

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
федерального университета
Дата подписания: 23.08.2023 17:06:59
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине «**Математика**»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск
2022

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Цель и задачи изучения дисциплины	3
2. Оборудование и материалы	3
3. Наименование практических работ	3
4. Содержание практических работ	4
Практическая работа №1	4
Практическая работа №2	14
Практическая работа №3	18
Практическая работа №4	24
Практическая работа №5	25
Практическая работа №6	28
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	33

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки **13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения дисциплины студенты должны:

Знать: основные понятия аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов.

Уметь: эффективно использовать методы аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

Владеть: навыками использования методов аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Математика» проводятся в компьютерном классе с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
1	Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Разложение матрицы по определителям. Обратная матрица.	1,5	1,5
2	Производные элементарных функций. Основные правила дифференцирования.	1,5	1,5

	Дифференцирование сложной и обратной функций.		
12	Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	1,5	1,5
Итого за 1 семестр		4,5	4,5
2 семестр			
22	Знакопеременные и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.	1,5	1,5
24	Вариационные ряды и их графическое изображение. Выборочный метод.	1,5	1,5
26	Статистическая проверка гипотез.	1,5	3
Итого за 2 семестр		4,5	4,5
Итого:		9	9

4. Содержание практических работ

Практическая работа № 1. Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.

Цель: выработать умение применять алгоритм выполнения действий над матрицами и вычисления ранга матрицы и применять умения для решения практических задач; выработать умение применять алгоритмы вычисления определителя n -го порядка и обратной матрицы и применять умение для решения практических задач.

Теоретическая часть

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется **матрицей** и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Сложение матриц.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5+(-3) \\ 4+1 & 1+(-2) & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью $B - A$ матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X , что

$$A + X = B.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица O , все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A .

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α , надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha a_{ij} \|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A .

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i -ой строке и j -ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы B на соответствующие элементы j -го столбца матрицы A .

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Рассмотрим некоторую, не обязательно квадратную матрицу A . Выберем какие-нибудь S номеров строк $i_1, i_2, \dots, i_S$ и S номеров столбцов $j_1, j_2, \dots, j_S$.

Определение. *Минором порядка S* матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка S , образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M_{\substack{i_1 \dots i_s \\ j_1 \dots j_s}} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка s , сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, \dots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_s$.

Определение. В матрице A размеров $m \times n$ минор порядка s называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $s+1$ равны нулю или миноров порядка $s+1$ у матрицы A вообще нет.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $s+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $s+2$, а, следовательно, и всех больших порядков.

Определение. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m \times n$ справедливо соотношение $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

Рассмотрим способы вычисления ранга матрицы:

а) *Метод окаймляющих миноров*

Пусть в матрице найден минор M k -го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$ -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M : если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$ -го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Существует только один минор

третьего порядка, окаймляющий выбранный минор M_2 . Вычислим его.

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 7 \cdot (-2) -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot (-3) - 4 \cdot 7 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 7 = -35 - 24 - 42 + 45 + 28 + 28 = 0.$$

Значит, минор M_2 базисный, а ранг матрицы равен его порядку, т.е. $r(A) = 2$.

Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) Метод элементарных преобразований

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют следующие преобразования:

- 1) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одной строке другой строки;
- 3) перестановку строк;
- 4) такие же преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Теорема. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A) = r$.

В самом деле, $r(A) = r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга).

Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r :

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r + 1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B . Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B .

Пример: Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение: Поменяем местами первую и вторую строку (т.к. первый элемент второй строки -1 и с ней будет удобно выполнять преобразования). В результате получим матрицу, эквивалентную данной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обозначим i -тую строку матрицы – C_i . Нам необходимо привести исходную матрицу к треугольному виду. Первую строку будем считать ведущей, она будет участвовать во всех преобразованиях, но сама остается без изменений.

На первом этапе выполним преобразования, позволяющие получить в первом столбце нули, кроме первого элемента. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2 ($C_2 - 2C_1$), к третьей строке прибавим первую ($C_3 + C_1$), а из третьей вычтем первую, умноженную на 3 ($C_3 - 3C_1$). Получаем матрицу, ранг которой совпадает с рангом данной матрицы. Обозначим ее той же буквой A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую. При этом имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получена матрица треугольного вида, и можно сделать вывод, что $r(A) = 2$, т. е. числу ненулевых строк. Коротко решение задачи можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \times C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1, C_3 + C_1, C_4 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы A .

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим, что не квадратная матрица не имеет определителя.

