МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г.Пятигорске

Колледж Института сервиса, туризма и дизайна(филиал) СКФУ в г.Пятигорске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ЕН. 01 Математика

Специальности СПО

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Квалификация: техник

Методические указания для практических занятий по ЕН. 01 Математика составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к подготовке выпуска для получения квалификации техник. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

Рассмотрено на заседании ПЦК колледжа Пятигорского института (филиал) СКФУ

Протокол № ____ от ________2023г.

Пояснительная записка

Для многих студентов значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данных методических рекомендациях главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры надо добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения для самостоятельной работы студентов.

Практическая работа № 1

Тема: Вычисление предела функции
Цель: Научить вычислять пределы функций

Теоретическая часть

Предел функции

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Определение предела функции можно сформулировать и так: Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки a, что для любого $x \neq a$ из этой окрестности $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел обозначается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Пример 1. Предел постоянной функции в любой точке равен этой же постоянной.
Решение. Пусть $f(x) = k$ для всех x. Очевидно, что для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ и для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ справедливы соотношения $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.
Значит, по определению предела

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k.$$

Пример 2. Дана функциия $f(x) = x$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ - любое число. Положив $\delta = \varepsilon$, для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ получим $|f(x) - a| = |x - a| < \delta$, т. е. $|f(x) - a| < \varepsilon$, значит

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к a, то этот предел единственен.

Теоремы о пределах функции

Теорема 1. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и пределы их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.
Действительно,

$$\lim_{x\to a}(kf(x) = \lim_{x\to a} k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует также и предел их отношения $f(x)/g(x)$, равный отношению пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x).$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю, то она называется бесконечно малой величиной.
Если предел функции равен бесконечности, т.е. величине обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной. Следовательно, выполняются равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{0}=\infty,\quad \lim_{x\to a}\frac{1}{\infty}=0$$

Вычислите пределы

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3)=\lim_{x\to 7}x+\lim_{x\to 7}3=7+3=10.$$

.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-7}=$$

$$=\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=5/(-5)=-1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$

$$=2+2=4.$$

Решение упражнений

1 $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-1)(x-3)(x-5)]$

1. $\lim\limits_{x\to 0}[(2x-4)(x-1)(x+2)]$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3x^2+2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2+25}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

11. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

12. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+3x^2)$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-8}{2x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-4x^2+2x}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{x^2-2x+3}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-x$

23. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$

24. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

27. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2-x}{3-\sqrt{2x-1}}$

Практическая работа № 2

Тема: Непрерывность функции. Точки разрыва функции
Цель: Научить исследовать функции на непрерывность, находить точки разрыва функций и исследовать их характер

Теоретическая часть

Непрерывность функции

Определение 1. Функция $f(x)$называется непрерывной в точке $x = a,$ если предел функции при $x \to a$ равен значению функции при $x = a$, т.е.$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Определение 2. Функция$y = f(x)$называется непрерывной в точке $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно маломо приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$/

Если условие непрерывности функции в точке $x = a$ нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Точки разрыва функции.

Если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$при$x \to a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) *разрыв 1 рода* – в этом случае существуют конечные пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$;
2) *разрыв 2 рода* – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Примеры :

1. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер
$$y = \frac{x}{x-3}$$
Даная функция определена при всех значениях x, кроме $x = 3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \to 3$:
$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty,$$
Следовательно, функция $\frac{x}{x-3}$ в точке $x = 3$ имеет бесконечный разрыв , т.е. $x = 3$ – точка разрыва 2 рода.
2. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер

$$y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}}$$

Единственной точкой разрыва является точка $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = 1$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Поскольку левый и правый пределы функции при $x = 0$ являются конечными, $x = 0$ – точка разрыва 1 рода.

Решение упражнений

Найдите точки разрыва функции и исследуйте их характер:

1. $y = \frac{5}{2x-1}$;
2. $y = \frac{1}{x^2}$;
3. $y = \frac{1}{1-x^2}$;
4. $y = \frac{3}{x^2-2x+1}$;
5. $y = \frac{x-1}{x^2-3x-10}$;
6. $y = 1 + 2^{\frac{1}{x-2}}$;
7. $y = \frac{x}{x-2}$
8. $y = 3^{\frac{1}{x}}$
9. $y = arctg\,\frac{1}{x-1}$
10. $y = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3), & x \le 1 \\ 6-5x, & 1 < x < 3 \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases}$
11. $y = \frac{5x^2-3x}{2x}$
12. $y = \frac{1}{x-x^3}$
13. $y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
14. $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Практическая работа №3

Тема: Правила вычисления производной простой функции.
Цель: Научить вычислять производные.

