению $\begin{bmatrix} E & H \end{bmatrix}$, как **вектор плотности потока электромагнитной энергии**, называемый **вектором Умова–Пойнтинга**:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{E} & \vec{H} \end{bmatrix}.$$

Модуль **вектора S** равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Задача 1. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с пластинами площадью $S=100 \text{ см}^2$ и катушки с индуктивностью $L=1 \text{ мкГн}$, резонирует на волну длиной $\lambda=10 \text{ м}$. Определить расстояние между пластинами конденсатора.

Дано:

$$S=100 \text{ см}^2=10^{-2} \text{ м}^2$$

$$L=1 \text{ мкГн}=10^{-6} \text{ Гн}$$

$$\lambda=10 \text{ м}$$

$$d=?$$

Емкость плоского конденсатора определяется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$$

Следовательно,
$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{C} . \quad (1)$$

Длина волны связана с периодом колебаний T и скоростью

c электромагнитных волн соотношением

$$\lambda = c \cdot T . \quad (2)$$

По формуле Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC} .$$

Выразив C из формулы Томсона, с учетом (2) и (1), получим

$$d = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon c^2 S L}{\lambda^2} = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{10^2} = 3,14 \cdot 10^{-3} = 3,14 \text{ мм}$$

Задача 2. Резонанс в колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C_1 = 1 \text{ мкФ}$, наступает при частоте $\nu_1 = 400 \text{ Гц}$. Когда же параллельно конденсатору C_1 подключили еще один емкостью C_2 , резонансная частота становится равной $\nu_2 = 100 \text{ Гц}$. Найти емкость конденсатора C_2 .

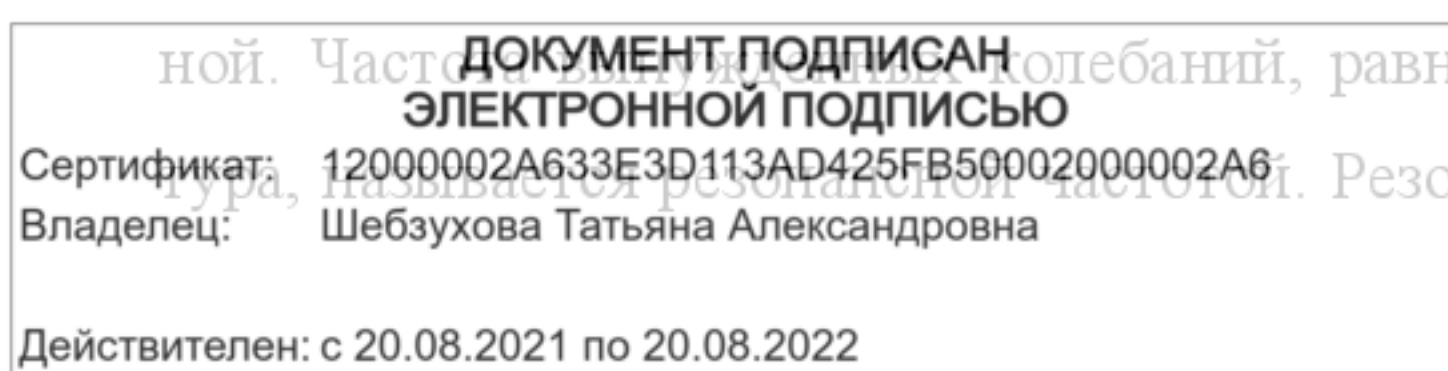
Дано: $C_1 = 1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$; $\nu_1 = 400 \text{ Гц}$; $\nu_2 = 100 \text{ Гц}$.

Найти: C_2 .

Решение

Резонанс в колебательном контуре наступает, когда собственная частота колебаний становится равной частоте вынужденных колебаний, возбуждаемых внешним передатчиком. При этом амплитуда электромагнитных колебаний в контуре становится максималь-

ной. Частота вынужденных колебаний, равная собственной частоте колебательного контура, называется резонансной частотой. Резонансная частота ν_1 в колебательном контуре,



содержащем только один конденсатор C_1 , определяется формулой Томсона:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}. \quad (1),$$

где L – индуктивность катушки колебательного контура. Когда к конденсатору C_1 подключили параллельно конденсатор C_2 , емкость батареи конденсаторов стала равна $C_1 + C_2$. Резонансная частота ν_2 при этом равна:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}. \quad (2)$$

Обе частоты ν_1 и ν_2 , а также емкость C_2 известны. Неизвестна индуктивность катушки L и искомая емкость C_2 . Следовательно, необходимо исключить из уравнений (1) и (2) индуктивность L , например, поделив левые и правые части этих уравнений соответственно друг на друга. После деления, сокращения и упрощения получаем:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}{2\pi\sqrt{LC_1}}, \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{L(C_1 + C_2)}{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1}}$$

$$\text{Отсюда} \quad \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = 1 + \frac{C_2}{C_1}; \quad \frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1; \quad C_2 = C_1 \left[\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1 \right].$$

Задача в общем, виде решена. Проведем вычисления:

$$C_2 = 10^{-6} \left[\left(\frac{400}{100}\right)^2 - 1 \right] = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Ф.}$$

Ответ: $C_2 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Ф.}$

Вопросы и задания.

1. Электрические колебания в колебательном контуре, дифференциальное уравнение собственных электрических колебаний.
2. Затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс.
3. Переменный ток, его промышленное получение.
4. Переменный ток в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением.
5. Электромагнитная индукция. Вихревое электрическое поле.
6. Первое уравнение Максвелла. Ток смещения.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

7. Второе уравнение Максвелла.
8. Система уравнений Максвелла.
9. Электромагнитные волны. Основные свойства электромагнитных волн.
10. Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна.
11. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Умова - Пойнтинга.
12. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.
13. Шкала электромагнитных волн.

Задачи для самостоятельного решения

1. По обмотке соленоида индуктивностью $L=0,2$ Гн течет ток $I=10$ А. Определить энергию W магнитного поля соленоида.
2. Индуктивность L катушки (без сердечника) равна $0,1$ мГн. При какой силе тока I энергия W магнитного поля равна 100 мкДж?
3. Соленоид содержит $N=1000$ витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида равен $0,1$ мВб. Вычислить энергию W магнитного поля.
4. На железное кольцо намотано в один слой $N=200$ витков. Определить энергию W магнитного поля, если при токе $I=2,5$ А магнитный поток Φ в железе равен $0,5$ мВб.
5. При некоторой силе тока I плотность энергии w магнитного поля соленоида (без сердечника) равна $0,2$ Дж/м³. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?
6. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет $n=10$ витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии w поля, если по обмотке течет ток $I=16$ А.
7. Обмотка тороида содержит $n=10$ витков на каждый сантиметр длины. Сердечник немагнитный. При какой силе тока I в обмотке плотность энергии w магнитного поля равна 1 Дж/м³?
8. Катушка индуктивностью $L=1$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D=20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить период T электрических колебаний в таком контуре.
9. Конденсатор емкостью $C=500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l=40$ см и площадью S сечения, равной 5 см². Катушка содержит $N=1000$ витков. Сердечник немагнитный. Найти период T электрических колебаний в этом контуре.
10. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L=20$ мкГн и конденсатора емкостью $C=80$ нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2% . Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

Тема занятия. Переменный электрический ток.

Цель занятия. Изучить законы переменного электрического поля.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Переменный электрический ток. Действующее значение переменного тока. Электрическая цепь с резистором. Электрическая цепь с катушкой индуктивности. Электрическая цепь с конденсатором. Закон Ома для цепи переменного тока. Мгновенная мощность. Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Электромагнитные колебания в колебательном контуре применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Переменный электрический ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания в цепи с резистором, катушкой индуктивности и конденсатором можно рассматривать как *переменный электрический ток*. Если подводимые к контуру внешняя ЭДС или напряжение периодически изменяются по гармоническому закону, то переменный ток называют *синусоидальным* (рис. 1):

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

или

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где i – мгновенное значение силы тока, то есть значение тока для каждого момента времени; I_m – амплитудное значение силы тока.

При частоте $\nu = 50 \text{ Гц}$ (промышленная частота) период электромагнитных колебаний составляет $T = 0,02 \text{ с}$.

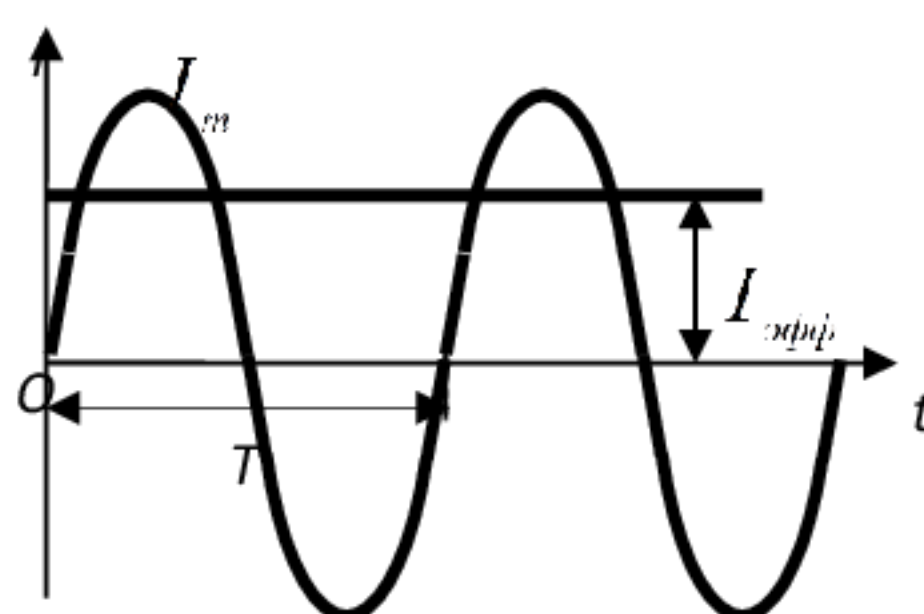


Рис.1.

чению $I_{эфф}$. При этом действие переменного тока оценивают по тепловому эффекту, который сравнивают с тепловым эффектом постоянного тока.

Действующее значение переменного тока

Действующим (эффективным) значением переменного тока называют такую величину, которая равна силе постоянного тока, выделяющего в проводнике такое же количество теплоты, что и данный переменный ток за одно и то же время. Действующее значение переменного синусоидального тока связано с его амплитудным значением соотношением

$$I = I_{эфф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Для мгновенных значений синусоидальных токов выполняются закон Ома и правила Кирхгофа.

Рассмотрим цепи, содержащие резистор, катушку индуктивности, конденсатор и все три элемента, соединенные последовательно, на зажимах которых приложено переменное напряжение

$$u = U_m \cos \omega t,$$

где U_m – амплитудное значение напряжения.

Электрическая цепь с резистором

Сила тока, протекающего через резистор (рис.2), определяется законом Ома

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad (2)$$

где $I_m = \frac{U_m}{R}$ – амплитуда силы тока. Очевидно, что при чисто активном (R) характере цепи сдвиг фаз колебаний тока и напряжения равен нулю (рис. 3).

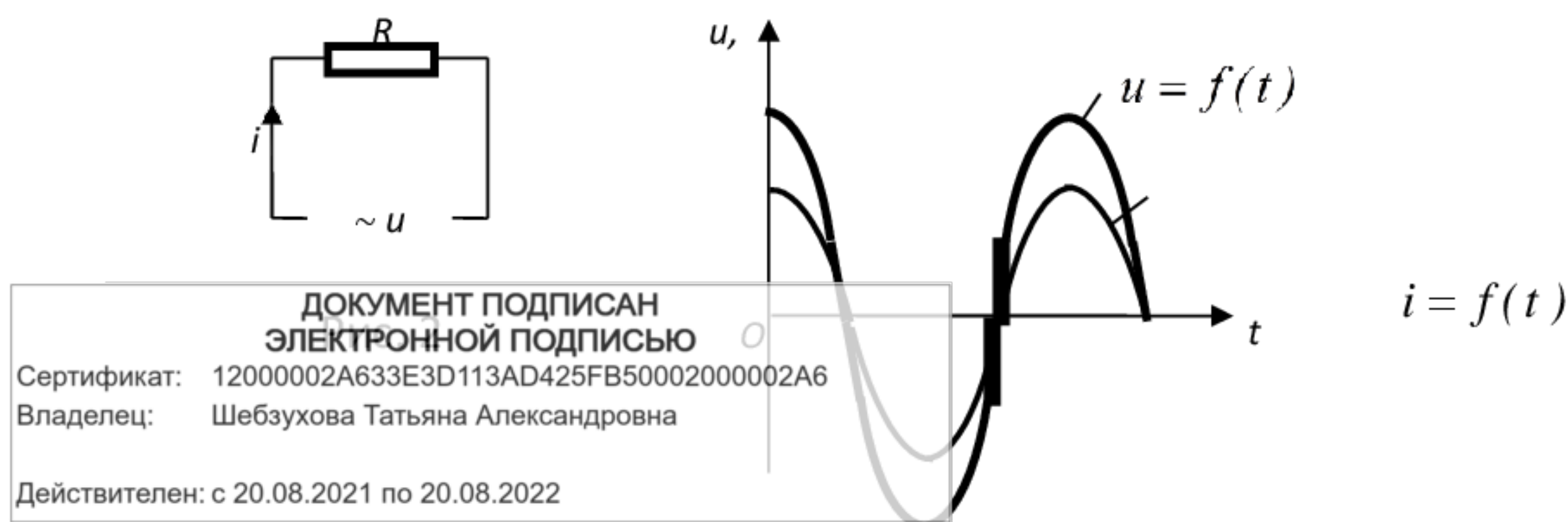


Рис. 3

Электрическая цепь с катушкой индуктивности

В катушке без потерь ($R \approx 0$) будет протекать ток, если напряжение на ее выводах компенсирует ЭДС самоиндукции (рис. 4), то есть

$$u = -\varepsilon_s = L \frac{di}{dt}, \quad (3)$$

откуда ток

$$i = \int \frac{1}{L} U_m \cos \omega t dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + A = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \quad (4)$$

Постоянная интегрирования $A=0$, так как ток изменяется по гармоническому закону, то есть не имеет постоянной составляющей. Очевидно, что амплитуда тока в цепи с катушкой

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (5)$$

где $x_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, зависящее от частоты. При $\nu = 0$ (при протекании постоянного тока) $x_L = 0$.

Таким образом, в цепи с катушкой индуктивности колебания силы тока отстают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от колебаний напряжения (рис.5).

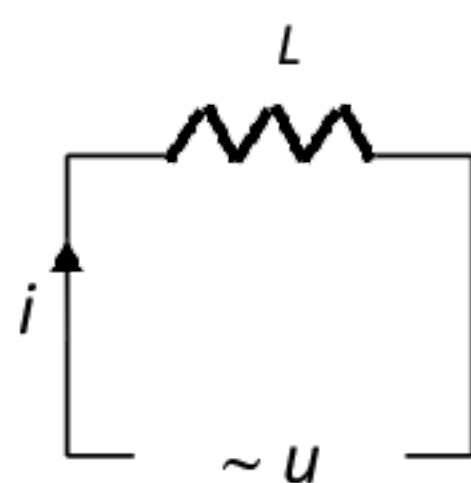


Рис. 4

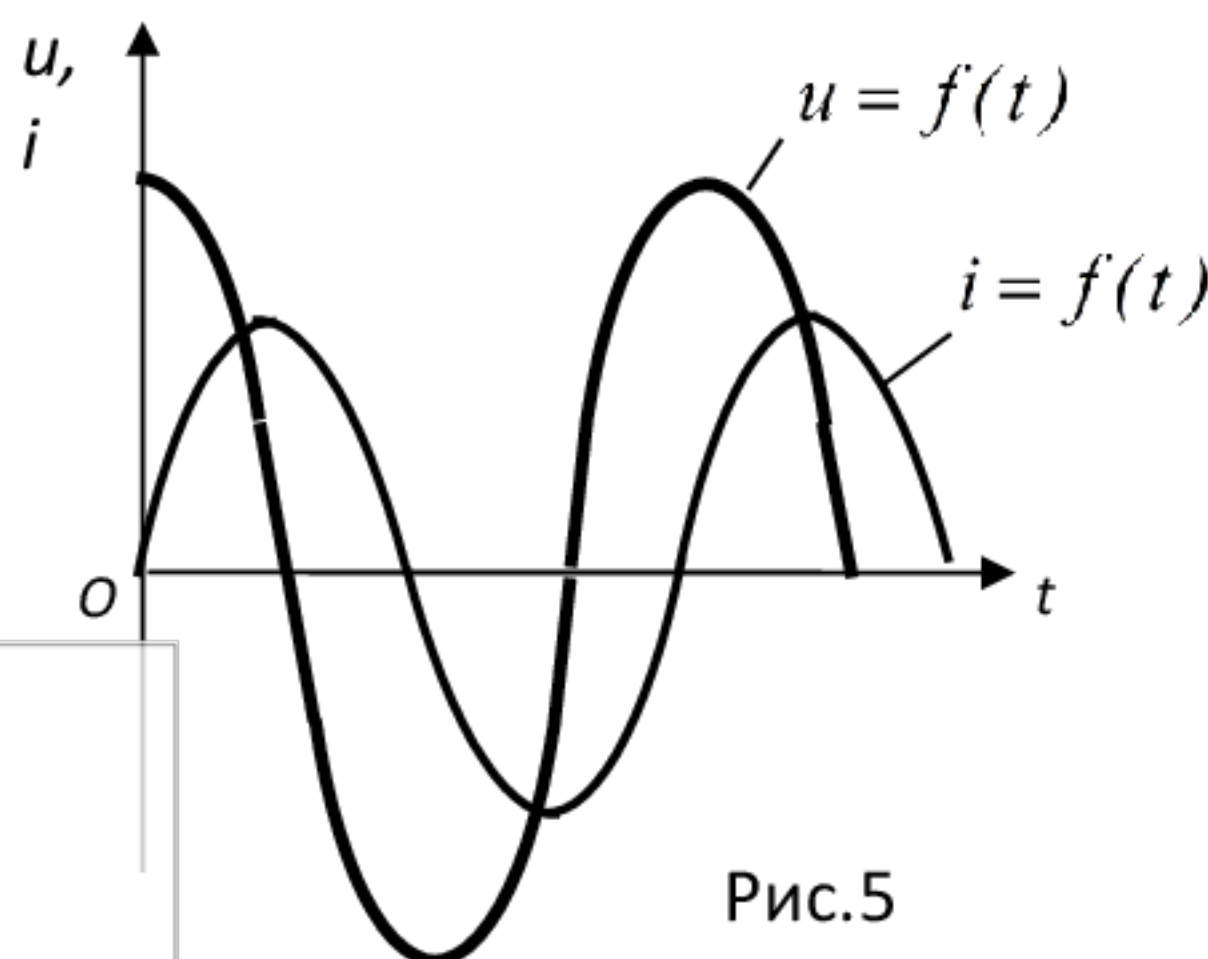


Рис.5

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Электрическая цепь с конденсатором

Если пренебречь активным сопротивлением соединительных проводов и обкладок конденсатора (рис.6), то напряжение на конденсаторе $u_c = \frac{q}{C}$ будет равно напряжению на зажимах цепи, то есть $U_m \cos \omega t = \frac{q}{C}$,

откуда заряд конденсатора

$$q = U_m C \cos \omega t.$$

Сила тока в цепи конденсатора

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega U_m C \sin \omega t = U_m \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (6)$$

где $I_m = U_m \omega C = \frac{U_m}{x_c}$, $x_c = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление цепи. Чем меньше частота

ν , тем больше x_c . Поэтому в цепи постоянного тока ($\nu = 0$) $x_c \rightarrow \infty$ и конденсатор не проводит электрический ток.

Таким образом, в цепи с конденсатором колебания силы тока опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания напряжения (рис.7).

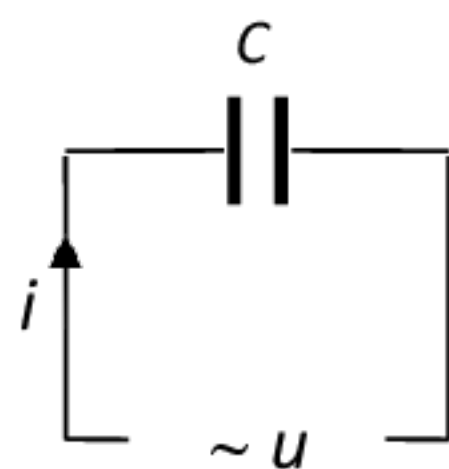


Рис.6

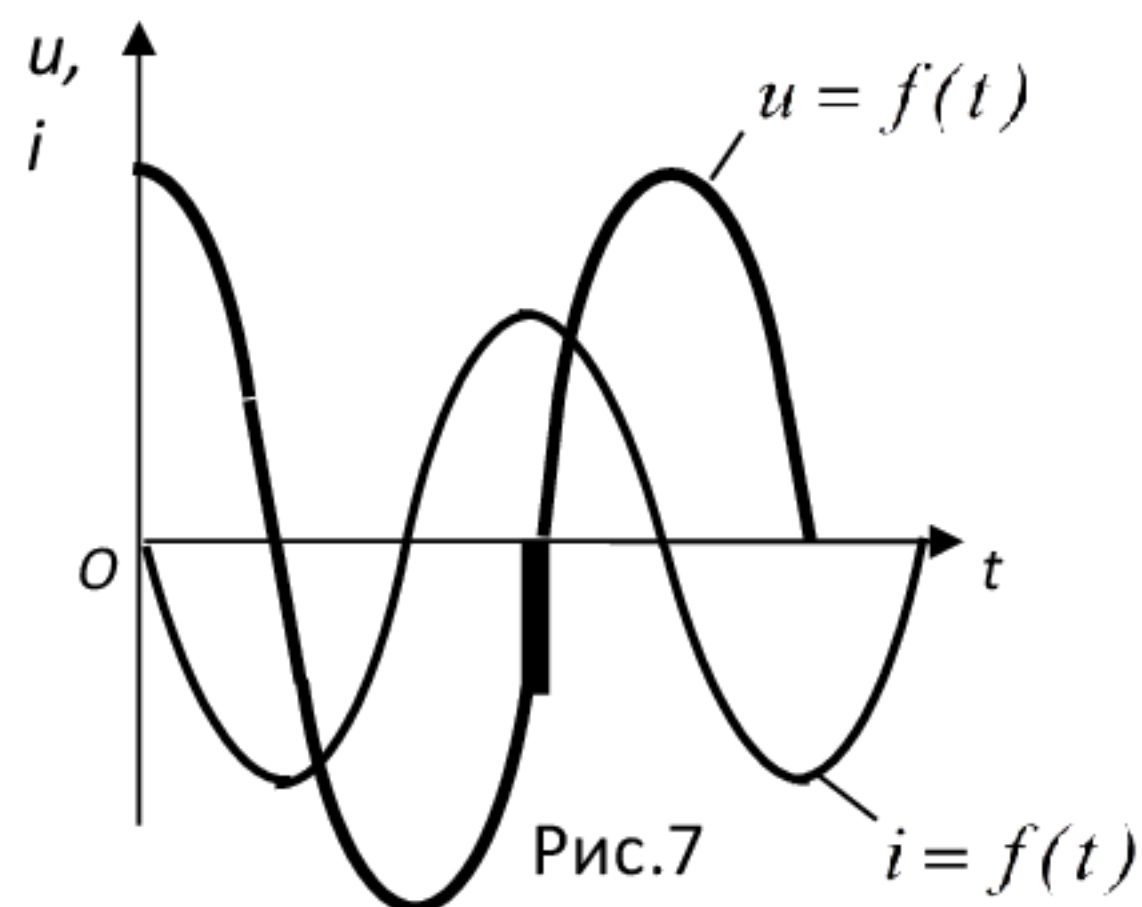


Рис.7

Закон Ома для цепи переменного тока

Рассмотрим теперь электрическую цепь из последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора (рис.8).

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

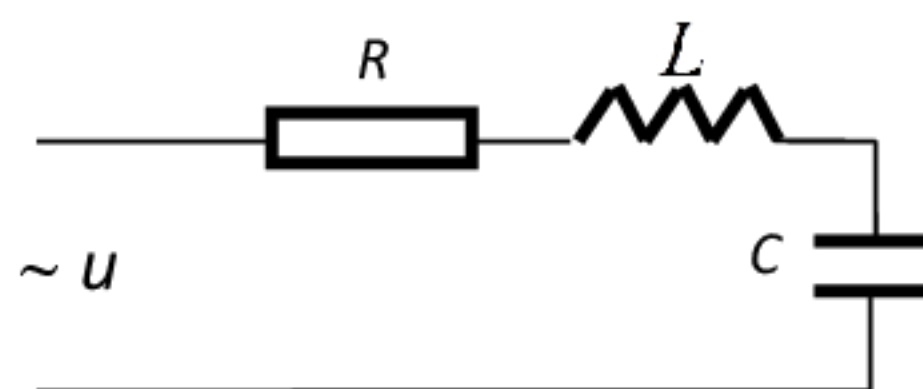


Рис.8

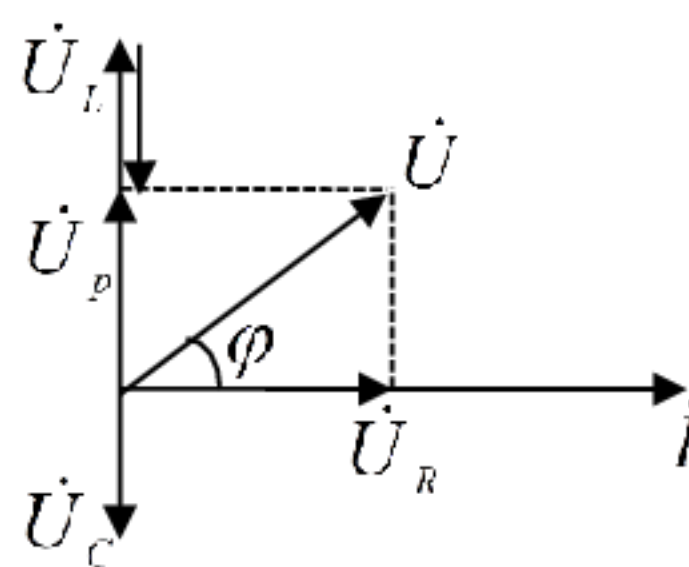


Рис. 9

По второму правилу Кирхгофа для мгновенных значений напряжение на зажимах цепи равно сумме напряжений на отдельных элементах

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Построим векторную диаграмму цепи с учетом полученных ранее фазовых соотношений: а) напряжение на резисторе совпадает по фазе с током; б) напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на $\frac{\pi}{2}$; в) напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 9).

Из векторной диаграммы найдем модуль действующего значения напряжения

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_p^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}, \quad (20.9)$$

где U_p – реактивная составляющая напряжения.

Учитывая, что $U_R = IR$, $U_L = Ix_L$, $U_C = Ix_C$, получим:

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = IZ,$$

где Z – полное сопротивление цепи. Выражение

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (10)$$

называется **ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН** *цепи переменного тока.*

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Разность $x_p = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ называют *реактивным сопротивлением*. Из векторной диаграммы следует, что угол сдвига фаз между током и напряжением для рассматриваемой схемы

$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_R} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (20.11)$$

Если $x_L > x_C$, цепь имеет индуктивный характер, $\varphi > 0$; если $x_L < x_C$, цепь имеет емкостный характер, $\varphi < 0$; если $x_L = x_C$, то реактивное сопротивление цепи $x_p = 0$, $\varphi = 0$ и цепь имеет активный характер даже при наличии в ней L и C .

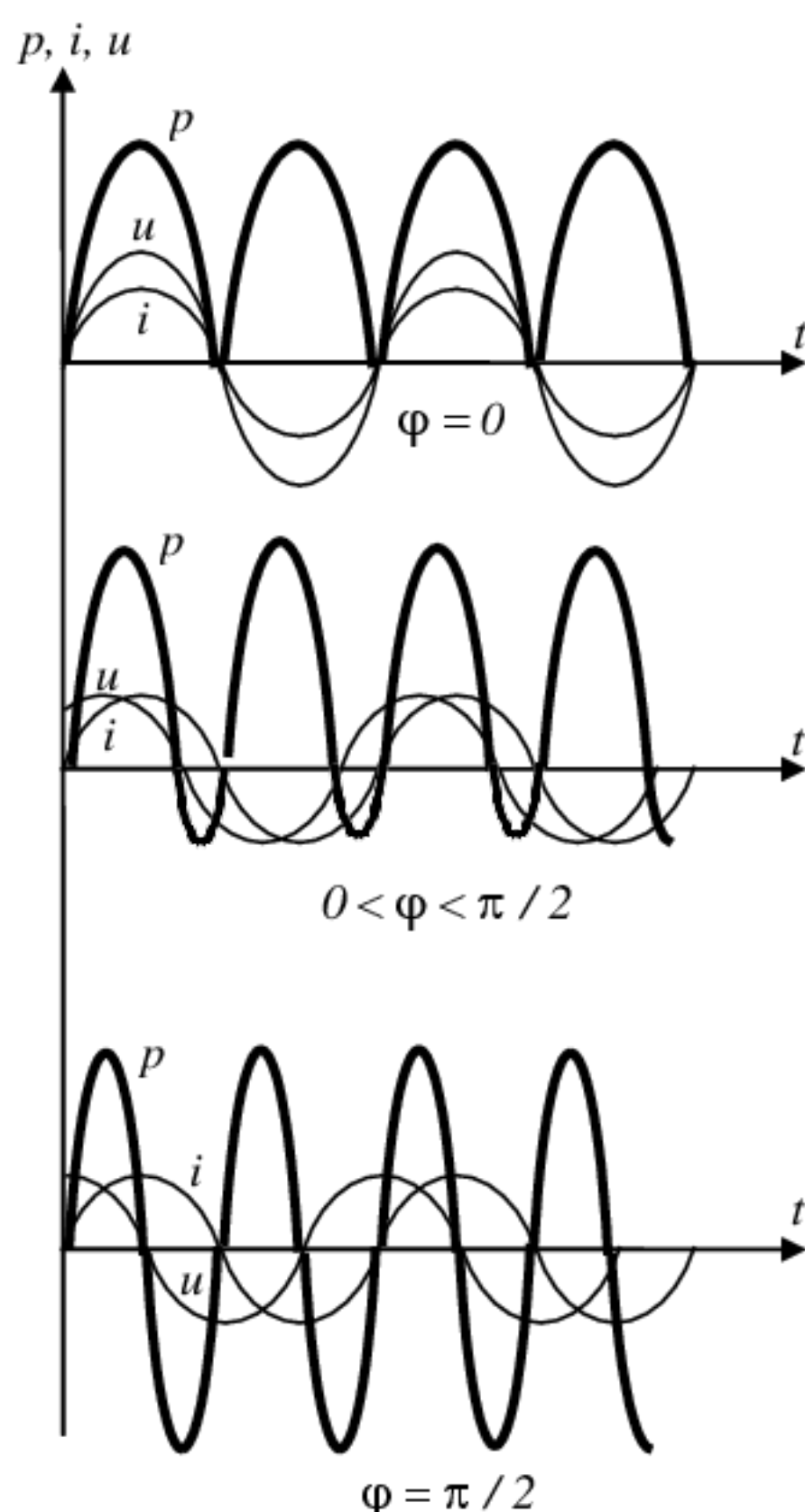
Мгновенная мощность

Мгновенная мощность, развиваемая в цепи переменного тока, равна произведению мгновенных значений силы тока и напряжения:

$$p(t) = i(t)u(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) U_m \cos \omega t. \quad (12)$$

Среднее за период значение мгновенной мощности называют *активной мощностью*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt. \quad (13)$$



Из-за наличия сдвига фаз φ знаки u тока и напряжения в данный момент времени могут быть разные. Поэтому мгновенная мощность может быть отрицательной в некоторые доли периода переменного тока, что означает возвращение энергии из цепи источника тока.

На рис.20.10 приведены графики изменения мгновенной мощности при различных углах сдвига фаз между колебаниями напряжения и тока.

При $\varphi = 0$ в любой момент времени мощность положительна, она расходуется в цепи на совершение различных видов работы. При $0 < \varphi < \pi/2$ в отдельные промежутки времени мощность отрицательна. Это объясняется тем, что при наличии в цепи катушки индуктивности возрастание тока приводит к созданию в ней магнитного поля, которое обладает запасом энергии. При уменьшении силы тока магнитное поле исчезает и запасенная в нем энергия возвращается к источнику тока (генератору).

При $\varphi = \pi/2$ в любой момент времени мощность отрицательна, она возвращается к источнику тока (генератору). При наличии в цепи конденсатора: в течение той четверти периода, когда происходит зарядка конденсатора, энергия в нем запасается, а когда конденсатор разряжается, он отдает в цепь запасенную энергию.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
 ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
 Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
 Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

При $\varphi = \pi/2$ положительная мощность равна отрицательной мощности, работа тока за период равна нулю, следовательно, средняя мощность также равна нулю. При этом периодически энергия запасается в магнитном и электрическом полях, а затем снова передается генератору. Последний случай возможен лишь при $R=0$.

Подставив (12) в (13) и выполнив преобразования, найдем среднее значение мощности переменного тока:

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi = UI \cos\varphi, \quad (14)$$

где $\cos\varphi$ – косинус угла сдвига фаз, который называется *коэффициентом мощности*.

Формула (14) показывает, что развиваемая в цепи переменного тока мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между напряжением и током.

Коэффициент мощности $\cos\varphi$ характеризует потери энергии в цепи и, следовательно, является важнейшей технико-экономической характеристикой при проектировании электрооборудования переменного тока. Если нагрузки в цепи имеют большие емкостные и индуктивные сопротивления, то $\varphi \neq 0$ и $\cos\varphi$ может быть много меньше единицы.

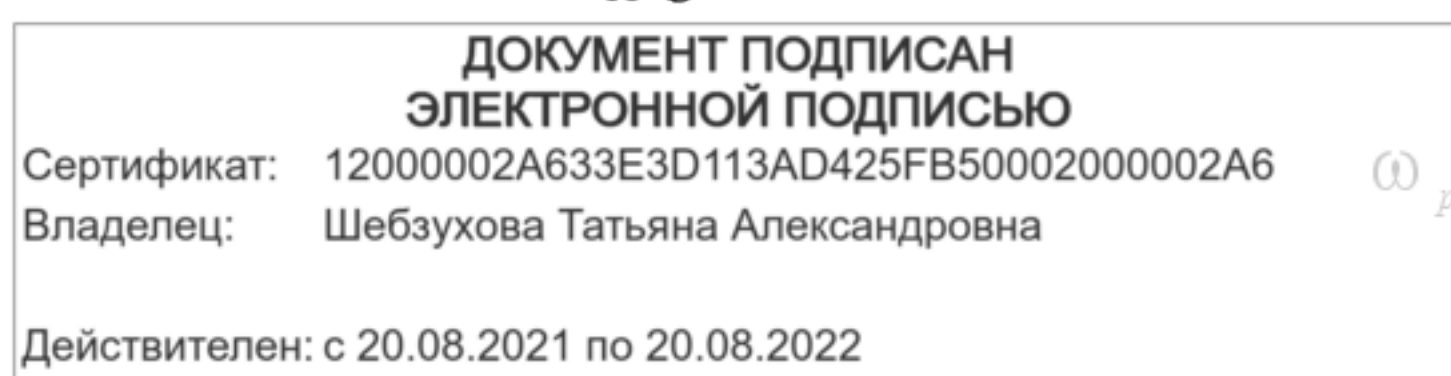
В этих случаях для передачи требуемой активной мощности P (при заданном напряжении) необходимо увеличивать силу тока, что приводит к выделению в цепи большого количества теплоты. Поэтому приходится либо увеличивать сечение проводов ($R \sim 1/S$), либо распределять реактивные нагрузки так, чтобы $\cos\varphi$ был по возможности ближе к единице.

Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений

Резонансом в электрической цепи называется режим участка, содержащего индуктивный и емкостный элементы, при котором угол φ сдвига фаз колебаний напряжения и тока равен нулю. Резонанс характеризуется рядом особенностей, которые обусловили его широкое применение в радиотехнике, электротехнике, измерительной технике и других областях.

Различают несколько видов резонанса: резонанс напряжений (при последовательном соединении элементов), резонанс токов (при параллельном соединении элементов), резонанс в магнитно-связанных цепях и др.

Резонанс напряжений. Из выражения (1) следует, что при последовательном соединении R, L, C ток в цепи приобретает максимальное значение при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, то есть при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Этому условию удовлетворяет частота



$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (15)$$

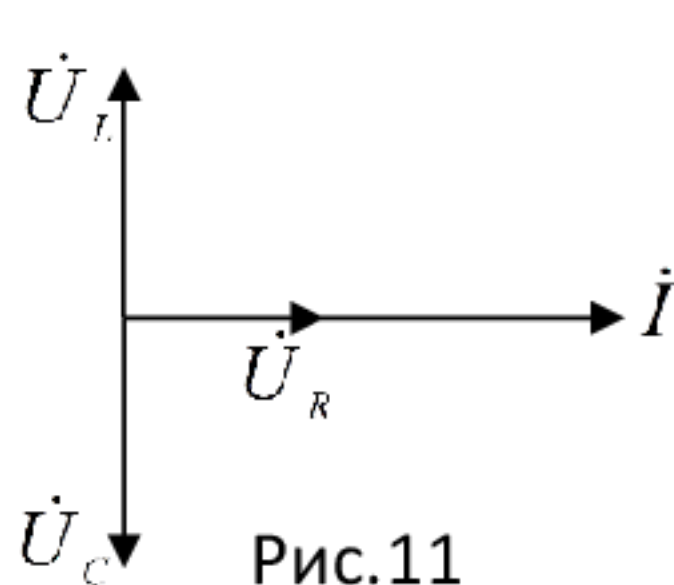


Рис.11

В этом случае $\varphi = 0$, $Z = R \rightarrow \min$, падения напряжения на катушке индуктивности и конденсаторе одинаковы по величине и противоположны по фазе (рис.11). Таким образом, при резонансе напряжений

$$U_L = U_C,$$

и

$$U_L = \omega_{\text{рез}} L I = \frac{1}{\sqrt{LC}} L I = \sqrt{\frac{L}{C}} I = \frac{U}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = UQ, \quad (16)$$

где Q – добротность контура.

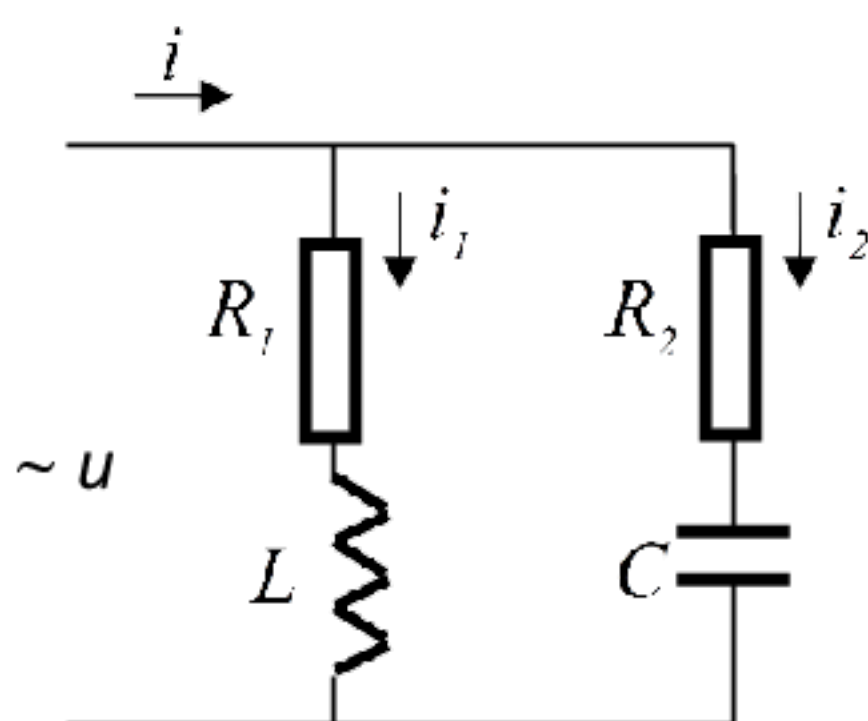


Рис.12

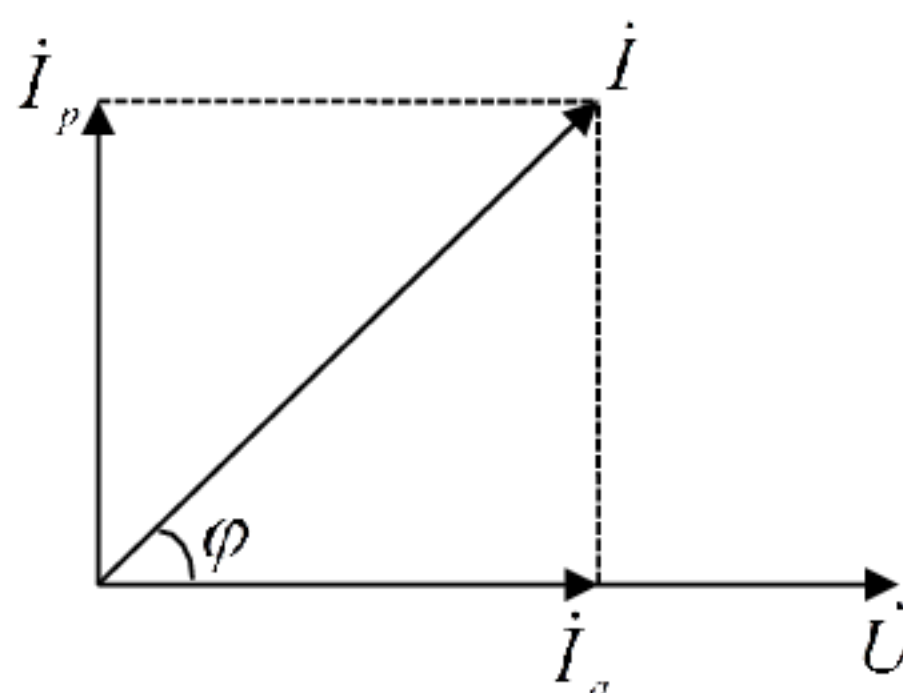


Рис.13

Так как добротность колебательных контуров больше единицы, то напряжение, как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение U , приложенное к цепи. Из выражения (16) следует, что добротность контура показывает, во сколько раз при резонансе напряжение на реактивных элементах больше по величине входного напряжения.

Явление резонанса напряжений используется в радиотехнике и электронике для усиления колебаний напряжения какой-либо определенной частоты. В электроэнергетике явление резонанса напряжений необходимо учитывать при выборе изоляции высоковольтного оборудования, так как иначе может произойти ее пробой.

Вопросы и задания.

1. Переменный электрический ток.
2. Действующее значение переменного тока.
3. Электрическая цепь с резистором.
4. Электрическая цепь с катушкой индуктивности.
5. Электрическая цепь с конденсатором.
6. Шибзухова Татьяна Александровна
7. Мгновенная мощность.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шибзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

8. Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений.

Задачи для самостоятельного решения

1. В сеть переменного тока с действующим напряжением 220 В включено активное сопротивление 55 Ом. Определить действующее и амплитудное значение силы тока.
2. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока с эффективным напряжением $V_{\text{э}}=71$ В и периодом $T=(1/50)\text{с}$. Найти промежуток времени, в течение которого длится вспышка лампы, и частоту вспышек лампы n . Напряжение зажигания лампы $V_{\text{з}}=86,7\text{В}$ считать равным напряжению гашения $V_{\text{г}}$.
3. В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L . По цепи протекает переменный ток. Определите амплитуды напряжения на каждом из элементов цепи и во всей цепи. По какому закону изменяется приложенное к цепи напряжение?

Раздел 5. Оптика. Квантовая природа излучения

Практическое занятие 14.

Тема занятия. Геометрическая оптика. Линзы

Цель занятия. Изучить основные законы геометрической оптики.

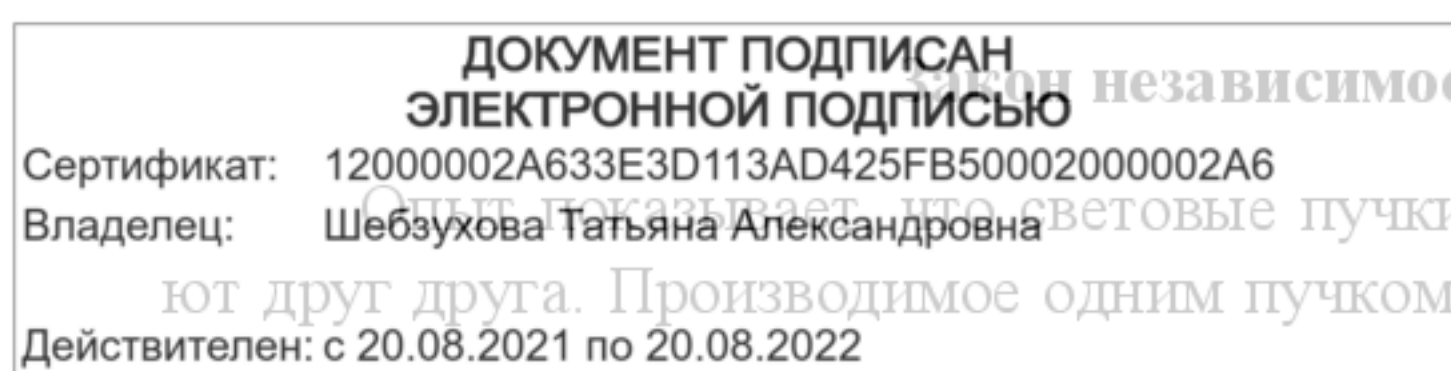
Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Закон прямолинейного распространения света в однородной среде. Основные законы оптики. Полное отражение. Линзы. Формула линзы. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные законы геометрической оптики применяются при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Закон прямолинейного распространения света в однородной среде

Прямолинейность световых лучей означает, что форма тени предмета при его освещении точечным источником соответствует геометрической *центральной проекции* контура предмета (с центром в источнике). Представление о прямолинейных световых лучах используется в инструментальной оптике для конструирования и расчета оптических приборов. В оптически неоднородных средах геометрическая оптика допускает и непрямолинейное распространение света.



Закон независимости световых лучей

Опыт показывает, что световые лучи при пересечении, как правило, не возмущают друг друга. Производимое одним пучком действие не зависит от наличия других пуч-

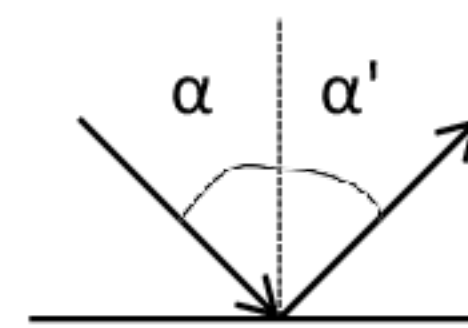
ков. Математически это означает, что при наложении нескольких световых пучков результирующая интенсивность пучков равна сумме интенсивностей, каждого из пучков

$$I = \sum_{i=1}^n I_i, \text{ то есть здесь мы пренебрегаем волновыми свойствами света (интерференцией}$$

и дифракцией). Кроме того, этот закон строго справедлив для вакуума. Для световых лучей в веществе закон независимости световых лучей справедлив для *линейных* сред, оптические свойства которых не зависят от интенсивности света. Это выполняется точно при небольшой и приближенно при умеренной интенсивности света. При распространении света высокой интенсивности в веществе этот закон нарушается.

Закон отражения света

При падении луча света на границу раздела двух сред, в точке падения восстанавливают нормаль к границе раздела и отсчитывают угол падения α , как угол между падающим лучом и нормалью, а угол отражения α' - как угол между отраженным лучом и нормалью. Тогда закон *отражения света* гласит: *луч падающий, луч отраженный и нормаль к отражающей поверхности лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения $\alpha = \alpha'$.*

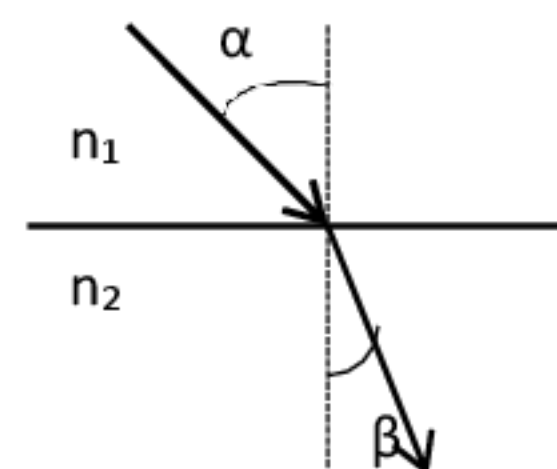


Закон преломления света

Более сложный закон имеет место при переходе света из одной среды в другую. При падении света на границу раздела прозрачных сред с абсолютными показателями преломления

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \text{ и } n_2 = \frac{c}{v_2} \text{ часть света отражается, а часть проходит во}$$

вторую среду, изменяя направление распространения (преломляется). Здесь c – скорость света в вакууме, v – скорость света в соответствующей среде. Угол к нормали, под которым свет распространяется во второй среде, называют углом преломления β . Тогда закон *преломления* гласит: *луч падающий, луч преломленный и нормаль к преломляющей поверхности лежат в одной плоскости.*



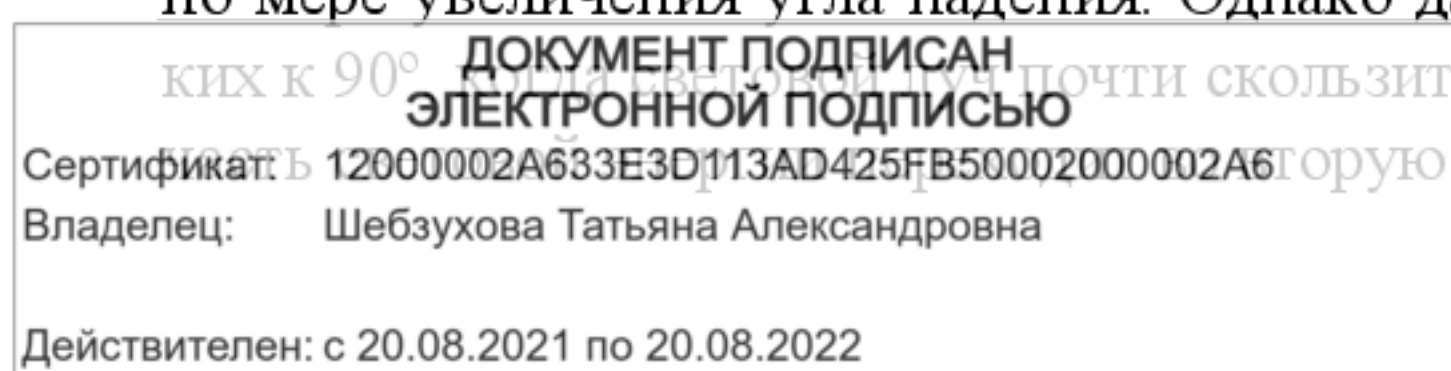
Угол падения и угол преломления связаны соотношением: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21}$, где n_{21} - относи-

тельный коэффициент преломления второй среды относительно первой. $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$.

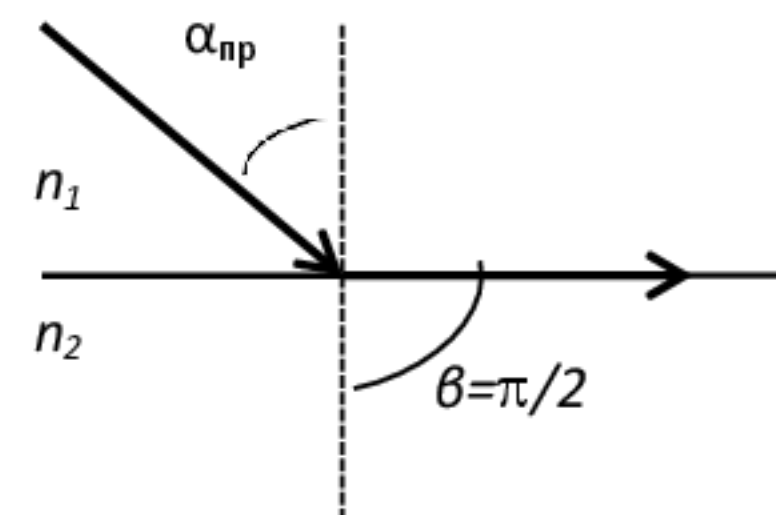
Здесь различают два случая:

1. Когда свет переходит из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду ($n_2 > n_1$), угол преломления меньше угла падения ($\beta < \alpha$). В этом случае доля отраженной энергии светового луча от границы раздела двух сред сильно возрастает по мере увеличения угла падения. Однако даже при очень больших углах падения, близ-

вдоль поверхности раздела двух сред, все же среду.



2. Новое интересное явление возникает тогда, когда свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду ($n_2 < n_1$). Тогда угол преломления больше угла падения ($\beta > \alpha$). Здесь также доля отраженной энергии возрастает с увеличением угла падения, однако возрастание идет по иному закону: *начиная с некоторого угла падения, вся световая энергия отражается от границы раздела*. Это явление носит название *полного внутреннего отражения*. Угол падения $\alpha_{пр}$, начиная с которого вся световая энергия отражается от границы раздела, называется *предельным углом полного внутреннего отражения*. Значение этого угла определяется выражением: $\sin \alpha_{пр} = n_2$. При падении луча с углом падения $\alpha > \alpha_{пр}$, вся световая энергия отражается в первую среду и не проходит во вторую, преломленного луча во второй среде нет.



Следствия из законов геометрической оптики

Фокусное расстояние сферического зеркала

$$F = R / 2,$$

где R – радиус кривизны зеркала.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = 1 / F.$$

Формула сферического зеркала

$$\pm \frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где d и f – расстояния от полюса зеркала соответственно до предмета и изображения. Знак плюс соответствует действительным величинам, а знак минус – мнимым.

Оптическая сила тонкой линзы

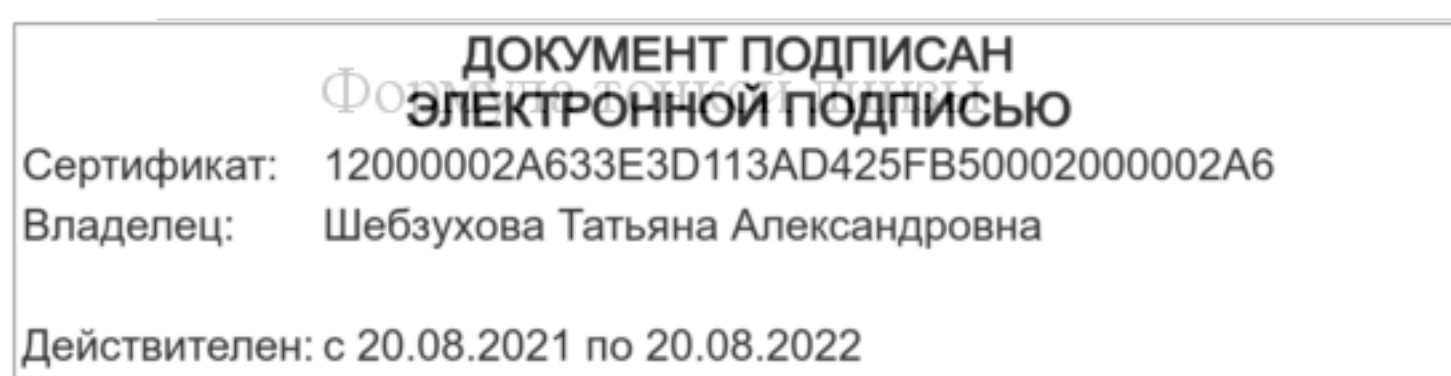
$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_{л}}{n_{ср}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где F – фокусное расстояние линзы; $n_{л}$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{ср}$ – абсолютный показатель преломления окружающей среды.

Радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком плюс, вогнутых – со знаком минус.

Оптическая сила двух тонких линз, сложенных вплотную

$$D = D_1 + D_2.$$



$$\pm \frac{l}{F} = \frac{l}{d} \pm \frac{l}{f},$$

где d и f – расстояния от оптического центра линзы соответственно до предмета и изображения. Знак плюс соответствует действительным величинам, а знак минус – мнимым.

Угловое изображение лупы

$$\Gamma = \frac{d_0}{F},$$

где d_0 – расстояние наилучшего зрения ($d_0 = 25$ см).

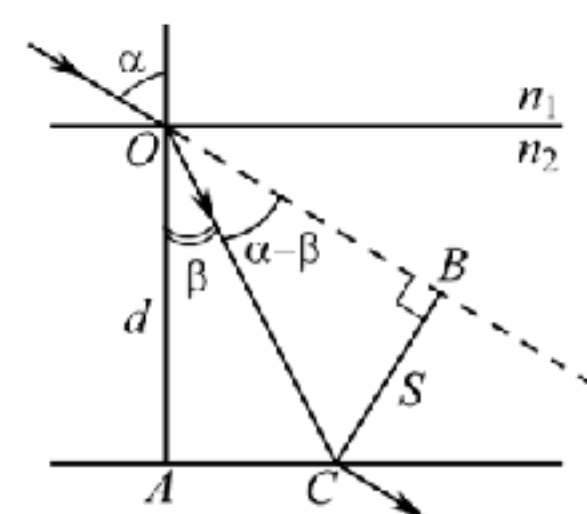
Угловое увеличение телескопа в случае, когда в телескоп наблюдают удаленные предметы

$$\Gamma = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 и F_2 – фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра.

Примеры решения задач

Задача 1. Световой луч падает под углом $\alpha = 60^\circ$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 10$ см. Определите смещение S луча пластинкой, если пластинка погружена в воду. Показатели преломления стекла и воды соответственно равны $n_2 = 1,5$, $n_1 = 1,33$.



СКО-
ПО-
ОТ-

Дано: $\alpha = 60^\circ$
 $d = 10$ см
 $n_1 = 1,33$
 $n_2 = 1,5$

Решение. Из прямоугольных треугольников AOB и BOC следует:

$$\frac{d}{\cos \beta} = \frac{S}{\sin(\alpha - \beta)} = CO.$$

$S = ?$

Отсюда смещение луча пластинкой

$$S = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = d \left(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right). \quad (1)$$

По закону преломления

$$\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{n_1 \sin \alpha}{n_2}. \quad (2)$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Следовательно,
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

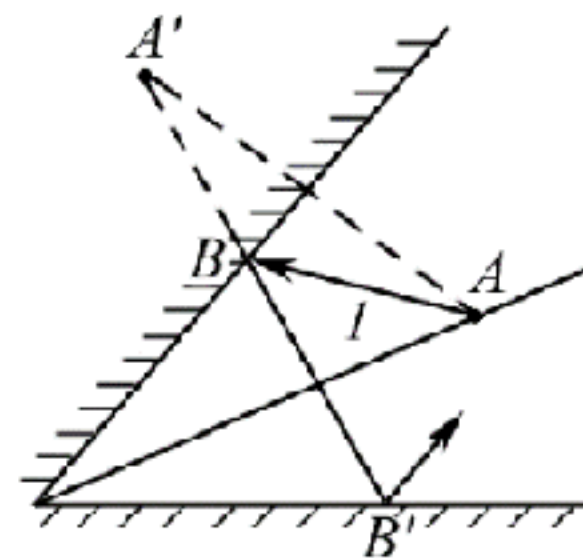
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

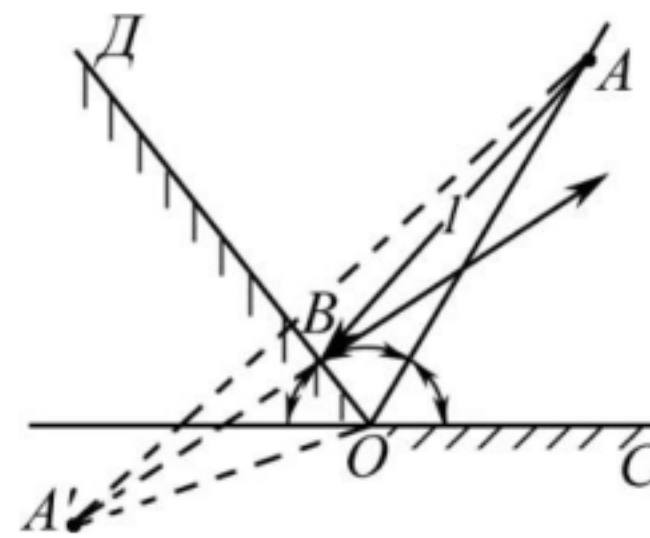
$$S = d \left(\sin \alpha - \frac{n_1 n_2 \cos \alpha \sin \alpha}{n_2 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} \right) = d \left(\sin \alpha - \frac{n_1 \sin 2\alpha}{2 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} \right) =$$

$$= 10 \left(\sin 60^\circ - \frac{1,33 \sin 120^\circ}{2 \sqrt{1,5^2 - 1,33^2 \sin^2 60^\circ}} \right) \approx 2,67 \text{ см.}$$

Задача 2. Внутренняя поверхность конуса покрыта отражающим слоем, образующим коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него натянута светящаяся нить. Определите минимальный угол раствора конуса $\alpha_{\min}$, при котором лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза.



а)



б)

Решение. Рассмотрим ход луча (I), испущенного точкой A , лежащей на нити. После первого отражения от конической поверхности в точке B луч I пойдет так, как если бы он вышел из точки A' – мнимого изображения точки A . Если угол раствора конуса мал, то точка A' – изображение точки A будет лежать выше прямой OC (рис. а). Тогда луч I может отразиться в точке D второй раз от нижней поверхности конуса. При большом угле раствора конуса точка A' лежит ниже прямой OC (рис. б).

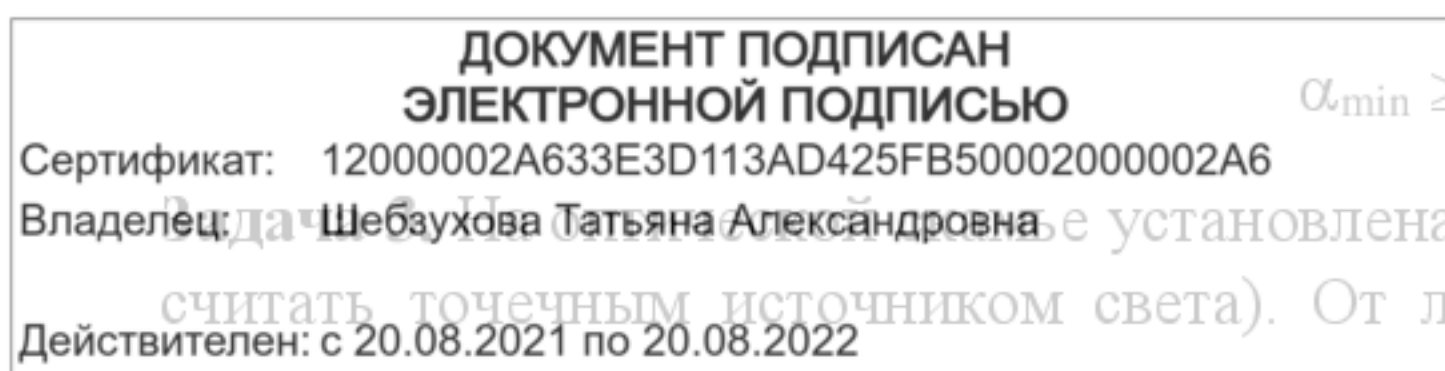
Тогда ни один луч, вышедший из точки A второй раз не попадет на зеркало. Это будет иметь место, если

$$\angle A'OD + \angle AOD + \angle AOC \geq 180^\circ. \quad (1)$$

Но $\angle AOC = \angle AOD = \angle A'OD = \alpha / 2$. Подставим выражение для углов в (1): $3(\alpha / 2) \geq 180^\circ$.

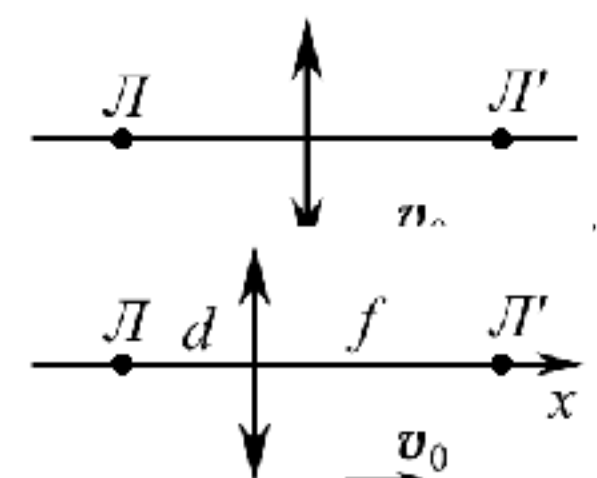
Отсюда получим

$$\alpha_{\min} = \alpha \geq (2 / 3) \cdot 180^\circ.$$



$$\alpha_{\min} \geq 120^\circ.$$

лампочка L (ее можно считать точечным источником света). От лампочки отодвигают с



постоянной скоростью v_0 собирающую линзу, фокусное расстояние которой равно F . В какую сторону, и с какой скоростью будет двигаться изображение L' лампочки в тот момент, когда линза окажется от нее на расстоянии $1,5F$? Лампочка все время остается на главной оптической оси линзы.

Дано:	Решение. В системе отсчета, связанной с линзой, скорость лампочки
$d = 1,5F$	
v_0	$v' = -v_0$.
$v_x = ?$	Продифференцируем формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad (1)$$

где d – расстояние от предмета до линзы; f – расстояния от изображения до линзы; F – фокусное расстояние.

$$-\frac{dd}{d^2 dt} - \frac{1}{f^2} \frac{df}{dL} = 0.$$

Здесь $\frac{dd}{dt} = v_0$ – положительная величина, так как расстояние до предмета увеличивается. Скорость изменения f обозначим U :

$$U = \frac{df}{dt} = -\frac{f^2}{d^2} v_0.$$

Из выражения (1) находим f :

$$f = \frac{Fd}{d - F} = \frac{F \cdot 1,5F}{1,5F - F} = 3F.$$

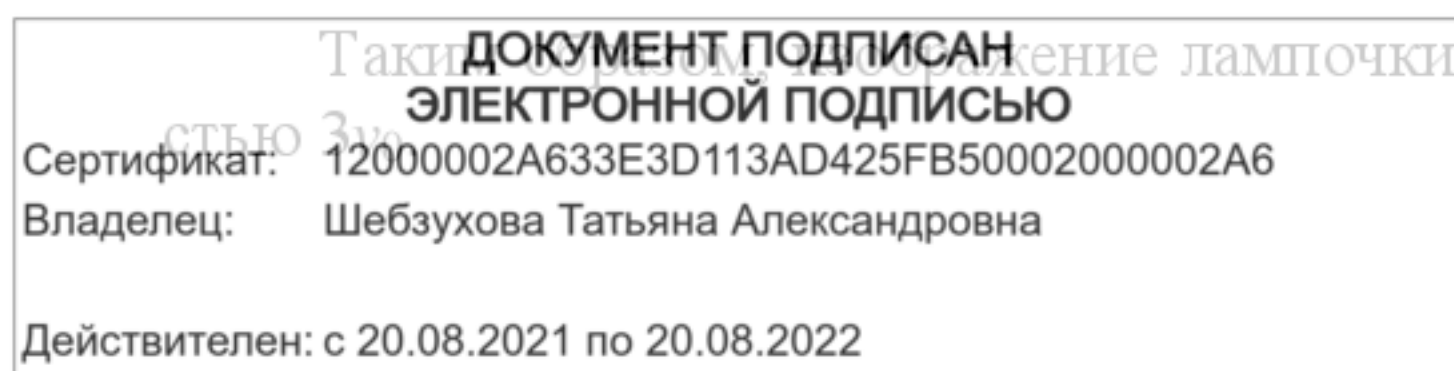
Тогда

$$U = -\frac{9F^2 v_0}{(1,5F)^2} = -4v_0.$$

Знак «минус» говорит о том, что f уменьшается по величине, т.е. изображение лампочки движется по направлению к линзе.

Скорость изображения в неподвижной системе отсчета

$$v_x = U_x + v_{0x} = -4v_0 + v_0 = -3v_0.$$



двигается по направлению к линзе со скоро-

Задача 4. Луч света падает под углом α на поверхность среды с показателем преломления, изменяющемуся по закону $n = n_0 + ky$, где n_0 и k – положительные постоянные; y – координата. Определите траекторию луча света в среде.

Решение. Для любой точки A , лежащей на траектории луча (см. рис.) можно записать:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \beta, \quad (1)$$

где β – угол преломления луча.