Число $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Схематически формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит так:

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ			
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6		
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна		
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022			

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \quad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \quad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \quad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(5 + 0 - 3 - 4 - 0 + 15) +$$

$$+ 1(5 + 0 - 9 - 12 - 0 + 10) + 2(15 + 8 + 9 - 36 - 3 - 10) - 3(0 - 2 + 3 + 9 - 0 - 1) =$$

$$= 13 - 6 + 2 \cdot (-17) - 3 \cdot 9 = 13 - 6 - 34 - 27 = -54$$

Рассмотренный определитель можно вычислить другим способом. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. имеем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24 - 30 + 36 + 12 - 36 - 60 = -54$$

Пусть задано некоторое число a и пусть существует такое число m , что $am = 1$. Число m в этом случае называется обратным для a . Если, теперь, рассмотрим квадратную матрицу n -го порядка, то единичная матрица E будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу E .

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка. Квадратная матрица X (того же порядка n) называется обратной для A , если $AX = XA = E$.

Квадратная матрица A n -го порядка называется особенной (вырожденной), если ее определитель равен нулю. Если же $\Delta(A) \neq 0$, то A называется несобственной (невырожденной) матрицей.

Для нахождения обратной матрицы, рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

и пусть

Обратной матрицей A^{-1} будет матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя $\Delta = \Delta(A)$.

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Вопросы и задачи.

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

а) $A+B$;

б) $A-B$.

Задача 2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = (-1 \ 2 \ 3), \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая-нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) $A+B$;

б) $B-D$;

в) $A+B-C$;

г) A^T+B ;

д) D^T+F ;

е) F^T+A .

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

а) $A-2B$;

б) $3A+2B$;

в) $2A-4B$.

Задача 4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = (-1, 2, 3), \quad X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая-нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) $2A+B$;

б) $2B-D$;

в) $A+2B-3C$;

г) $3A^T+B$;

д) D^T+X ;

е) $2X-D$.

Задача 5. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите $A \cdot B$, $B \cdot A$ и $A \cdot B - B \cdot A$.

Задача 6. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 7. Вычислите следующие матричные выражения (если какая-нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) $A \cdot B$ и $B \cdot A$;

б) $D \cdot C$ и $C \cdot D$;

в) $A \cdot F$ и $F \cdot A$;

г) $D \cdot F$ и $F \cdot D$;

д) $F \cdot A$;

е) $F^T \cdot A$.

Задача 8. Вычислить ранг матрицы двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 18 & -6 & -12 & -24 \\ 0 & 6 & 7 & 23 & 11 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 13 & 0 \\ 7 & 7 & -6 & 3 & 12 \\ -16 & -11 & -17 & 56 & -36 \end{pmatrix}$$

Задача 9. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислите следующие выражения:

а) $\det A$;

б) $\det B$

в) $\det(A \cdot B)$.

Проверьте, что $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Задача 2. Даны квадратные матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислите следующие выражения:

а) $\det A$;

б) $\det B$

в) $\det(A \cdot B)$.

Проверьте, что $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Задача 10. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$; г)

$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Задача 11.

Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 41 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 155 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Практическая работа № 2. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Цель: сформировать умение вычислять производные элементарных функций, сложной и обратной функций и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x производную u' , то в этой точке

$$(Cu)' = Cu' \quad (C = \text{const}).$$

Пример

$$y = 5 \cos x, \quad y' = (5 \cos x)' = 5(\cos x)' = -5 \sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Пример

$$y = x^5 - 3x^2 + 2x - 1, \\ y' = (x^5)' - (3x^2)' + (2x)' - (1)' = 5x^4 - 6x + 2.$$

III. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то справедлива формула

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Пример

$$y = (x^2 - 3x) \sin x, \\ y' = (x^2 - 3x)' \sin x + (x^2 - 3x)(\sin x)' = (2x - 3) \sin x + (x^2 - 3x) \cos x.$$

Пример

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$y = (x^2 - 3x)(x-1)(x-2) \\ y' = (x^2 - 3x)'(x-1)(x-2) + (x^2 - 3x)(x-1)'(x-2) + (x^2 - 3x)(x-1)(x-2)'$$

IV. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, причем в

этой точке $v \neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример

$y = \frac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u' \quad (a - \text{постоянная величина});$$

$$y = u^n; \quad y' = nu^{n-1} \cdot u'$$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt[n]{u}; \quad y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u}} u';$$

$$y = a^u; \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad y = e^u; \quad y' = e^u u'; \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$y = \log_a u; \quad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a};$$

$$y = \ln u; \quad y' = \frac{1}{u} u';$$

$$y = \sin u; \quad y' = \cos u \cdot u';$$

$$y = \cos u; \quad y' = -\sin u \cdot u';$$

$$y = \operatorname{tg} u; \quad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u';$$

$$y = \operatorname{ctg} u; \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';$$

$$y = \sec u; \quad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u';$$

$$y = \operatorname{cosec} u; \quad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u';$$

$$y = \arcsin u; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$y = \arccos u; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$y = \operatorname{arctg} u; \quad y' = \frac{1}{1+u^2} u';$$

$$y = \operatorname{arcctg} u; \quad y' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$$

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x . С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x . В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x .