Теоретическая часть

- $C' = 0$
- $x' = 1$

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ …(g ≠ 0)
- $\left(\frac{C}{g}\right)' = -\frac{Cg'}{g^2}$ (g ≠ 0)

Вычислите производную:

1. $f(x) = x^3 + 2x^5 + 4$
2. $f(x) = 2x^2 + x^3 + 10$
3. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{6}{7}$
4. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{5}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^5$
6. $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4$
7. $f(x) = x(x+1)$
8. $f(x) = x(x+5)$
9. $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

10. $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$

11. $f(x) = x(x+3)$
12. $f(x) = (x^2+4)(x-1)$

13 $f(x) = \frac{x}{3x-1}$

14 $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$

Домашнее задание:

1) $f(x) = 7x^7 + 13x^3 + 18$

2) $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{4}{x^3} + \sqrt{x}$

3) $f(x) = x(x+2)$

4) $f(x) = (x+5)(x^2+7)$

5) $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

6) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Практическая работа №4

Тема: Правила вычисления производной сложной функции.
Цель: Научить вычислять производные.

Теоретическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

1. $C' = 0,$ где $C - const$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
5. $(f \cdot C)' = f' \cdot C,$ где $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная$y' = f'(x)$называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y''. Аналогично определяются производные 3-го, 4-го,…, порядка.

Решение упражнений

1. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
2. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
3. $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$
4. $y = cosln(1-x^2)$
5. $y = sin\sqrt{3} + \frac{1sin^2 3x}{3cos6x}$
6. $y = ctg\sqrt[3]{5}$-$\frac{1cos^2 4x}{8sin8x}$
7. $y = arcsin^3\sqrt{4-5x}$
8. $y = arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$
9. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6}}$
10. $y = lnsin\frac{2x+4}{x+1}$
11. $y = lntg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
12. $y = ln^3(1 + cos4x)$
13. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + 2^{\pi^{\sqrt{2}}}$
14. $y = \ln arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$
15. $y = e^{-x^2}cos^3(2x+3)$
16. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot arctg^2 2x$
17. $y = \frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$
18. $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
19. y=$(19)^{x^{19}}x^{19}$
20. $y = (ctgx)^{lntg\frac{x}{4}}$

Практическая работа № 5

Тема: Вычисление неопределенного и определенного интеграла
Цель: Научить вычислять неопределенный и определенный интегралы

Теоретическая часть

Неопределенный интеграл

F(x) - **первообразная** для f(x) на множестве X если F'(x) = f(x) для всех x∈X. Если F(x) - первообразная для f(x) на множестве X, то F(x) + c - множество всех первообразных для f(x) на множестве X. Это множестве первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
$$\int dF(x) = F(x) + C$$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$d\int f(x)d(x) = f(x)d(x)$$
3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
$$\int [f(x) + \varphi(x)]d(x) = \int f(x)\, d(x) + \int \varphi(x)d(x)$$
4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:
$$\int af(x)d(x) = a\int f(x)d(x)$$

Основные формулы интегрирования

1.$\int dx = x + C$

2. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x}$=$lnx + C$

4. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C$

5. $\int e^x\, dx = e^x + C$

6. $\int sinx\, dx = -cosx + C$

7$\int cosx\, dx = sinx + C$

8.$\displaystyle\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

9.$\displaystyle\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

10.$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a}$+C

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений:

1. $\int xdx$

2. $\int \frac{x}{5}dx$

3. $\int x^5 dx$

4. $\int 7x^6 dx$

5. $\int (7x+1)^3 dx$

6. $\int 10\sin 5xdx$

7. $\int 3(5x+1)^2 dx$

8. $\int (2x-1)^2 dx$

9. $\int \frac{dx}{x^3}$

10. $\int \sqrt[4]{x^3 dx}$

11. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$.

12. $\int 3\cos 3xdx$

13. $\int 4(5-6x)^3 dx$

14. $\int \frac{dx}{x^4}$

15. $\int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$

16. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)}$

17. $\int 2\sqrt[3]{(7-3x)^2}dx$

18. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

19. $\int \frac{dx}{x^2-25}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

21. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{25+x^2}$

24. $\int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$

25. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{cos^2x} - \frac{1}{sin^2x}\right)$