Из закона преломления света следует

$$\sin \alpha / \sin \beta = n.$$

Отсюда

$$\sin \beta = \sin \alpha / n, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}. \quad (2)$$

Подставим выражения (2) в (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Отсюда

$$dx = dy \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

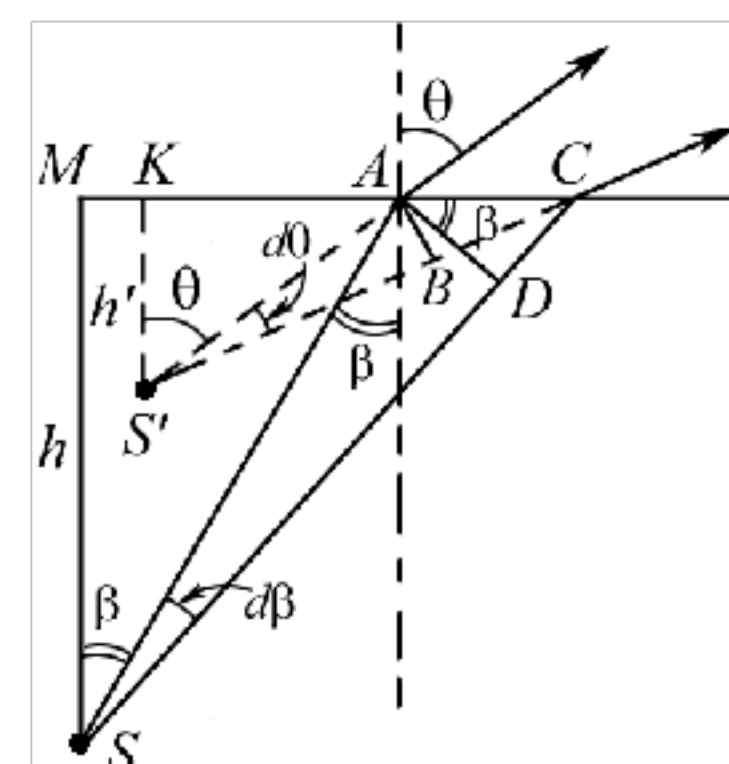
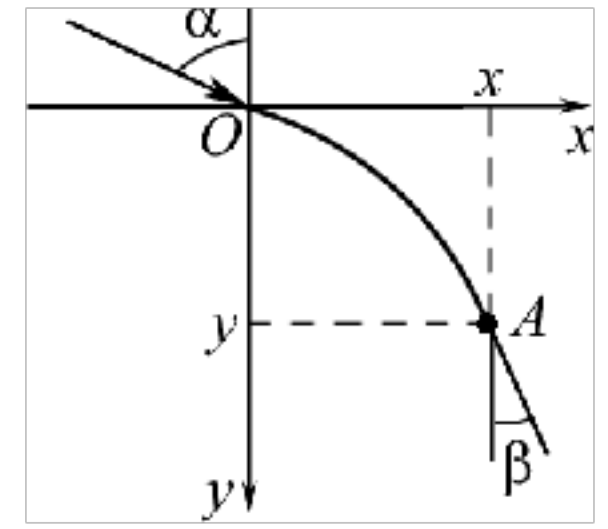
Интегрируя это уравнение, найдем траекторию луча

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} dy = \int_0^y \frac{\sin \alpha}{\sqrt{(n_0 + ky)^2 - \sin^2 \alpha}} dy = \\ &= \frac{\sin \alpha}{k} \ln \left[\left(\frac{n_0 + ky}{\sin \alpha} \right) + \sqrt{\frac{n_0 + ky}{\sin \alpha} - 1} \right] \Big|_0^y. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим:

$$X = \frac{\sin \alpha}{k} \ln \left[(n_0 + ky) + \sqrt{(n_0 + ky)^2 - \sin^2 \alpha} \right] + C,$$

где $C = -\frac{\sin \alpha}{k} \ln \left(n_0 + \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \alpha} \right).$



Задача 5. Две плосковыпуклые линзы, сложенные плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием F_1 . Найти фокусное расстояние F_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла $n_1=1,66$, воды $n_2=1,33$.

Дано:

В первом случае мы имеем двояковыпуклую линзу, оптическая сила которой определяется по формуле $n_1=1,66$

$$\Phi_1 = \frac{1}{F_1} = (n_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз.

Во втором случае к двум плосковыпуклым линзам добавляется третья линза (водяная) с вогнутыми поверхностями, с отрицатель-

ными радиусами кривизны R_1 и R_2 и оптической силой

$$\Phi = \frac{1}{F} = (n_{21} - 1) \cdot \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Здесь $n_{21} = n_2 / n_1$ – относительный показатель преломления.

Оптическая сила сложенных вплотную линз

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi \quad \text{или} \quad \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F} \quad (3)$$

Подставим в (3) выражение (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_2} &= \frac{1}{F_1} + (n_2 - 1) \cdot \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{F_1} - (n_2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \\ &= \frac{1}{F_1} - (n_2 - 1) \cdot \frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим в (4) левую часть (1):

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_1} \cdot \left(1 - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \right) = \frac{1}{F_1} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 - 1},$$

откуда
$$F_2 = \frac{n_1 - 1}{n_1 - n_2} \cdot F = \frac{1,66 - 1}{1,66 - 1,33} \cdot 10 = \frac{0,66}{0,33} \cdot 10 = 20 \text{ см.}$$

Вопросы и задания.

1. Закон прямолинейного распространения света в однородной среде.
2. Основные законы оптики.
3. Полное отражение.
4. Линзы. Формула линзы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $f = 1$ м лежит выпуклой стороной на стеклянной пластинке. Радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете $r_5 = 1,1$ мм. Определить длину световой волны λ .
2. Оптическая сила Φ объектива телескопа равна 0,5 дптр. Окуляр действует как лупа, дающая увеличение $\Gamma_1 = 10$. Какое увеличение Γ_2 дает телескоп?
3. Лупа дает увеличение $\Gamma = 2$. Вплотную к ней приложили собирающую линзу с оптической силой $\Phi_1 = 20$ дптр. Какое увеличение Γ_2 будет давать составная лупа?
4. Пределы аккомодации глаза близорукого человека без очков лежат между $a_1 = 16$ см и $a_2 = 80$ см. В очках он хорошо видит удаленные предметы. На каком минимальном расстоянии d он может держать книгу при чтении в очках? Считать расстояние наилучшего зрения $D = 25$ см.
5. Человек без очков читает книгу, располагая ее перед собой на расстоянии $a = 12,5$ см. Какой оптической силы Φ очки следует ему носить?
6. Главное фокусное расстояние f собирающей линзы в воздухе равно 10 см. Определить, чему оно равно: 1) в воде; 2) в коричневом масле.
7. Каково возможное наименьшее расстояние l между предметом и его действительным изображением, создаваемым собирающей линзой с главным фокусным расстоянием $f = 12$ см?
8. Луч света переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 . Показать, что если угол между отраженным и преломленным и преломленным лучами равен $\pi/2$, то выполняется условие $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{n_2}{n_1} (\varepsilon_1 - \text{угол падения})$.
9. Пучок параллельных лучей шириной a падает на толстую стеклянную пластину под углом $\varepsilon = 60^\circ$ и, преломляясь, переходит в стекло. Ширина a пучка в воздухе равна 10 см. Определить ширину b пучка в стекле.

10. Луч падает на толстую стеклянную пластинку толщиной $d = 30$ мм. Определить ширину b пучка в стекле.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Практическое занятие 15.

Тема занятия. Волновая оптика. Интерференция и дифракция света. Дисперсия и поляризация света.

Цель занятия. Изучить основы волновой оптики. Интерференцию и дифракцию света. Дисперсию и поляризацию света.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электромагнитная природа света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Оптическая длина пути и оптическая разность хода лучей. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Интерференция в тонких пленках. Интерференция многих волн. Дифракционная решетка. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса — Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Дифракция от щели. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и преломлении. Двойное лучепреломление. Нормальная и аномальная дисперсии. Электронная теория дисперсии света. Рассеяние света. Поглощение света. Связь дисперсии с поглощением. Спектры поглощения и цвета тел. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы волновой оптики применяется при решении инженерных задач.

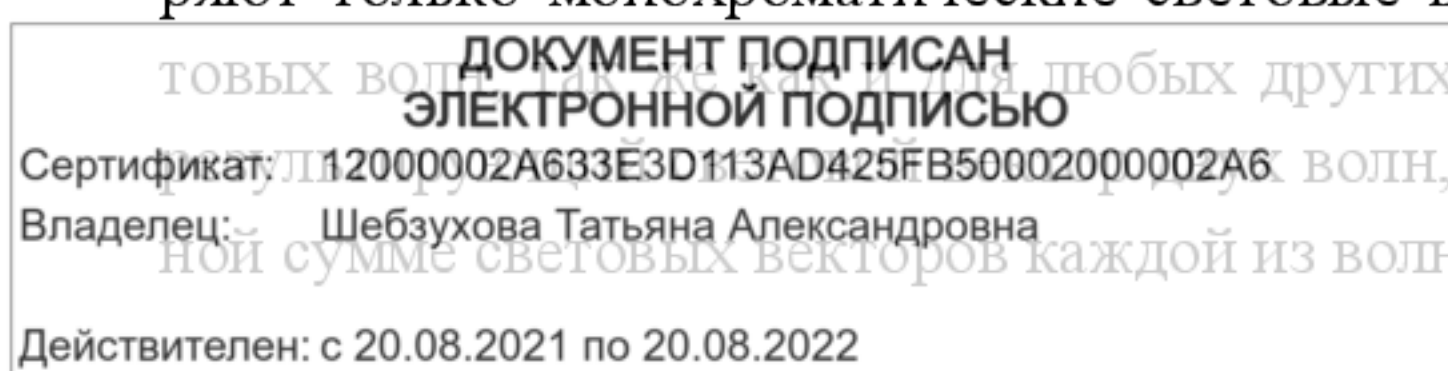
Теоретическая часть.

Интерференция света

В волновой оптике рассматриваются оптические явления, в которых проявляется волновая природа света (например, явления интерференции, дифракции, поляризации и дисперсии света). Свет представляет собой электромагнитные волны, в которых совершают колебания векторы электрической напряженности E и магнитной напряженности H . Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие свойства света вызываются колебаниями электрического вектора.

В соответствии с этим, в дальнейшем, говоря о световом векторе, будем подразумевать под ним вектор напряженности электрического поля E . *Явление интерференции света состоит в усилении или ослаблении колебаний, которое происходит в результате сложения двух или нескольких волн с одинаковыми периодами, распространяющихся в пространстве, и зависит от соотношения между фазами складывающихся колебаний.*

Необходимым условием интерференции волн является их когерентность, то есть равенство их частот и постоянная во времени разность фаз. Этому условию удовлетворяют только монохроматические световые волны, то есть волны одного цвета. Для световых волн справедлив принцип суперпозиции, то есть проходящих через одну точку, равен векторной сумме световых векторов каждой из волн в отдельности.



Амплитуда результирующего колебания находится путем геометрического сложения амплитуд исходных колебаний. Условия усиления или ослабления результирующего колебания обычно формулируются не через разность фаз $\Delta\varphi$, а через разность хода волн δ . Известно, что фазе $\varphi = \pi$, соответствует пройденный волновой путь, равный половине длины волны $\lambda/2$ (Рис.1). Тогда условие максимумов интерференции можно сформулировать следующим образом: максимальное усиление результирующего колебания наступает, если разность хода световых волн равна четному числу полуволен, или целому числу длин волн, то есть

$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

(1)

Аналогично формулируется условие минимумов: ослабление результирующего колебания будет, если разность хода слагаемых волн равна нечетному числу полуволен, то есть

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

(2)

где $k = 0, 1, 2, \dots$ называется порядком интерференционного максимума или минимума.

Решение задач на интерференцию света надо обязательно сопровождать рисунком,

указать в нем, какие лучи интерферируют. Следует различать путь геометрический и путь оптический. Если свет проходит в среде, показатель преломления которой относительно вакуума равен n , то оптическая длина его пути S связана с геометрической l следующим соотношением

$$S = nl \quad (3)$$

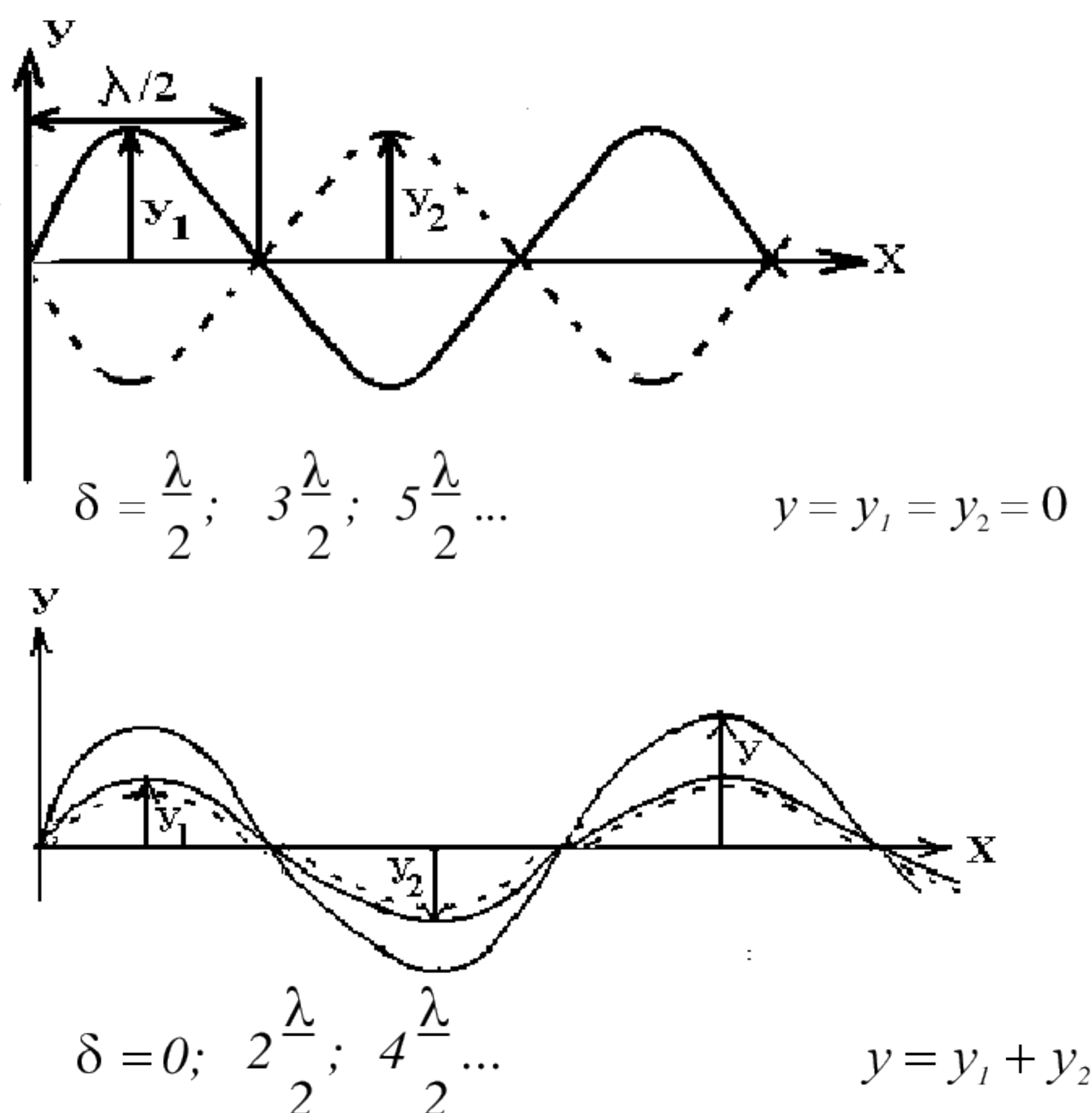


Рис. 1.

пузыри, радужная пленка нефти на воде, оксиды пленки на металлах и т.д. Допустим, что тонкую пленку толщиной d окружает воздух (рис.2). На нее под углом α к нормали падает параллельный пучок лучей, из которого можно выделить два луча 1 и 2 (рассматривается интерференция в отраженном и проходящем свете). Для разности хода этих лучей имеют место следующие выражения:

а) в отраженном свете: 2-ой луч, отражаясь в точке C от среды более плотной пленки «теряет» $\lambda/2$, поэтому разность хода

$$\delta = 2dncos d + \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}; \quad (4)$$

б) в проходящем же свете ни 1-ый, ни 2-ой лучи не имеют «потери» $\lambda/2$ и поэтому

$$\delta = 2dn \cos \gamma = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Рассматривая интерференцию света в тонких пленках, различают полосы равной толщины. Первые наблюдаются в тех случаях, когда на плоскопараллельную, тонкую пленку падает под разными углами α расходящийся (или сходящийся) пучок света. Интерференционную картину можно видеть на экране $\mathcal{E}$, установленном в фокальной плоскости собирающей линзы.

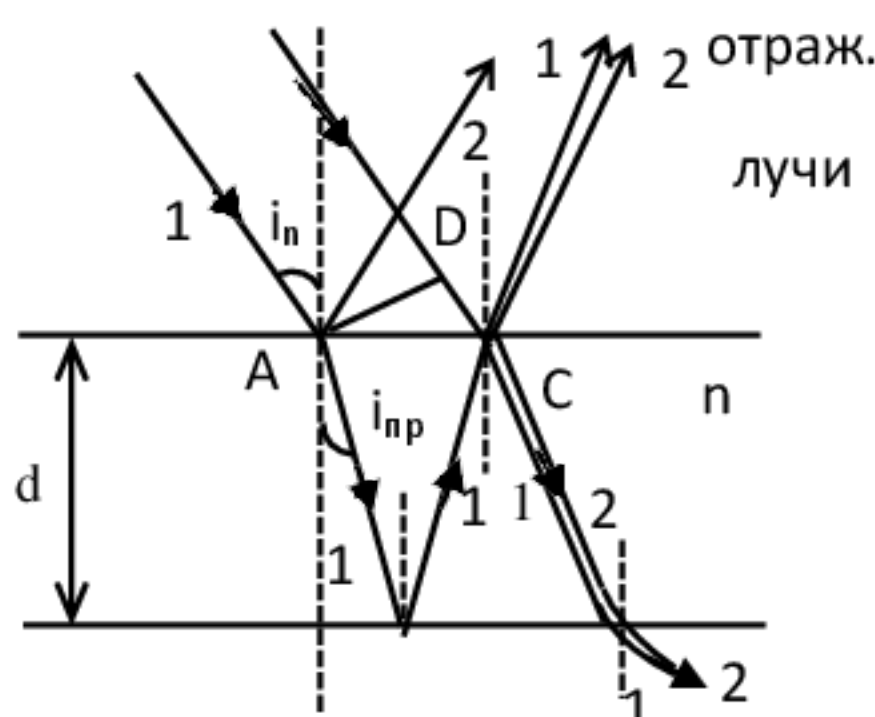


Рис. 2.

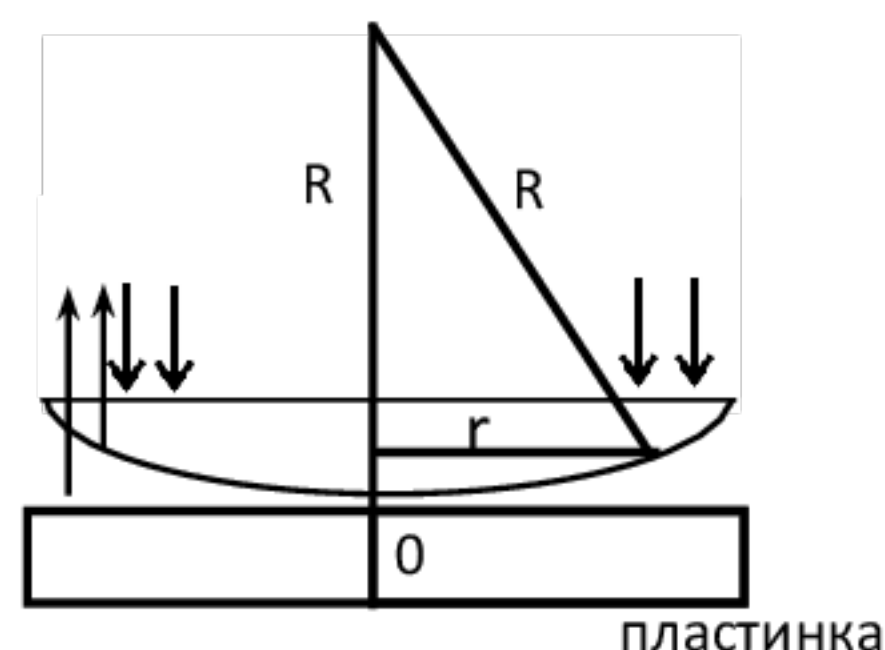


Рис. 3.

Результаты интерференции отраженного света в различных точках экрана зависят только от углов α падения на пленку. Интерференционные полосы в этом случае называются полосами равного наклона, так как они получаются в результате интерференции лучей, падающих на пленку под одним и тем же углом. Для разных полос углы падения различны.

Полосы равной толщины наблюдаются при отражении параллельного пучка лучей света ($d = \text{const}$) от тонкой прозрачной пленки, толщина d которой не одинакова в разных местах. Оптическая разность хода интерферирующих волн изменяется при переходе от одних точек на поверхности пленки к другим, в соответствии с изменением толщины d , так что условия интерференции одинаковы в точках, соответствующих одинаковым значениям d . При проектировании пленки на экран посредством линзы таким образом, чтобы

последняя оказывается покрытой полосами, равной толщине d пленки (рис.2). Эти полосы

Частным случаем полос равной толщины являются кольца Ньютона (рис.3). Плосковыпуклая линза с большим радиусом R кривизны выпуклой поверхности обращена этой поверхностью к плоской пластинке и соприкасается с ней в точке O . Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного промежутка между линзой и пластинкой. При наложении отраженных волн возникают интерференционные кольца равной толщины. Радиус k -того светлого кольца в отраженном свете (или темного в проходящем) равен

$$r_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\lambda}{2}R}. \quad (6)$$

Радиус k -того темного кольца в отраженном свете (или светлого в проходящем) равен

$$r_k = \sqrt{k\lambda R}, \quad (7)$$

где R – радиус кривизны линзы.

Дифракция света. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка. Дифракция рентгеновских лучей

Дифракцией называется отклонение света от прямолинейного распространения в однородной среде, когда свет, огибая препятствия, заходит в область геометрической тени. Дифракция света всегда сопровождается интерференцией дифрагированных лучей. Дифракция возникает в том случае, когда фронт волны не является безграничным, а частично экранирован. (Например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия). Проникновение световых волн в область геометрической тени может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн. Огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент (рис.1). Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис.2).

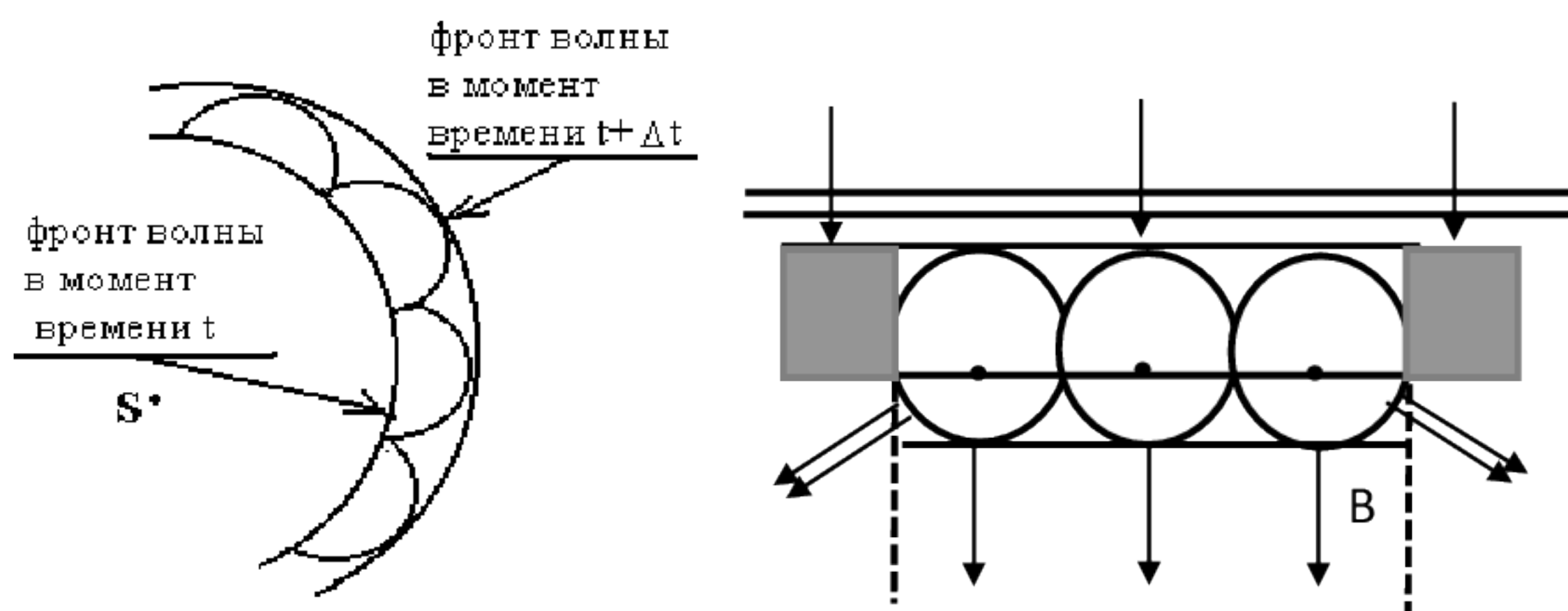


Рис. 2.

П

о
Гюй-
ген-
су
каж-
дая
точ-
ка
выде-
ляе-

ричных волн AB , можно убедиться в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени, огибая края преграды.

Принцип Гюйгенса не дает никаких сведений об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем. Последний впервые предположил, что все вторичные волны являются когерентными и поэтому могут интерферировать в любой точке пространства. Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет рассмотреть многие случаи дифракции света и дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытом. Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной от источника S (рис.3).

Разобьем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$. Это зоны Френеля. Колебания, приходящие в точку P от аналогичных точек двух соседних зон, находятся в противофазе, поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон отличаться по фазе на π . При небольшом числе k зон Френеля площади их примерно одинаковы, а высота сегмента $h_k \ll a$. Поэтому можно легко вывести радиус k -той зоны Френеля,

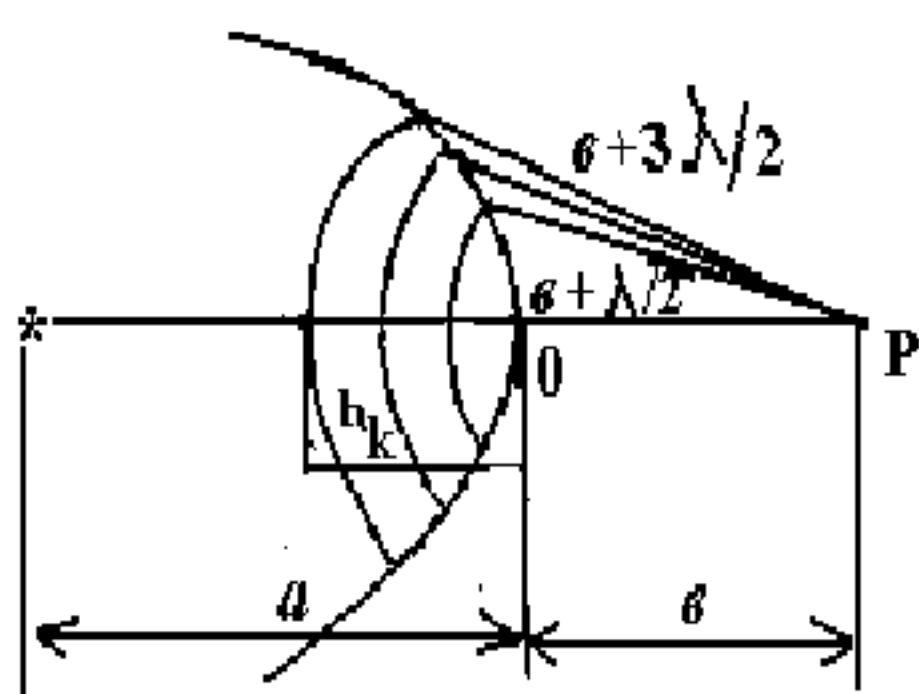


Рис.3

$$r_k = \sqrt{\frac{a \cdot b}{a + b}} k \lambda. \quad (8)$$

Расстояние r_k от зоны до точки P медленно растет с ростом номера зоны k , значит амплитуда A_k колебания, возбуждаемого k -той зоной в точке P монотонно убывает. Вследствие этого можно приближенно считать, что

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2} \quad \text{и} \quad A = \frac{A_1}{2}.$$

То есть амплитуда в точке P равна половине амплитуды центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, открывающим только центральную зону, то амплитуда в точке P будет равна A , а интенсивность света будет в четыре раза больше, чем при отсутствии преград между точками S и P .

Если же отверстие таково, что открывает две зоны Френеля, то амплитуды от этих зон (примерно одинаковые) придут в точку P в противофазе, и в ней будет наблюдаться минимум интенсивности света. Можно заключить, что, если в открытый фронт волны входит четное число зон Френеля, то наблюдается минимум интенсивности света, если k – нечетное, то в точке P наблюдается максимум интенсивности света.

Различают два случая дифракции света: дифракцию Френеля, или дифракцию в сходящихся лучах, и дифракцию Фраунгофера, или дифракцию в параллельных лучах. В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся за препятствием на конечном расстоянии от него. Во втором случае на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина

наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на щели. Пусть параллельный пучок монохроматического света падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана узкая щель шириной a (рис. 4). В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля все точки щели являются когерентными источниками света, колеблющимися в одной фазе.

Оптическая разность хода между крайними лучами MC и ND , идущими от щели в произвольном направлении φ

$$\delta = a \sin \varphi. \quad (9)$$

Разобьем щель MN на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру M щели. Все зоны в заданном направлении излучают свет совершенно одинаково. При интерференции света от каждой пары соседних зон амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как эти зоны вызывают колебания с одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами. Результат интерференции в точке B определяется тем, сколько зон Френеля укладывается в щели. Если число зон четное, то есть

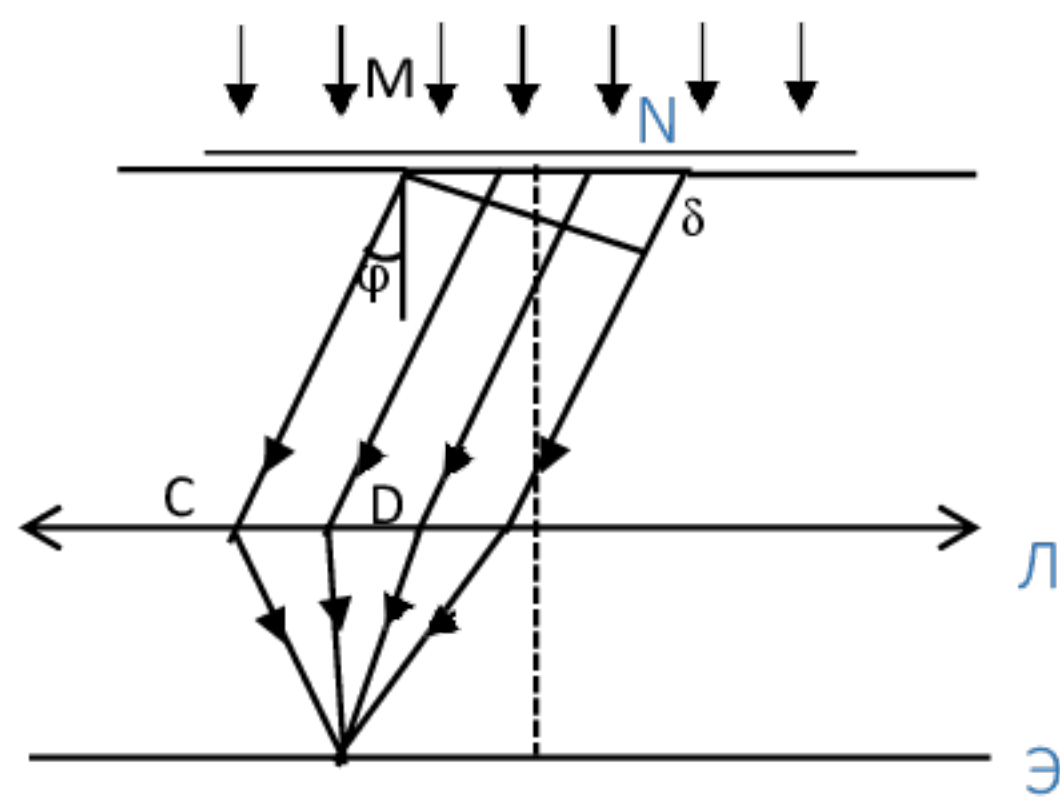


Рис. 4.

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

то наблюдается дифракционный минимум.

Если число зон нечетное, то есть

$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (11)$$

то наблюдается дифракционный максимум.

Величина k называется порядком дифракционного максимума (или минимума).

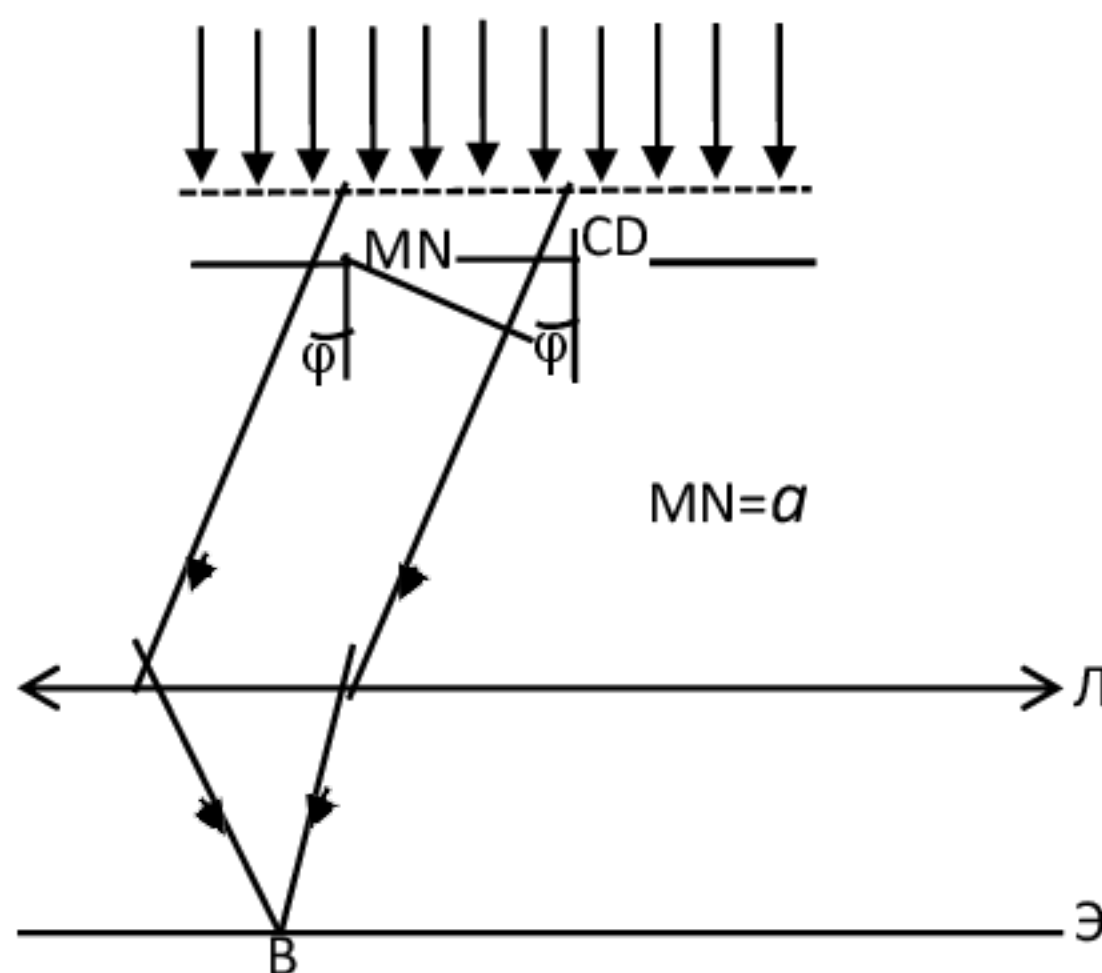


Рис. 5.

