

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
федерального университета
Дата подписания: 23.08.2023 14:37:23
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине

«Математический анализ»

для направления подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии
направленность (профиль) Информационные системы и технологии обработки
цифрового контента

Пятигорск
2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Цель и задачи изучения дисциплины	3
2. Оборудование и материалы	3
3. Наименование практических работ	3
4. Содержание практических работ	4
5. Перечень литературы, необходимой для изучения дисциплины	24

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Математический анализ» проводятся в учебной аудитории с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
2	Вычисление предела функции. Односторонние пределы функций.	1,5	1,5
3	Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования.	1,5	1,5
3	Дифференцирование сложной и обратной функций.	1,5	1,5
4	Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.	1,5	1,5
Итого за 1 семестр		6	6
7	Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.	1,5	1,5
8	Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле.	1,5	1,5
14	Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функций. Дифференциалы высших порядков.	1,5	1,5
	Дифференцирование сложных и неявных функций.		
15	Уравнения высшего порядка, допускающие понижение	1,5	1,5

	порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.		
Итого за 2 семестр		6	6

4. Содержание практических работ

Практическая работа 1. Вычисление предела функции. Односторонние пределы функций.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при x стремящемся к a , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $|x-a| < \delta(\varepsilon)$ выполняем неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Число A называется правосторонним пределом или пределом справа функции $f(x)$ в точке $x=a$ если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что при $0 < x-a < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Пишут $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$.

Число A называется левосторонним пределом или пределом слева функции $f(x)$ в точках $x=a$, если для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что при $0 < a-x < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Пишут $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$.

Пример. Показать, что $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Найдем такое число $\delta > 0$ что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$ выполнялось бы неравенство $|x^2-1| < \varepsilon$

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |(x-1)(x-1+2)| = |(x-1)^2+2(x-1)| \leq |x-1|^2 + 2|x-1| \leq \delta^2 + 2\delta < \varepsilon$$

$$\delta^2 + 2\delta - \varepsilon < 0$$

$$\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$$

$$\delta = 1 + \sqrt{1 + \varepsilon}$$

$$\delta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \varepsilon} \quad \text{т.к.} \quad \delta > 0$$

т.е. по любому $\varepsilon = 0,3 \quad \delta = 1 + \sqrt{1,3}$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, т.е. если для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Бесконечно малую функцию $|\alpha(x)|$ называют также бесконечно малой величиной.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если для $\forall M > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, обозначается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Примеры вычисления предела

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1-x^2} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x(x-1)} = -3 \quad (\text{разложение на множители}).$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-4} - 2}{x-8} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{x-4} - 2)(\sqrt{x-4} + 2)}{(x-8)(\sqrt{x-4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-4-4)}{(x-8)(\sqrt{x-4} + 2)} = \frac{1}{4} \quad (\text{умножение на сопряжение}).$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3} \quad (\text{деление на старшую степень}).$$

Задачи. Вычислить предел функции:

Задача 1.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

$$\begin{aligned}
1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 7x^3 + 5x - 4}{x^4 + x^3 + x + 1}; \\
2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4 + x - 11}; \\
3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - x + 1}; \\
4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 + x - 1}; \\
5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 - 14}{5x^4 + x^3 + x^2 + x - 1}.
\end{aligned}$$

Задача 2.

$$\begin{aligned}
1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 3} = -1. \quad 2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2} = -10. \\
3. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + 5x - 1}{x + 1/2} = -1. \quad 4. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2 + 12x + 3}{x + 1/3} = 6. \\
5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} = -5. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5. \\
7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 9x + 3}{x - 1} = 3. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 15x + 9}{x - 3} = 9. \\
9. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x^2 + 20x + 6}{x + 3} = -16. \quad 10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1} = 7.
\end{aligned}$$

Задача 3.

$$\begin{aligned}
1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x + 2}; \\
3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+21} - 5}{x - 2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2} - 2}{1-x}.
\end{aligned}$$

Вопросы

1. Дайте определение предела функции, предела функции слева (справа).
2. Дайте определение функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.
3. Сформулируйте определение бесконечно малой (бесконечно большой) функции.
4. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
5. Охарактеризуйте связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Практическая работа 2. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования.