Практическая работа № 6

Тема: Числовые ряды. Знакопеременные числовые ряды

Цель: Научить исследовать ряд на сходимость и расходимость

Теоретическая часть

1. *Необходимый признак сравнения ряда.*
   Теорема: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$=0.
   Если же для некоторого ряда его общий член не стремится к нулю, то теорема позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.
2. *Признак сравнения рядов с положительными членами*
   Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда;
   Исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.
   При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрический ряд, гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд.
3. Признак Даламбера: Если для ряда с положительными членами
   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \ (u_n > 0)$$
   выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.
   Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Рассмотрим примеры:
Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2^n} + \cdots$$

Решение: Находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$=0. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots + \cdots$ который сходится так как $q = \frac{1}{2} < 1$.
Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5\cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \ldots \frac{1}{(2n-1)2^n} < \frac{1}{2^n} \ldots$$

т.е. члены ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.
Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots.$$

Решение: Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда; следовательно, ряд расходится.
Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \cdots$$

Решение: Находим

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$=0. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \cdots$$

Который сходится, поскольку p=$\frac{3}{2} > 1$. Следовательно, сходится и данный ряд.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \cdots + \frac{2n}{5^n} + \cdots$$

Решение: Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число n+1, получим$\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$

Найдем предел отношения (n+1) –го члена к n-му члену при$n \to \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n} = \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{3^n} + \cdots$$

Решение: $u_n = \frac{n!}{5^n} u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} = \frac{n+1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1,$$

Т.е. ряд расходится.

Решение упражнений

I. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:
   1. $u_n = \frac{n}{n+1}$
   2. $u_n = \frac{2n}{2n-1}$
   3. $u_n = \frac{2^n+3}{2^{n+1}}$
   4. $u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$

II. Найдите первые четыре члена по его заданному общему члену:
   1. $u_n = \frac{(n+1)!}{2n}$
   2. $u_n = \frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$
   3. $u_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$
   4. $u_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{2n}$
   5. $u_n = \frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$
   6. $u_n = \frac{n+1}{(2n-1)3^{n-1}}$

III. Найдите формулу общего члена ряда по его данным первым членам
   1. $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \cdots$

2. $\frac{1}{9}+\frac{1\cdot 2}{25}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{49}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{81}+\cdots$

3. $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{11}-\frac{5}{14}+\cdots$

IY. Вычислите сумму членов ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Y. Найдите n-й член ряда по его данным первым членам:

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$
2. $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots$
3. $\frac{2}{4}-\frac{4}{9}+\frac{6}{16}-\frac{8}{25}+\cdots$

YI. Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак и один из признаков сравнения:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

Исследуйте сходимость ряда, использую признак Даламбера.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

Практическое занятие № 7

Тема: Решение систем линейных уравнений
Цель: Научить решать системы линейных уравнений

Теоретическая часть

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

называется *системой* m *- линейных уравнений с* n *неизвестными*.

Числа a_{ij} , $i=1,m$, $j=1,n$ называются*коэффициентами системы*.

Числа b_i , $i=1,m$ называются*свободными членами системы*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *–переменными системы*. Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей системы*, а матрица

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

– расширенной матрицей системы. Матрицы - столбцы

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ и $$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - соответственно*матрицами свободных членов и неизвестных системы*.

Тогда в матричной форме систему уравнений можно записать в виде $AX=B$.*Решением системы* называется n значений переменных $x_1=c_1, x_2=c_2, \ldots, x_n=c_n$, при подстановке которых, все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства. Всякое решение системы можно представить в виде матрицы - столбца $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$. Тогда справедливо матричное равенство $A\times C=B$.

Система уравнений называется *совместной* если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной* если не имеет ни одного решения.

Решить систему линейных уравнений это значит выяснить совместна ли она и в случае совместности найти её общее решение.

Система называется *однородной* если все её свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как имеет решение

$x_1=x_2=\ldots ¿ x_n=0$.

Если число уравнений системы равно числу неизвестных переменных и определитель ее основной матрицы не равен нулю, то такие СЛАУ будем называть **элементарными**. Такие системы уравнений имеют единственное решение, причем в случае однородной системы все неизвестные переменные равны нулю.

Такие СЛАУ мы начинали изучать в средней школе. При их решении мы брали какое-нибудь одно уравнение, выражали одну неизвестную переменную через другие и подставляли ее в оставшиеся уравнения, следом брали следующее уравнение, выражали следующую неизвестную переменную и подставляли в другие уравнения и так далее. Или пользовались методом сложения, то есть, складывали два или более уравнений, чтобы исключить некоторые

неизвестные переменные. Не будем подробно останавливаться на этих методах, так как они по сути являются модификациями метода Гаусса.
Основными методами решения элементарных систем линейных уравнений являются метод Крамера.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \quad \Delta_{x_2}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n}$ - определители матриц, которые получаются из А заменой 1-ого, 2-ого, …, n-ого столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода Крамера как $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$. Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Пример.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

Решение.