си-
фрак-

ковой ширины непрозрачными промежутками. Общая ширина промежутка и щели называется постоянной (или периодом решетки), то есть $d = a + e$.

Дифракционная картина от решетки сложнее, чем от одной щели, потому, что свет от разных щелей также интерферирует. Если на решетку нормально к ее поверхности падает свет с длиной волны λ , то (рис.5) лучи, идущие под углом φ к первоначальному направлению от соответствующих точек каждой щели, обладают разностью хода

$$\delta = d \sin \varphi.$$

Если эта разность хода равна целому числу длин волн, то наблюдается максимум интерференции. Условия главных максимумов для решетки записываются в виде

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Как следует из формулы, если на решетку падает белый свет, то для более коротких волн условие максимума выполняется при меньших углах.

Разрешающая способность R дифракционной решетки, то есть способность ее представить раздельно две спектральные линии, определяется по формуле

$$R = kN, \quad (13)$$

где N – общее число штрихов дифракционной решетки, k – порядок дифракционного максимума.

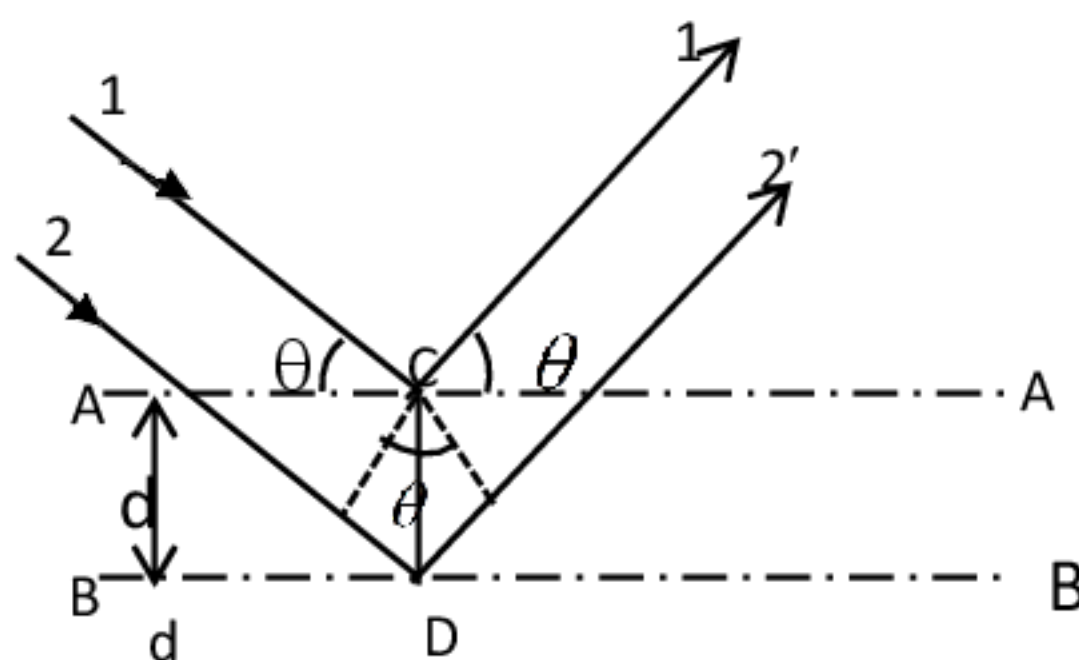


Рис.6.

Для наблюдения дифракционной картины необходимо, чтобы постоянная решетки была того же порядка, что и длина волны падающего света. Поэтому для рентгеновского излучения в качестве дифракционных решеток можно использовать кристаллы, поскольку расстояние между атомами в кристаллах одного порядка с $\lambda_{\text{рент. изл.}}$ ($\approx 10^{-12} - 10^{-8}$ м).

Дифракцию рентгеновского излучения можно рассматривать как результат его отражения от системы параллельных сетчатых плоскостей кристалла, то есть плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решетки. Это отражение, в отличие от обычного, осуществляется лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют интерференционным максимумам для лучей, отраженных от разных плоскостей.

Абсолютный показатель преломления всех сред для рентгеновского излучения близок к единице, поэтому оптическая разность хода между двумя лучами 1' и 2', отражающимися от плоскостей AA' и BB' равна (рис.6)

$$2 d \sin \theta, \quad (14)$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
наблюдаются в тех направлениях, в которых
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

где d – межплоскостное расстояние, θ – угол скольжения. Дифракционные максимумы все отраженные атомными плоскостями вол-

ны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют условию Вульфа-Брэггов

$$\delta = 2 d \sin \theta = m\lambda, (m = 1, 2, 3 \dots). \quad (15)$$

Поляризация света. Двойное лучепреломление.

Вращение плоскости поляризации

Обычные источники света испускают естественный свет, то есть свет, в котором имеются колебания светового вектора, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис. 7).

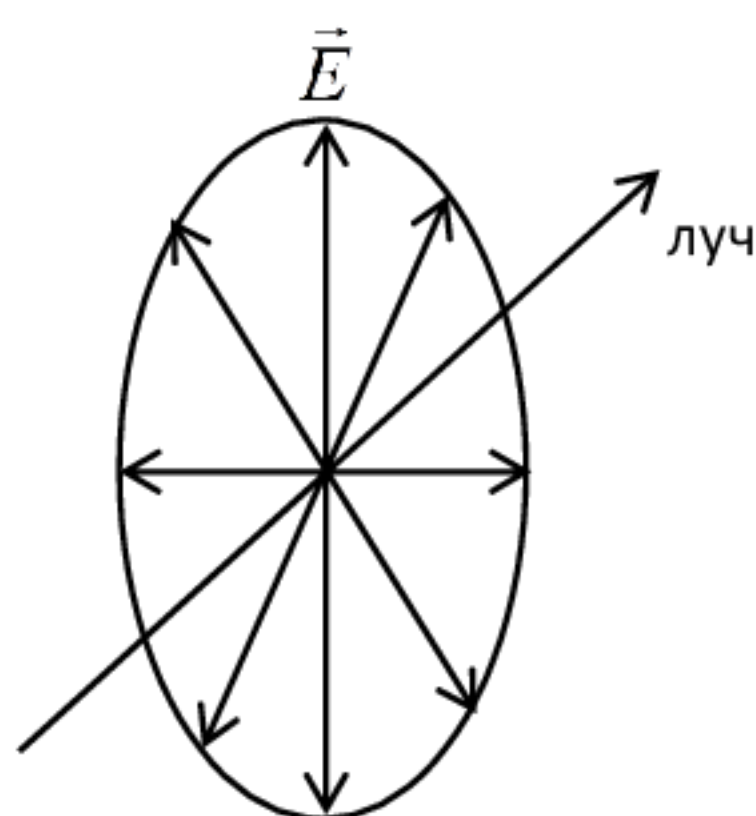


Рис. 7.

Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около 10^{-8} с. За это время успевает образоваться последовательность горбов и впадин (или, как говорят, цуг волн), протяженностью примерно 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно вспыхивает множество атомов. Возбуждаемые ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для каждого цуга ориентирована случайно. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений равновероятны. В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Свет, в котором направления колебаний светового вектора E упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, свет называется плоско - (или линейно) поляризованным. Упорядоченность может заключаться еще и в том, что вектор E поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате, конец вектора E описывает или эллипс (эллиптически поляризованный свет) или окружность (поляризованный по кругу свет). *Плоскость, в которой колеблется световой вектор E , называется плоскостью колебаний, а перпендикулярная ей плоскость называется плоскостью поляризации.*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Плоскость колебаний светового вектора E упорядочена каким-либо образом, называется поляризованным. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, свет называется плоско - (или линейно) поляризованным. Упорядоченность может заключаться еще и в том, что вектор E поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате, конец вектора E описывает или эллипс (эллиптически поляризованный свет) или окружность (поляризованный по кругу свет). Плоскость, в которой колеблется световой вектор E , называется плоскостью колебаний, а перпендикулярная ей плоскость называется плоскостью поляризации.

получить с помощью различных устройств, пропускают свободно колебания, параллельные плоскости поляризатора, и полностью задерживают

колебания, перпендикулярные этой плоскости. Поляризованный свет можно получить также при отражении от диэлектрика. Как показывает опыт, отраженный и преломленный лучи всегда частично поляризованы. Степень поляризации зависит от угла падения и показателя преломления.

Изучая это явление, Брюстер установил, что при определенном значении угла падения отраженный луч полностью линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. При этом отражается только та компонента вектора напряженности электрического поля, которая параллельна поверхности диэлектрика (условно эту компоненту обозначаем точками, то есть колебания E происходят перпендикулярно плоскости чертежа). Преломленный луч поляризован лишь частично. Угол падения, при котором отраженный луч полностью поляризован, называется углом Брюстера (рис.8) и определяется соотношением

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (17)$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления

сред. При этом угол между отраженным и преломленным лучами равен 90° .

Действия различного типа поляризаторов основаны на законе Брюстера, либо на явлении двойного лучепреломления, которое состоит в

том, что в оптически анизотропных кристаллах

луч света, падающий на поверхность кристалла, раздваивается в нем на два преломленных луча

(рис. 9). Один из них лежит в плоскости падения, подчиняется законам преломления света и называется обыкновенным лучом (о). Второй не удовлетворяет этим условиям и называется необыкновенным (е). Двойное лучепреломление свидетельствует о том, что падающая на оптически анизотропный кристалл световая волна возбуждает

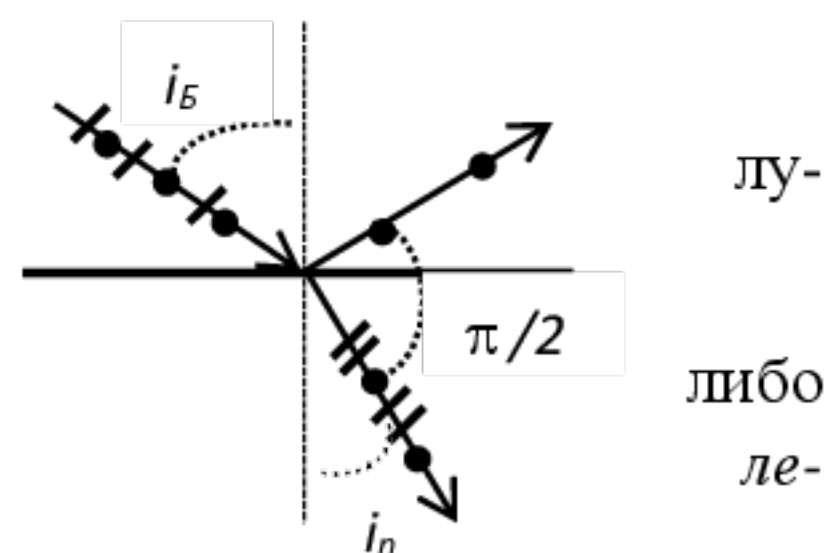


Рис. 8.

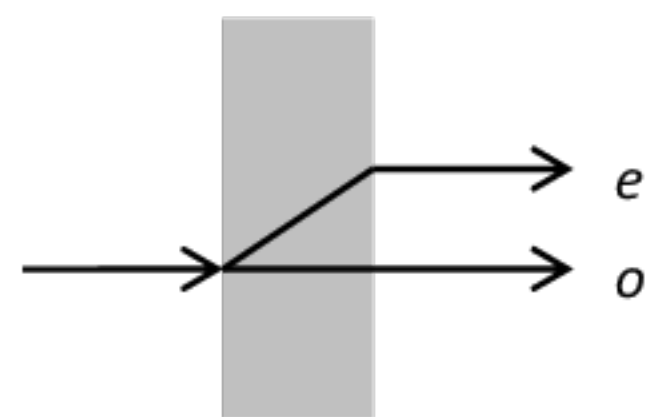


Рис. 9.

две волны, распространяющиеся в кристалле по различным направлениям. Обыкновенная и необыкновенная волны линейно поляризованы. Направления векторов E в этих волнах условно показывают точками на обыкновенном луче и черточками на необыкновенном. В одноосном кристалле скорость обыкновенного луча v_0 численно одинакова по всем направлениям: $v_0 = C / n_0$, где n_0 – показатель преломления кристалла для обыкновенного луча. Соответственно, для необыкновенного луча: $v_e = C / n_e$. Значения n_e и v_e зависят от направления необыкновенного луча по отношению к оптической оси кристалла (это направление в кристалле,

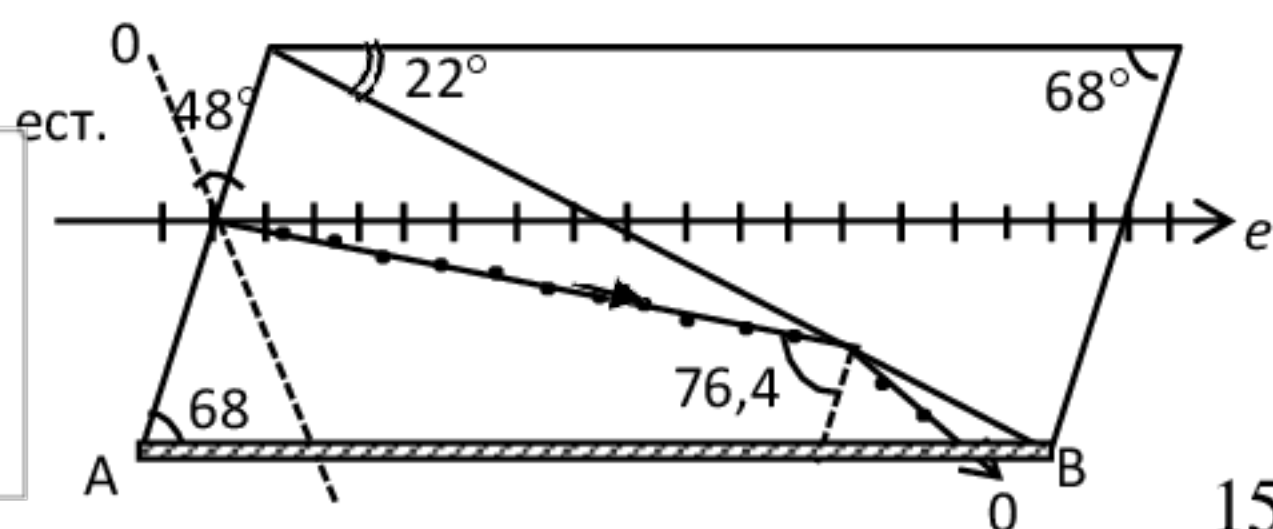


Рис. 10.

нящегося вдоль оптической оси, $n_e = n_0$, $v_e = v_0$.

Примером поляризации может служить призма Николя (рис.10). Она вырезается из кристалла исландского шпата, и в поперечном сечении имеет форму ромба. По плоскости СВ кристалл разрезан и склеян канадским бальзамом.

Обыкновенный луч o полностью отражается от него и поглощается зачерненной поверхностью АВ. Из призмы Николя выходит только необыкновенный луч e , который поляризован в плоскости, параллельной главной плоскости призмы. *Устройства, служащие для анализа степени поляризации света, называются анализаторами.*

Ими могут служить те же призмы Николя. Всякий анализатор можно условно изобразить в виде решетки, прутья которой параллельны направлению колебаний светового вектора E_a в проходящем сквозь нее свете (рис.11). Если на такую решетку-анализатор падает естественный луч, то интенсивность I_a проходящего света не изменится при повороте анализатора. Это происходит вследствие

того, что в естественном свете ни одно из направлений плоскости колебаний не является преобладающим. Если на анализатор падает линейно поляризованный свет, полученный с помощью поляризатора и имеющий интенсивность I_p , то интенсивность света, прошедшего через анализатор будет зависеть от угла α между главными плоскостями поляризации анализатора ($a - a$) и поляризатора (P-P) (рис. 12). E_p - амплитуда вектора колебаний света,

прошедшего через поляризатор. На входе в затор луч разложится на два луча, поляризованные в главной плоскости анализатора ($a - a$) и перпендикулярной к ней плоскости

$$E_1 = E_p \sin \alpha; E_2 = E_p \cos \alpha$$

Первый луч поглотится в анализаторе, второй пройдет через него

$$E_a = E_p \cos \alpha.$$

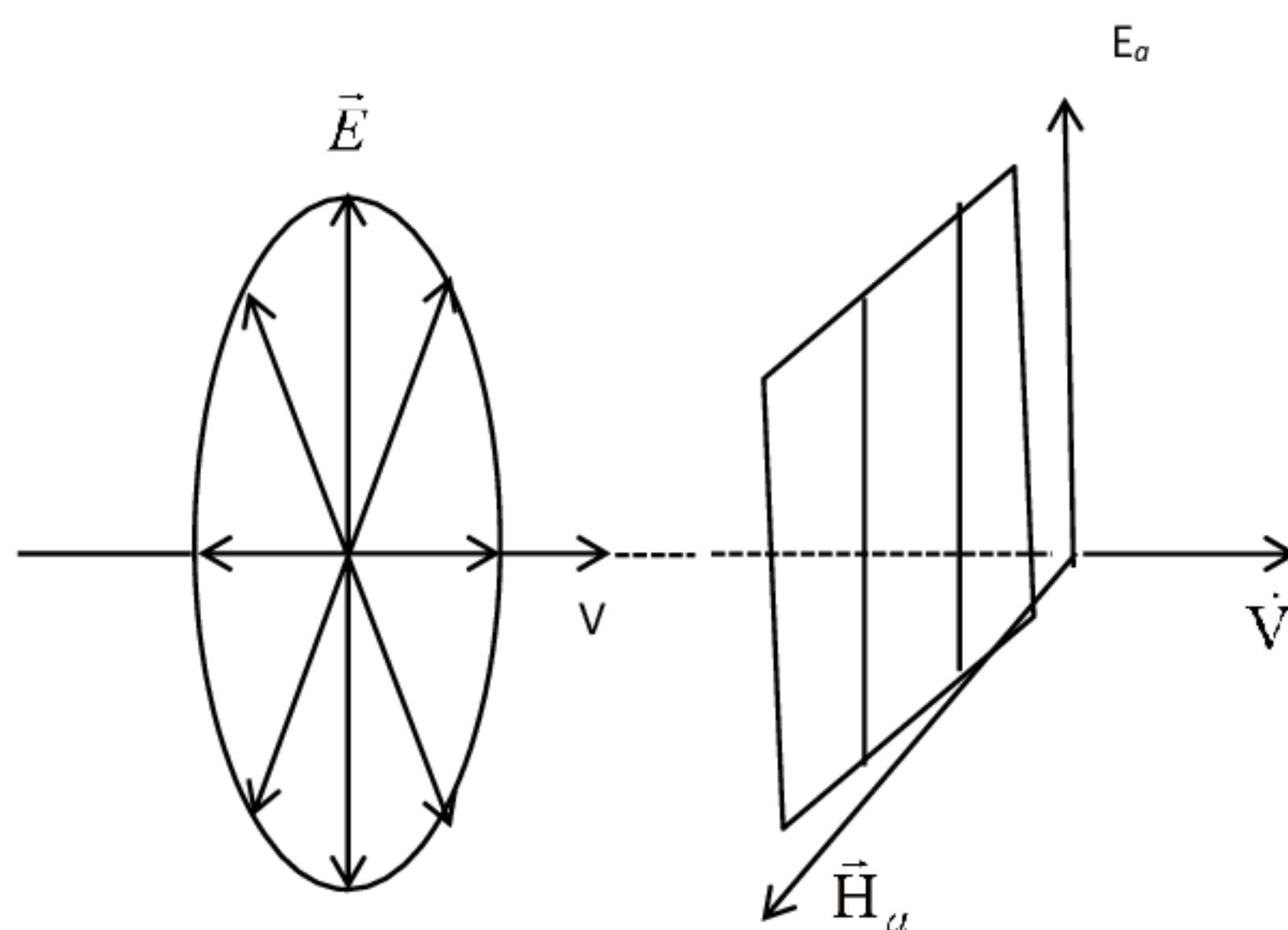


Рис.11

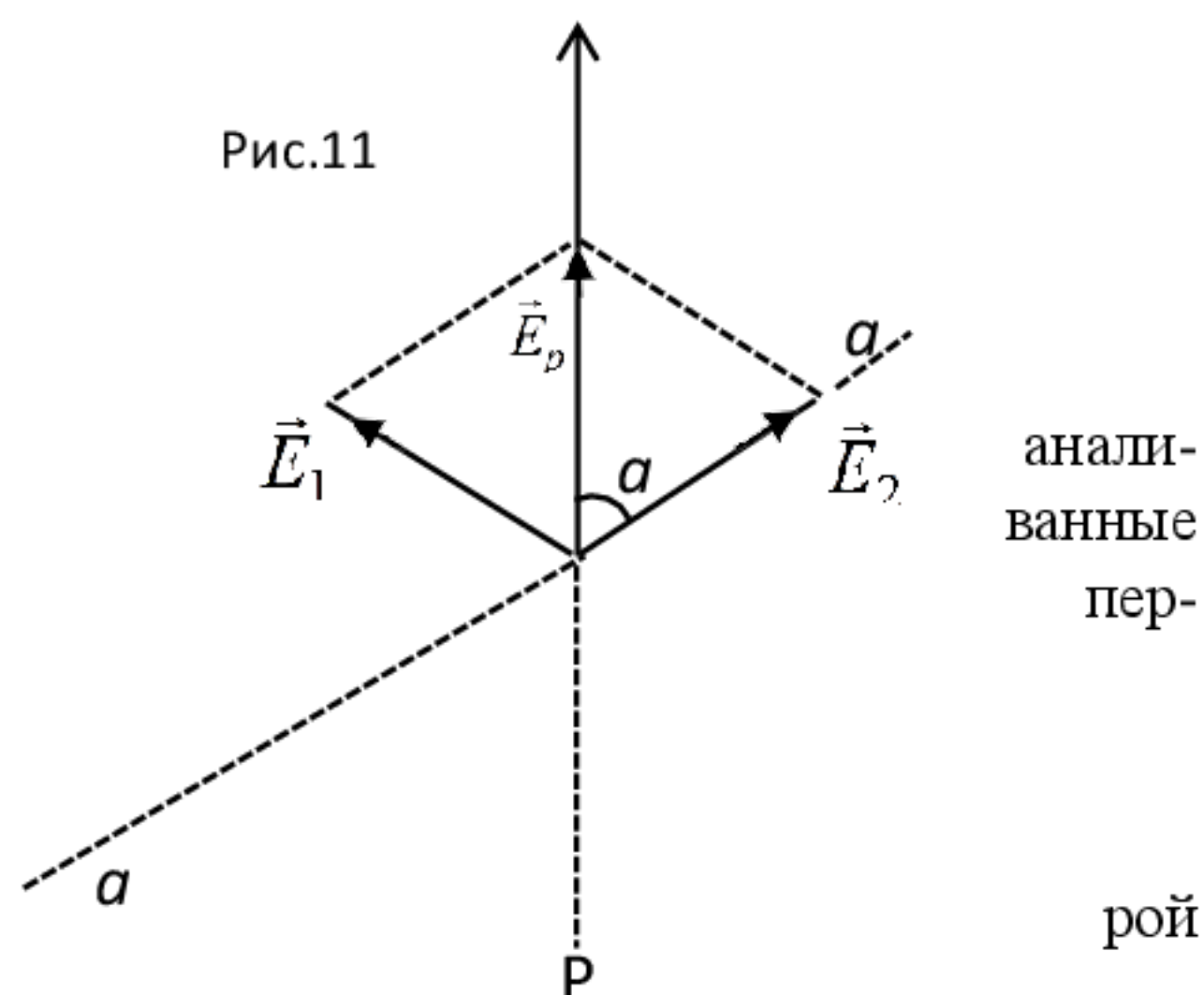


Рис. 12.

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через анализатор и поляризатор, меняется в зависимости от угла α по закону Малюса

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha \quad (18)$$

Если $I_{ест}$ - интенсивность естественного света, то из поляризатора выходит плоскополяризованный свет, интенсивность которого

$$I_P = \frac{1}{2} I_{ест}.$$

Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора

$$I_a = \frac{1}{2} I_{ест} \cos^2 \alpha.$$

Откуда $I_{\max} = \frac{1}{2} I_{ест}$ (поляризаторы параллельны) и $I_{\min} = 0$ (поляризаторы скрещены).

Формулы приведены без учета потерь интенсивности. Некоторые растворы (например, раствор сахара) и твердые вещества (в частности кварц) обладают свойством вращать плоскость поляризации поляризованного луча. Угол φ поворота плоскости поляризации зависит от пути луча в этих веществах l и концентрации раствора C .

Для твердых веществ

$$\varphi = [\alpha] l. \quad (19)$$

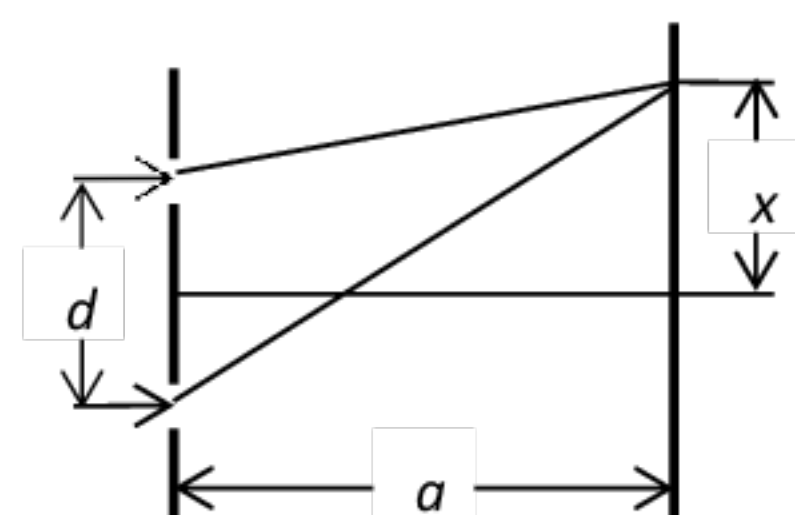
Для растворов

$$\varphi = [\alpha] l C, \quad (20)$$

где $[\alpha]$ – удельный угол вращения (постоянная вращения), показывающий, на какой угол повернется плоскость поляризации, если $l = 1$ и $C = 1$ (для растворов). Размерность $[\alpha]$ зависит от того, в каких единицах взяты l и C в СИ. $[\alpha]$ – рад/м (для твердых веществ) для растворов $[\alpha] = \text{рад/м} \cdot (\text{кг/м}^3)$.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы $x = 0,05$ см. Данные установки $a = 5$ м, $d = 0,5$ см.



Дано:

$$x = 0,05 \text{ см}$$

$$a = 5 \text{ м}$$

$$d = 0,5 \text{ см}$$

Решение. Разность хода лучей, прошедших в точку наблюдения равна

$$\delta = r_2 - r_1; \quad (1)$$

$$r_2^2 = a^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2; \quad (2)$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

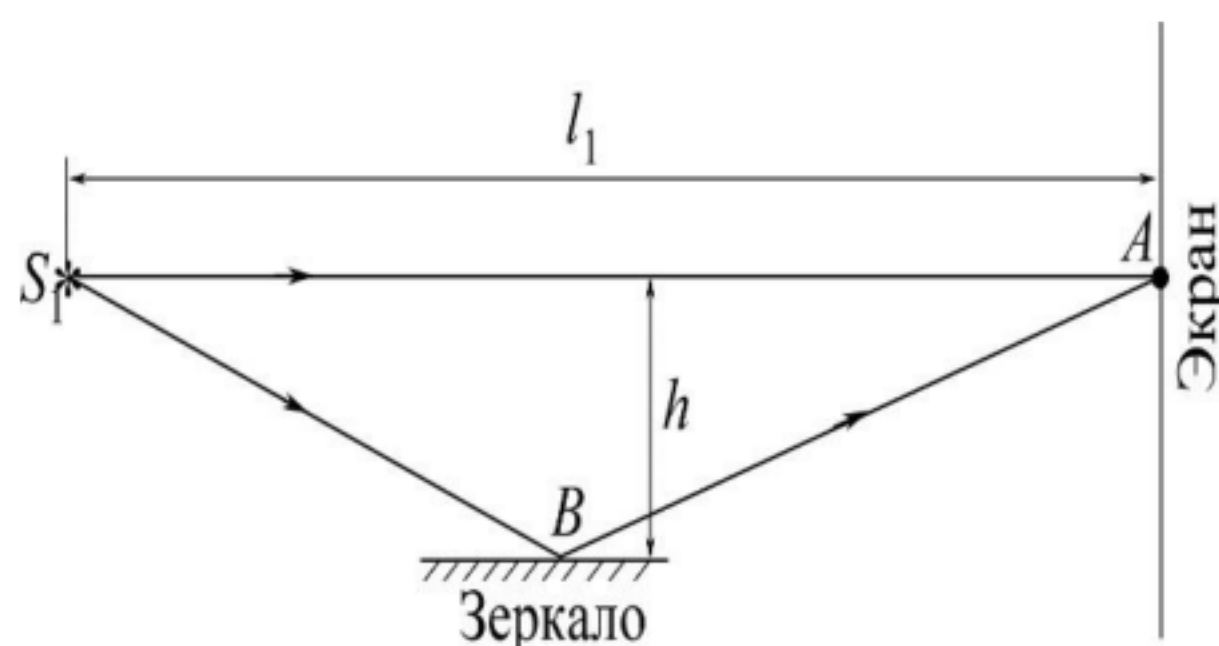
$$r_1^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + a^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{a} = m\lambda. \quad (4)$$

По условию задачи $m = 1$, поэтому

$$\lambda = \frac{xd}{a} = 500 \text{ нм}.$$



Задача 2. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ приходит два луча: непосредственно от источника перпендикулярный экрану луч S_1A и луч S_1BA , отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A . Расстояние l_1 равно 1 м, расстояние h равно 2 мм. Определите, что будет наблюдаться в точке A экрана – усиление или ослабление освещенности.

Дано:

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм}$$

$$l_1 = 1 \text{ м}$$

$$h = 2 \text{ мм}$$

min, max - ?

Решение: Источник S_1 и мнимый S_2 являются когерентными, поэтому на экране возникает интерференционная картина. Максимум или минимум возникает в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода δ интерферирующих лучей

$$m = \frac{2\delta}{\lambda}. \quad (1)$$

Если m – целое четное число, то имеем максимум, если m – целое нечетное, то минимум.

Оптическая разность хода δ_1 будет складываться из геометрической разности $l_2 - l_1$

(оба луча проходят в воздухе) разности $\lambda/2$, обусловленной изменением среды, оптически более плотной. Таким образом

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$\delta_1 = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

По теореме Пифагора $l_2^2 = l_1^2 + (2h)^2$, $(l_2 - l_1) = \frac{(2h)^2}{2l_1}$, так как

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1), \text{ где } l_2 + l_1 \approx 2l_1, 2h \ll l.$$

Подставив это выражение $l_2 - l_1$ в формулу (2), найдем:

$$\delta_1 = \frac{(2h)^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Зная δ_1 , можно по формуле (1) найти m_1 :

$$m_1 = \frac{\frac{(2h)^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}}{\lambda/2} = \frac{(2h)^2}{l_1\lambda} + 1.$$

Тогда окончательно получим

$$m_1 = 4 \frac{h^2}{l_1\lambda} + 1.$$

Выразим h , l_1 и λ в микрометрах и вычислим:

$$m_1 = 4 \frac{(2 \cdot 10^3)^2}{1 \cdot 10^6 \cdot 0,5} + 1 = 32 + 1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается максимальное ослабление освещенности.

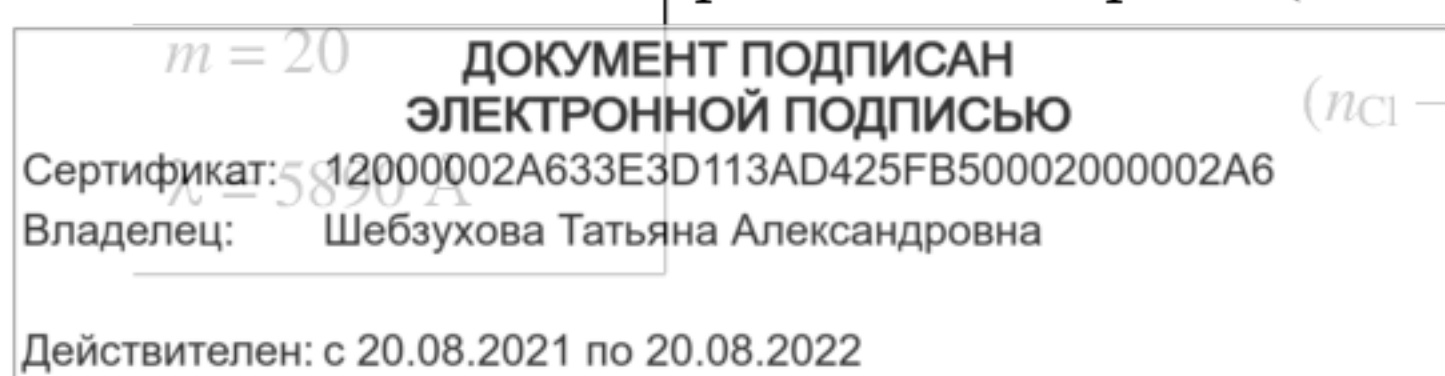
Задача 3. На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной $l = 2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на $m = 20$ полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения производятся со светом линии D натрия ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$). Принимая показатель преломления воздуха $n = 1,000276$, вычислите показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

Дано:

$$l = 2 \text{ см}$$

Решение. Легко догадаться, что разность хода лучей при усилении света по определению равна $m\lambda$. В данном случае оптическая разность хода равна $(n_{\text{Cl}} - n)l$. Из полученного равенства находим

$$(n_{\text{Cl}} - n)l = m\lambda \quad (1)$$



$$n_1 = 1,000276$$

$$n_{cl} - ?$$

$$n_{cl} = n + \frac{m\lambda}{l}. \quad (2)$$

Вычисляя, получаем $n_{cl} = 1,000865$.

Задача 4. На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, коэффициент преломления вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света ($\lambda = 0,6$ мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определите толщину пленки.