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$.

Пример. Пусть $y = \sqrt{u}$, $u = 2 - x$. Тогда $y = \sqrt{2 - x}$.

Пример $y = \frac{1}{u + |u|}$, $u = \sin x$. Тогда $y = \frac{1}{\sin x + |\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u' , то существует и конечная производная от y по x , причем $y' = f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Пример $y = (1 + x^2)^5$. Положим $y = u^5$, $u = 1 + x^2$.
 $y' = 5u^4 u' = 5(1 + x^2)^4 (1 + x^2)' = 10x(1 + x^2)^4$.

Пример $y = \sin 3x$, т. е. $y = \sin u$, где $u = 3x$. $y' = \cos u u' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример $y = (1 + \sin 2x)^3$,
 $y' = 3(1 + \sin 2x)^2 (1 + \sin 2x)' = 3(1 + \sin 2x)^2 \cos 2x (2x)' = 6(1 + \sin 2x)^2 \cos 2x$.

Пусть дана функция $y = f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, $\mathcal{E}$ - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения $\mathcal{E}$. Если функция $y = f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E , для которого $y = f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x = g(y)$, которую называют обратной для функции $y = f(x)$. Она имеет своей областью задания множество $\mathcal{E}$, а областью изменения E ; E и $\mathcal{E}$ поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x) \neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
 Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Задача 1. Найти производную функции в точке $x=0$:

$$\begin{aligned}
1. \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} & 4. \quad f(x) &= \begin{cases} \ln \left(1 - \operatorname{tg} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \\
2. \quad f(x) &= \begin{cases} \operatorname{tg} \left(x^2 \cos \frac{1}{9x} \right) + 2x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} & 5. \quad f(x) &= \begin{cases} \operatorname{tg} \left(x \sin \frac{3}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \\
3. \quad f(x) &= \begin{cases} \arcsin \left(x \cos \frac{1}{5x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} & 6. \quad f(x) &= \begin{cases} \sqrt{1 + \ln \left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x} \right)} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Задача 2. Найти производные функций:

1. $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$
2. $y = \sqrt{x}$
3. $y = -\operatorname{ctg} x - x$
4. $y = \frac{1}{x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{x^2}$
6. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$
7. $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$
8. $y = \frac{1}{e^x + 1}$
9. $y = 2^{x^2}$
10. $y = x\sqrt{x}$

Задача 3. Найти производные заданных функций:

1. $y = 2^{\sqrt{\lg x}}$.
2. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
3. $y = \ln^2(1 - \cos x)$.
4. $y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$.
5. $y = \frac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + \ln^2 3}$.
6. $y = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.
7. $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$.
8. $y = \operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$.
9. $y = \ln(1 + \sqrt{\operatorname{th} x})$.
10. $y = \ln \sin 3 - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 4. Вычислить производную функции

- а) $y = 5^x + x \ln x$, в точке $x_0 = 1$;
- б) $y(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x - 4x^3 + 5$, в точке $x_0 = 1$;
- в) $f(x) = 2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$;
- г) $f(x) = 4x^3 + 6x + 3$ в точке $x_0 = 1$.

Задание 5. Вычислить производные:

- а)
 - 1) $y = \arcsin 5x$;
 - 2) $y = \arcsin \sqrt{x} (x > 0)$;
 - 3) $y = \arcsin mx$;
 - 4) $y = \arccos 6x$;
 - 5) $y = \arccos(1 - x^2)$;
 - 6) $y = \arccos \frac{1}{x}$.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
 ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
 Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
 Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

в)

- 1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;
 4) $y = \ln \operatorname{arctg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;
 7) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Вопросы