Основная матрица системы имеет вид $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 0-$$

$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 0=-13$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

Составим и вычислим необходимые определители Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} (определитель Δ_{x_1} получаем, заменив в матрице А первый столбец на столбец свободных членов $\begin{pmatrix}9\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$, определитель Δ_{x_2} - заменив второй столбец на столбец свободных членов, Δ_{x_3} - заменив третий столбец матрицы А на столбец свободных членов):

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}9 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=9\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 3\cdot 0-$$

$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot 3\cdot 2-9\cdot 1\cdot 0=-52$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2 & 9 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 2+9\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 2-$$

$$-(-1)\cdot 3\cdot 1-9\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 2=0$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 9\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1+9\cdot 1\cdot 0-$$

$$-9\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 3\cdot 0=13$$

Находим неизвестные переменные по формулам $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\quad x_3=\dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{-52}{-13}=4,$$

$$x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{0}{-13}=0,$$

$$x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{13}{-13}=-1$$

Ответ:
$x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Практическое занятие №8

Тема: Операции над множествами
Цель: Научить решать задачи, используя основные операции над множествами

Теоретическая часть

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством.
Операции над множествами: объединение, пресечение, дополнение, разность, симметрическая разность.
Пример: На фирме работают 40 человек. Из анкетных данных известно, что 20 человек владеют английским языком, 20 человек – компьютером, 14 – делопроизводством. Английским языком и компьютером владеют 9 человек; . английским языком и делопроизводством – 7 человек; компьютером и делопроизводством – 5 человек; английским языком, делопроизводством
И компьютером – 2 человека. Сколько человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством?
Решение: 1) Введем обозначения:
U- множество человек работающих на фирме;
A- множество человек, владеющих английским языком;
B- множество человек, владеющих компьютером;
C- множество человек, владеющих делопроизводством.
Тогда m(U)=40: m(A)=20; m(B)=20; m(C)=14.
Кроме того, известно, что английским языком владеют 9 человек, следовательно, $m(A \cap B) = 9$; английским языком и делопроизводством – 7 человек, следовательно, $m(A \cap \mathrm{C}) = 7$; компьютером и делопроизводством – 5 человек, следовательно, $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 5$; английским языком, делопроизводством и компьютером – 2 человека, следовательно,
$m(A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 2$.
Необходимо определить

Разобьем множество M=$A \cup B \cup C$ на 7 попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_7$ и найдем мощности каждого из этих множеств:
а) $A_1 = A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, владеющих английским языком, делопроизводством и компьютером, $m(A_1)$= $m(A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 2$
б) $A_2 = \bar{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, не владеющих английским языком и владеющих компьютером и делопроизводством. Заметим, что$\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = A_1 \cup A_2$, следовательно $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = m(A_1) + m(A_2)$, откуда $m(A_2)$= $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - m(A_1) = 5 - 2 = 3$;
в) A_3= $A \cap \bar{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, владеющих английским языком и делопроизводством и не владеющих компьютером. Заметим, что$A \cap \mathrm{C}$=$A_1 \cup A_3$, следовательно, $m(A \cap \mathrm{C}) = m(A_1) + m(A_3)$, откуда
$m(A_3)$= $m(A \cap \mathrm{C}) - m(A_1)$=7-2=5
г) A_4= $A \cap \mathrm{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком, компьютером и не владеющих делопроизводством. $A \cap \mathrm{B} = A_1 \cup A_4,$ следовательно, $m(A \cap B) = m(A_1) + m(A_4)$, откуда
$m(A_4)$= $m(A \cap \mathrm{B}) - m(A_1)$=9-2=7;
д) $A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \mathrm{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком, компьютером и владеющих делопроизводством.

$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$, следовательно, m(C)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_3) + m(A_5)$,
откуда, $m(A_5)$= , m(C)- $m(A_1) - m(A_2)$- $m(A_3)$=14-2-3-5=4;
е) $A_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком и делопроизводством и владеющих компьютером B=$A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6$,
m(B)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_4) + m(A_6)$, откуда $m(A_6)$= m(B)- $m(A_1) - m(A_2)$+$-m(A_4) - m(A_6) = 20 - 2 - 3 - 7 = 8$;
ж) $A_7 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком и не владеющих делопроизводством и компьютером. A=$A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_7$, следовательно, m(A)= $m(A_1) + m(A_3)$+ $m(A_4) + m(A_7)$, откуда $m(A_7)$= m(A)- $m(A_1) - m(A_3)$+$-m(A_4) = 20 - 2 - 5 - 7 = 6$;
Окончательно,
M= $A \cup B \cup C$=$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, следовательно, m(M)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_3) + m(A_4) + m(A_5)$+ $m(A_6)$+ $m(A_7)$=$2 + 3 + +5 + 7 + 4 + 8 + 6 = 35$

1) Так как U=M+$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, то $m(\mathrm{U}) = \mathrm{m(M)} + m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$, откуда

$m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$= $m(\mathrm{U}) - \mathrm{m(M)} = 40 - 35 = 5$
Следовательно, 5 человек не владеют ни английским языком, ни делопроизводством, ни компьютером.