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке X производную u' , то в этой точке

$$(Cu)' = Cu' \quad (C = \text{const}).$$

Пример

$$y = 5 \cos x, \quad y' = (5 \cos x)' = 5(\cos x)' = -5 \sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке X производные, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Пример

$$\begin{aligned}
y &= x^5 - 3x^2 + 2x - 1, \\
y' &= (x^5)' - (3x^2)' + (2x)' - (1)' = 5x^4 - 6x + 2.
\end{aligned}$$

III. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке X производные, то справедлива формула

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Пример

$$\begin{aligned}
y &= (x^2 - 3x) \sin x, \\
y' &= (x^2 - 3x)' \sin x + (x^2 - 3x)(\sin x)' = (2x - 3) \sin x + (x^2 - 3x) \cos x.
\end{aligned}$$

Пример

$$y = (x-1)(x-2)(x-3),$$

$$y' = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

IV. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке X производные, причем в этой точке $v \neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример

$y = \frac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u' \quad (a - \text{постоянная величина}); \\ y &= u^n; \quad y' = nu^{n-1} \cdot u' \\ (n - \text{любое действительное число}) \\ y &= \sqrt[n]{u}; \quad y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u}} u'; \\ y &= a^u; \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad y = e^u; \quad y' = e^u u'; \quad a > 0, \quad a \neq 1; \\ y &= \log_a u; \quad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}; \\ y &= \ln u; \quad y' = \frac{1}{u} u'; \\ y &= \sin u; \quad y' = \cos u \cdot u'; \\ y &= \cos u; \quad y' = -\sin u \cdot u'; \\ y &= \operatorname{tg} u; \quad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'; \\ y &= \operatorname{ctg} u; \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'; \\ y &= \sec u; \quad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u'; \\ y &= \operatorname{cosec} u; \quad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'; \\ y &= \arcsin u; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'; \\ y &= \arccos u; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'; \\ y &= \operatorname{arctg} u; \quad y' = \frac{1}{1+u^2} u'; \\ y &= \operatorname{arccotg} u; \quad y' = -\frac{1}{1+u^2} u'. \end{aligned}$$

Задачи

Задача 1. Найти производную функции в точке $x=0$:

1. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$	4. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \operatorname{tg}\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 \cos \frac{1}{9x}\right) + 2x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$	5. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x \sin \frac{3}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x \cos \frac{1}{5x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$	6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x}\right)} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$

2. $y = \sqrt{x}$

3. $y = -\cos x$

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

4. $y = \frac{1}{x^2}$

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

5. $y = \sqrt[3]{x^2}$

6. $y = 5 \sin x + 3 \cos x$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

7. $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$
8. $y = \frac{1}{e^x + 1}$
9. $y = 2^{x^2}$
10. $y = x\sqrt{x}$

Вопросы

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.

Практическая работа 3. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x . С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x . В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x .

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$.

Пример $y = u^3$. Если взять $u = x^2 - 3x + 1$, то получим сложную функцию $y = (x^2 - 3x + 1)^3$.

Пример $y = \sqrt{u}$, $u = 2 - x$. Тогда $y = \sqrt{2 - x}$.

Пример $y = \frac{1}{u + |u|}$, $u = \sin x$. Тогда $y = \frac{1}{\sin x + |\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u' , то существует и конечная производная от y по x , причем $y' = f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Пример $y = (1 + x^2)^5$. Положим $y = u^5$, $u = 1 + x^2$. $y' = 5u^4 u' = 5(1 + x^2)^4 (1 + x^2)' = 10x(1 + x^2)^4$.

Пример $y = \sin 3x$, т. е. $y = \sin u$, где $u = 3x$. $y' = \cos u u' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример

$$y = (1 + \sin 2x)^3,$$

$$y' = 3(1 + \sin 2x)^2 (1 + \sin 2x)' = 3(1 + \sin 2x)^2 \cos 2x (2x)' = 6(1 + \sin 2x)^2 \cos 2x.$$

Пусть дана функция $y = f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, $\mathcal{E}$ - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения $\mathcal{E}$. Если функция $y = f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E , для которого $y = f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x = g(y)$, которую называют обратной для функции $y = f(x)$. Она имеет своей областью задания множество $\mathcal{E}$, а областью изменения E ; E и $\mathcal{E}$ поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x) \neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Задачи

Задача 1. Найти производные заданных функций:

1. $y = 2^{\sqrt{\lg x}}$. 2. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 3. $y = \ln^2(1 - \cos x)$.

4. $y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$. 5. $y = \frac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + \ln^2 3}$. 6. $y = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y = \operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$. 9. $y = \ln(1 + \sqrt{\operatorname{th} x})$.

10. $y = \ln \sin 3 - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 2. Вычислить производную функции

а) $y = 5^x + x \ln x$, в точке $x_0 = 1$;

б) $y(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x - 4x^3 + 5$, в точке $x_0 = 1$;

в) $f(x) = 2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$;

г) $f(x) = 4x^3 + 6x + 3$ в точке $x_0 = 1$.