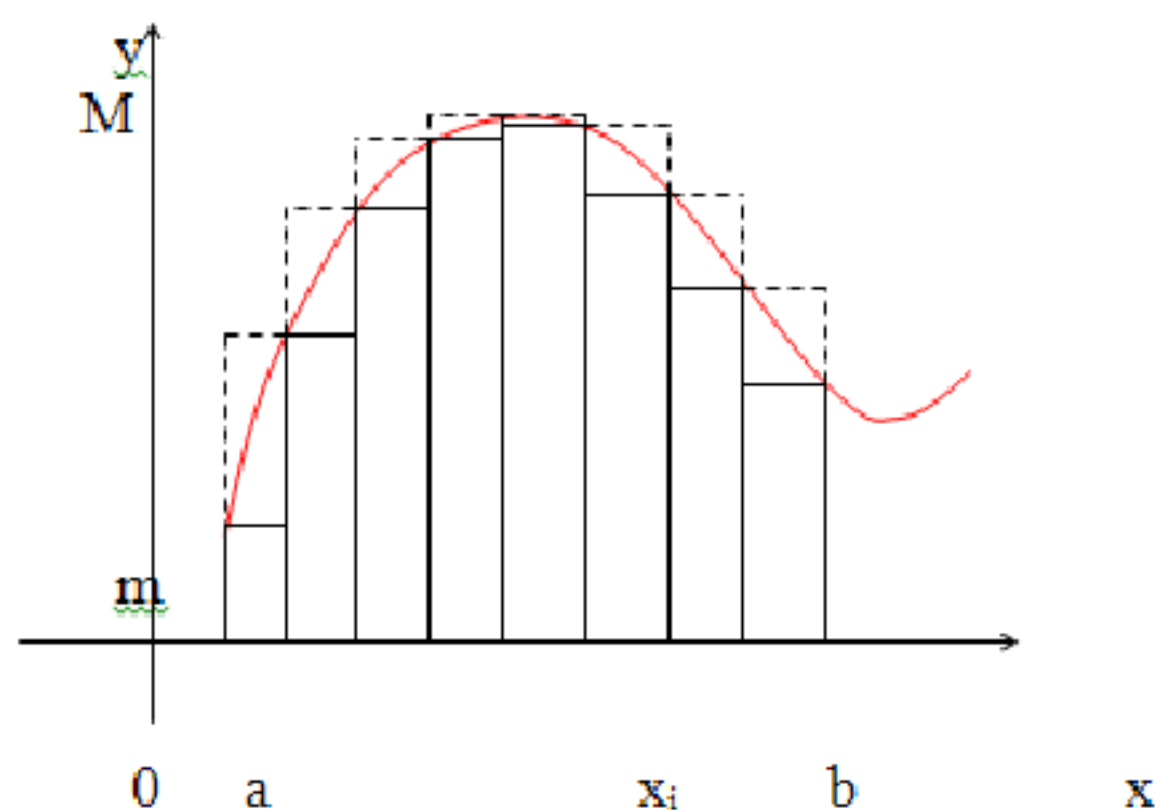
1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
4. Какая функция называется сложной?
5. Объясните правила дифференцирования сложной функции.
6. Какая функция называется обратной данной?
7. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Практическая работа 3. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница, использовать метод замены переменной и интегрирование по частям, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$.



Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

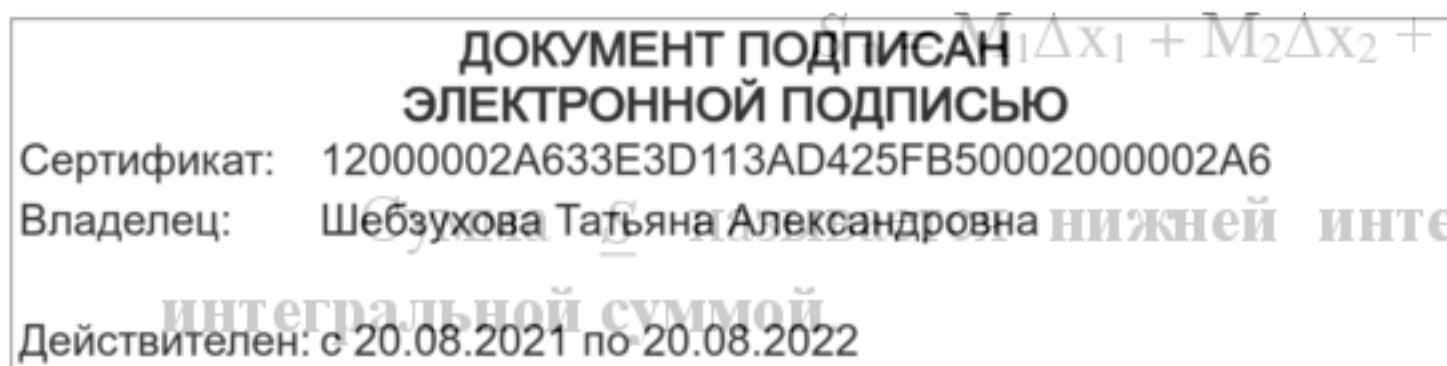
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2$; ... $[x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$