Решение упражнений

1.Даны множества: $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}, A = \{a, c, e, p\}, B = \{b, d, f, p\}, C = \{a, d, f, q\}$
Выполните следующие операции:
а) $\overline{(A/B}/B \cap C)/\bar{\bar{\bar{C}}}$ ∪A
б) $(A \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B/C$;
в) $\bar{A}/\overline{B \cap C}/A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$;
г) $A \cup B \cap \overline{B \cup C}/\bar{B}$;
д) $(A \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$;
е) $(A \cup B \cap \mathrm{C})/(\bar{B} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\overline{A \cup B \cup C})$;
ж)($A \cup (B/A) \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap C/C$
2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна упростите выражения:
а) $\bar{A} \cup (A/\overline{B)} \cup (\bar{A}/\overline{B)})$;
б) A∪ $\overline{(\bar{A} \cup B}) \cup \bar{B}$;
в) $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{B)}) \cup (A \cap \overline{B)})$
г))$(\bar{A} \cup \overline{B)}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B)}) \cap (A \cup B)$
3. Из 276 отобранных студентов экономического вуза 83 изучают математику,95-право, 102-финансы. Кроме того, известно, что 27 из них изучают математику и право, 24- математику и финансы, 20-право и финансы 11-изучают все три предмета. Сколько учащихся не изучают ни одного из этих предметов? Сколько из них изучают финансы, но не изучают ни математику, ни право?
4. Проверочный экзамен по математике содержал три задачи: предел, производная и интеграл. Из 800 студентов задачу с пределом решили 250 человек; с пределом или интегралом – 600 человек. По две задачи решили 400 человек, из них две задачи на предел и производную решили 150 человек, на предел и интеграл – 50 человек. Ни один студент не решил все задачи. 20 студентов не решили ни одной задачи. Только задачу на интеграл решили120 человек. Сколько студентов решили только одну задачу? Сколько человек решили задачу на производную?
5. Кафедра математики обслуживает три факультета: Экономический, финансовый, товароведный. Некоторые преподаватели кафедры могут работать сразу на нескольких факультетах. На финансовом факультете работают 22 преподавателя, на экономическом -23 преподавателя, на экономическом и товароведном – 36 преподавателей.Только на финансовом факультете работают 10 преподавателей, только на экономическом и товароведном -5 преподавателей. Два преподавателя работают на трех факультетах. Число преподавателей,

работающих только на экономическом и финансовом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на финансовом и товароведном факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколь преподавателей работает только на одном факультете?

Практическая работа № 9

Тема: Вычисление площадей поверхностей куба, призмы, параллелепипеда

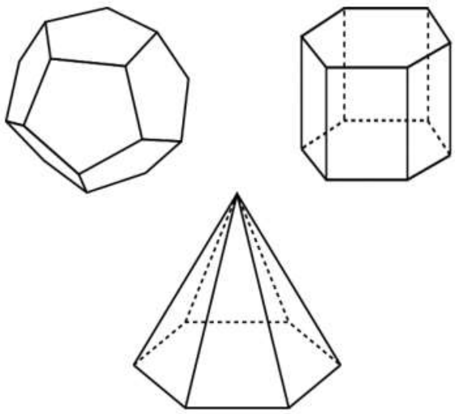
Цель: Научить решать задачи на вычисление площадей поверхностей куба, призмы, параллелепипеда

Теоретическая часть

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.



$$S_{\text{бок.пов.пр.ппризм}} = P_{\text{осн.}}h, S_{\text{бок.пов.пр.ппирамыд}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}}l.$$

Решение задач по теме “Вычисление площадей поверхностей многогранников”.

Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1? (6)

Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности. (24 м^2)

Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) *n* раз? (в 4 раза, в 9 раз, в n^2 раз)

Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1? ($\sqrt{3}$)

Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?($2\sqrt{3}$)

Чему равна площадь поверхности икосаэдра с ребром 1? ($5\sqrt{3}$)

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см. (300 см^2)

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы. (132 см^2)

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см. (248 см^2)

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота равна 4 см. (60 см^2)

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см. (18 см^2)

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания 4 см и высотой 2 см. (48 см^2)

Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все её рёбра: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз? (в 4 раза; в 25 раз)

Развёртка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 м^2. Найдите площадь грани пирамиды. (20 м^2)

Проверочная работа

I уровень

Вариант I

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы - ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Вариант II

1. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 9 см, а диагональ боковой грани равна 15 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы - ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности - 240 см2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

II уровень

Вариант I

1. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы имеет площадь 16 дм2. Диагональ основания призмы равна 4√2 дм. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагонали двух смежных боковых граней, имеющих общую вершину.

Вариант II

1. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и катетом 20 см. Меньшая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Высота правильной четырехугольной призмы равна 1 дм, а площадь боковой поверхности равна 16 дм2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагональ нижнего основания, и противолежащую вершину верхнего основания.

III уровень

Вариант I

1. Основание прямой призмы - равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом при вершине 120°. Диагональ наибольшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 60°. Найдите площадь боковой грани и полной поверхности призмы.

2. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна Q. Сечение призмы, проходящее через диагональ нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, образует с плоскостью основания призмы угол α. Найдите площадь сечения.

Вариант II

1. Основание прямой призмы - равнобедренный треугольник с основанием 6√3 см и углом при основании 30°. Диагональ меньшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 45°. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Сечение призмы, проходящее через середину бокового ребра и диагональ основания, не пересекающую данное ребро, образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь сечения.

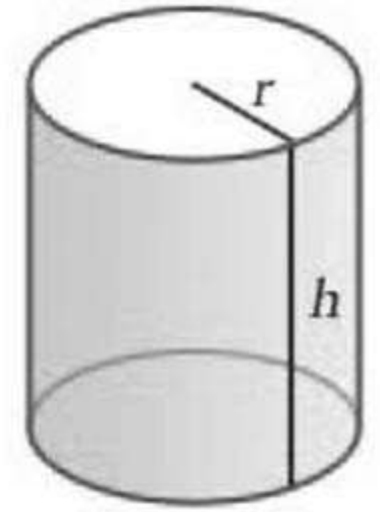
Практическая работа № 10

Тема: Вычисление площадей поверхностей конуса, шара, цилиндра

Цель: Научить решать задачи на вычисление площадей поверхностей конуса, шара, цилиндра

Теоретический блок

Цилиндр представляет собой геометрическое тело, ограниченное двумя параллельными рхностью.



Цилиндр состоит из боковой поверхности и двух оснований. Формула площади поверхности цилиндра включает в себя отдельный расчет площади оснований и боковой поверхности. Так как основания в цилиндре равны, то полная его площадь будет рассчитываться по формуле:

$$S_p = 2S_{osn} + S_{bok}$$

Формула площади основания цилиндра. Так как основанием цилиндра является круг, то: $S_{osn} = \pi r^2$

Мы помним, что в этих расчетах используется постоянное число П = 3,1415926, которое рассчитано как соотношение длины окружности к ее диаметру. Это число является математической константой.

Площадь боковой поверхности цилиндра

Формула площади боковой поверхности цилиндра представляет собой произведение длины основания на его высоту:

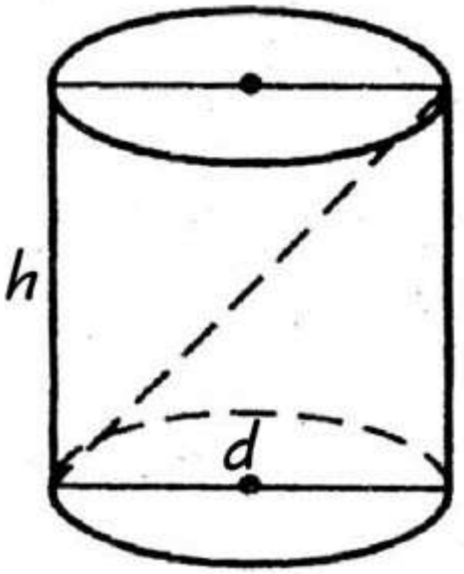
$$S_{bok} = 2\pi r h$$

А теперь рассмотрим задачу, в которой нам потребуется рассчитать полную площадь цилиндра. В заданной фигуре высота h = 4 см, r = 2 см. Найдем полную площадь цилиндра.