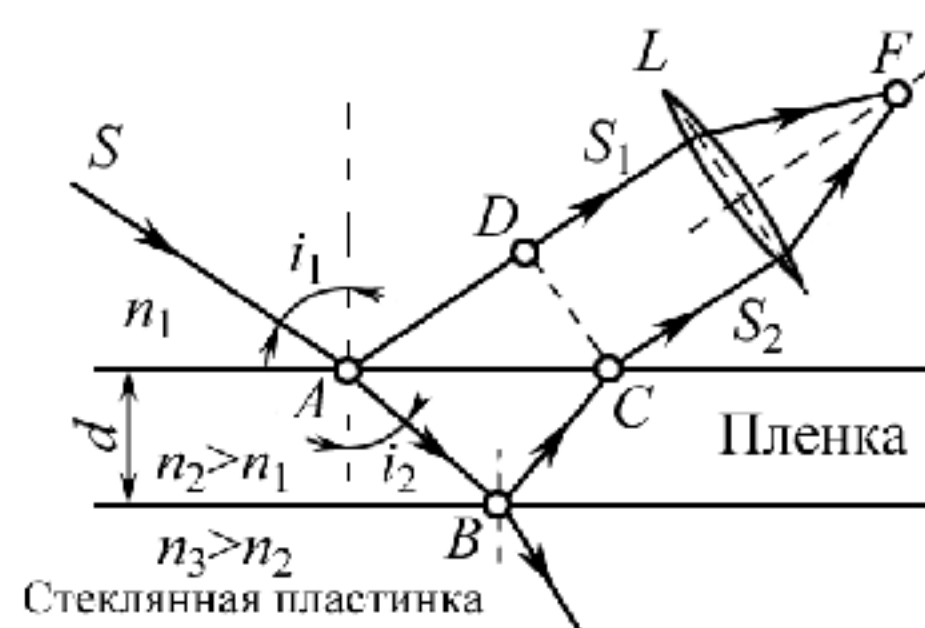
Дано:

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм}$$

$$n_2 = 1,4$$

$$d - ?$$

Решение. В точках A и B падающий луч SA отражается и частично преломляется. Отраженные лучи AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу L , пересекаются в ее



фокусе F и интерферируют между собой.

Показатель преломления воздуха ($n_1 = 1,0029$) меньше показателя преломления вещества пленки ($n_2 = 1,4$), который в свою очередь меньше показателя преломления стекла ($n_3 = 1,5$). В обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной.

Следовательно, никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого луча не происходит.

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Как видно из рисунка, оптическая разность хода

$$\delta = (AB + BC) n_2 - ADn_1.$$

Следовательно,

$$(AB + BC) n_2 - ADn_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Если угол падения i_1 будет уменьшаться, то в пределе при $i_1 = 0$ будем иметь

$$\delta = 2dn_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

откуда искомая толщина пленки

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим возможные значения толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0,6}{4 \cdot 1,4} = 0,11 \text{ мкм};$$

$$d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0,33 \text{ мкм}.$$

Задача 5. Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, обычно темный, а в проходящем светлый?

Решение. В проходящем свете на границе стекло-воздух вектор напряженности электрического поля E не испытывает изменения фазы, а при отражении на границе воздух – стекло меняет фазу на 180° , что соответствует приобретению разности хода, равной половине длины волны.

Задача 6. На дифракционную решетку от разрядной трубки, наполненной гелием, нормально падает пучок света. На какую линию λ_1 (в нанометрах) в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия длиной волны $\lambda_2 = 706 \text{ нм}$ в спектре второго порядка?

Дано:

$$k_1 = 3$$

$$k_2 = 2$$

$$\lambda_2 = 706 \text{ нм}$$

$$\lambda_1 = ?$$

Решение: Условия главных максимумов освещенности для дифракционной решетки выглядит следующим образом:

$$d \sin \varphi_1 = k_1 \lambda_1; \quad d \sin \varphi_2 = k_2 \lambda_2$$

Спектральные линии накладываются одна на другую, поэтому углы дифракции будут равными, то есть $\varphi_1 = \varphi_2$. Разделив первое уравнение на второе:

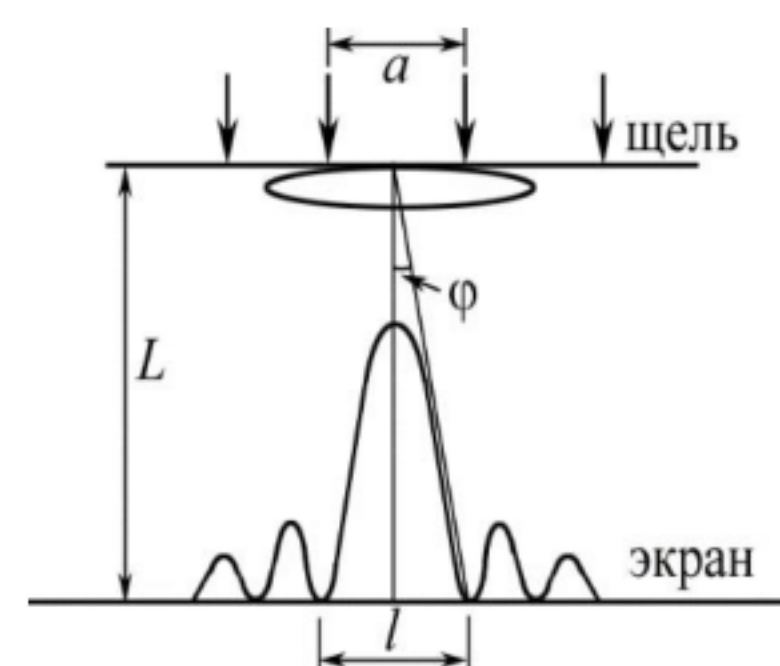
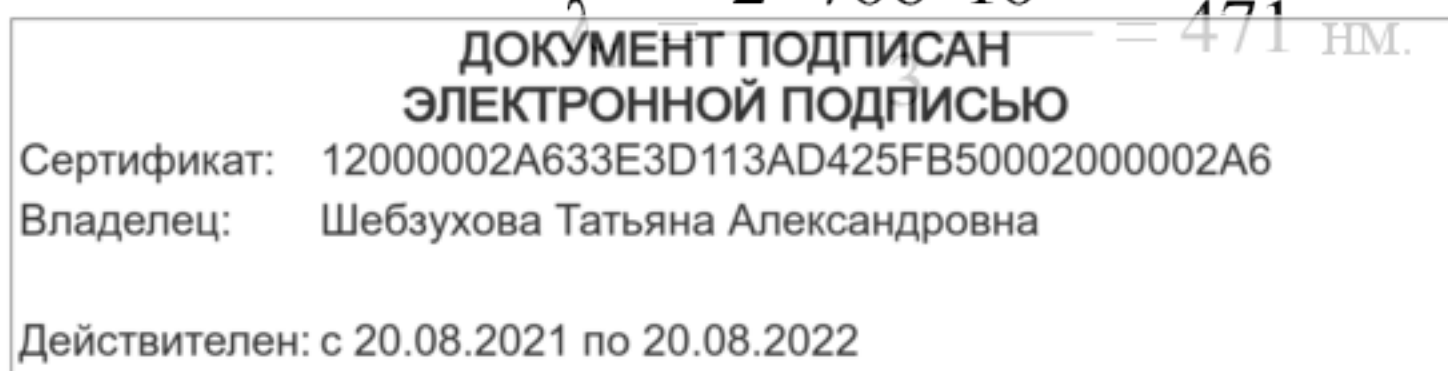
$$k_1 \lambda_1 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_1},$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_1}$$

Подставим численные значения:

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 706 \cdot 10^{-9}}{3} = 471 \text{ нм}.$$



Задача 7. На щель (рис.) шириной $a = 0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1$ м.

Дано:	Решение: Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева максимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной
$a = 0,1$ мм	
$\lambda = 0,6$ мкм	
$L = 1$ м	расстоянию между двумя минимумами интенсивности (рис.).
$l = ?$	

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ , определяемыми условием

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (1)$$

где k – порядок минимума. В нашем случае $k = 1$.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по рисунку: $l = 2L \tan \varphi$. При малых углах $\tan \varphi \approx \sin \varphi$, тогда

$$l = 2L \sin \varphi. \quad (2)$$

Выразим $\sin \varphi$ из уравнения (1) и подставим в равенство (2):

$$l = \frac{2Lk\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{10^{-4}} \text{ м} = 1,2 \cdot 10^{-2} = 1,2 \text{ см}.$$

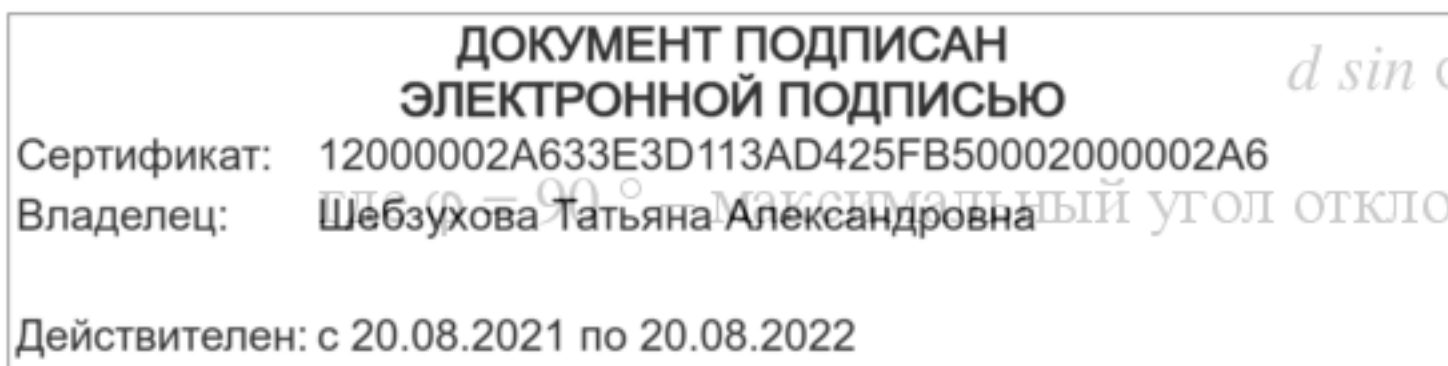
Задача 8. Дифракционная решетка содержит $n = 200$ штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

Дано:	Решение: Период дифракционной решетки найдем из формулы
$\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м	$n = 1 / d.$
$n = 200$ мм ⁻¹	
$k_{\max} = ?$	Отсюда $d = 1 / n = 1 / 2 \cdot 10^5 = 0,5 \cdot 10^{-5}$ м.

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение $k_{\max}$, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° . Постоянная решетки d , длина волны λ и угол отклонения φ , соответствующий k -му дифракционному максимуму, связаны соотношением:

$$d \sin \varphi = k \lambda,$$

где $\varphi = 90^\circ$ – максимальный угол отклонения лучей решеткой. Отсюда



$$k_{\max} = d \sin \varphi / \lambda = 0,5 \cdot 10^{-5} / 0,6 \cdot 10^{-6} = 8,3.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 9, так как при этом значении $\sin \varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $k_{\max} = 8$.

Задача 9. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta \varphi = 20^\circ$. Определите длину волны света λ .

Дано:	Решение: Период дифракционной решетки найдем из формулы
$n = 100 \text{ мм}^{-1}$	$n = 1 / d.$
$\Delta \varphi = 20^\circ$	Отсюда
$k = 3$	
$\lambda - ?$	$d = 1 / n = 1 / 10^5 = 10^{-5} \text{ м}.$

Максимумы интенсивности света одного порядка при дифракции на дифракционной решетке находятся на одинаковом расстоянии от центрального максимума и, следовательно, наблюдаются под одинаковыми углами дифракции φ :

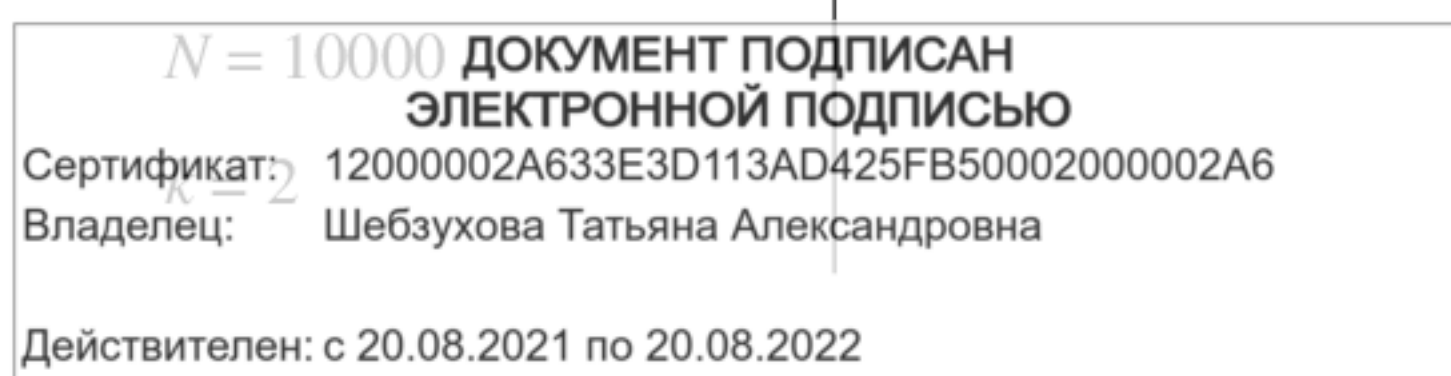
$$d \sin \varphi = k \lambda. \quad (1)$$

По условию задачи, чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta \varphi = 20^\circ$. Следовательно, угол дифракции $\varphi = \Delta \varphi / 2 = 10^\circ$. Тогда из уравнения (1) длина волны света равна

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{k} = \frac{10^{-5} \cdot \sin 10^\circ}{3} = 0,0578 \cdot 10^{-5} \approx 580 \text{ нм}.$$

Задача 10. Свет с $\lambda = 589$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,5$ мкм, содержащую $N = 10000$ штрихов. Найдите угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

Дано:	Решение: Угловая дисперсия дифракционной решетки, состоящей из одной щели:
$\lambda = 589 \text{ нм}$	
$d = 2,5 \text{ мкм}$	$D = \frac{\delta \theta}{\delta \lambda} = \frac{k}{d \cos \theta}.$



$\Delta\theta - ?$

Тогда угловая ширина дифракционного максимума, создаваемого решеткой, содержащей N штрихов:

$$\Delta\theta = \frac{k\lambda}{Nd \cos\theta} = \left[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \right] = \frac{k\lambda}{Nd \sqrt{1 - \sin^2\theta}}.$$

Свет падает на дифракционную решетку нормально. Условие главных максимумов:

$$d \sin\theta = k\lambda.$$

Отсюда $\sin\theta = \frac{k\lambda}{d}$. Тогда угловая ширина дифракционного максимума второго порядка будет равна:

$$\Delta\theta = \frac{k\lambda}{Nd \cos\theta} = \frac{k\lambda}{Nd \sqrt{1 - \left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2}}.$$

Подставим численные значения:

$$\Delta\theta = \frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 11'$$

Задача 11. С помощью дифракционной решетки с периодом $d = 20$ мкм требуется разрешить дублет натрия ($\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине решетки это возможно?

Дано:

$$d = 20 \text{ мкм}$$

$$\lambda_1 = 589 \text{ нм}$$

$$\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$$

$$k = 2$$

$$l - ?$$

Решение: Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN, \text{ где } N - \text{число штрихов решетки.}$$

Число штрихов решетки можно найти, зная длину

решетки l и период решетки d : $N = \frac{l}{d}$.

Тогда

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = k \frac{l}{d}.$$

Отсюда наименьшая длина решетки, при которой возможно разрешить дублет

натрия:

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$l = \frac{d\lambda}{k\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,6 \cdot 10^{-9} \text{ м}$, а $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 589,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$.

Тогда

$$l = \frac{d\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 589,3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}} \text{ м} = 982 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 10 \text{ мм}.$$

Задача 12. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 нм равны $n_0 = 1,544$ и $n_e = 1,553$ для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на 90° , если используется свет указанной длины волны?

Дано:

$$\lambda = 600 \text{ нм}$$

$$n_0 = 1,544$$

$$n_e = 1,553$$

$$\Delta\varphi = 90^\circ$$

$$d - ?$$

Решение. Сдвиг фаз вычисляется по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_0) d,$$

где d – расстояние, пройденное светом. Полагая $\Delta\varphi = \pi / 2$ и произведя вычисления, находим:

$$d = 16,7 \text{ мм}.$$

Вопросы и задания.

1. Электромагнитная природа света.
2. Когерентность и монохроматичность световых волн.
3. Оптическая длина пути и оптическая разность хода лучей.
4. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Интерференция в тонких пленках.
5. Интерференция многих волн. Дифракционная решетка.
6. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса — Френеля.
7. Метод зон Френеля.
8. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера.
9. Дифракция от щели.
10. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах.
11. Естественный и поляризованный свет.
12. Закон Малюса.
13. Поляризация света при отражении и преломлении.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

14. Дифракция света на дифракционной решетке.
15. Нормальная и аномальная дисперсия.
16. Электронная теория дисперсии света. Рассеяние света.

17. Поглощение света.

Задачи для самостоятельного решения

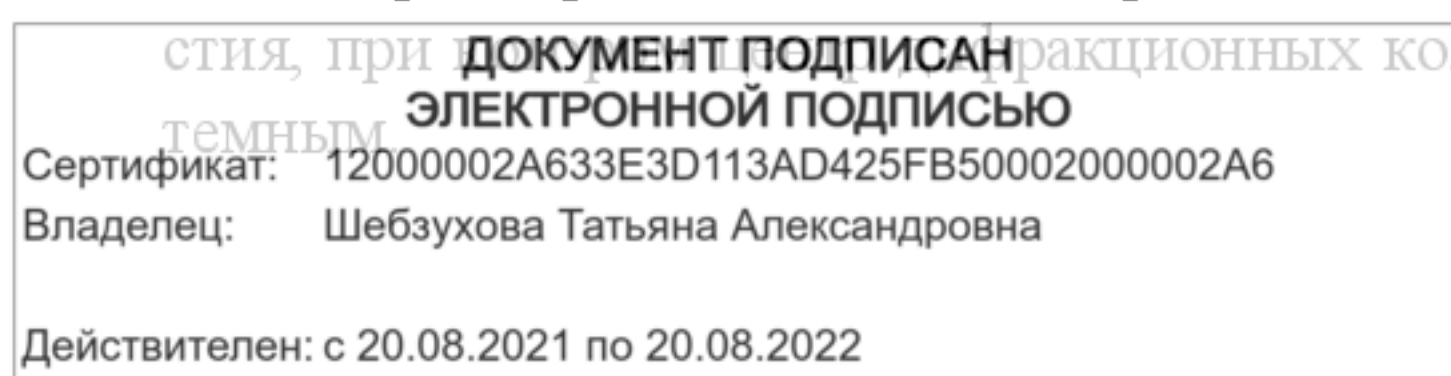
1. На мыльную пленку ($n=1,3$), находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda=0,55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции.
2. Пучок монохроматических ($\lambda=0,6$ мкм) световых волн падает под углом $\varepsilon_1=30^\circ$ на находящуюся в воздухе мыльную пленку ($n=1,3$). При какой наименьшей толщине d пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? Максимально усилены?
3. На тонкий стеклянный клин ($n=1,55$) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол α между поверхностями клина равен $2'$. Определить длину световой волны λ , если расстояние b между соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно $0,3$ мм.
4. Двугранный угол стеклянного клина равен $0,2'$. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda=0,55$ мкм. Определить ширину b интерференционной полосы.
5. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda=600$ нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.
6. В опыте Юнга расстояние d между щелями равно $0,8$ мм. На каком расстоянии l от щелей следует расположить экран, чтобы ширина b интерференционной полосы оказалась равной 2 мм? ($\lambda=640$ нм).
7. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ , испускаемой источником монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна $1,5$ мм.
8. Расстояние d между двумя когерентными источниками света ($\lambda=500$ нм) равно $0,1$ мм. Расстояние b между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние l от источников до экрана.
9. Найти все длины волн видимого света (от $0,76$ до $0,38$ мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода Δ интерферирующих волн, равной $1,8$ мкм.
10. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda=380$ нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 6 мм.

11. Какое расстояние $N_{\min}$ штрихов должно содержать дифракционная решетка, чтобы можно было видеть отдельно две желтые линии натрия с длинами волн $\lambda_1=589$ нм и $\lambda_2=589,6$? Какова длина l такой решетки, если постоянная решетки $d=5$ мкм?

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

должна содержать дифракционная решетка, чтобы можно было видеть отдельно две желтые линии натрия с длинами волн $\lambda_1=589$ нм и $\lambda_2=589,6$? Какова длина l такой решетки, если постоянная решетки $d=5$ мкм?

12. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_1 = 14^\circ$. На какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка?
13. Дифракционная решетка содержит $n=200$ штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?
14. На дифракционную решетку, содержащую $n=400$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,6$ мкм). Найти общее число дифракционных максимумов, которое дает эта решетка. Определить угол φ дифракции, соответствующий последнему максимуму.
15. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ($\lambda = 0,4$ мкм) спектра третьего порядка.
16. На дифракционную решетку, содержащую $n=600$ штрихов на миллиметр, падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана $L=1,2$ м. Границы видимого спектра $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_{ф} = 400$ нм.
17. Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете ($\lambda=0,6$ мкм), максимум пятого порядка отклонен на угол $\varphi=18^\circ$?
18. На щель шириной $a=0,1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0,5$ мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол φ дифракции равен: 1) $17'$; 2) $43'$.
19. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол φ отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен 1° . Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?
20. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda=0,6$ мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.
21. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. В результате дифракции в некоторых точках оси отверстия, находящихся на расстояниях b_i от его центра, наблюдаются максимумы интенсивности. 1) Получить вид функции $b=f(r, \lambda, n)$, где r -радиус отверстия; λ - длина волны; n -число зон Френеля, открываемых для данной точки оси отверстия. 2) Сделать то же самое для точек оси отверстия, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.
22. Посредине между точечным источником монохроматического света $\lambda=550$ нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определите радиус отверстия, при котором дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее



23. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом $\varepsilon_1 = 54^\circ$. Определить угол преломления ε_2 пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.
24. На какой угловой высоте φ над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?
25. Угол Брюстера ε_B при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57° . Определить скорость света в этом кристалле.

Практическое занятие 16.

Тема занятия. Квантовая природа излучения

Цель занятия. Изучить вопросы квантовой теории излучения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Законы теплового излучения. Закон Стефана-Больцмана. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Давление света. Эффект Комптона. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы квантовой теории применяется при решении научных задач.

Теоретическая часть.

Законы теплового излучения

Тепловым излучением называют электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойств этого тела. Тепловое излучение – единственное излучение, способное находиться в термодинамическом равновесии с веществом (равновесное).

Количественной характеристикой теплового излучения служит энергетическая светимость (излучательность) R_T – мощность излучения абсолютно черного тела с единицы площади поверхности тела во всем интервале частот (длин волн) от 0 до ∞ . Спектральной характеристикой теплового излучения тела является спектральная плотность энергетической светимости (спектральная плотность излучательности) $r_{\nu, T}$ – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени с единицы площади поверхности тела в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$.

Распределение энергии излучения абсолютно черного тела в зависимости от частоты

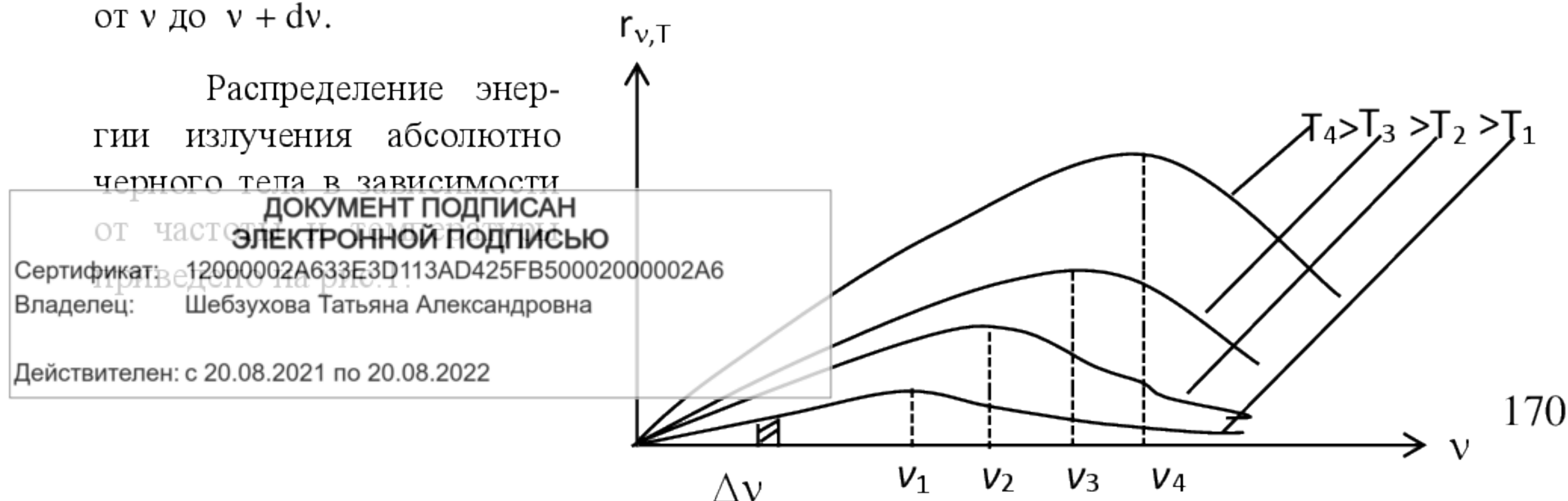


Рис. 1.

Величина излучательности может быть рассчитана по закону Стефана-Больцмана

$$R_T = \sigma T^4, \quad (1)$$

где σ - постоянная Стефана-Больцмана, T – абсолютная температура. Если взять на графике единичный интервал частоты $\Delta\nu$, то площадь заштрихованного участка определит величину спектральной плотности излучательности.

Максимальное значение спектральной плотности излучательности определяется законом Вина

$$(r_{\nu,T})_{\max} = cT^5, \quad (2)$$

где c – вторая постоянная Вина.

При увеличении температуры абсолютно черного тела частота, на которую приходится максимум спектральной плотности излучательности, смещается в сторону более высоких частот. Длина волны $\lambda_{\max}$, соответствующая максимальному значению излучательности, обратно пропорциональна его температуре (закон смещения Вина)

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

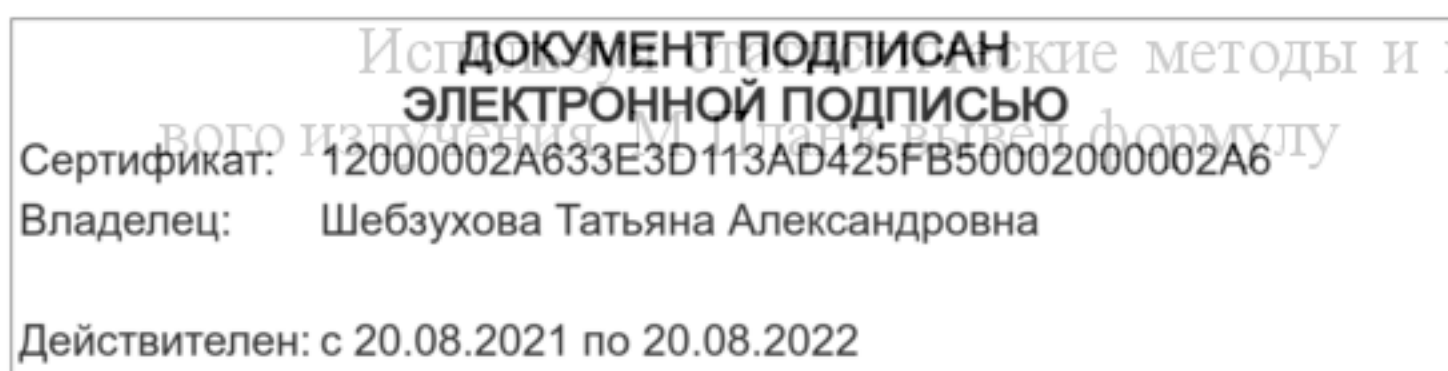
где b – первая постоянная Вина.

Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоны

Дать теоретическое обоснование спектральным закономерностям теплового излучения абсолютно черного тела удалось М. Планку. Для этого ему пришлось отказаться от установившегося положения классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, то есть, может принимать любые сколь угодно близкие значения. *М.Планк выдвинул квантовую гипотезу, заключающуюся в том, что энергия атомов-осцилляторов может изменяться дискретно, порциями, пропорциональными некоторой элементарной порции – кванту энергии*

$$\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda}, \quad (3)$$

где h – постоянная Планка.



представления о квантовом характере тепло-

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (4)$$

которая согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения абсолютно черного тела во всем интервале частот от 0 до ∞ и при различных температурах. Кроме того, формула М.Планка содержит в себе законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в этих законах.

Эйнштейн, создавая квантовую теорию света, предположил, что не только излучение света, но и его распространение происходит в виде потока световых квантов-фотонов. Массу фотона можно найти из соотношения $mc^2 = h\nu$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}, \quad (5)$$

а импульс фотона

$$p = m \cdot c = \frac{h}{c \cdot \lambda} \cdot c = \frac{h}{\lambda}. \quad (6)$$

Внешний фотоэффект

Явление вырывания электронов с поверхности металлов световым потоком называется внешним фотоэффектом. При взаимодействии квантов света (фотонов) с металлами выполняется соотношение, которое называется уравнением Эйнштейна

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2}, \quad (7)$$

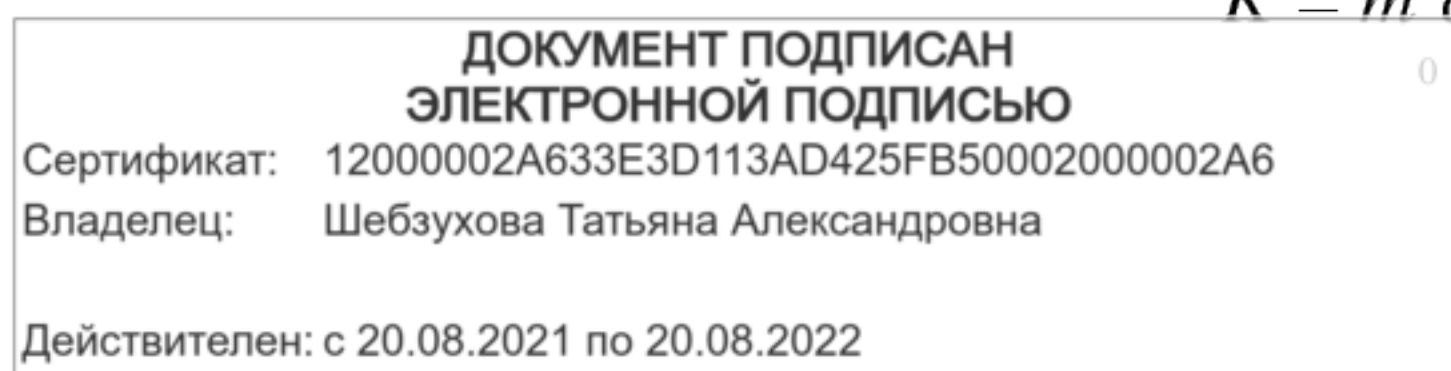
где $A_{\text{вых}}$ – работа выхода электронов из металла, $\frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вылетающих из металла.

Если энергия падающего фотона много меньше энергии покоя электрона $E_0 = 0,51$ МэВ, то кинетическую энергию можно рассчитать по классической формуле, то есть

$$K = \frac{m\nu^2}{2}. \quad (8)$$

Если же энергия кванта света, падающего на металл сравнима или больше E_0 , то для вычисления кинетической энергии $E_{\text{кин}}$ фотоэлектронов следует воспользоваться релятивистской формулой

$$K = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (9)$$



где m_0c^2 – энергия покоя электрона.

Если скорость вырванных из металла электронов $v = 0$, то энергия фотона $\varepsilon = h\nu_{\kappa} = h \frac{c}{\lambda_{\kappa}}$, а ν_{κ} или λ_{κ} соответствует красной границе фотоэффекта для данного металла, то есть λ_{κ} – та максимальная длина волны фотона, при которой начинается для данного металла фотоэффект.

Давление света

Современные квантовые представления о свойствах света существенно отличаются от ньютоновской корпускулярной теории света. С квантовой точки зрения давление света на поверхность какого-либо тела обусловлено тем, что при соударении с этой поверхностью каждый фотон передает ей свой импульс.

Отражение света от поверхности тела следует рассматривать как сложный процесс «переизлучения» фотонов – падающий фотон поглощается поверхностью, а затем вновь излучается ею с противоположным направлением импульсов. При этом давление света на отражающую поверхность должно быть таким же, каким оно было в том случае, если бы фотоны «зеркально отражались» от поверхности подобно абсолютно упругим шарикам.

Величина светового давления определяется формулой

$$P = \omega (1 + \rho), \quad (10)$$

где $\omega = E_{\Sigma}/S$ – объемная плотность энергии излучения (E_{Σ} – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, S – скорость света в вакууме); ρ – коэффициент отражения света от поверхности тела.

Эффект Комптона

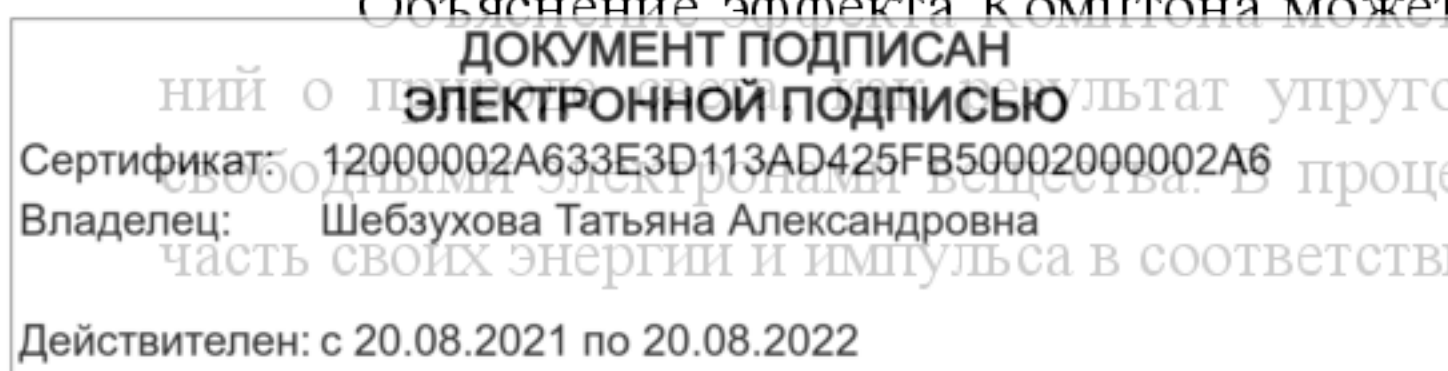
Квантовые свойства света проявляются в эффекте Комптона, который заключается в упругом рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и γ -излучения) на свободных или слабосвязанных электронах вещества, сопровождающемся увеличением длины волны $\Delta\lambda$. Величина $\Delta\lambda$ определяется формулой Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (11)$$

где λ – длина волны падающего излучения, λ' – длина волны рассеянного излучения, θ – угол рассеяния рентгеновского кванта, λ_c – комптоновская длина волны, $\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$, $\lambda_c = 2,426$ пм (m_0 – масса покоя электрона).