$\underline{S}_n$ — **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}_n$ — **верхней**

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \bar{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \leq f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

$$\text{Если } S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i, \text{ то } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$$

Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$\text{Обозначение: } \int_a^b f(x)dx.$$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Если для функции $f(x)$ существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

$$\text{Также верны утверждения: } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx;$$

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq \varphi(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$8) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью

является применение этих приемов надо распространять на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования, не забыть изменить

соответственно пределы интегрирования. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$. Тогда если

- 1) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$
- 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
- 3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция $\sin$) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi, \text{ с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,}$$

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \{ \operatorname{tg} x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная $\operatorname{tg} x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

$$1. \int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$$

$$3. \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$$

$$5. \int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$$

$$7. \int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$$

$$\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$$

$$9. \int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$$

$$11. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$$

$$13. \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$$

$$15. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$$

$$17. \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$$

$$2. \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$$

$$4. \int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx.$$

$$6. \int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$$

8.

$$10. \int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$$

$$12. \int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$$

$$14. \int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$$

$$18. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$$

$$20. \int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$$

Задача 2.

$$1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$8. \int_1^4 \frac{1 / (2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

Вопросы:

1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем
5. Преобразование интеграла по верхнему пределу.
6. Замена переменной в интеграле
7. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: 7. Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Практическая работа 4. Знакопеременные и знакпеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакпеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Цель: сформировать умение делать вывод об абсолютной или условной сходимости числовых рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Знакопеременный ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

где $u_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$

Признак Лейбница.

Если у знакопеременного ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ и общий член стремится к нулю $u_n \rightarrow 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимости рядов.

Рассмотрим некоторый знакпеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (2)$$

Теорема. Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакпеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакпеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$

будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Если знакпеременный ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными членами, то он расходится к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1, 2, \dots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5 + n^2 + 1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2 \sqrt{n})}{n^2 \sqrt{n}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{\sqrt{n^5}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n} \right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{3^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}$

Вопросы:

1. Какой ряд называется знакочередующимся (знакопеременным)?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какой ряд называется абсолютно сходящимся (условно сходящимся)?
4. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакочередующихся рядов.
5. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Практическая работа 5. Вариационные ряды и их графическое изображение.

Цель: формирование основных понятий математической статистики.

Теоретическая часть:

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической

- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и *объем выборки* n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была *репрезентативной* (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, ..., x_k – n_k раз, причем $\sum_{i=1}^k n_i = n$, где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ называют вариантами, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим

относительные частоты $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариантов, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом.

Пример 1:

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 5, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 1.

Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
ω_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группировку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h , а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариантов,

попавших в i -й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется *группированным статистическим рядом*.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$, где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i) , а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот.

Этапы первичной обработки выборки:

1. Ранжирование опытных данных (расположение значений признака по убыванию или возрастанию).
2. Частотный анализ (построение статистического ряда, определение относительных частот).
3. Группировка (частотная таблица выборки).

Вопросы и задачи:

1. Имеются следующие данные об успеваемости 20 студентов группы по статистике в летнюю сессию: 4, 4, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4. Постройте: ряд распределения студентов по баллам оценок; ряд распределения студентов по уровню успеваемости, выделив в нем две группы студентов: неуспевающие и успевающие. Изобразите каждый из рядов графически.

2. Построить кривую и гистограмму суммы налоговых неуплат, зафиксированных по условным регионам страны, данные по которым приведены в таблице (в млн. руб.):

21	43	72	84
22	54	75	32
26	49	77	45
27	53	78	65
28	54	81	12
32	58	83	34
34	61	84	54
37	65	84	34
39	68	88	41

3. Дана исходная выборка по росту и весу студентов группы:

Рост	160	168	175	169	170	169	162	166	163	160	158	173	162	173	156
Вес	48	58	69	64	69	70	51	60	67	54	48	58	44	50	56

Определите объем выборки. Составьте ранжированный и вариационный ряды по каждому из признаков.

4. Построить гистограмму нагрузки на одного следователя по расследованным уголовным делам по данным таблицы:

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2001	2003
По линии МВД	63,2	49,6	41	31,5	32,3	32,4	37,9	34,2	36,2
По линии прокуратуры	17,2	16,8	15,5	15,1	16	17,7	18,2	18,3	19,7

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

5. Три варианта исходных данных таблицы ниже – результаты телефонных переговоров в минутах сотрудников трех отдельных служб в течение рабочего дня. Требуется составить интервальный ряд распределения.