Для начала рассчитаем площадь оснований: $S_{osn} = 3{,}14 \times 2^2 = 12{,}56\, cm^2$

Теперь рассмотрим пример расчета площади боковой поверхности цилиндра. В развернутом виде она представляет прямоугольник. Его площадь рассчитывается по приведенной выше формуле. Подставим в нее все данные: $S_{bok} = 2 \times 3{,}14 \times 2 \times 4 = 50{,}24\, cm^2$

Полная площадь круга представляет собой сумму двойной площади основания и боковой: $S_p = 2 \times 12{,}56 + 50{,}24 = 25{,}12 + 50{,}24 = 75{,}36\, cm^2$



Таким образом, используя формулы площади оснований и боковой поверхности фигуры, мы смогли найти полную площадь поверхности цилиндра.
Осевое сечение цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором стороны равны высоте и диаметру цилиндра.

Формула площади осевого сечения цилиндра выводится из формулы расчета площади прямоугольника:
$S = 2hd$

Рассмотрим пример расчета площади осевого сечения цилиндра. Для этого возьмем условия из задачи, указанной выше. Чтобы найти величину нам потребуется диаметр. Мы знаем, что он равен двойному радиусу: $d = 2r$
$d = 2 \times 2 = 4 (cm)$

Подставим данные: $S = 2 \times 4 \times 4 = 32 cm^2$

- Какая фигура называется цилиндром?
- Почему цилиндр называют телом вращения?
- Назовите виды цилиндров?
- Назовите элементы цилиндра.
- Что представляет собой развертка цилиндра?
- Как найти площадь боковой поверхности цилиндра?
- Как найти площадь полной поверхности цилиндра?
- Назовите основные виды сечений цилиндра. Какая фигура получается в каждом случае?
- Приведите примеры использования цилиндров.

Решение задач:

Задача 1. Сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади ее боковой поверхности?
Дано: L=4; d=20см=0,2м. Найти: S.

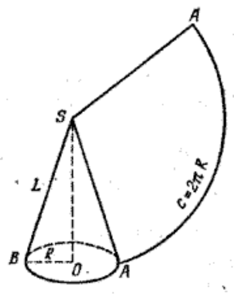
Решение: Воспользуемся формулой площади полной поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi rh$.
Радиус равен половине диаметра – 0,1м, а высота цилиндра равна длине нужной трубы – 4м.

Так на швы нужно добавить 2,5% площади ее боковой поверхности, нужно найти: (S+2,5%S). Подставим вместо S формулу площади боковой поверхности, и вычислим:

$$S+2,5\%\cdot S=S+\frac{2,5}{100}S=$$
$$=S\left(1+\frac{25}{1000}\right)=$$
$$=2\pi rL\cdot 1,025=$$
$$=2\cdot 3,14\cdot 0,1\cdot 4\cdot 1,025=$$
$$=2,5748\approx 2,6(м^2)$$

Ответ: 2,6 м^2.

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь развертки его боковой поверхности.



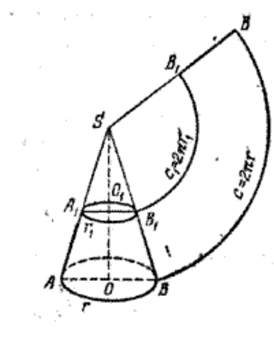
Поэтому площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна площади соответствующего кругового сектора (рис.) и вычисляется по формуле

$$S_{б.к.} = \pi RL,$$

где R — радиус основания, а L — длина образующей конуса. Если к площади боковой поверхности конуса прибавить площадь его основания, то получим площадь полной поверхности конуса

$$S_{полн.} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

Аналогично за площадь боковой поверхности усеченного конуса принимается площадь соответствующей развертки.



Поэтому в случае прямого кругового конуса (рис.) площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{б.у.к.}} = \pi\,(r_1 + r)L$$

где r_1 и r — радиусы оснований, а L — длина образующей усеченного конуса.

Решение задач:

1. Радиус конуса равен 6, а образующая – 10. Найти площадь боковой поверхности, площадь основания и площадь полной поверхности конуса.

2. Высота конуса равна 4, а образующая – 5. Найти площадь боковой поверхности, площадь основания и площадь полной поверхности конуса.

3.Сколько потребуется краски, для того чтобы покрасить пожарное ведро, если на 100см^2 необходимо затратить 10г?

4.Сколько квадратных метров брезента потребуется для сооружения палатки конической формы высотой 4 метра и диаметром основания 6 метров?

5. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30°, а высота конуса равна 12см. Найдите площадь боковой поверхности конуса и площадь полной поверхности.

6. Площадь основания конуса равна 16π, а площадь осевого сечения равна 32. Найдите высоту конуса и площадь боковой поверхности.

7**.** Найдите площадь боковой поверхности равностороннего конуса (осевое сечение – равносторонний треугольник), если радиус основания равен 5см.