Задание 3. Вычислить производные:

а)

1) $y = \arcsin 5x$; 2) $y = \arcsin \sqrt{x} (x > 0)$; 3) $y = \arcsin mx$;
4) $y = \arccos 6x$; 5) $y = \arccos(1 - x^2)$; 6) $y = \arccos \frac{1}{x}$.

б)

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;
4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arctg} mx$; 6) $\operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2}$.

в)

1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;
4) $y = \ln \operatorname{arctg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;
7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Вопросы

1. Какая функция называется сложной?
2. Объясните правила дифференцирования сложной функции.
3. Какая функция называется обратной данной?
4. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Практическая работа 4. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Точки, в которых функция имеет экстремумы, следует искать среди тех внутренних точек ее области задания, где либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо $f'(x)$ не существует. Все эти случаи реализуются, например, для функций $y = x^2$, $y = x^{2/3}$, $y = |x|$, каждая из которых имеет минимум при $x = 0$.

Точки указанного вида условимся называть критическими точками. Не в каждой критической точке обязательно будет экстремум. Действительно, точка $x = 0$ будет критической для каждой из функций $y = x^3$ ($y' = 3x^2, y' = 0$ при $x=0$), $y = \sqrt[3]{x}$ ($y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}, y' = \infty$ при $x=0$),

Следующие теоремы позволяют определить, имеется в данной критической точке экстремум или нет, и если имеется, то максимум или минимум.

Теорема 1

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

2) $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, т. е. при переходе через x_0 производная меняет

минуса на плюс, или

функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Если в некоторой точке x_0 производная равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$, то при переходе через точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, или с плюса на минус, или не меняет знака.

1) $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, т. е. при переходе через x_0 производная меняет

3) производная не меняет знака при переходе через x_0 , то в случае 1) имеет место максимум, в случае 2) — минимум, в случае 3) экстремума нет.

Пример. $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Функция всюду дифференцируема. Следовательно, все критические точки находятся из уравнения

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0.$$

Отсюда

$$x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

— две критические точки.

1) $x_1 = -1$. При $x < -1$ имеем: $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$; при $x > -1$ (но $x < 1$): $f'(x) < 0$. Следовательно, в точке $x_1 = -1$ имеет место *максимум*.

2) $x_2 = 1$. При $x < 1$ (но $x > -1$): $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$; при $x > 1$ имеем: $f'(x) > 0$. Следовательно, в точке $x_2 = 1$ имеет место *минимум*.

Теорема 1 позволяет высказать следующие практически полезные соображения.

Пусть речь идет об отыскании экстремумов функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке и имеющей в нем *конечное* множество критических точек.

Найдя все критические точки, расположим их в порядке возрастания абсцисс:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < b \quad (1)$$

(a и b — концы рассматриваемого промежутка). В каждом из интервалов

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \quad (2)$$

существует конечная $f''(x) \neq 0$ (поскольку все точки, где $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или где $f'(x)$ не существует, вошли в число точек $x_1, x_2, \dots, x_n$). Предполагая $f'(x)$ непрерывной в каждом из частичных интервалов (2)

— на практике это обычно так и бывает, — нетрудно прийти к выводу, что $f'(x)$ *сохраняет знак* внутри каждого такого интервала (если бы $f'(x)$ *меняла* знак внутри какого-нибудь из интервалов (2), то по свойству непрерывных функций она обращалась бы в нуль в некоторой *внутренней* точке этого интервала, что невозможно). Чтобы найти этот знак, достаточно, например, установить его для какой-нибудь *конкретной* точки соответствующего интервала.

В результате интервалам (2) будет соответствовать некоторая последовательность знаков плюс и минус, характер чередования которых в силу теоремы 1 позволяет судить о наличии максимума (смена плюса на минус), минимума (смена минуса на плюс) или об отсутствии экстремума (сохранение знака) в соответствующих точках.

Пример. $f(x) = (x+1)^2(x-1)^3$. Функция задана и непрерывна во всем бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$. Ее производная

$$f'(x) = 2(x+1)(x-1)^3 + 3(x+1)^2(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^2(5x+1) = 5(x+1)(x-1)^2\left(x + \frac{1}{5}\right) \quad (3)$$

всюду существует и конечна. Следовательно, критическими точками будут *лишь* те, для которых

$$f'(x) = 0,$$

т. е.

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{5}, \quad x_3 = 1.$$

Промежуток задания функции тем самым разбивается на интервалы

$$(-\infty, -1), \left(-1, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, 1\right), (1, +\infty).$$

Соответствующая последовательность знаков производной имеет вид

$$+, -, +, +.$$

Следовательно, в точке $x_1 = -1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(-1) = 0$; в точке $x_2 = -\frac{1}{5}$

— минимум, причем $f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{16}{3125} \cdot \frac{216}{5} = -\frac{3456}{3125}$, в точке $x_3 = 1$ экстремума нет.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема ($n > 1$), причем $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если n четное, то имеет место экстремум, а именно: при $f^{(n)}(x_0) > 0$ — минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет.

Отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна в некотором промежутке. Если этот промежуток не является отрезком, то, как мы знаем, среди значений $f(x)$ может и не быть наибольшего или наименьшего. Однако можно указать простой признак, когда такие значения заведомо существуют.

Теорема 3. Если в данном промежутке имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.

Если наибольшее или наименьшее значение достигается во внутренней точке отрезка, то оно необходимо будет одним из максимумов или минимумов и, следовательно, будет достигаться в одной из критических точек. Но оно может достигаться и в конце отрезка. Отсюда следует, что для отыскания наибольшего или наименьшего значений $f(x)$ достаточно сравнить между собой ее значения во всех критических точках и в точках a и b ; наибольшее из всех этих чисел будет наибольшим значением $f(x)$ на отрезке $[a, b]$; наименьшее из этих чисел даст наименьшее значение $f(x)$.

Пример. Функция $f(x) = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ имеет область существования отрезок $[-1, 1]$. Ее наибольшее и наименьшее значения, очевидно, достигаются в тех же точках, что и для функции $g(x) = (1-x^2)(1+2x^2)$ (рассматриваемой на упомянутом отрезке). Из уравнения

$$g'(x) = -2x(1+2x^2) + (1-x^2) \cdot 4x = 2x(1-4x^2) = 0$$

находим $x_1 = 0$, $x_2 = -0,5$, $x_3 = 0,5$. В этих точках $g(x)$ имеет значения:

$$g(0) = 1, \quad g(-0,5) = g(0,5) = 1,125.$$

Если сопоставим эти значения со значениями в концах $g(-1) = g(1) = 0$, то увидим, что наибольшим значением для $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ будет 1,125 (при $x = \pm 0,5$), наименьшим будет 0 (при $x = \pm 1$). Для функции $f(x)$ наибольшим значением будет тогда $\sqrt{1,125}$ (при $x = \pm 0,5$), наименьшим — по-прежнему 0 (при $x = \pm 1$).

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$ и в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, не параллельную оси Ox .

Если в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над этой касательной, то говорят, что кривая в точке x_0 выпукла вниз. Аналогично, если в некоторой окрестности x_0 кривая лежит под касательной, то говорят, что она в точке x_0 выпукла вверх. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 кривая лежит по одну сторону упомянутой касательной, а справа от x_0 — по другую сторону, то говорят, что x_0 есть точка перегиба кривой.

Теорема 4. Если в точке x_0 существует конечная производная $f''(x_0)$, причем $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 кривая выпукла вниз, если же $f''(x_0) < 0$, то кривая выпукла вверх.

Теорема 5. Пусть $f''(x)$ существует и конечна в некоторой окрестности точки x_0 . Если $f''(x)$ меняет знак при переходе x через точку x_0 , то x_0 — точка перегиба. Если же $f''(x)$ в окрестности x_0 сохраняет знак, то в точке x_0 перегиба нет.

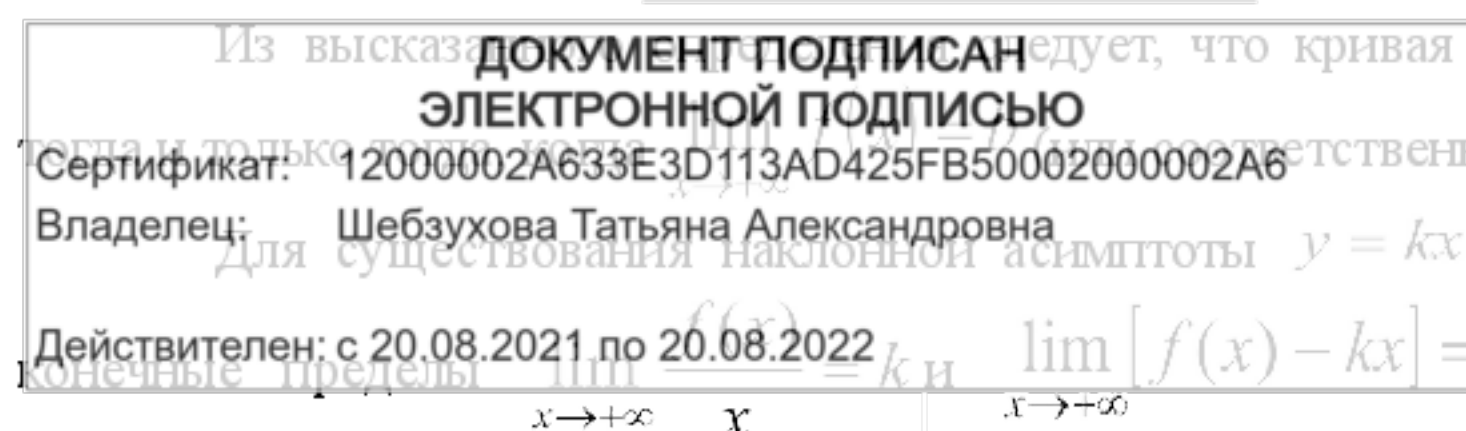
Пример. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Вычисляем: $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Уравнение $y'' = 6x - 6 = 0$ дает $x = 1$. При $x < 1$, очевидно, $y'' < 0$ (кривая выпукла вверх), если же $x > 1$, то $y'' > 0$ (кривая выпукла вниз). Точка $x = 1$ является точкой перегиба.