№ выборки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Служба 1	1,9	2,6	3,1	3,3	2,1	2,0	4,7	0,9	2,8
Служба 2	6,9	1,1	3,6	1,0	7,0	2,1	8,7	1,0	8,0
Служба 3	4,7	6,8	3,8	3,1	1,8	7,1	9,2	8,1	4,0

6. Дана выборка 7,3,3,6,4,3,5,1,2,1,3. Построить вариационный ряд. Определить размах выборки.

Практическая работа 6. Статистическая проверка гипотез.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0 .

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. Обозначим эту величину в целях общности через K .

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K , которая служит для проверки нулевой гипотезы.

После выбора определённого критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

совокупности с их частотами. Первые служат для проверки гипотез о параметрах совокупностей, распределяемых по нормальному закону, вторые — для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Применение параметрических критериев связано с необходимостью вычисления выборочных характеристик — средней величины и показателей вариации, тогда как при использовании непараметрических критериев такая необходимость отпадает.

t-критерий Стьюдента (t-распределение). Английский математик В. Госсет (печатавшийся под псевдонимом Стьюдент), в 1908 г. нашел закон распределения величины $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, в которой генеральный параметр σ заменен на его выборочную характеристику s_x , т. е. нашел закон *распределения значений*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Открытый Стьюдентом и теоретически обоснованный Р. Фишером закон *t-распределения* служит основой так называемой теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в нормально распределяющейся совокупности в зависимости от объема выборки. t-распределение зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$, причем с увеличением объема выборки n t-распределение быстро приближается к нормальному с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и уже при $n > 30$ не отличается от него. Это видно из таблицы ниже, в которой приведены табулированные значения t-распределения и нормального распределения для разных значений t .

Распределение	Нормированное отклонение t						
	0,5	1.0	1.5	2,0	2,5	3,0	3,5
Нормальное	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
Стьюдента при	0,333	0,577	0,728	0,816	0,870	0,905	0,927
$n = 3$							
$n = 20$	0,377	0,670	0,850	0,940	0,978	0,993	0,998
$n = 30$	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995

Оценка разности средних. Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами μ_1 и μ_2 . Разность $\mu_1 - \mu_2$ этих параметров обозначим через D , то есть $\mu_1 - \mu_2 = D$, а дисперсию этой разности σ_D^2 . Значения генеральных параметров неизвестны, однако по выборкам мы можем найти величины выборочных средних и разность между ними $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$,

которую обозначим d , то есть $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = d$.

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mu_1 = \mu_2$, то есть $D = 0$. Критерием для проверки H_0 -гипотезы служит отношение

$$t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{s_d}$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

где t — переменная величина, следующая t -распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, а s_D - ошибка указанной разности, а n_1 и n_2 - объемы первой и второй выборок соответственно.

Так как, согласно H_0 -гипотезе, $\mu_1 = \mu_2$, то t -критерий выражается в виде отношения разности выборочных средних к своей ошибке, т. е.

$$t = \frac{d}{s_d}.$$

H_0 -гипотезу отвергают, если фактически установленная величина t -критерия (обозначаемая t_{ϕ}) превзойдет или окажется равной критическому значению t_{kp} этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, т. е. при условии $t_{\phi} \geq t_{kp}$.

Ошибку разности средних s_D определяют по формуле:

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Пример. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводили на двух группах животных: опытной и контрольной. Были исследованы кролики в возрасте от полутора до двух месяцев, массой тела 500—600 г. Опыт продолжался полтора месяца. Животных обеих групп содержали на одном и том же кормовом рационе. Однако опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0,06 г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела:

Привесы, г		Отклонения от средней арифметической		Квадраты отклонений	
опыт	контроль	опыт ($x_i - \bar{x}_1$)	контроль ($x_j - \bar{x}_2$)	опыт ($x_i - \bar{x}_1$) ²	контроль ($x_j - \bar{x}_2$) ²
580	504	58	22	3364	484
692	560	54	34	2916	1156
700	420	62	106	3844	11236
621	600	17	74	289	5476
640	580	2	54	4	2916
561	530	77	4	5929	16
680	490	42	36	1764	1296
630	580	8	54	64	2916
	470		56		3136
$\Sigma = 5104$	$\Sigma = 4734$	—	—	$\Sigma = 18\ 174$	$\Sigma = 28\ 632$
$\bar{x}_1 = 638$	$\bar{x}_2 = 526$	—	—	$\Sigma = 46\ 806$	

Средние арифметические привесов:

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

в контроле $\bar{x}_2 = 4734/9 = 526$ г. Разница $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = d = 112$ г. Чтобы установить, достоверна или случайна эта разница, нужно определить ошибку разности средних:

$$s_D = \sqrt{\frac{46806}{8+9-2} \cdot \left(\frac{8+9}{8 \cdot 9}\right)} = \sqrt{736,8} = 27,14.$$

Отсюда $t_{\bar{d}} = 112/27,14 = 4,1$.