Объяснение эффекта Комптона может быть дано на основе квантовых представле-

ний о протекании процесса. Результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. В процессе столкновения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения.



Примеры решения задач

Задача 1. Длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $\lambda_{max} = 0,6$ мкм. Определите: 1) энергетическую светимость этого тела R_T ; 2) спектральную плотность энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ или $r_{\lambda,T}$, рассчитанную на 1 нм вблизи λ_{max} в спектре излучения абсолютно черного тела.

Дано:

$$\lambda_{max} = 0,6 \text{ мкм}$$

$$\vartheta = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ К} \cdot \text{м}$$

$$c = 1,23 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}$$

$$\Delta\lambda = 1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$$

$$R_I = ? \quad r_{\lambda,T} = ?$$

Решение. Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обратно пропорциональна температуре

$$\lambda_{max} = \frac{\vartheta}{T},$$

отсюда

$$T = \frac{\vartheta}{\lambda_{max}},$$

а энергетическая светимость R_T определяется законом Стефана-Больцмана, то есть, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры

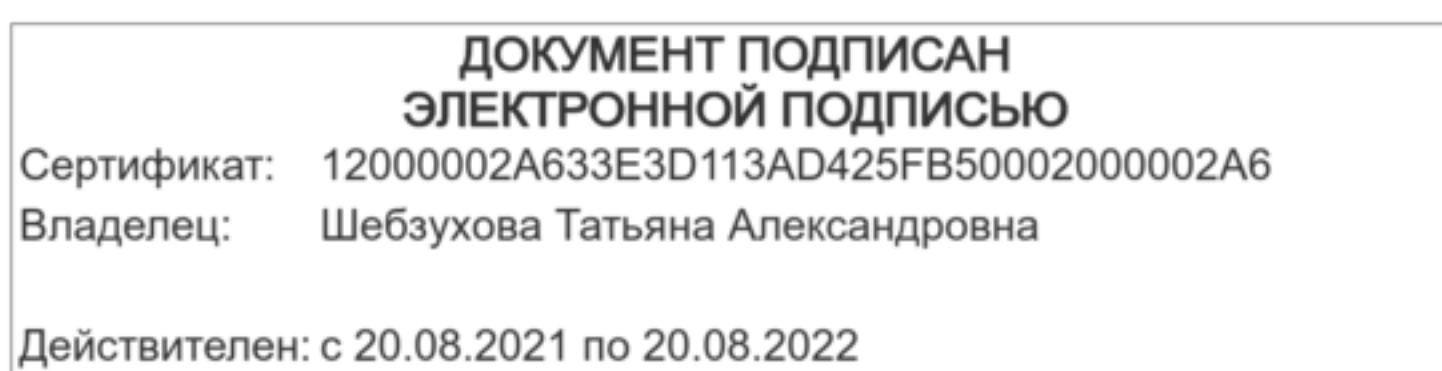
$$R_T = \sigma T^4 = \sigma \left(\frac{\vartheta}{\lambda_{max}} \right)^4.$$

$$R_T = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \right)^4 = 33 \text{ МВт} / \text{м}^2.$$

Максимум спектральной плотности энергетической светимости, согласно закону Вина, пропорционален пятой степени температуры

$$r_{\lambda,T} = c T^5 = c \left(\frac{\vartheta}{\lambda_{max}} \right)^5,$$

Но мы получили $r_{\lambda,T}$ в интервале длин волн $\Delta\lambda' = 1 \text{ м}$ (единичный интервал в СИ). Так как 1 нм в 10^9 раз меньше, то и $(r_{\lambda,T})_{max}$, приходящаяся на $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ вблизи λ_{max} , во столько же раз будет меньше. Таким образом, искомое значение определится выражением:



$$(r_{\lambda,T})_{\max} = \frac{c \left(\frac{\lambda_{\max}}{e} \right)^5}{10^9}$$

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = 1,23 \cdot 10^{-5} \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-9} = 3,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{нм}} = 38 \text{кВт} / \text{м}^2 \cdot \text{нм}$$

Итак, спектральная плотность энергетической светимости, приходящаяся на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ вблизи $\lambda_{\max}$ равна $38 \text{ кВт/м}^2 \cdot \text{нм}$.

Задача 2. Раскаленная металлическая поверхность $S = 10 \text{ см}^2$ излучает в 1 мин энергию $E = 4 \cdot 10^4 \text{ Дж}$. Температура поверхности $T = 2500 \text{ К}$. Найдите отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Дано:

$$S = 10 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$$

$$E = 4 \cdot 10^4 \text{ Дж}$$

$$T = 2500 \text{ К}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

$$n = ?$$

Решение. Искомая величина $n = \frac{R_{\text{э}}}{R_{\text{ч.т.}}}$, где $R_{\text{э}}$ и $R_{\text{ч.т.}}$ —

энергетическая светимость металлической поверхности и черного тела, соответственно, по закону Стефана-Больцмана

$$R_{\text{ч.т.}} = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 2,21 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

Энергия, излучаемая раскаленной металлической поверхностью, равна $E = R_{\text{э}} \cdot t \cdot S$. Отсюда

$$R_{\text{э}} = \frac{E}{t \cdot S}$$

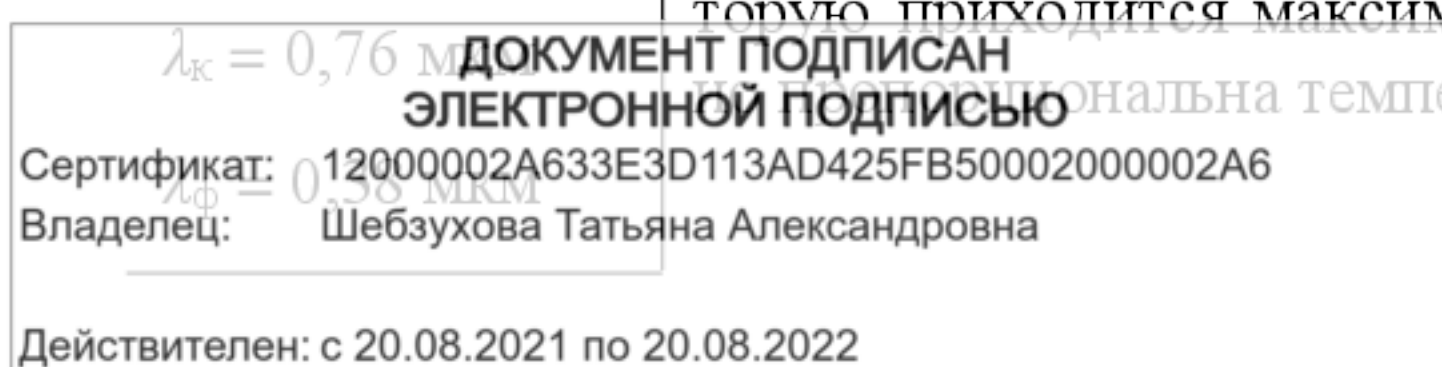
$$R_{\text{э}} = \frac{4 \cdot 10^4}{60 \cdot 10^{-3}} = 0,67 \cdot 10^6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Найдем отношение $\frac{R_{\text{э}}}{R_{\text{ч.т.}}} = n$; $n = \frac{0,67 \cdot 10^6}{2,21 \cdot 10^6} = 0,3.$

Задача 3. Во сколько раз увеличится мощность излучения черного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано:

Решение. Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обрат-
 $\lambda_{\text{к}} = 0,76 \text{ мкм}$
 $\lambda_{\text{ф}} = 0,38 \text{ мкм}$



$$N_k/N_\phi - ?$$

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \text{ отсюда } T_\kappa = \frac{b}{\lambda_\kappa}, \quad T_\phi = \frac{b}{\lambda_\phi}.$$

Мощность излучения равна $N = RS$.

В соответствии с законом Стефана – Больцмана $R = \sigma T^4$, для температур T_κ и T_ϕ имеем: $N_\kappa = \sigma T_\kappa^4 S$ и $N_\phi = \sigma T_\phi^4 S$. Тогда их отношение равно

$$\frac{N}{N_\phi} = \left(\frac{T}{T_\phi}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\phi}\right)^4 = \left(\frac{0,76}{0,38}\right)^4 = 16.$$

Задача 4. На платиновую пластинку падает ультрафиолетовое излучение. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающее напряжение $U_1 = 3,7$ В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающее напряжение нужно увеличить до $U_2 = 6$ В. Определите работу выхода (в электронвольтах) из второго металла.

Дано:

$$U_1 = 3,7 \text{ В}$$

$$U_2 = 6 \text{ В}$$

$$A_1 = 6,3 \text{ эВ}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$A_2 = ?$$

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта, имеем

$$h\nu = A_1 + \frac{m\nu^2}{2}$$

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить задерживающее напряжение U_1 .

$$eU_1 = \frac{m\nu^2}{2},$$

где e и m – заряд (по модулю) и масса электрона.

Таким образом,

$$h\nu = A_1 + eU_1. \quad (1)$$

Аналогичное выражение запишем для пластинки из второго металла

$$h\nu = A_2 + eU_2. \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2)

$$A_1 + eU_1 = A_2 + eU_2$$

$$A_2 = A_1 + eU_1 - eU_2 = A_1 - e(U_2 - U_1)$$

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$10^{-19} - 1,6 \cdot 10^{-19} (6-3,7) = 6,42 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

$$A_2 = \frac{6,42 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4 \text{ эВ}.$$

Задача 5. Облучение литиевого фотокатода производится фиолетовыми лучами, длина волны которых равна 0,4 мкм. Определите скорость фотоэлектронов, если длина волны красной границы фотоэффекта для лития равна 0,52 мкм.

Дано:

$$\lambda = 0,4 \text{ мкм}$$

$$\lambda_{\kappa} = 0,52 \text{ мкм}$$

$v - ?$

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта энергия фотона $E_{\phi} = hc/\lambda$ расходуется на работу выхода электрона $A = hc/\lambda_{\kappa}$ и сообщение электрону кинетической энергии K .

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_{\kappa}} + K. \quad K = \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{\kappa}}.$$

Тогда

$$v = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{\kappa}}\right) \frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left(\frac{\lambda_{\kappa} - \lambda}{\lambda_{\kappa} \lambda}\right)}.$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 (5,2 - 4) \cdot 10^{-7}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,2 \cdot 4 \cdot 10^{-14}}} \cong 5 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Задача 6. Определите максимальную скорость электрона, вырванного с поверхности металла γ -квантом с энергией 1,53 МэВ.

Дано:

$$E_{\gamma} = 1,53 \text{ МэВ}$$

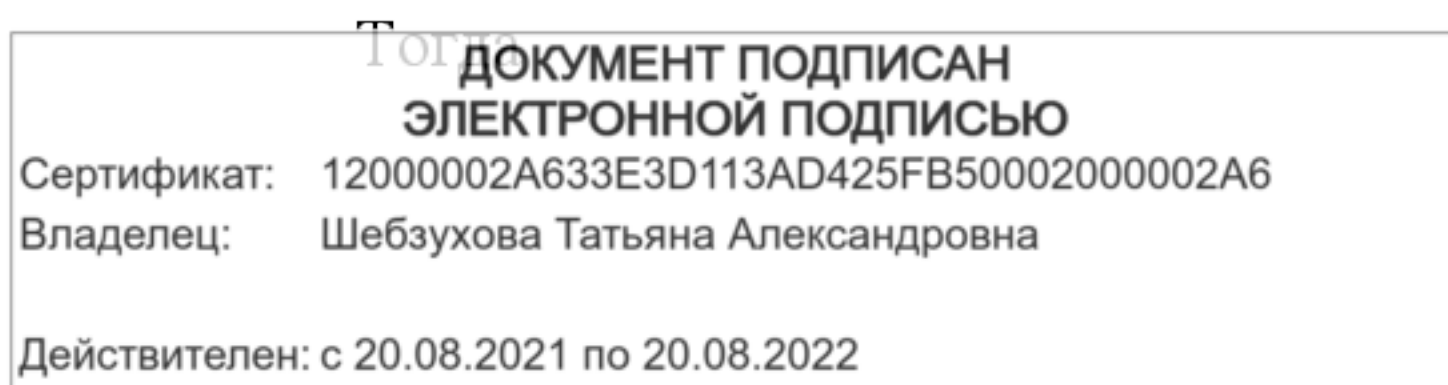
$v_{\max} - ?$

Решение. По формуле Эйнштейна для фотоэффекта

$E_{\gamma} = A + K$. Работа выхода электрона из металла составляет величину порядка единиц электронвольт, что много меньше мегаэлектронвольт, следовательно меньшей

величиной можно пренебречь. Тогда $E_{\gamma} = K$. Так как энергия гамма-кванта превышает энергию покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$, то кинетическая энергия фотоэлектрона должна рассчитываться для релятивистского случая.

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - E_0$$



$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{K + E_0} \right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{0,511}{1,53 + 0,511} \right)^2} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Задача 7. Определите силу светового давления солнечных лучей перпендикулярных поверхности на площадь 100 м^2 , если коэффициент отражения лучей равен $0,2$ и солнечная постоянная $1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$. (Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца).

Дано:

$$S = 100 \text{ м}^2$$

$$\rho = 0,2$$

$$E = 1,4 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$F = ?$$

Решение. Сила светового давления F на поверхность равна произведению светового давления P на площадь S поверхности $F = P \cdot S$.

Световое давление может быть найдено по формуле $P = \frac{E(1 + \rho)}{c}$. Тогда искомая сила $F = \frac{E \cdot S(1 + \rho)}{c}$,

$$F = \frac{1,4 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 1,2}{3 \cdot 10^8} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

Задача 8. На зачерненную поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $0,65 \text{ мкм}$, производя давление $5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$. Определите концентрацию фотонов вблизи поверхности и число фотонов, падающих на площадь 1 м^2 в 1 с .

Дано:

$$\lambda = 0,65 \text{ мкм}$$

$$P = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$$

$$S = 1 \text{ м}^2$$

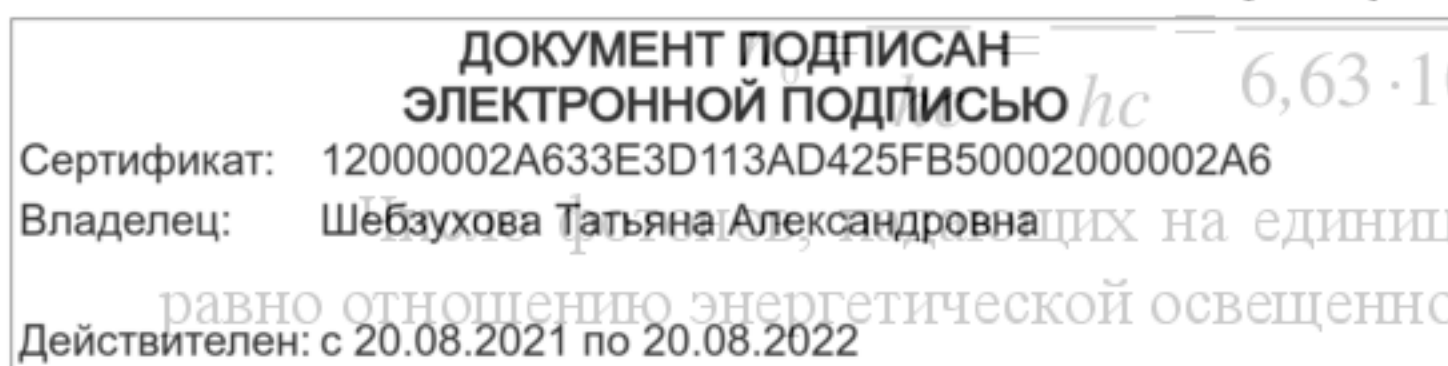
$$t = 1 \text{ с}$$

$$n_0, n - ?$$

Решение: Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ вычисляется по формуле $P = \omega(1 + \rho)$, где ω – объемная плотность энергии, которая связана с полной энергией (освещенностью) E_0 падающих фотонов на единицу площади поверхности в единицу времени соотношением $\omega = E_0/c$.

С учетом того, что для зачерненной поверхности коэффициент отражения ρ равен нулю получим формулу для давления света в виде $P = \omega = E_0/c$. Объемная плотность энергии равна произведению концентрации фотонов n_0 на энергию одного фотона E_1 , $\omega = n_0 E_1 = n_0 h c / \lambda$, откуда

$$\omega \lambda = P \lambda = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 6,5 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$



Число фотонов, падающих на единицу площади поверхности в единицу времени, равно отношению энергетической освещенности E_0 к энергии одного фотона E_1 :

$$n = \frac{E_0}{E_1} = \frac{P\lambda}{h} = n_0 c = 1,6 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^8 = 4,8 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2}\text{с}^{-1}.$$

Задача 9. В явлении Комптона энергия падающего фотона E распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найдите энергию и импульс рассеянного фотона.

Дано:

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$\theta = \pi/2$$

$$E/E' = 2$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$E', P' = ?$$

Решение. Энергия падающего фотона определяется формулой

$$E = h \frac{c}{\lambda}, \text{ где } \lambda - \text{длина волны падающего фотона. Энергия рас-}$$

$$\text{сеянного фотона } E' = h \frac{c}{\lambda'}, \text{ где } \lambda' - \text{длина волны рассеянного}$$

на электроны фотона. По условию задачи $E = E' = 2$, тогда

$$\lambda'/\lambda = 2, \quad \lambda = \lambda'/2. \quad (1)$$

По формуле Комптона изменение длины волны фотона при рассеянии выражается формулой

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta), \quad (2)$$

учитывая (1), имеем

$$\lambda' - \frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta),$$

или

$$\frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta),$$

откуда

$$\lambda' = \frac{2h}{m_e c} (1 - \cos\theta).$$

Подставляя выражение (3) в формулу для энергии рассеянного фотона, получаем окончательно

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hcm_e c}{2h(1 - \cos\theta)} = \frac{m_e c^2}{2(1 - \cos\theta)}.$$

$$E = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)} = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,26 \text{ МэВ}.$$

Для определения импульса рассеянного фотона воспользуемся следующими соображениями.

Энергия фотона $E' = m_{\phi} \cdot c^2$, а импульс фотона $p' = m_{\phi} \cdot c$, тогда

$$p' = \frac{E'}{c}.$$

Импульс рассеянного фотона равен

$$p' = \frac{4,1 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 1,37 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 10. Фотон с импульсом $5,44 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ был рассеян на свободном электроне на угол 30° в результате эффекта Комптона. Определите импульс рассеянного фотона.

Дано:

$$p_1 = 5,44 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$p_2 = ?$$

Решение. Импульс фотонов $p_1 = h/\lambda_1$; $p_2 = h/\lambda_2$, откуда $\lambda_1 = h/p_1$, $\lambda_2 = h/p_2$. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при эффекте Комптона равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \text{ или } \frac{h}{p_2} - \frac{h}{p_1} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Отсюда

$$p_2 = \frac{p_1 m_0 c}{p_1(1 - \cos\theta) + m_0 c} = \frac{5,44 \cdot 10^{-22} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}{5,44 \cdot 10^{-22} \cdot 0,134 + 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 4,3 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 11. Фотон с энергией 0,51 МэВ в результате комптоновского рассеяния отклонился на угол 180° . Определите долю энергии в процентах, оставшуюся у рассеянного фотона.

Дано:

$$E_1 = 0,51 \text{ МэВ}$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$E_2/E_1 = ?$$

Решение. По закону сохранения энергии $E_1 = E_2 + E_3$, где E_1 – энергия налетающего фотона, E_2 – энергия рассеянного фотона, E_3 – энергия электрона. Энергия налетающего электрона равна $E_1 = hc/\lambda_1$, откуда $\lambda_1 = hc/E_1$, где λ_1 – длина волны налетающего фотона. Аналогично

$\lambda_2 = hc/E_2$. Изменение длины волны при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1(1 - \cos\theta),$$

Тогда $\Delta\lambda = \lambda_c \cdot 2$, отсюда $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + 2\lambda_c$ и, следовательно, энергия рассеянного фотона равна

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_1 + 2\lambda_c} = \frac{hc}{hc/E_1 + 2\lambda_c}.$$

А ее доля

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{hc}{hc + E_1 \cdot 2\lambda_c} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 + 0,51 \cdot 10^{-13} \cdot 2 \cdot 2,43 \cdot 10^{-12}} = 0,33 = 33\%$$

Вопросы и задания.

1. Квантовая природа излучения. Законы теплового излучения.
2. Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоны.
3. Фотоэффект.
4. Масса, энергия и импульс фотона.
5. Давление света. Эффект Комптона.

Задачи для самостоятельного решения

1. Красная граница фотоэффекта для цинка $\lambda_0 = 310$ нм. Определить максимальную кинетическую энергию $T_{\max}$ фотоэлектронов в электрон-вольтах, если на цинк падает свет с длиной волны $\lambda = 200$ нм.
2. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности $(R_{\lambda,T})_{\max}$ сместился с $\lambda_1 = 2,4$ мкм на $\lambda_2 = 0,8$ мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость R_ϵ тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?
3. При увеличении термодинамической температуры T черного тела в два раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{\max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2 .
4. Эталон единицы силы света – кандела – представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадь $S = 0,5305$ мм² имеет температуру t затвердевания платины, равную 1063 °С. Определить мощность P излучателя.
5. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{\max}$ черного тела равна $4,16 \cdot 10^{11}$ Вт/м². На какую длину волны λ_m она приходится?

6. Температура тела равна 2 КК. Определить: 1) Спектральную плотность энергетической светимости $R_{\lambda,T}$ на длине волны $\lambda = 600$ нм; 2) Энергетическую светимость R_ϵ тела на длине волны $\lambda = 590$ нм до $\lambda_2 = 610$ нм. Принять, что средняя спектральная

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Щербатых Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для волны $\lambda = 600$ нм.

7. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ - фотонами с энергией $\varepsilon = 1,82$ МэВ.

8. Максимальная скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ - фотонами, равна 291 Мм /с. Определить энергию ε фотонов.

9. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ - фотонами с энергией $\varepsilon = 1,53$ МэВ.

10. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ - излучения с длиной волны $\lambda = 0,3$ нм.

11. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10^7 м/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

12. На цинковую пластину падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов.

13. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_1 = 3,7$ В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу A выхода электронов с поверхности этой пластинки.

14. На поверхность лития падает монохроматический свет ($\lambda = 310$ нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U не менее $1,7$ В. Определить работу выхода A .

15. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 307$ нм и максимальная кинетическая энергия $T_{\max}$ фотоэлектрона равна 1 эВ?

16. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 300$ нм.

17. Определить энергию E , массу m и импульс p фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 380$ нм (фиолетовая граница видимого спектра).

18. Определить длину волны λ , массу m и импульс p фотона с энергией $\varepsilon = 1$ МэВ. Сравнить массу этого фотона с массой покоящегося электрона.

19. Определить длину волны λ фотона, импульс которого равен импульсу электрона, обладающего скоростью $V = 10^7$ м/с.

20. Определить длину волны λ фотона, масса которого равна массе покоя: 1) электрона; 2) протона.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

21. Давл. ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

21. Давление перпендикулярно падающим лучам, равно $0,1$ мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 1$ с на поверхность площадью $S = 1$ см²

22. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника $d = 40$ м. Зная солнечную постоянную $S = 1,4$ кДж/м²·с и принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления F солнечного света на спутник.
23. Определить поверхностную плотность I потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление p при перпендикулярном падении лучей равно 10 мкПа.
24. Фотон с энергией $\varepsilon = 0,4$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном электроны. Определить энергию ε' рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи.
25. Определить импульс p электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$.
26. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180^\circ$? Энергия ε фотона до рассеяния равна 0,255 МэВ.
27. Фотон с энергией $\varepsilon = 0,25$ МэВ рассеялся на свободном электроны. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния θ .
28. Угол рассеяния θ фотона равен 90° . Угол отдачи ϕ электрона равен 30° . Определить энергию ε падающего фотона.
29. Фотон ($\lambda = 1$ пм) рассеялся на свободном электроны под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?
30. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине волны λ_K электрона. Определить энергию ε и импульс p фотона.

Раздел 6. Элементы квантовой механики и ядерной физики

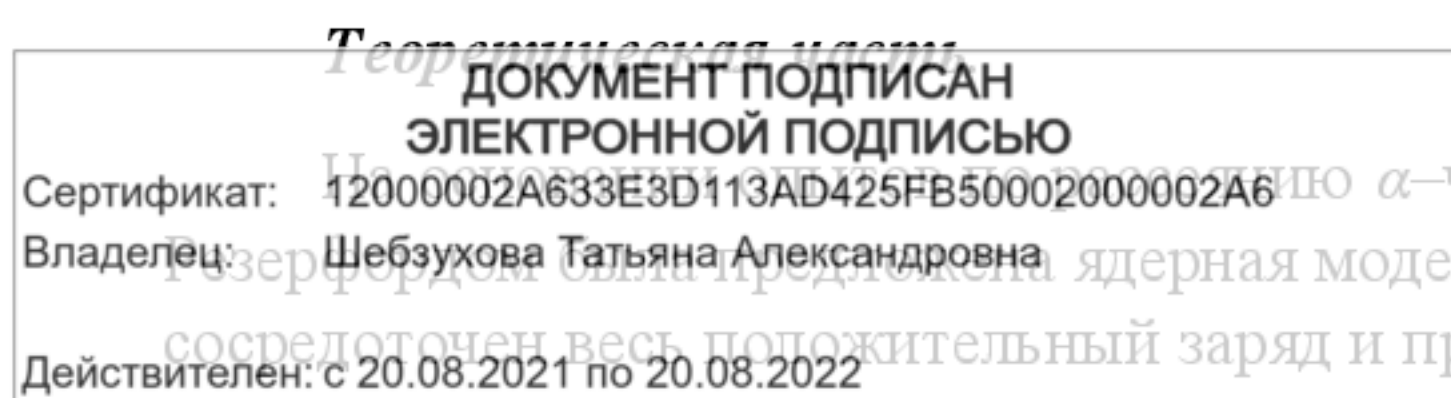
Практическое занятие 17.

Тема занятия. Теория атома водорода по Бору. Элементы квантовой механики.

Цель занятия. Изучить вопросы квантовой теории излучения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Модели атома Томсона и Резерфорда. Линейчатый спектр атома водорода. Постулаты Бора. Спектр атома водорода по Бору. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм. Соотношение неопределенностей Гейзенберга. Уравнение Шредингера. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы квантовой механики применяется при решении научных задач.



Резерфорд предложил модель атома. Согласно этой модели, в ядре атома сосредоточен весь положительный заряд и практически вся масса атома. Линейные разме-

ры ядра равны 10^{-15} - 10^{-14} м, вокруг ядра в области с линейными размерами 10^{-10} м движутся электроны, масса которых составляет лишь весьма малую долю массы ядра. Ядерная модель атома Резерфорда внешне очень напоминает солнечную систему: в центре системы находится «Солнце» – ядро, и вокруг него по орбитам движутся «планеты» – электроны. Поэтому данную модель часто называют планетарной.

Опыты показывают, что атому свойственна исключительная устойчивость, однако устойчивость атома не может быть согласована с классическим истолкованием ядерной модели. Электрон, движущийся ускоренно по орбите вокруг ядра, должен излучать электромагнитные волны. Это излучение (и связанная с ним потеря электроном его энергии) должно происходить непрерывно. Поэтому, на основании классических представлений, электрон не может удержаться на орбите, а должен по спирали приближаться к ядру. Отсюда следует, что атом за очень короткое время прекратит свое существование, кроме того, излучение атома должно иметь непрерывный спектр. Однако обширный экспериментальный материал указывает на стабильность и на дискретный (линейчатый) спектр атомов, что находится в прямом противоречии с классическим истолкованием модели атома Резерфорда.

Первая попытка построения неклассической теории атома, которая в настоящее время представляет только исторический интерес, была предпринята Н. Бором. В основе этой теории лежала идея связать в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер поглощения и излучения света. В теории Бора сохранялось описание поведения электронов в атоме при помощи законов классической физики. Однако классические законы ему пришлось дополнить некоторыми ограничениями, которые были сформулированы в виде постулатов, физический смысл которых не мог быть объяснен в рамках применяемой теории.

Теория Бора применима к атому водорода и так называемым водородоподобным атомам, состоящих из ядра с зарядом Ze и одного электрона, вращающегося вокруг ядра на внешней орбите.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний (орбит)) заключается в следующем: *существуют некоторые состояния электрона в атоме, находясь в которых он не излучает энергии.*

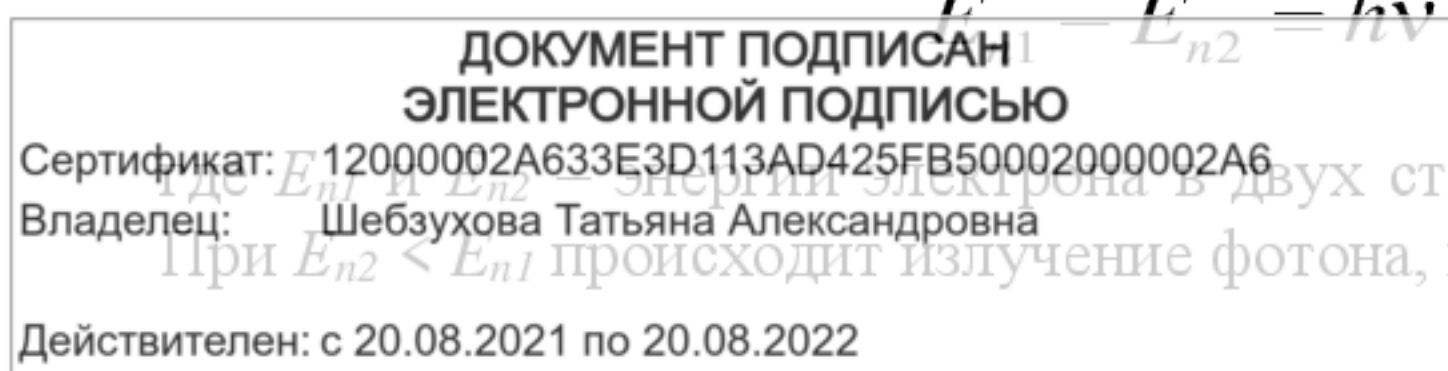
Второй постулат Бора (правило квантования орбит) утверждает, что *в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию*

$$L_n = m v_n r_n = n \hbar, \quad (1)$$

где n – ряд натуральных чисел ($n = 1, 2, 3, \dots$), m – масса электрона, v – его скорость, r – радиус его орбиты.

Третий постулат Бора (правило частот) устанавливает, что *при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один квант энергии в виде фотона*

$$E_{n1} - E_{n2} = h\nu \quad (2)$$



где E_{n1} и E_{n2} – энергии электрона в двух стационарных состояниях, ν – частота фотона. При $E_{n2} < E_{n1}$ происходит излучение фотона, при $E_{n2} > E_{n1}$ – его поглощение.

Боровская модель атома водорода

Чтобы получить согласие с результатами наблюдений, Бор предположил, что электрон в атоме водорода движется только по тем круговым орбитам, для которых его момент импульса

$$M = mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

где n — квантовые числа, m — масса электрона, v — его скорость, r — радиус орбиты. (Рассуждения, которые привели Бора к этому предположению мы опустим.)

С помощью этого *правила квантования* можно найти радиусы круговых стационарных орбит водорода и водородоподобных систем: ионов атомов с одним оставшимся электроном (H , He^+ , Li^{++} , ...) и соответствующие им энергии. Пусть заряд ядра водородоподобной системы равен e . Масса ядра значительно больше массы электрона, поэтому ядро при движении электрона можно считать неподвижным. Следуя Бору, будем предполагать, что электрон движется вокруг ядра по окружности радиуса r .

Согласно 2-му закону Ньютона

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (4)$$

Решая совместно (3) и (4), можно найти радиусы электронных орбит и их скорости на этих орбитах:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2; v_n = \frac{Ze^2}{\hbar} \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Таким образом, радиус первой (ближайшей к ядру) орбиты электрона в атоме водорода (его обозначают обычно r_0 и называют *первым Боровским радиусом*)

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5,29 \text{ нм} \quad (6)$$

Внутренняя энергия атома складывается из кинетической энергии электрона (ядро полагают неподвижным) и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром. С учетом (5) получим:

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} + \left(-\frac{Ze^2}{r_n} \right) = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (7)$$

При переходе атома водорода ($Z = 1$) из состояния n_1 в состояние n_2 излучается фотон

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (8)$$

$$\omega = \frac{me^4}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad (9)$$

Что соответствует обобщенной формуле Бальмера, если постоянная Ридберга определяется

$$R = \frac{me^4}{2 \cdot 3}. \quad (10)$$

Расчет по этой формуле хорошо согласуется с экспериментально определенным значением.

Схема энергетических уровней (разрешенных значений энергии) атома водорода приведена на рис.1. Там же показаны возможные переходы, сопровождающиеся излучением фотонов определенной частоты.