Отыскание асимптот

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Может случиться, что при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$ кривая неограниченно приближается к некоторой фиксированной прямой $y = kx + b$, называемой асимптотой для данной кривой. Точнее говоря, прямая $y = kx + b$ называется асимптотой для кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (или при $x \rightarrow -\infty$), если $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$.

Из высказывания следует, что кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ (или при $x \rightarrow -\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$. (При $k = 0$ получаем опять горизонтальную асимптоту.)



Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x \right] = 2$$

Следовательно, имеется асимптота (и при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$): $y = x + 2$.

Пример. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке $[-2; 1]$, как многочлен. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки, для чего продифференцируем функцию.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

Тогда $f'(x) = 0$, если $x = 0$ или $x = -1$ или $x = 1$.

Получили две критические точки $x = 0$ и $x = -1$ принадлежащие данному промежутку $[-2; 1]$. Точка $x = 1$ не является внутренней и поэтому не критическая.

Вычислим значения функции на концах промежутка и в критических точках и выберем из них наибольшее и наименьшее.

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(0) = 3$$

$$f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

Следовательно, $\min_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = 2$, $\max_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = 11$.

Задачи

Задача 1. Найти значения x , при которых функция $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 2. Найти значения x , при которых функция $f(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 3. Найти интервалы монотонного убывания функции $y = x^3 + 1,5x^2 + 2$.

Задача 4. Найти интервалы монотонного убывания функции $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Задача 5. Найти интервалы монотонного убывания функции $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - x$.

Задача 6. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y = \frac{-3x^2 - 5x - 4}{x + 1}$.

Задача 7. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y = \frac{x^2 + 3x - 12}{x + 5}$.

Задача 8. Найти все критические точки функции $f(x) = 2x^2 - 6|x + 1| + 5$.

Задача 9. Найти все критические точки x функции $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$.

Вопросы

1. Сформулируйте условия монотонности функции.
2. Какие точки называются стационарными, критическими; точками экстремума?
3. Сформулируйте необходимые условия экстремума.
4. Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
5. Что такое точка перегиба?
6. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
7. Сформулируйте достаточные условия для точек перегиба.
8. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот Вы знаете?
9. Как определить наличие вертикальной асимптоты?
10. В каком случае прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции?

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Практическая работа 5. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x) dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: $(uv)' = u'v + v'u$, где u и v – некоторые функции от x . В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int u dv + \int v du$ или $\int u dv = uv - \int v du$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$
 $= - \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int \sin x dx] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$
 $= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx] = e^{2x} \sin x +$
 $+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Задачи:

Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x dx$.
2. $\int \arcsin x dx$.
3. $\int x^2 \sin x dx$.
4. $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$.
5. $\int x \ln x dx$.
6. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.
7. $\int e^{2x} \cos x dx$.
8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

9. $\int \sin \ln x dx$

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

1) $I_1 = \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}}$ (подстановка $x = \frac{1}{z}$);

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

2) $I_2 = \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}}$ (подстановка $x = \frac{1}{z}$).