По таблице для уровня значимости $\alpha = 0,01$ и числа степеней свободы $k = 9+8-2 = 15$ находим $t_{kp} = 2,95$. Так как $t_{\bar{d}} > t_{kp}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости ($P < 0,01$). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась в высшей степени достоверной.

Правильное применение параметрических критериев для проверки статистических гипотез основано на предположении о нормальном распределении совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Однако это не всегда имеет место, так как не все биологические признаки распределяются нормально. Немаловажным является и то обстоятельство, что исследователю приходится иметь дело не только с количественными, но и с качественными признаками, многие из которых выражаются порядковыми номерами, индексами и другими условными знаками. В таких случаях необходимо использовать *непараметрические критерии*.

Известен целый ряд непараметрических критериев, среди которых видное место занимают так называемые *ранговые критерии*, применение которых основано на ранжировании членов сравниваемых групп. При этом сравниваются не сами по себе члены ранжированных рядов, а их порядковые номера, или ранги. Далее мы рассмотрим некоторые непараметрические критерии, применяемые для проверки нулевой гипотезы при сравнении как независимых, так и зависимых выборочных групп.

***U* - критерий Уилкоксона (Манна—Уитни).** Гипотезу о принадлежности сравниваемых независимых выборок к одной и той же генеральной совокупности или к совокупностям с одинаковыми параметрами, т. е. H_0 -гипотезу, можно проверить с помощью *рангового критерия Уилкоксона (Манна—Уитни)*.

Для расчета *U*-критерия необходимо:

1. Расположить числовые значения сравниваемых выборок в возрастающем порядке в один общий ряд и пронумеровать члены общего ряда от 1 до $N = n_1 + n_2$. (Эти номера и будут «рангами» членов ряда.)

2. Отдельно для каждой выборки найти суммы рангов и определить величины,

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

и

$$U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

которые отображают связь между суммами рангов первой и второй выборки.

3. В качестве *U*-критерия использовать меньшую величину U_{ϕ} , которую сравнить с табличным значением U_{kp} . Условием для сохранения принятой H_0 -гипотезы

является выполнение неравенства $U_{\phi} \geq U_{kp}$. Критические точки *U*-критерия U_{kp} для n_1 , n_2 и принимаемого уровня значимости α содержатся в таблице 3 Приложения.

Пример. На двух группах лабораторных мышей – опытной ($n_1 = 9$) и контрольной ($n_2 = 11$) – изучали воздействие на организм нового препарата. Испытание продолжалось один месяц. После этого масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

В опытной группе 80, 76, 75, 64, 70, 68, 72, 79, 83.

В контрольной группе 70, 78, 60, 80, 62, 68, 73, 60, 71, 66, 69.

Вычислим по выборкам: $\bar{x}_1 = 74,1$ и $\bar{x}_2 = 68,8$.

Проверим с помощью U -критерия, является ли разность в массе тела между опытной и контрольной группами мышей статистически достоверной.

Суммируя ранги отдельно для каждой группы, находим:

$R_1 = 4+6+9+12+14+15+17+19+20=112$;

$R_2 = 1+2+3+5+7+8+10+11+13+16+18=94$.

Подставляем эти данные в формулы:

$$U_1 = 112 - \frac{9 \cdot 10}{2} = 67; \quad U_2 = 94 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 22$$

Меньшую величину $U_2 = 22$ сравниваем с табличным U_{kp} значением для $n_1=9$, $n_2=11$ и уровня значимости $\alpha=0,01$, которое равно $U_{kp}=19$.

Поскольку $U_{\phi} > U_{kp}$, отвергнуть проверяемую H_0 -гипотезу нельзя. Следовательно, различия, наблюдаемые между этими выборками, статистически недостоверны. Выборки не имеют значимых отличий.

Критерий знаков z . В тех случаях, когда результаты наблюдений выражаются не числами, а качественными признаками, принимающими два различных значения (помечаем их знаками плюс (+) и минус (—)), различия между попарно связанными членами сравниваемых выборок оценивают с помощью критерия знаков z . Конструкция этого критерия базируется на весьма простых соображениях: если попарно сравниваемые значения двух зависимых выборок существенно не отличаются друг от друга, то число плюсовых и минусовых разностей окажется совершенно одинаковым; если же заметно преобладают плюсы или минусы, это будет указывать на положительное или отрицательное действие изучаемого фактора на результативный признак. Большое число однозначных разностей служит в качестве фактически найденной величины z -критерия знаков. При этом нулевые разности, т. е. случаи, не давшие ни положительного, ни отрицательного результата, обозначаемые цифрой 0, в расчет не принимают и число парных наблюдений соответственно уменьшается.