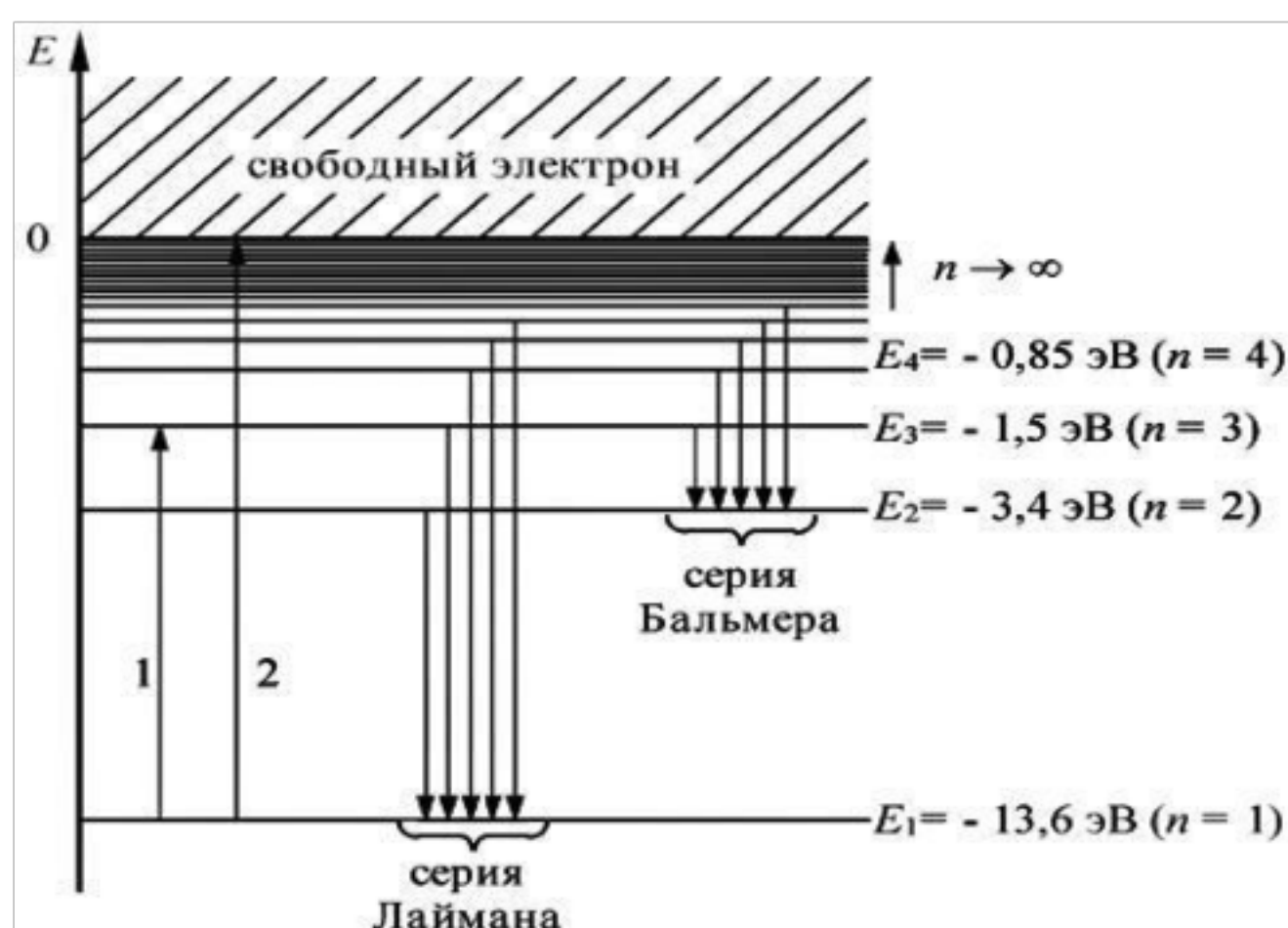


Рис.1.

Спектральные закономерности

Изучение спектров излучения сыграло большую роль в познании строения атомов. В первую очередь это касается спектров, обусловленных излучением невзаимодействующих друг с другом атомов. Эти спектры состоят из отдельных узких спектральных линий, и их называют линейчатыми.

Наличие многих спектральных линий указывает на сложность внутреннего строения атома. Изучение атомных спектров послужило ключом к познанию внутренней структуры атомов. Прежде всего, было замечено, что спектральные линии расположены не беспорядочно, а образуют серии линий. Изучая линейчатый спектр *атомарного водорода*, Бальмер (1885) установил некоторую закономерность. Для части линий соответствующие им частоты можно в современных обозначениях представить так:

$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad (11)$$

где ω — циклическая частота, соответствующая каждой спектральной линии ($\omega = 2\pi c/\lambda$), R —

постоянная, называемая *постоянной Ридберга*.

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

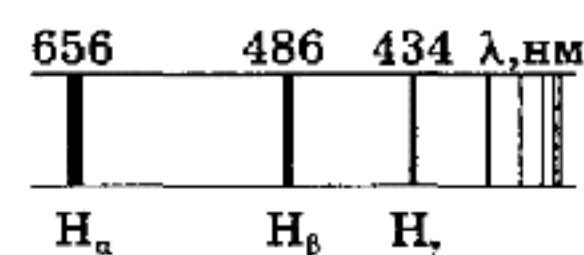
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6,07 · 10¹⁶ с⁻¹.

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

(12)

Формулу (11) называют формулой *Бальмера*, а соответствующую серию спектральных линий — серией Бальмера (рис.2). Основные линии этой серии находятся в видимой части спектра.



Дальнейшие исследования спектра атомарного водорода Рис.2. показали, что имеется еще несколько серий.

В ультрафиолетовой части спектра — *серия Лаймана*:

$$\omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (13)$$

а в инфракрасной части спектра — *серия Пашена*:

$$\omega = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots, \quad (14)$$

и так далее.

Все эти серии можно представить в виде *обобщенной формулы Бальмера*:

$$\omega = R \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (15)$$

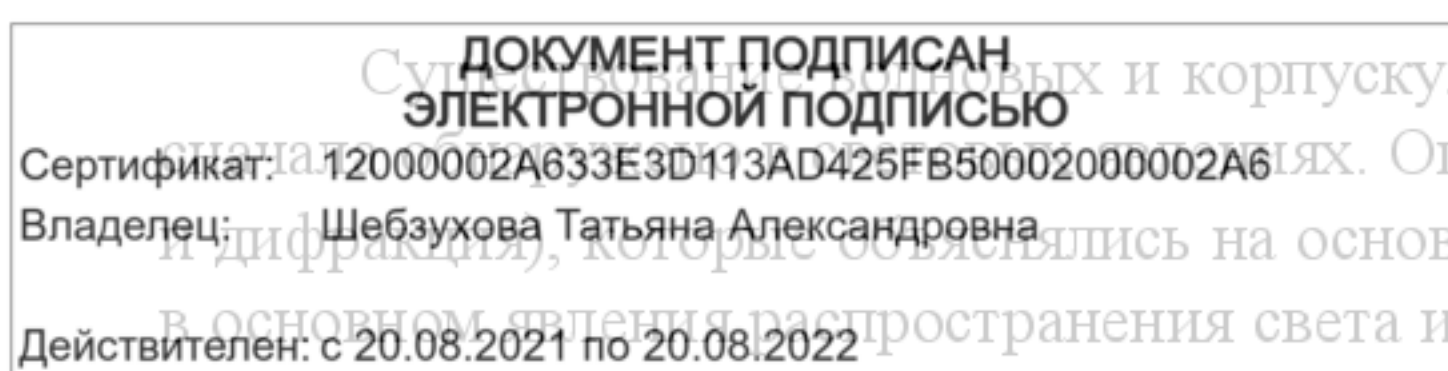
где n_0 - постоянное для каждой серии число: $n_0 = 1$ для серии *Лаймана*, $n_0 = 2$ для серии *Бальмера* и т. д. При заданном n_0 число n принимает все целочисленные значения, начиная с $n_0 + 1$.

Максимальной длине волны серии *Лаймана* (13) отвечает $n = 2$, это $\lambda_{\text{макс}} = 2\pi c / \omega_{\text{мин}} = 8 \pi c / 3R = 121,6$ нм. Соответствующую спектральную линию называют резонансной линией водорода.

С ростом n частота линий в каждой серии стремится к предельному значению R / n_0^2 , которое называют границей серии (рис.2). За границей серии спектр не обрывается, а становится сплошным. Это присуще не только всем сериям водорода, но и атомам других элементов.

Таким образом, интересующая нас серия Бальмера заключена в спектральном интервале от 365 нм до 656 нм, т. е. действительно, все основные линии ее расположены в видимой области спектра.

Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм материи



Существование двойных и корпускулярных свойств у физических объектов было объяснено в квантовой механике. Оптические явления (например, интерференция и дифракция), которые объяснялись на основе волновой (электромагнитной) теории, были объяснены в квантовой теории взаимодействия световой волны с макроско-

пическими телами: линзами, призмами, дифракционными решетками и т. д. Однако в некоторых явлениях (например, Комpton-эффект и фотоэффект), течение которых определяется взаимодействием света с микроскопическими объектами – отдельными заряженными частицами, атомами или молекулами, обнаруживается расхождение между предсказаниями волновой теории и результатами наблюдений и измерений.

В 1924 г., Луи де Бройль высказал гипотезу, что корпускулярно-волновой дуализм (двойственность, т.е. одновременное наличие корпускулярных и волновых свойств), должен быть распространен не только на световые частицы – фотоны, но и на частицы вещества: электроны, протоны, атомы и т.д.

Соотношение длины волны фотона λ_ϕ с его импульсом P_ϕ

$$\lambda_\phi = \frac{h}{P_\phi} \quad (16)$$

де Бройль обобщил, предположив, что оно имеет универсальный характер для любых волновых процессов, связанных с частицами, обладающими импульсом P :

$$\lambda = \frac{h}{P}, \quad (17)$$

где λ – длина волны де Бройля для частицы, h – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия K . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя E_0) и для релятивистского случая (когда $K \geq E_0$).

В нерелятивистском случае $P = \sqrt{2m_0K}$, тогда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}, \quad (18)$$

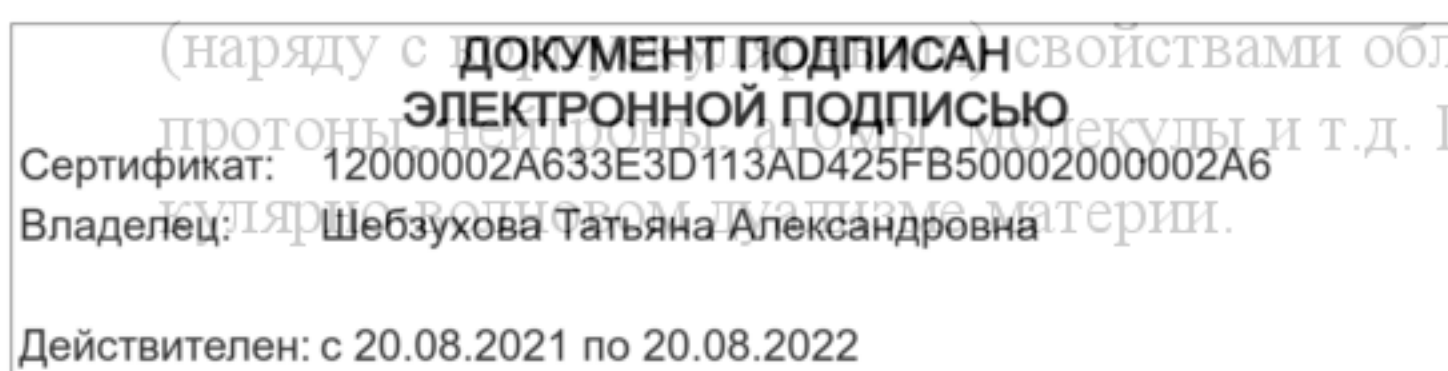
где m_0 – масса покоя частицы.

В релятивистском случае $P = \frac{1}{c} \sqrt{K(2E_0 + K)}$, тогда

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(2E_0 + K)}}, \quad (19)$$

где $E_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя частицы, c – скорость света.

Опыты показали, что двойственность присуща не только полевой форме материи (например, электромагнитная волна – фотон), но и вещественной форме, т.е. волновыми (наряду с корпускулярными свойствами обладают также частицы вещества – электроны, протоны, нейтроны, атомы, молекулы и т.д. Поэтому в настоящее время говорят о корпускулярно-волновом дуализме материи.



Уравнение Шредингера

При описании явлений, в которых участвуют микроскопические частицы вещества – электроны, протоны, нейтроны и др., на основе представлений и законов классической физики (механики, электродинамики, волновой оптики и т.д.) встретились затруднения, оказавшиеся непреодолимыми. Для объяснения новых явлений (фотоэффект, дифракция электронов и других частиц и т.д.) потребовались новые представления, которые не укладывались в рамки классической физики, явно противоречили ее основным положениям.

Со временем отдельные разрозненные предположения и гипотезы, возникшие в различных областях атомной физики, были связаны между собой и привели к формированию единой физической теории, получившей название квантовой физики.

Важнейшими свойствами квантовых объектов являются следующие:

- 1) существование у частиц корпускулярных и волновых свойств, неотделимых друг от друга и несводимых друг к другу;
- 2) существование у физических систем дискретного спектра устойчивых состояний, что следует, например, из дискретного спектра излучения атомов.

Корпускулярные свойства заключаются в том, что каждая частица имеет некоторую сосредоточенную в малом объеме энергию и импульс; при взаимодействии частиц между собой соблюдаются законы сохранения и импульса.

Волновые свойства заключаются в том, что траектория частицы определяется некоторой связанной с ней волной, распространение которой подчинено принципу Гюйгенса и для которой соблюдается принцип суперпозиции. Однако это утверждение требует расшифровки, какова природа этих волн, какая физическая величина характеризует эти волны и изменяется в соответствии с волновым уравнением, каким образом поведение частицы связано со значениями этой величины в различных точках пространства, т.е. как взаимодействуют между собой «волна» и «частица». Заметим, что для одной из частиц – фотона – частота колебаний связана с энергией, а длина волны – с импульсом частицы.

Однако для электронов, протонов, нейтронов и других частиц волны, которые были бы ответственны за дифракцию и в тоже время доступны непосредственному изучению при помощи соответствующей физической аппаратуры, не обнаружены. Отсюда следует, что волны де Бройля (волны частиц) имеют специфическую квантовую природу, не имеющую аналогии в классической физике.

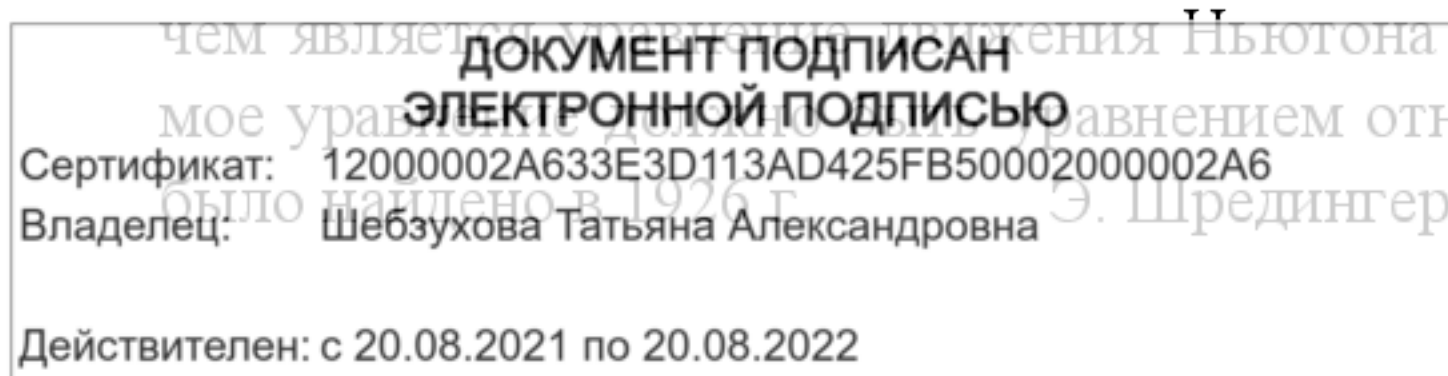
Для описания волновых свойств квантовых частиц введем некоторую функцию $\Psi(x, y, z, t)$, называемую волновой функцией (или пси-функцией). Волны де Бройля получили своеобразное статистическое (вероятностное) истолкование. Физический смысл имеет не сама функция Ψ , а квадрат ее модуля. Величина $|\Psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности

$$\frac{d\omega}{dV} = |\Psi|^2. \quad (20)$$

Из (20) следует: вероятность $d\omega$ того, что частица находится в элементе объема dV , пропорциональна $|\Psi|^2$ и элементу объема dV .

Из вышесказанного следует, что в квантовой физике возникает важнейшая проблема – отыскание такого уравнения движения квантовых частиц, которое явилось бы тем же,

чем является уравнение движения Ньютона для классической механики. При этом искомым относительно функции $\Psi(x, y, z, t)$. Это уравнение было найдено в 1926 г. Э. Шредингером и имеет следующий вид:



$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (21)$$

Здесь $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Дирака, $U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, где частица движется, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, i – мнимая единица.

Из-за присутствия в уравнении (21) мнимой единицы волновые функции Ψ , удовлетворяющие этому уравнению, всегда комплексны. Поэтому сами эти функции не наблюдаемы. Измеримы только квантовомеханические вероятности, всегда содержащие функции Ψ в произведениях совместно с комплексно сопряженными им величинами.

Уравнение (21) справедливо для любой частицы, движущейся со скоростью $v \ll c$. В релятивистской области движения при $v \sim c$ уравнение Шредингера заменяется более сложным уравнением Дирака.

Уравнение (21) называют нестационарным (временным) уравнением Шредингера, ибо оно содержит производную от функции Ψ по времени. Однако для большого числа физических явлений, происходящих в микромире, например, для описания поведения электронов в атоме, в ряде случаев важно находить стационарные решения уравнения Шредингера, не содержащие времени. В этом уравнении должна быть исключена зависимость Ψ от времени.

Стационарное уравнение Шредингера обычно записывают в форме

$$\Delta \Psi + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0. \quad (22)$$

Здесь E – полная энергия частицы, $\Psi = \Psi(x, y, z)$.

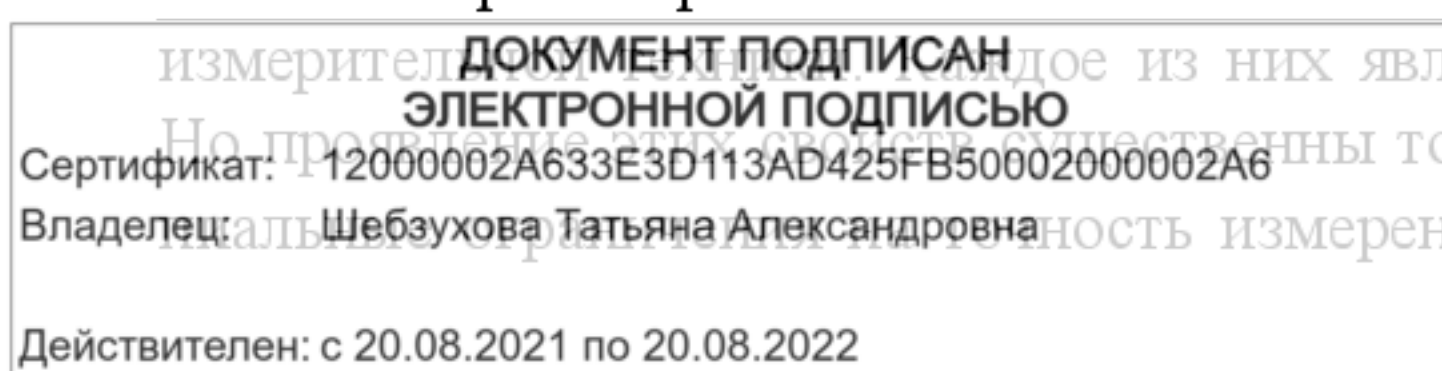
Уравнение (22) является важнейшим соотношением нерелятивистской квантовой физики, играющим основную роль в атомной физике.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно. Всегда есть некоторая ошибка измерений. Ошибка называется также неточностью или неопределенностью, причем последний термин используется преимущественно только в квантовой физике.

В классической физике не было принципиальных ограничений на точность измерений. Считалось, что при достаточно совершенной аппаратуре все величины, характеризующие физическую систему, могут быть измерены со сколь угодно точностью. Этот взгляд подтверждался всеми опытными фактами макроскопической физики. Но, как выяснилось, для микроскопических систем неограниченное повышение точности измерений имеет место не всегда. В ряде случаев существуют принципиальные ограничения на точность измерения физических величин. Эти ограничения не определяются совершенством

измерительных приборов. Каждое из них является фундаментальным свойством материи. Но проявление этих свойств существенно только в микроскопических системах. Принципиальные ограничения на точность измерения физических величин называются соотно-



шениями неопределенностей. Впервые они были сформулированы в 1927 г. В. Гейзенбергом.

Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей.

Первое ограничивает точность одновременного измерения координат частицы и соответствующих компонент ее импульса. Эти соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta P_x &\geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta y \Delta P_y &\geq \frac{\hbar}{2}, \\ \Delta z \Delta P_z &\geq \frac{\hbar}{2}.\end{aligned}\quad (23)$$

Второе соотношение устанавливает предел точности измерения энергии за данный промежуток времени. Оно имеет вид

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (24)$$

где Δt – длительность измерения энергии, а ΔE – ее неопределенность.

Соотношения (23) означают, что если, например, местоположение частицы по координатной оси x известно с точностью Δx , то в тот же момент времени x компоненту импульса частицы можно измерить только с точностью $\Delta P_x \approx \hbar/\Delta x$. Согласно (24) для измерения энергии с точностью до ΔE необходимо время, не меньшее чем $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Отличие $\hbar$ от нуля исключает обращение в нуль неопределенностей в импульсе и энергии при заданных Δx и Δt . Только переход к классической физике, при котором $\hbar \rightarrow 0$, снимает ограничения на точность измерений.

Соотношения неопределенностей являются следствием объективно существующей двойственности частиц микромира – наличия у них корпускулярных и волновых свойств. Эти соотношения свидетельствуют об объективно существующих ограничениях в возможности описания поведения микрообъектов с помощью, например, классических понятий координат и импульсов. В частности, эти соотношения исключают движение квантовых частиц по траекториям, т.к. для существования траектории требуется, чтобы одновременно можно было точно задать x и v_x (т.е. P_x). Но именно это и запрещается соотношением неопределенностей.

Примеры решения задач

Задача 1. Получить формулу для радиусов орбит электрона в атоме водорода и вычислить радиус первой орбиты (первый боровский радиус), а также скорость электрона на этой орбите.

Решение.

Из первого постулата Бора имеем

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

$$m v r = n \frac{h}{2\pi},$$

где m – масса электрона, v – его скорость, r – радиус орбиты, h – постоянная Планка.

$$\text{Для первой орбиты } n=1, \text{ и поэтому } m v r = \frac{h}{2\pi}. \quad (1)$$

Сила кулоновского притяжения электрон-ядро является центростремительной силой, поэтому из второго закона Ньютона имеем

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \quad \text{или} \quad m v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (2)$$

где e – заряд электрона.

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

Из формулы (1) получим, что

$$v = \frac{h}{2\pi m r} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Задача 2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) $U_1 = 51 \text{ В}$; 2) $U_2 = 510 \text{ кВ}$.

Дано:	Решение. Работа сил электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона
$U_1 = 51 \text{ В}$	$A = \Delta K = K_2 - K_1$. Здесь $A = eU$, а $\Delta K = K_2 = K$, так как $K_1 = 0$,
$U_2 = 510 \text{ кВ}$	то есть $K = eU$.
$\lambda_1, \lambda_2 - ?$	

Теперь необходимо определить характер движения электрона, нерелятивистский или релятивистский

$$E_0 = m_0 c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,51 \text{ МэВ}.$$

В первом случае $K_1 = eU_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 = 8,16 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 51 \text{ эВ}$. Во втором случае $K_2 = eU_2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,1 \cdot 10^5 = 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 51 \cdot 10^4 \text{ эВ} = 0,51 \text{ МэВ}$.

Следовательно: в первом случае $K_1 \ll E_0$ – нерелятивистское движение электрона и его длину волны де Бройля λ_1 необходимо рассчитывать по формуле (3), во втором случае $K_2 \approx E_0$ – релятивистское движение и λ_2 рассчитывается по формуле (4).

Принимая во внимание то, что $K_1 = 0,51 \cdot 10^{-4} \text{ МэВ} = 10^{-4} E_0$, а $K_2 = E_0$, рассчитаем λ_1

и λ_2 .

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K_1}} = \frac{h}{\sqrt{2 \frac{E_0}{c^2} 10^{-4} E_0}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{hc}{E_0} =$$

$$= \frac{10^2 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{2} \cdot 8,19 \cdot 10^{-14}} = 1,71 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 171 \text{ нм}.$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{K_2(2E_0 + K_2)}} = \frac{hc}{\sqrt{E_0(2E_0 + E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{3}E_0} =$$

$$= \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{3} \cdot 8,19 \cdot 10^{-14}} = 1,40 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 1,40 \text{ нм}.$$

Задача 3. Волновая функция $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике

шириной l . Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале $\Delta l = 0,01l$ в двух случаях: 1) вблизи стенки ($0 \leq x \leq \Delta l$); в средней части ящика ($\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}$.)

Дано:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

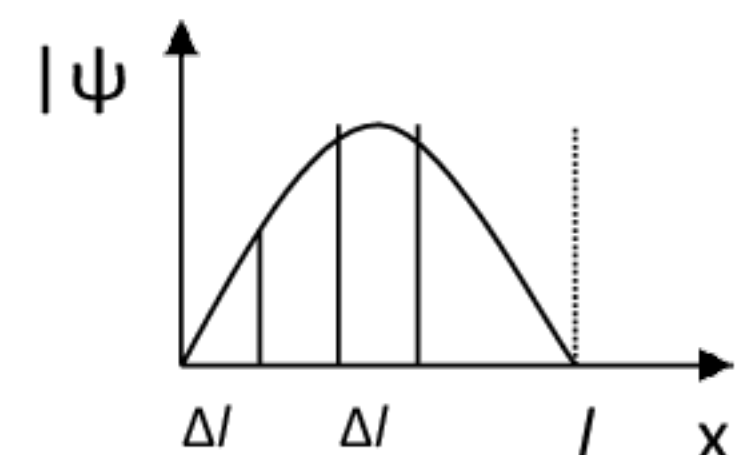
$$\Delta l = 0,01l$$

ω - ?

Решение. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале dx , согласно соотношению (5) запишется в виде: $d\omega = |\Psi|^2 dV$. В первом случае вероятность найдется интегрированием в пределах от

$$0 \text{ до } 0,01l: \quad \omega_1 = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx.$$

Знак модуля опущен, т.к. Ψ - функция, в данном случае, не является комплексной. Так как x изменяется в интервале ($0 \leq x \leq 0,01l$) и,



следовательно, $\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) \approx \left(\frac{\pi}{l}x\right)^2 \ll 1$, справедливо приближенное равенство $\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) \approx \left(\frac{\pi}{l}x\right)^2$. С учетом этого искомая вероятность примет вид:

$$\omega_1 = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \left(\frac{\pi}{l}x\right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0,01l} = \frac{2\pi^2}{3} 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Документ подписан ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Вероятность нахождения частицы без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции близок к максимуму в заданном малом интервале ($\Delta l = 0,01l$) практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$\omega_2 = \left| \Psi \left(\frac{l}{2} \right) \right|^2 \Delta x = \frac{2}{l} \sin^2 \left(\frac{\pi l}{2} \right) \Delta l = \frac{2}{l} \cdot 1^2 \cdot 0,01l = 0,02.$$

Из сравнения видно, что $\omega_1 \ll \omega_2$ и, следовательно, частица с наибольшей вероятностью находится в средней части ящика.

Задача 4. Кинетическая энергия K электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

Дано:	Решение. Для решения воспользуемся соотношением неопределенностей (8) $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar$. Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется
$K = 10$ эВ	
$l - ?$	

положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а, следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде:

$$\frac{l}{2} \cdot \Delta P_x \geq \hbar,$$

откуда

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta P_x}.$$

Физическая разумная неопределенность импульса ΔP_x , во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса P_x , то есть $\Delta P_x \leq P_x$. Импульс P_x связан с кинетической энергией K соотношением

$$P_x = \sqrt{2m_0 K}.$$

Заменим ΔP_x на P_x (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m_0 K}} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-18}}} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ нм}.$$

Задача 5. Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы длина волны де Бройля протона λ_B равнялась его комптоновской длине волны λ_C ?

Дано:	Решение. Длина волны де Бройля и комптоновская длина волны определяются по формулам: $\lambda_B = h/p$, $\lambda_C = h/m_0 c$.
$\lambda_B = \lambda_C$	
$K - ?$	

Импульс движущегося протона

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\text{Так как } \lambda_D = \lambda_C, \text{ то } p = m_0 c = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

Откуда $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, следовательно $\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}$. Кинетическая энергия протона $K = E - E_0$,

где $E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ - полная энергия протона, $E_0 = m_0 c^2$ - его энергия покоя.

Окончательно

$$\begin{aligned} K &= E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = E_0 (\sqrt{2} - 1) = \\ &= 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0,41 = 6,23 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 389 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Задача 6. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислите минимальную неопределенность длины волны $\lambda = 0,12$ мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

Дано:

$$\Delta t = 12 \text{ нс}$$

$$\lambda = 0,12 \text{ мкм}$$

$$\Delta \lambda - ?$$

Решение. Энергия излучаемого фотона $E = hc/\lambda$. Продифференцируем E по λ :

$$dE = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \text{ или } \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda.$$

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ выразим ΔE . $\Delta E = \frac{h}{2\pi \Delta t}$, здесь ΔE и Δt - неопределенность энергии и времени.

Приравняем выражения для ΔE :

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda = \frac{h}{2\pi \Delta t},$$

откуда

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

$$\Delta \lambda = \frac{1,2^2 \cdot 10^{-14}}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-8}} = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ м}.$$

Задача 7. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $l = 1$ нм. Определите наименьшую разность энергетических уровней электрона.

Дано:
 $l = 1$ нм
 $\Delta E_{\min} - ?$

Решение. Энергия электрона E_n , находящегося в потенциальной яме шириной l , на n -м энергетическом уровне определяется по формуле

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2.$$

Разность $\Delta E_{n,n+1}$ энергий электрона на соседних n и $(n+1)$ -м уровнях равна

$$\Delta E_{n,n+1} = \frac{h^2}{8ml^2} (2n + 1).$$

Очевидно, что ΔE будет минимальна при $n = 1$.

$$\Delta E_{\min} = \frac{3 \cdot 6,63^2 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-18}} = 1,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,1 \text{ эВ}.$$

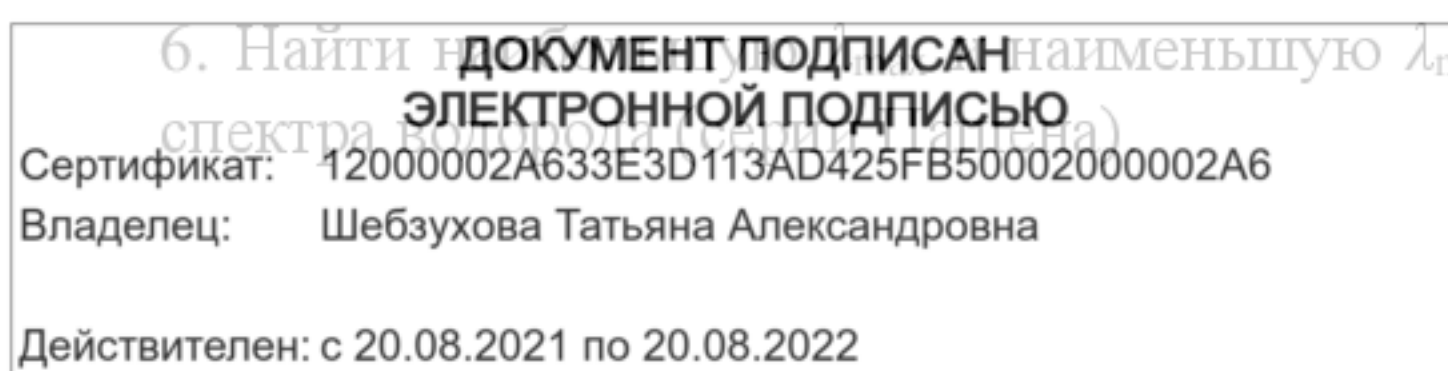
Вопросы и задания.

1. Модели атома Томсона и Резерфорда.
2. Линейчатый спектр атома водорода.
3. Постулаты Бора.
4. Спектр атома водорода по Бору.
5. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм.
6. Соотношение неопределенностей Гейзенберга
7. Уравнение Шредингера.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить радиусы r_2 и r_3 второй и третьей орбит в атоме водорода.
2. Определить скорость v электрона на второй орбите атома водорода.
3. Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.
4. Определить потенциальную U , кинетическую T и полную E энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.
5. Определить длину волны λ , соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.

6. Найти наименьшую длину волны $\lambda_{\min}$ в первой инфракрасной серии спектра водорода (серия Бальмера).



7. Вычислить энергию ε фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.
8. Определить наименьшую $\varepsilon_{\min}$ и наибольшую $\varepsilon_{\max}$ энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).
9. Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только три спектральные линии. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.
10. Фотон с энергией $\varepsilon = 16,5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость U будет иметь электрон вдали от ядра атома?

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

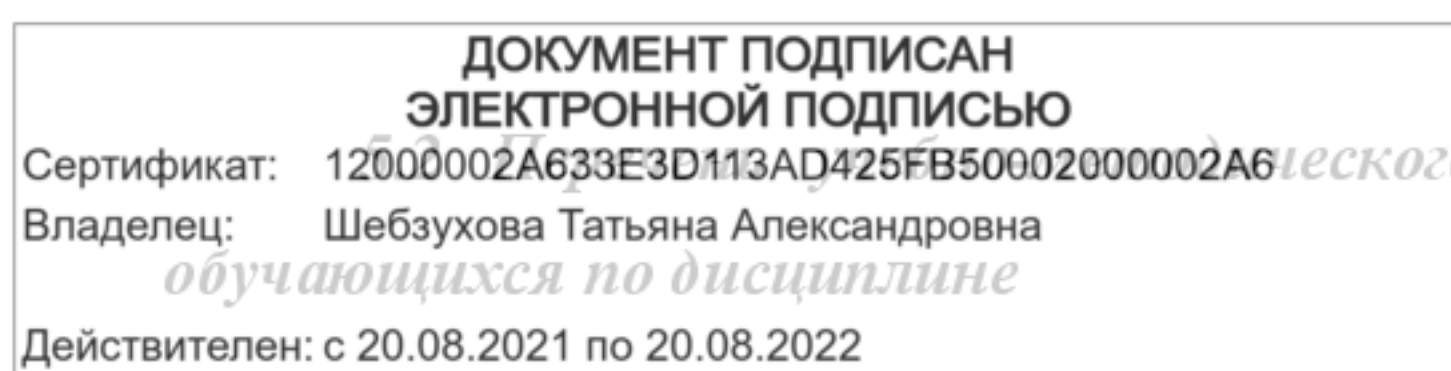
5.1 Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1.2 Перечень основной литературы:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772>
2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732>
3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883>

5.1.3 Перечень дополнительной литературы:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70731.html>
2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287>.



информационного обеспечения самостоятельной работы

1. Методические рекомендации для подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Физика».

2. Методические рекомендации для подготовки к лабораторным занятиям по дисциплине «Физика».

3. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Физика».