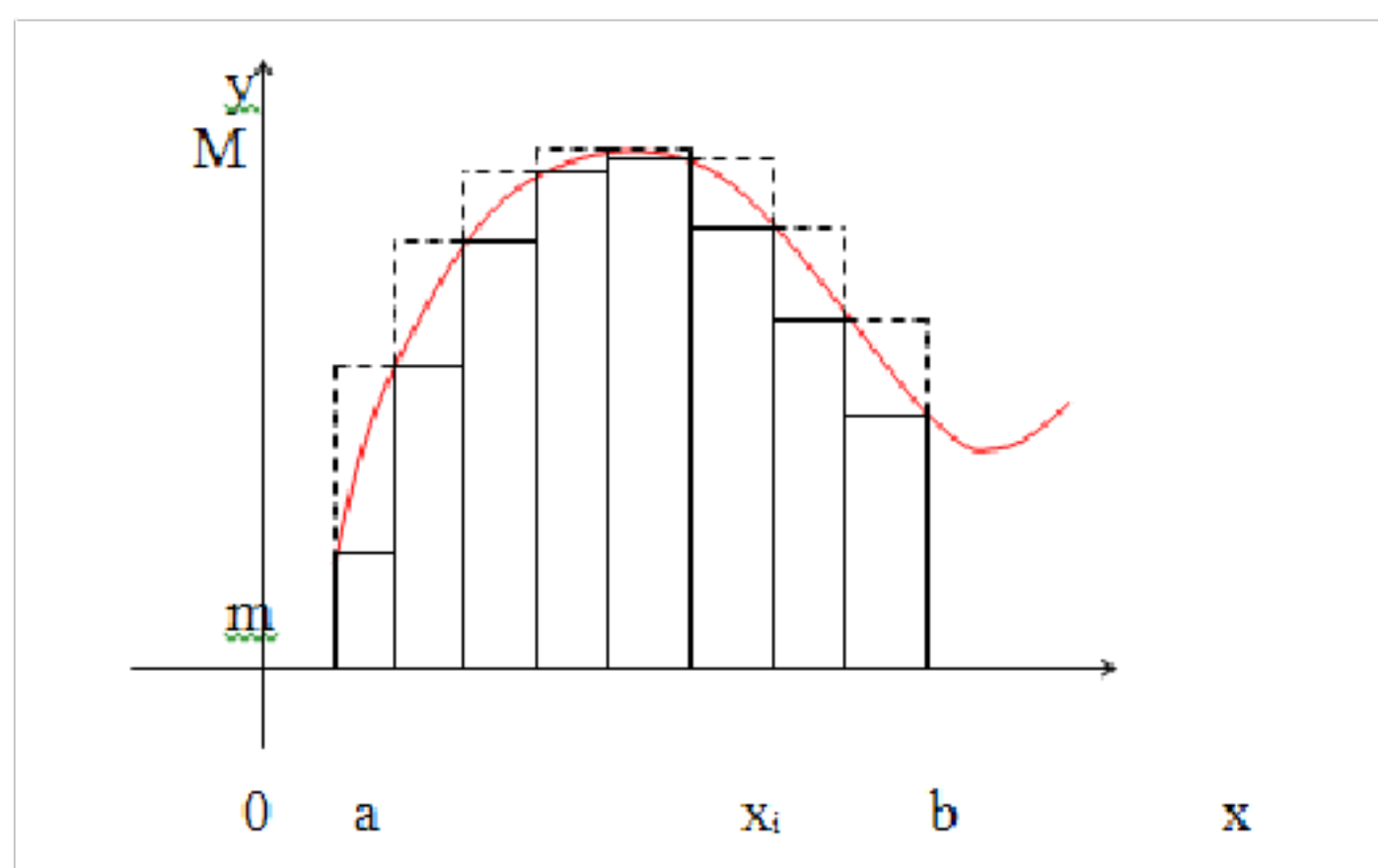
$$3) I_3 = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{4 \sin^2 x - 9 \cos^2 x}} \text{ (подстановка } \operatorname{ctg} x = z).$$

Вопросы:

1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?

Практическая работа 6. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$.



Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2$; ... $[x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1) \Delta x_1 + f(\varepsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

Следовательно, $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен с 20.08.2021 по 20.08.2022

Следовательно, $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$ является следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

$$\text{Если } S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i, \text{ то } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = S.$$

Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$\text{Обозначение: } \int_a^b f(x) dx.$$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Если для функции $f(x)$ существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

$$\text{Также верны утверждения: } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq \varphi(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

8) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ Существует каждый из входящих в него интегралов.

Теорема Ньютона-Лейбница.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задачи:

Задача 1. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

2. $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$

3. $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$

4. $\int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx.$

5. $\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$

6. $\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$

7. $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$

8. $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$

9. $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$

10. $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$

11. $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$

12. $\int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$

13. $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$

14. $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$

15. $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$

17. $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$

20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$

$$1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$2. \int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$$

$$3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

Вопросы:

1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.
6. Формула Ньютона – Лейбница.
7. Замена переменных в определенном интеграле.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Практическая работа-7. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков.

Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и

Действителен с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x . Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x** .