Как и всякий другой выборочный показатель, z -критерий знаков является величиной случайной; он служит для проверки H_0 -гипотезы, т. е. предположения о том, что совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одинаковые функции распределения. H_0 -гипотеза отвергается, если $z_{\phi} \geq z_{kp}$ для принятого уровня значимости α и числа парных наблюдений n , взятых без нулевых разностей. Критические точки z_{kp} для двух уровней значимости и числа парных наблюдений содержатся в таблице.

Вопросы и задачи:

1. Для изучения эффективности нового препарата железа были выбраны две группы пациентов в течение двух недель. В первой группе пациенты получали препарат, а во второй группе - получали плацебо. После этого было проведено измерение уровня гемоглобина в периферической крови. В

первой группе средний уровень гемоглобина составил $115,4 \pm 1,2$ г/л, а во второй - $103,7 \pm 2,3$ г/л (данные представлены в формате $M \pm m$), сравниваемые совокупности имеют нормальное распределение. При этом численность первой группы составила 34, а второй - 40 пациентов. Необходимо сделать вывод о статистической значимости полученных различий и эффективности нового препарата железа.

2. После проведения вакцинации от гриппа среди студентов медицинского университета были подведены результаты: из 500 вакцинированных в период эпидемии заболели гриппом 20 человек, из 1600 отказавшихся от вакцинации гриппом заболели 200 человек. Оцените эффективность вакцинации от гриппа.

3. Учебной частью одной из кафедр медицинского университета было проведено исследование успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций. Для студентов, посетивших менее половины лекционного курса ($n=36$), средняя оценка на экзамене составила 3,2, $\sigma^2=0,2$. Для студентов, посетивших более 90% лекций по предмету ($n=150$), средняя оценка на экзамене составила 4,5, $\sigma^2=0,5$. Сделайте вывод о достоверности различий успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций по предмету.

4. Результаты тестирования по 30-бальной шкале для группы X и группы Y представлены в таблице. Сравнить эффективность двух методов обучения студентов в двух группах для уровня статистической значимости $\beta = 5\%$.

X	18	10	7	15	14	11	13				
Y	15	20	10	8	16	10	19	7	15	14	29

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>

2. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28060.html>

Перечень дополнительной литературы

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

2. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>.

3. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20211.html>.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания
по организации самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пятигорск, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Цель и задачи самостоятельной работы	5
3. Технологическая карта самостоятельной работы студента	6
4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом	7
<i>4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой</i>	7
<i>4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям</i>	8
<i>4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний</i>	8
5. Контроль самостоятельной работы студентов	9
6. Список литературы	9

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.
2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.
3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.
4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.
5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Математика» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН	
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-3: Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	ИД-1 _{ОПК-3} Применяет математический аппарат аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной.	Решает профессиональные задачи, применяя соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной.
	ИД-2 _{ОПК-3} Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений.	Решает профессиональные задачи, применяя соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений.
	ИД-3 _{ОПК-3} Применяет математический аппарат теории вероятностей и математической статистики.	Решает профессиональные задачи, применяя соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования теории вероятностей и математической статистики.
	ИД-4 _{ОПК-3} Применяет математический аппарат методов	Решает профессиональные задачи, применяя соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

		моделирования численных методов.
--	--	----------------------------------

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН					ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ			Средства и технологии оценки			Объем часов, в том числе (астр.)				
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6			Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна						СРС			Контактн		Всего	
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022															

				ая работа с преподава телем	
1 семестр					
ОПК-3	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,27	0,03	0,3
ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,81	0,09	0,9
ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-20	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	107,595	11,955	119,55
Итого за 1 семестр			108,675	12,075	120,75
ОПК-3	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	6,075	0,675	6,75
2 семестр					
ОПК-3	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,27	0,03	0,3
ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,81	0,09	0,9
ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по темам 21-26	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	58,995	6,555	65,55
Итого за 2 семестр			60,075	6,675	66,75
ОПК-3	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	6,075	0,675	6,75
Итого			180,9	20,1	201

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

4. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того, насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**
Выделите основные установки в чтении научного текста:

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В документе нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо

усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5. Контроль самостоятельной работы студентов

Осуществляется в рамках текущего контроля - решения разноуровневых задач по разделам дисциплины и промежуточного контроля – на экзамене.

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

1. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>

2. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28060.html>

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

2. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>.

3. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20211.html>.