5.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

1. <http://www.biblioclub.ru> -ЭБС "Университетская библиотека онлайн"

2. <http://www.iprbookshop.ru/> - Электронно- библиотечная система IPRbooks

3. <http://e.lanbooks.com> - Электронно-библиотечная система Лань

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению лабораторных работ
по дисциплине «ФИЗИКА» для студентов направления подготовки
08.03.01 Строительство, Городское строительство и хозяйство

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

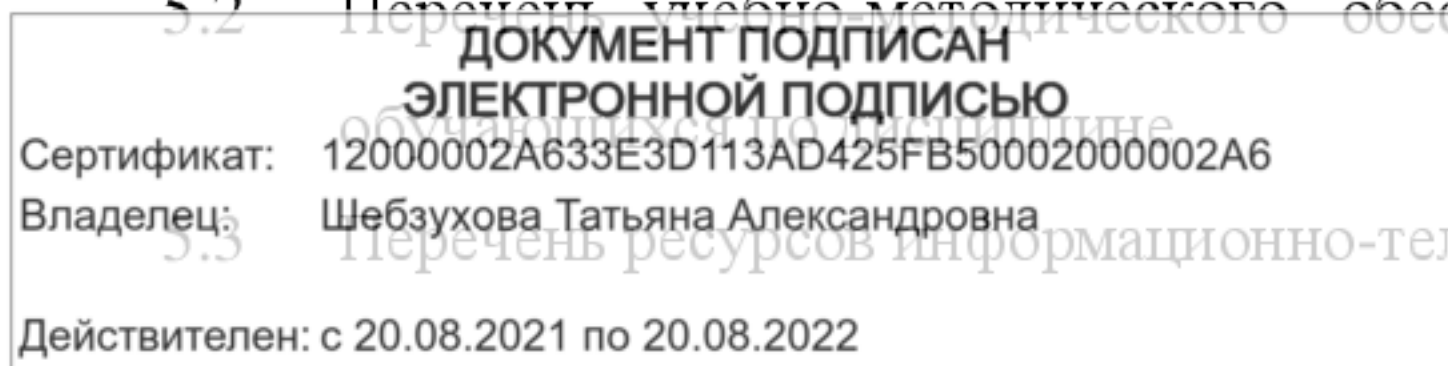
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Содержание

№ п/п	Содержание	Стр.
	Введение	
1.	Цель и задачи изучения дисциплины	
2.	Оборудование и материалы	
3.	Наименование лабораторных работ	
4.	Содержание лабораторных работ	
4.1	Лабораторная работа № 1. Обработка результатов физического эксперимента. Изучение движения тела брошенного под углом к горизонту	
4.2	Лабораторная работа № 2. Изучение законов динамики поступательного и вращательного движений с помощью машины Атвуда	
4.3.	Лабораторная работа №3. Определение скорости полета пули с помощью физического маятника	
4.4	Лабораторная я работа №4. Определение периода колебаний физического маятника	
4.5	Лабораторная работа №5. Определение коэффициента внутреннего трения жидкости методом падающего шарика (метод Стокса).	
4.6	Лабораторная работа №6. Определение отношения удельных теплоемкостей воздуха методом адиабатического расширения	
4.7	Лабораторная работа №7. Изучение электростатического поля .	
4.8	Лабораторная работа №8. Измерение сопротивления с помощью моста Уитстона	
4.9	Лабораторная работа №9. Исследование электрической цепи постоянного тока	
4.10	Лабораторная работа №10. Изучение явления электромагнитной индукции.	
4.11	Лабораторная работа №11. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли	
4.12	Лабораторная работа №12. Исследование колебаний в простом колебательном контуре	
4.13	Лабораторная работа №13. Измерение длины световой волны с помощью дифракционной решётки.	
4.14	Лабораторная работа №14. Изучение внешнего фотоэффекта.	
4.15	Лабораторная работа №15. Изучение энергетического спектра электронов.	
4.16	Лабораторная работа №16. Изучение космического излучения.	
4.17	Лабораторная работа №17. Проверка закона Малюса.	
5	Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1	Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины	
5.2	Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы	



необходимых для освоения дисциплины

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

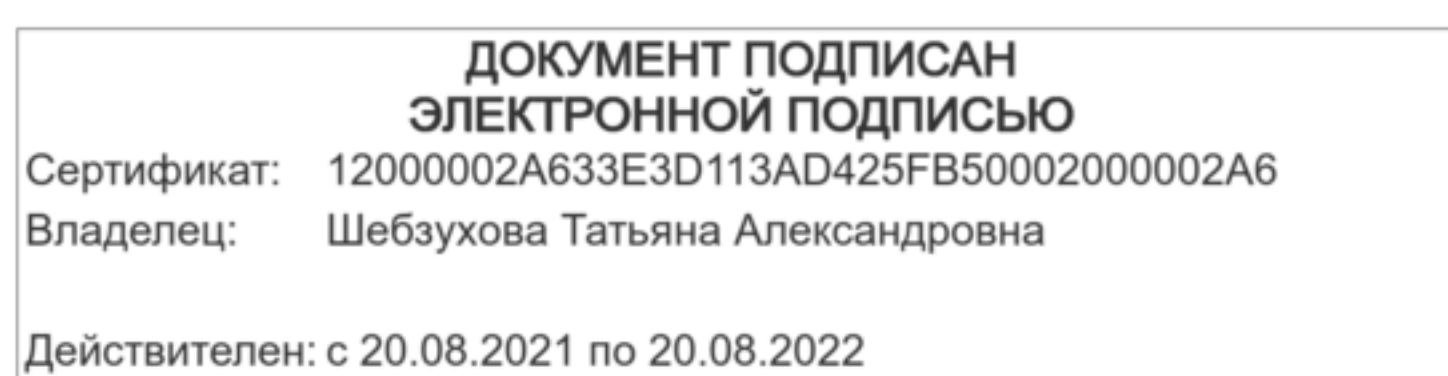
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Введение

Лабораторные занятия создают оптимальные дидактические условия для деятельностного освоения студентами содержания и методологии изучаемой дисциплины «Физика», использование специального лабораторного оборудования и технических средств. Лабораторные занятия занимают преимущественное место при изучении общепрофессиональных и профессиональных дисциплин. Лабораторные занятия проводятся с целью выработки практических умений и приобретения навыков в решении задач, отработки упражнений, выполнении чертежей, производстве расчётов и т.п.

Целью лабораторных занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнять определённые действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных, необходимых в последующей учебной деятельности по общепрофессиональным и профессиональным дисциплинам.

Библиографический список содержит сведения о справочной литературе и дополнительных изданиях, необходимых для углубленного изучения отдельных вопросов.



1. Цель и задачи изучения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Физика» является формирование у студентов компетенций позволяющий выработать навыки физических исследований в сферах академической, профессиональной и общенаучной деятельности.

Задачи освоения дисциплины:

- изучение законов окружающего мира в их взаимосвязи;
- овладение фундаментальными принципами и методами решения научно-технических задач;
- формирование навыков по применению положений фундаментальной физики к грамотному научному анализу ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться при создании новых технологий;
- освоение основных физических теорий, позволяющих описать явления в природе, и пределов применимости этих теорий для решения современных и перспективных технологических задач.

2. Оборудование и материалы

Лабораторный стенд «Скамья Жуковского». Лабораторный стенд «Машина Атвуда». Лабораторный стенд «Маятник Максвелла». Набор демонстрационный «Механические явления». Набор лабораторный «Механика» (расширенный).

Весы технические настольные с разновесами демонстрационный. Набор демонстрационный «Динамика вращательного движения». Трубка Ньютона. Набор демонстрационный «Газовые законы и свойства насыщенных паров». Набор демонстрационный «Молекулярная физика и тепловые явления». Набор демонстрационный «Звуковые колебания и волны». Набор демонстрационный «Динамика вращательного движения». Набор демонстрационный «Газовые законы и свойства насыщенных паров». Набор демонстрационный «Молекулярная физика и тепловые явления».

Комплект учебной мебели.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
1	Лабораторная работа № 1. Обработка результатов физического эксперимента. Изучение зависимости периода колебаний маятника от угла отклонения и графическое представление экспериментальных данных.		

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

	результатов. Подтвердить на опыте справедливость формул кинематики.		
2	Лабораторная работа № 2 Изучение законов динамики поступательного движения с помощью машины Атвуда. Проверка законов поступательного движения с помощью машины Атвуда.	1,5	
3	Лабораторная работа № 3. Определение скорости полета пули с помощью физического маятника. Научиться определять скорость полета пули с помощью физического маятника.		
4	Лабораторная работа № 4. Определение периода колебаний физического маятника. Определение скорости полета пули с помощью физического маятника.		
5	Лабораторная работа № 5. Определение коэффициента внутреннего трения жидкости методом падающего шарика (метод Стокса). Познакомиться с методом измерения вязкости жидкой среды.		
6	Лабораторная работа № 6. Определение отношения удельных теплоемкостей воздуха методом адиабатического расширения. Изучить газовые законы, первый закон термодинамики и понятие теплоёмкости. Определить отношение теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме (коэффициент Пуассона) в условиях, близких к нормальным.		
7	Лабораторная работа № 7. Изучение электростатического поля. Изучение электростатического поля; построение эквипотенциальных поверхностей поля.		
8	Лабораторная работа № 8. Измерение сопротивления с помощью моста Уитстона. Целью работы является изучение метода измерения сопротивления проводников с помощью мостовой схемы и определение удельного сопротивления материала проводника.		
9	Лабораторная работа № 9. Исследование электрической цепи постоянного тока. Изучение зависимости силы тока, напряжения, полной, полезной мощности и к.п.д. от сопротивления нагрузки.	1,5	
Итого за 1 семестр:		3	
Итого за 2 семестр:			
10	Лабораторная работа № 10. Изучение яв-		

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

	ления электромагнитной индукции. Изучение электрических токов возникающих при явлении электромагнитной индукции.		
11	Лабораторная работа № 11. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.	1,5	
12	Лабораторная работа № 12. Исследование колебаний в колебательном контуре. Изучение затухающих электрических колебаний колебательном контуре.	1,5	
13	Лабораторная работа № 13. Определение удельного заряда электрона методом магнетрона. Изучение движений зарядов в электрических и магнитных полях, измерение удельного заряда электрона.		
14	Лабораторная работа № 14. Измерение длины световой волны с помощью дифракционной решётки. Познакомится с явлением дифракции света в параллельных лучах дифракционной решетки.		
15	Лабораторная работа № 15. Проверка закона Малюса. Проверить выполнение закона Малюса.		
16	Лабораторная работа № 16. Изучение внешнего фотоэффекта. Определение скорости полета пули с помощью физического маятника.		
17	Лабораторная работа № 17. Изучение энергетического спектра электронов. Определение длины пробега элементарных частиц в воздухе при атмосферном давлении и определение максимальной энергии бета-частиц при помощи метода поглощения.		
Итого за 2 семестр		3	
Итого		6	

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

4. Содержание лабораторных работ

Лабораторная работа № 1

Тема работы. Обработка результатов физического эксперимента. Изучение движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Цель работы. Изучить методы количественного и графического представления экспериментальных результатов. Подтвердить на опыте справедливость формул кинематики.

Теоретическая часть.

Классификация погрешностей

Истинное значение физической величины абсолютно точно определить нельзя. При измерениях физических величин под действием самых разнообразных причин возникают *погрешности* измерений. Все погрешности принято разделять на *систематические*, *случайные* и *промахи* (ошибки).

Систематической называют такую погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины. Такие погрешности появляются вследствие неисправности приборов, неточности метода исследования, каких-либо упущений экспериментатора, а также при использовании для вычислений неточных зависимостей (формул), констант и т.д.

Случайной называется погрешность, которая вызывается действием не поддающихся контролю многочисленных, независимых друг от друга факторов. Значение случайной погрешности колеблется от одного измерения к другому, что делает невозможным точное предсказание результата в каждом отдельном измерении. Однако при рассмотрении повторных измерений обнаруживается характерная закономерность результатов, их определенная устойчивость, которая и служит основой для математической обработки опытных данных, вычисления случайных погрешностей.

Промахом или *ошибкой* называют такую погрешность измерения, которая оказывается значительно больше ожидаемой при данных условиях. Ошибка обязательно должна быть исключена из результатов измерений.

Определение погрешностей при прямых измерениях

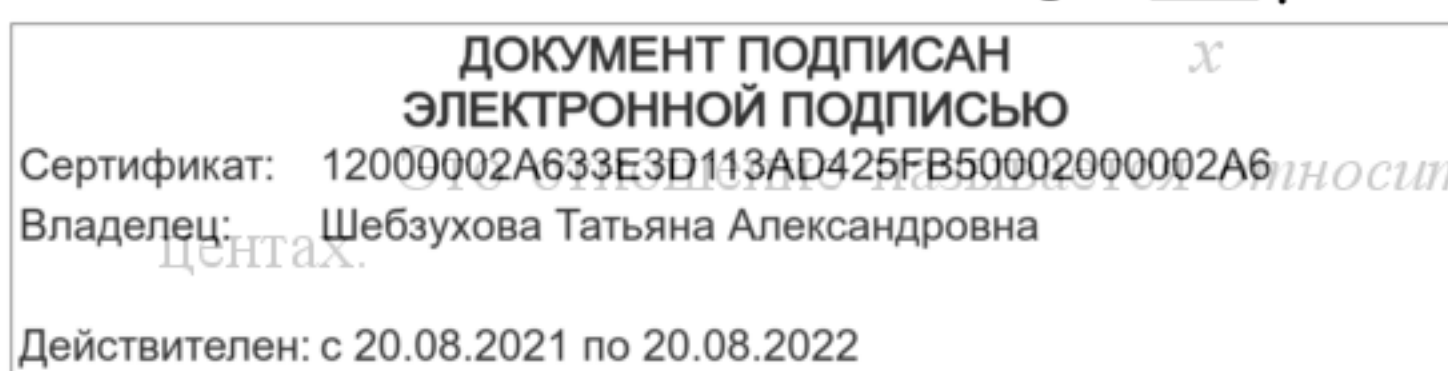
Прямыми называют такие измерения, при которых физическая величина измеряется непосредственно при помощи прибора.

Пусть x – действительное значение измеряемой величины, а x_1 – показания прибора. Абсолютной погрешностью называется величина

$$|\Delta x| = |x_1 - x|. \quad (1)$$

Точность измерения характеризуется отношением абсолютной погрешности к действительному значению измеряемой величины

$$\varepsilon = \frac{|\Delta x|}{x}. \quad (2)$$



относительной погрешностью и выражается в про-

Погрешности, допускаемые при прямых измерениях, нередко называются *приборными*, так как обусловлены классом точности прибора, который указывается либо на самом приборе, либо в паспорте. В тех случаях, когда на приборе класс точности не указан, абсолютная погрешность принимается равной половине цены деления.

Случайные погрешности имеют статистический характер, их математическая обработка производится с помощью теории вероятностей. При многократном измерении равновероятно получить результат как больший, так и меньший, чем истинное значение измеряемой величины.

Пусть проведено n измерений величины x и в результате получено n значений: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Величина

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (3)$$

называется *средним арифметическим* значением, является хорошим приближением к истинному значению измеряемой величины и, как правило, используется как окончательный итог серии измерений.

Рассмотрим несколько основных этапов упрощенной математической обработки результатов измерений.

1. Находим среднее арифметическое значение измеряемой величины $\langle x \rangle$.
2. Вычисляем абсолютные погрешности результатов отдельных измерений

$$|\Delta x_i| = |x_i - \langle x \rangle| \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Абсолютная погрешность имеет размерность измеряемой величины и характеризует качество отдельных измерений.

3. Вычисляем среднюю абсолютную погрешность

$$|\langle \Delta x \rangle| = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta x_i|}{n}. \quad (5)$$

4. Вычисляем относительную погрешность

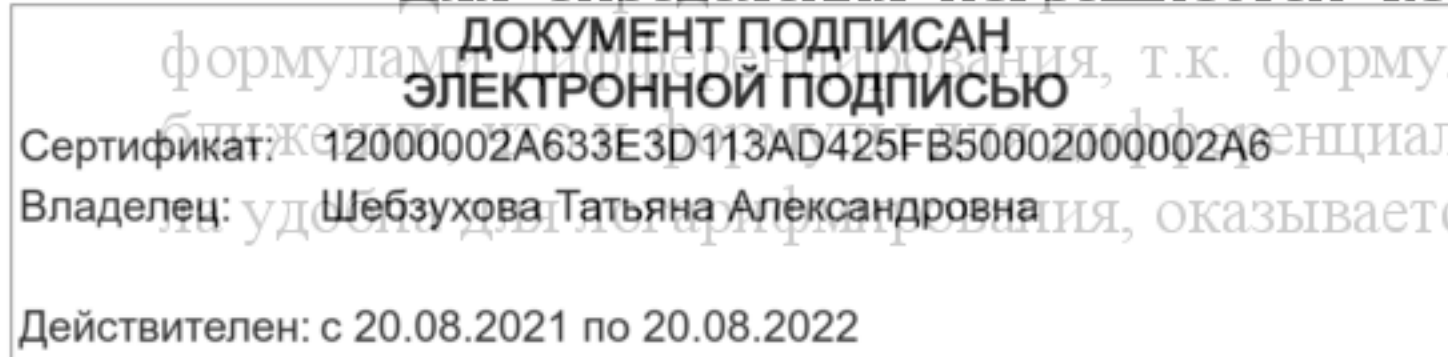
$$\varepsilon = \left| \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \right| \cdot 100\%. \quad (6)$$

5. Записываем окончательный результат $x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle$. (7)

Определение погрешностей при косвенных измерениях

В большинстве случаев при проведении физических экспериментов исследуемая физическая величина не может быть измерена непосредственно, для ее определения требуется измерить ряд других величин, а искомую найти, подставив найденные значения в формулу, выражающую зависимость искомой величины от непосредственно измеряемых величин. Такие измерения называют косвенными.

Для определения погрешностей косвенных измерений можно воспользоваться



формулам дифференцирования, т.к. формулы погрешностей получаются в том же при-
близжении. Во многих случаях, когда форму-
лы погрешностей получаются в том же при-
близжении, оказывается более удобной формула относительной по-

грешности. Относительная погрешность $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$, но $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$ и, следовательно,
 $\Delta(\ln x) = \frac{\Delta x}{x}$.

Иначе говоря, относительную погрешность можно рассчитать, если взять дифференциал натурального логарифма, определяющий зависимость данной величины от измеряемых величин. Наиболее часто встречающиеся формулы приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Математическая операция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$x+y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$x-y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
xy	$y\Delta x + x\Delta y$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
xyz	$yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$
x/y	$\frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
x^n	$nx^{n-1} \cdot \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x$	$\frac{1}{n} \frac{\Delta x}{x}$
$\frac{x}{1 \pm x}$	$\frac{\Delta x}{(1 \pm x)^2}$	$\frac{\Delta x}{x(1 \pm x)}$
e^x	$e^x \Delta x$	Δx
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$
$\sin x$	$\cos x \Delta x$	$ctgx \cdot \Delta x$
$\cos x$	$-\sin x \Delta x$	$tgx \cdot \Delta x$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

tgx	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$ctgx$	$\frac{\Delta x}{\sin^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$

Изучение движения тела, брошенного под углом к горизонту

Тело, брошенное под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$, будет двигаться по криволинейной траектории, в любой точке которой вектор скорости может быть разложен на две составляющие – горизонтальную и вертикальную (рис.1).

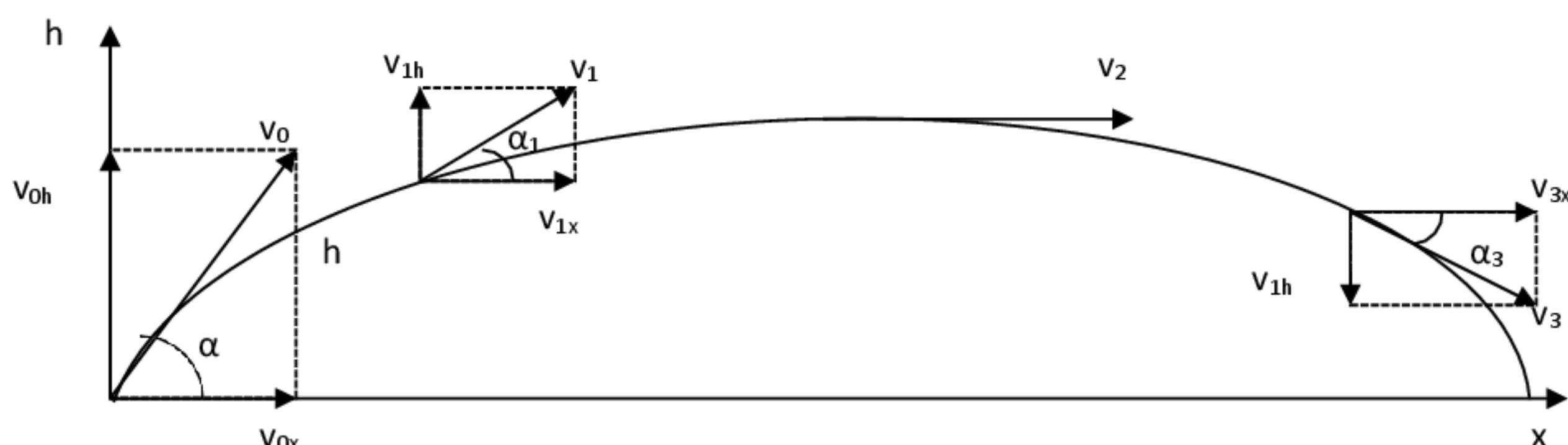


Рис.1.

Проекции этих векторов на оси координат, начало которых выбрано в точке бросания, равны:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y &= v_0 \cdot \sin \alpha - gt \end{aligned} \quad (1)$$

При этом горизонтальная составляющая скорости не будет меняться с течением времени, т. к. ускорение свободного падения не имеет горизонтальной составляющей, а направленно вертикально вниз. Вертикальная составляющая скорости будет меняться по закону равнопеременного движения с ускорением $a = g$.

Изменение координат тела имеет вид.

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y = h &= v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

направление ее составляет тот же угол, что и в точке бросания. Это следует из симметрии параболы и имеет место в отсутствие сопротивления воздуха.

Начальную скорость тела, брошенного под углом к горизонту можно определить из уравнения (1).

$$v_0 = \frac{l}{\cos \alpha \cdot t} \quad (3)$$

Где l - дальность полета - изменение положения тела по оси x .

Время полета можно определить из уравнения (2). В наивысшей точке траектории движения тела скорость $v_y=0$. Время, соответствующее этому моменту, составляет половину всего времени полета тела, тогда

$$0 = v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{gt}{2},$$

отсюда время полета тела

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{l \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cos \alpha}} \quad (5)$$

Основной задачей механики является определение положения тела в пространстве в любой момент времени. Зная координаты тела всегда можно найти его скорости и ускорения (по определению этих величин). Основными законами, связывающими эти величины, силы и массу тела являются законы Ньютона и законы сохранения.

Оборудование и материалы.

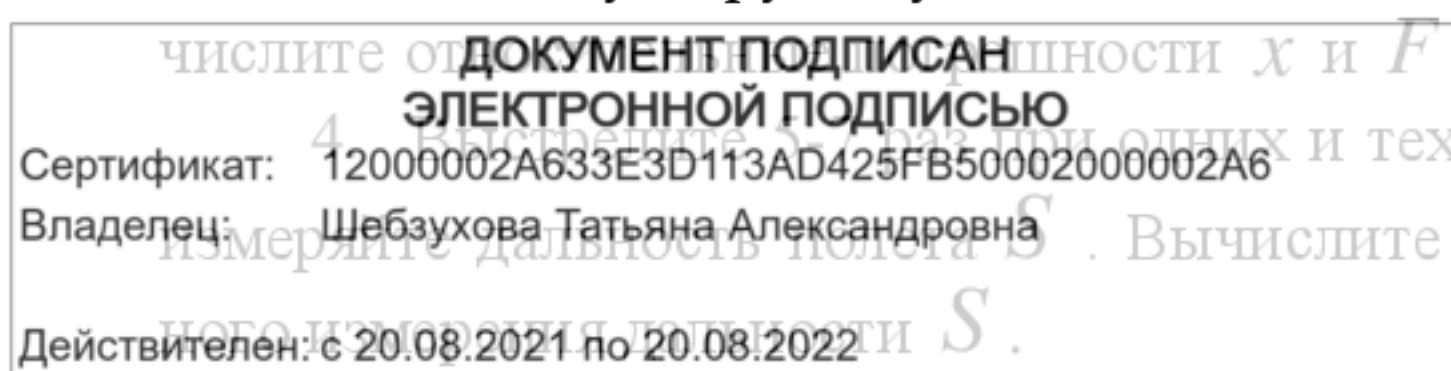
Установка, состоящая из пружинного пистолета с шариком и линейки.

Указания по технике безопасности.

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. При выполнении лабораторных работ с применением полетов баллистических тел не следует находиться в области полета тела.
5. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
6. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

Задания.

1. Определите взвешиванием массу шарика m . Вычислите относительную погрешность массы m .
2. Закрепите пистолет на высоте h под углом α . Вычислите относительные погрешности высоты h и угла α .
3. Растянув пружину пистолета на x см, определите по динамометру силу F . Вы-



же значениях x и F . При каждом выстреле вычисляйте дальность полета S . Вычислите относительную погрешность непосред-

5. Вычислите:

- а) коэффициент жесткости пружины пистолета k ;
- б) начальную скорость полета шарика U_0 ;
- в) вертикальную составляющую начальной скорости U_{0y} ;
- г) вертикальную составляющую конечной скорости U_y ;
- д) горизонтальную составляющую начальной скорости U_{0x} ;
- е) горизонтальную составляющую конечной скорости U_x .

6. Вычислите дальность полета по и сравните со значением, полученным в пункте 4.

7. Вычислите изменение импульса шарика за время полета $|\Delta p|$. Вычислите силу, изменившую импульс шарика за время полета.

8. Сравните значения потенциальной энергии сжатой пружины, начальной кинетической энергии шарика и конечной энергии шарика.

Содержание отчета.

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте принцип суперпозиции движений. Где он применяется?
2. Выведите уравнение для определения полета шарика, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью U_0 .
3. Выведите максимальную высоту подъема шарика, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью U_0 .
4. Выведите уравнение дальности полета шарика, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью U_0 .
5. Под каким углом надо бросить тело, чтобы дальность полета была максимальна? При каком угле бросания высота полета равна его дальности?

Лабораторная работа № 2

Тема работы. Изучение законов динамики поступательного движения с помощью машины Атвуда

Цель работы. Проверка законов поступательного движения с помощью машины

Атвуда.	ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

Поступательным движением называют движение, при котором любая линия, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. При таком движении траектории, скорость и ускорения точек тела совпадают. Следовательно, движение тела можно заменить движением его одной точки. Чаще всего, выбирают движение центра тяжести тела.

Основное уравнение поступательного движения, (второй закон Ньютона) имеет вид:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$$

где m – масса, $\vec{a}$ – ускорение тела, $\sum \vec{F}$ – сумма сил, действующих на тело.

Вращательным движением называют движение, при котором точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Основное уравнение вращательного движения (второй закон Ньютона) имеет вид:

$$I \cdot \vec{\epsilon} = \sum \vec{M},$$

Где $I_i = m_i \cdot r_i^2$ – момент инерции материальной точки, момент инерции вращающегося тела, равен сумме моментов инерции всех материальных точек этого тела: $I = \sum I_i$

$\sum \vec{M}$ – сумма моментов сил, действующих на тело. Момент силы – величина равная произведению модуля силы на плечо этой силы. Плечом силы называют кратчайшее расстояние от оси (центра) вращения до линии действия силы.

Машина Атвуда (рис.1) представляет собой блок радиуса R , через который перекинута нить с грузами m_1 и m_2 . Если $m_2 > m_1$, то, учитывая, что нить нерастяжима, грузы придут в движение с одинаковым ускорением a . Блок будет вращаться с угловым ускорением $\vec{\epsilon}$, точки на его ободе будут иметь тангенциальное ускорение равное ускорению грузов. Уравнения движения грузов и блока, принимая направление движения по оси Ox , будут иметь вид:

$$T_1 - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \quad (2)$$

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot R - M_{тр} = I \cdot \epsilon \quad (3)$$

Где T_1 и T_2 – силы натяжения нити слева и справа от блока, $M_{тр}$ – момент силы трения, угловое ускорение $\epsilon = a/R$.

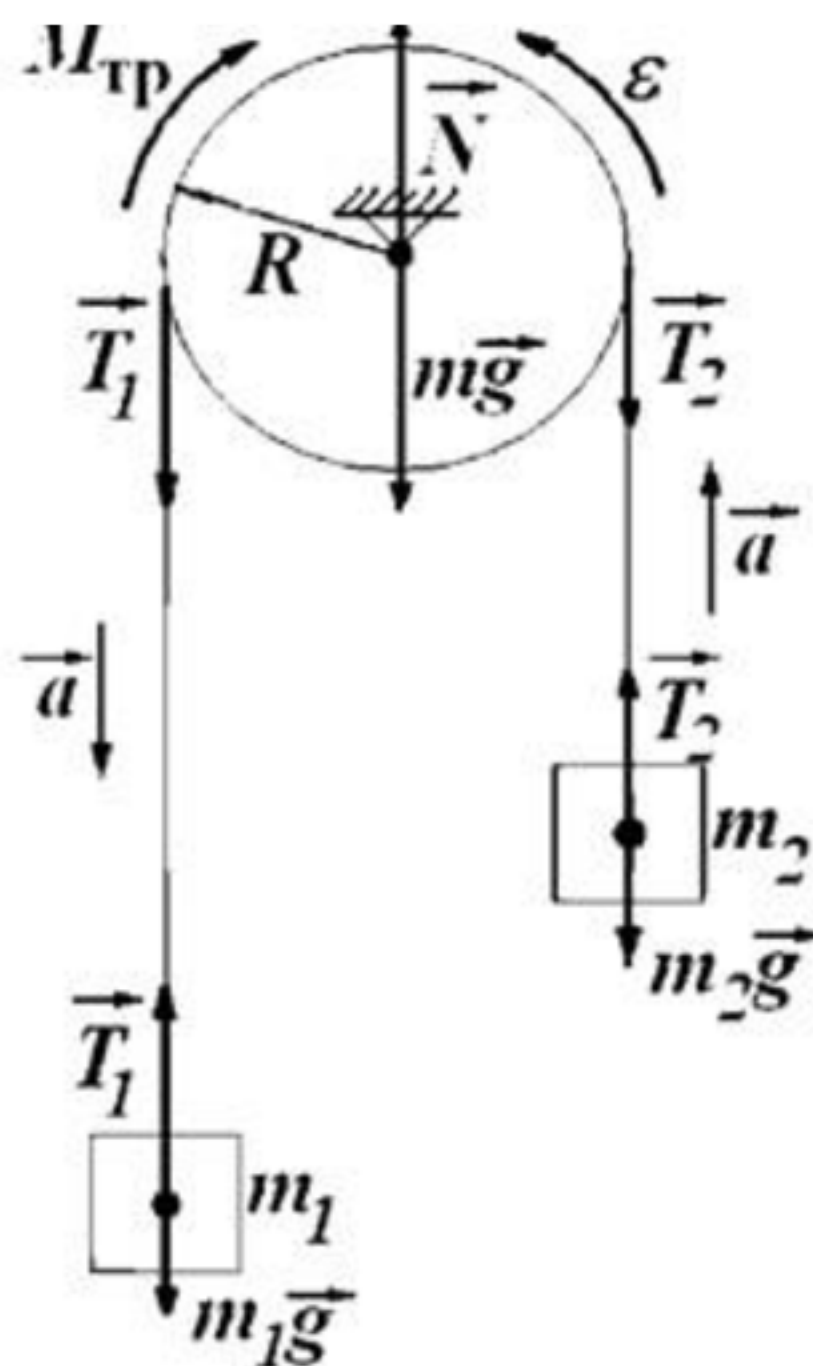


Рисунок 1 - машина Атвуда.

Описание установки, вывод расчетных формул

Общий вид установки приведён на рисунке 2. На вертикальной стойке 1 расположены три кронштейна: нижний 2, средний 3, верхний 4.

На верхнем кронштейне 4 крепится блок, через который перекинута нить с грузами 5, одинаковой массы. Внизу находится электромагнит, который при подаче на него напряжения удерживает систему с грузами в неподвижном состоянии.

На вертикальной стойке 1 укреплена сантиметровая линейка 8, по которой определяют начальное и конечное положение грузов, а, следовательно, и пройденный путь. Начальное положение определяют визуально по нижнему срезу груза, конечное - по индексу (красная метка) среднего кронштейна.

Секундомер с цифровой индикацией времени закреплён на основании прибора. Принцип работы прибора заключается в следующем. Когда на концах нити висят грузы одинаковой массы $m_1 = 100$ г, система находится в равновесии. Если на один из грузов положить перегрузок массой Δm , ($m_2 = m_1 + \Delta m$) система выходит из равновесия и движется равноускоренно. Масса блока равна 102 грамма, радиус блока равен 7 см, момент инерции блока равен половине произведения массы его и квадрата его радиуса (как сплошного диска).

При равноускоренном движении ускорение грузов можно найти из известного соотношения

$$S = \frac{gt^2}{2}$$

значение ускорения найдем через известный

При проведении опыта с одними значениями пройденного пути S и m и массы перегрузки Δm_1 из первых двух уравнений системы можно определить силы натяжения нитей:

$$T_1 = m_1 \cdot (a + g)$$

$$T_2 = m_2 \cdot (a + g)$$

Зная силы натяжения третьего уравнения можно найти момент сил трения:

$$M_{тр} = (T_2 - T_1) \cdot R - I \cdot \varepsilon$$

Опыт с одними перегрузками провести для двух значений S (0,6 м и 0,8 м). Сравнить значения сил напряжения и моменты сил трения для этих двух серий момента.

Оборудование и материалы.

Машина Атвуда, электромагнит, секундомер, набор перегрузов.

Указания по технике безопасности.

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
5. Проявлять осторожность и аккуратность при непосредственной работе с грузами, пружинами и иными необходимыми для работы приспособлениями.
6. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

Задания.

1. Включить в сеть шнур питания прибора.
2. Переместить нить с грузами так, чтобы правый груз занял верхнее положение.
3. Включить электромагнит, удерживающий систему в положении покоя.
4. Положить на правый груз один из перегрузков. Установить средний кронштейн на отметке $h_1 = 0,6$ м, или 0,8 м. Включить секундомер одновременно с выключением электромагнита.
5. Записать по показаниям секундомера время движения груза.
6. Повторить опыт с выбранным перегрузком не менее пяти раз.
7. Повторить опыт при другой высоте. h_2 .
8. Определить по результатам опыта среднее значение времени t_{cp} и рассчитать по формуле значение ускорения.
9. Вычислить силы натяжения нитей и момент силы трения.
10. По данным опыта с одним значением S вычислять кинетическую энергию грузов в конечный момент движения

$$K_{cp} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot 2 \cdot S^2}{t^2}$$

11. Вычислить кинетическую энергию блока

$$K_{bl} = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{m \cdot R^2 \cdot v^2}{2 \cdot 2 \cdot R^2} = \frac{m \cdot v^2}{4} = \frac{m \cdot S^2}{t^2}$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Вычислить изменение потенциальной энергии грузов