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x . Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x, y)$, $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, то:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial s} ds.$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y) :

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2z-1} dx + 2x^{y^2z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2z} \ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ или } f_{x^2}'' = \left(f_x' \right)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ или } f_{yx}'' = \left(f_y' \right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \text{ или } f_{x^3}''' = \left(f_{x^2}'' \right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \text{ или } f_{x^2 y}''' = \left(f_{x^2}'' \right)'_y, \dots$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^m f = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m f,$$

где $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ - оператор дифференцирования.

Задачи:

Задача 1.

Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1. $z = e^{xy}$. | 2. $z = x \ln(x/y)$. |
| 3. $z = \sin(xy)$. | 4. $z = e^x \cos y$. |
| 5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. | 6. $z = \ln(x^2 + y)$. |
| 7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$. | 8. $z = \ln \sqrt[3]{xy}$. |
| 9. $z = x \cos y + y \sin x$. | 10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$. |

Задача 2.

Найти производные функции $z=z(u,v)$:

$$z'_x \text{ и } z'_y, \quad u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y).$$

- | | | |
|--------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $z = u^2 + v^2$, | $u = x + y$, | $v = x - y$. |
| 2. $z = \ln(u^2 + v^2)$, | $u = xy$, | $v = x/y$. |
| 3. $z = u^v$, | $u = \sin x$, | $v = \cos y$. |
| 4. $z = u^2 + 2v^3$, | $u = x^2 - y^2$, | $v = e^{xy}$. |
| 5. $z = \operatorname{arctg}(u/v)$, | $u = x \sin y$, | $v = x \cos y$. |
| 6. $z = \ln(u - v^2)$, | $u = x^2 + y^2$, | $v = y$. |
| 7. $z = u^3 + v^2$, | $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, | $v = \operatorname{arctg}(y/x)$. |
| 8. $z = \sqrt{uv}$, | $u = \ln(x^2 + y^2)$, | $v = xy^2$. |
| 9. $z = e^{uv}$, | $u = \ln x$, | $v = \ln y$. |
| 10. $z = \ln \sqrt{x/y}$, | $u = x/y$, | $v = \sqrt{x/y}$. |

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

- | | |
|---|---|
| 1. $y^x = x^y$. | 2. $y = 1 + y^x$. |
| 3. $y = x + \ln y$. | 4. $x + y = e^{x-y}$. |
| 5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$. | 6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$. |
| 7. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$. | 8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$. |
| 9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. | 10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$. |

Вопросы:

1. Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.
2. Что такое полное приращение функции?
3. Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?
4. Поясните геометрический смысл частной производной.
5. Что такое дифференциал функции нескольких переменных?
6. Что такое линейаризация функций?
7. Поясните правила дифференцирования сложных и неявных функций.
8. Как найти частные производные второго, третьего, ..., n-го порядка?
9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Практическая работа 8. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\ y^{(n-2)} &= \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2; \\ &\dots\dots\dots \\ y &= \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n; \end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$;

$$y'_0 = -1; \quad y''_0 = 0.$$

$$y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 &= \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1; \\ C_1 &= -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8}; \end{aligned}$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \dots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \quad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x = 0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y y'' - (y')^2 - 4 y y' = 0$.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна,

Замена переменной: $p = y'; \quad y' = \frac{dp}{dy} p;$

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$y p \frac{dp}{dy} - p^2 - 4 y p = 0; \quad p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4 y \right) = 0;$$

$$1) \ y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \quad du = 4 \frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4 \int \frac{dy}{y}; \quad u = 4 \ln|y| + 4 \ln C_1; \quad u = 4 \ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y \ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y \ln|C_1 y|; \quad \int \frac{dy}{4y \ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C;$

$$2) \ p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C;$$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, \dots, p_n$ – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Задачи.

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------|
| 1. $y'' = 1 - y'^2$. | 2. $xy'' + y' = 0$. |
| 3. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$. | 4. $x^2 y'' + xy' = 1$. |
| 5. $xy''' + y'' = 1 + x$. | 6. $y'''^2 + y''^2 = 1$. |
| 7. $y'(1 + y'^2) = y''$. | 8. $y'' = -x/y'$. |
| 9. $xy'' + y' + x = 0$. | 10. $y'''^2 = 4y''$. |

Задача 2. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

- | | | |
|----------------------------------|---------------|----------------|
| 1. $y'' y^3 = 1,$ | $y(1/2) = 1,$ | $y'(1/2) = 1.$ |
| 2. $y y'' + y'^2 = 1,$ | $y(0) = 1,$ | $y'(0) = 1.$ |
| 3. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0,$ | $y(0) = 2,$ | $y'(0) = 2.$ |
| 4. $y^2 + y'^2 - 2y y'' = 0,$ | $y(0) = 1,$ | $y'(0) = 1.$ |
| 5. $3y' y'' = y + y'^3 + 1,$ | $y(0) = -2,$ | $y'(0) = 0.$ |

Задача 3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $y'' + y = \cos x.$ | 2. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x.$ |
| 3. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$ | 4. $y'' + y = 3 \sin x.$ |
| 5. $y'' + y = 4x \cos x.$ | 6. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x.$ |
| 7. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x.$ | 8. $y'' - 2y = 2x e^x (\cos x - \sin x).$ |
| 9. $y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x.$ | 10. $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x.$ |

Вопросы:

1. Какие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка Вы знаете?
2. Какую замену переменной необходимо провести, если в уравнении явно не содержится искомая функция, независимая переменная?
3. Какое уравнение называют линейным с постоянными коэффициентами?
4. Как строится общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Как найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

5. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

5.1. Перечень основной литературы:

Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2011. — 415 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28122.html>

5.2. Перечень дополнительной литературы:

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

2. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>.

3. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20211.html>.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математический анализ»

для студентов направления подготовки 09.03.02 **Информационные системы и
технологии** направленность (профиль) **Информационные системы и
технологии обработки цифрового контента**

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пятигорск, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Цель и задачи самостоятельной работы	4
3. Технологическая карта самостоятельной работы студента	5
4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом	6

<i>4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой</i>	6
<i>4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям</i>	7
<i>4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний</i>	8

5. Контроль самостоятельной работы студентов	8
6. Список литературы	8

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.
2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.
3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.
4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.
5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Математический анализ» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Математический анализ» направлена на

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022		Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций,
---	--	---

		индикаторов
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и инженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ИД-1_{ОПК-1} Знаком с основами математики, физики, вычислительной техники и программирования. ИД-2_{ОПК-1} Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и инженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Применяет естественнонаучные и инженерные знания, методы математического моделирования в профессиональной деятельности.

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию,

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и

выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-1 (ИД-1,2)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	0,405	0,045	0,45
ОПК-1 (ИД-1,2)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	1,08	0,12	1,2
ОПК-1 (ИД-1,2)	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-5	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	61,965	6,885	68,85
Итого за 1 семестр			63,45	7,05	70,5
2 семестр					
ОПК-1 (ИД-1,2)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	0,405	0,045	0,45
ОПК-1 (ИД-1,2)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	1,08	0,12	1,2
ОПК-1 (ИД-1,2)	Самостоятельное изучение литературы по темам 6-18	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	80,19	8,91	89,1
Итого за 2 семестр			81,675	9,075	90,75
	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	6,075	0,675	6,75
Итого			151,2	16,8	168

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того, насколько осознанно читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.)

во многом зависит от того, как осуществляется действие.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022
усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

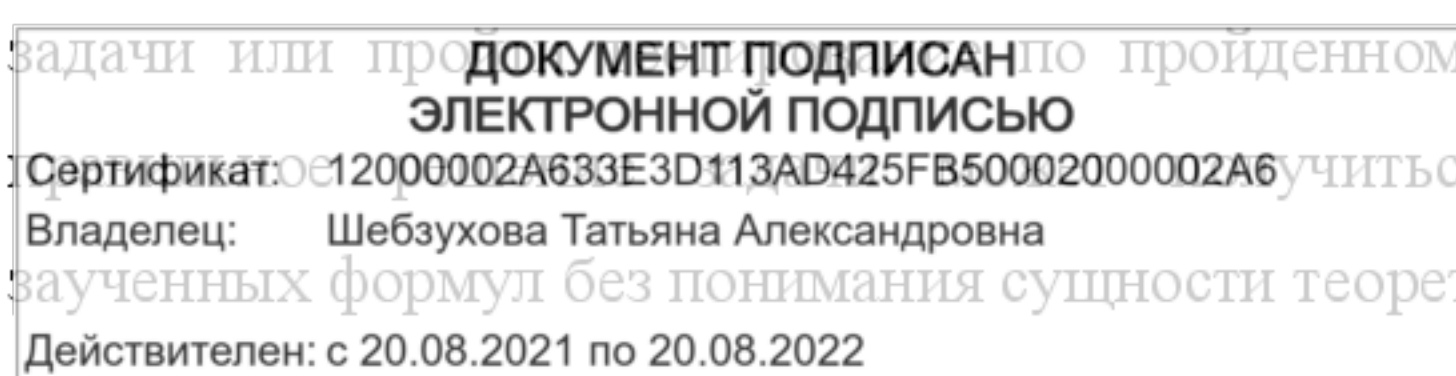
4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать

задачи или проанализировать пройденный материал. Однако следует помнить, что изучать в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.



5. Контроль самостоятельной работы студентов

Успеваемость студентов по дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2011. — 415 с. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28122.html>

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

2. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>.

3. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20211.html>.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022