8. Осевое сечение конуса равнобедренный треугольник площадь которого равна 60см^2, высота конуса 12см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Домашнее задание:

1. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если образующая равна 5см, а радиус основания 3см.

2. Образующая конуса равна 7см, а радиус основания 3см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

3. Высота конуса равна 12см, образующая 13см. Найдите площадь полной поверхности конуса

4.Площадь основания конуса равна 25πсм^2, а образующая равна 6см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

5. Найдите площадь полной поверхности конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°, а высота равна 6см.

Практическая работа № 11

Тема: Вычисление объема куба, призмы, параллелепипеда.

Цель: Научить решать задачи на вычисление объема куба, призмы, параллелепипеда.

Теоретическая часть

Прямоугольный параллелепипед - это объемная фигура, у которой шесть граней, и каждая из них является прямоугольником.

Прямоугольный параллелепипед - параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты.

Формула для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда

$$V = a \cdot b \cdot h$$

где

где V - объем прямоугольного параллелепипеда

a - длина,

b – ширина,,

h- высота.

Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания:

$\boldsymbol{V = S \cdot h}$

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

где $\boldsymbol{S}$ – площадь основания, $\boldsymbol{H}$ – высота пирамиды.

Формула объема усеченной пирамиды представляет собой одну треть произведения высоты на сумму площадей верхнего и нижнего основания с их средним пропорциональным:

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right)$$

Решение упражнений

1.Существует ли призма, имеющая 50 рёбер? 54 ребра?

Решение: Число ребер n – угольной призмы 3n, поэтому призмы, имеющей 50 ребер, не существует, а 54 ребра имеет 18-угольная призма.

2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 12 см , диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём параллелепипеда.

3. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10, 12. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём призмы.

4. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 2. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро увеличить в 3 раза.

Решение. Пусть ребра данного параллелепипеда равны а, b и с. Тогда имеем: V=abc=2. После увеличения каждого ребра в 3 раза его объём будет равен

V=3a*3b*3c =27 abc=27*2=54.

Ответ: 54.

5. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 30 см. Если в него налить 30 л. воды, то до верхнего края останется 5 см. Сколько литров воды нужно, чтобы наполнить пустой аквариум доверху?

Решение. Пусть V и H соответственно объем и высота параллелепипеда.

V=SH . По условию V=30,H=25, тогда 25*S=30.

После заполнения пустого аквариума доверху H=30. Значит, 30*S=V.

Найдем отношение $\frac{25S}{30S} = \frac{30}{V}$, V=36 л.

Ответ: 36.

6. Кубик весит 10 гр. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала.

Решение. Пусть V- объём данного параллелепипеда. После увеличения каждого ребра в 3 раза, его объём будет равен 27 V.

$\frac{V}{27V} = \frac{10}{x}$, x=270 гр.

Ответ: 270.

7. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 32. Чему будет равен объём параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в 2 раза.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд той же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого. Ответ выразите в сантиметрах.

9. Закрытый сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами 30, 40 и 45 см. стоит на горизонтальной поверхности таким образом, что наименьшая грань является дном. В сосуд налили воду до уровня 36 см. На каком уровне окажется вода, если сосуд поставить на наибольшую грань? Ответ дайте в сантиметрах.

10.Дано: ABCD - правильная пирамида. AB = 3; AD = $2\sqrt{3}$ (рис. 3).

Найти: а) Sосн.; б) AO; в) DO; г) V.

11. Дано: ABCDF - правильная пирамида. ∠FCO = 45°; FO = 2 (рис. 4).
Найти: а) Sосн.; б) V.

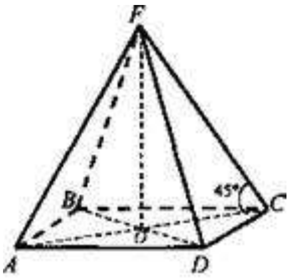


Рис. 4

Решение:

1) Рассмотрим ΔFOC: ∠O = 90°, ∠C = 45°, значит, ∠F = 45°. Следовательно, ΔFOC - равнобедренный, OC ≈ FO = 2.

2) AC = 2OC = 4. d = AC = AD√2 (по свойству диагонали квадрата, d2 = 2a2). Тогда $AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

3) ABCD - квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$

4) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h.$ $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$

(Ответ: а) 8; б) 5·1/3.)

12. Дано: ABCDEKF - правильная пирамида. FO ⊥ (ABC), FM ⊥ AK, FO = 4, FM = 5 (рис. 5).

Найти: а) Sосн.; б) V.

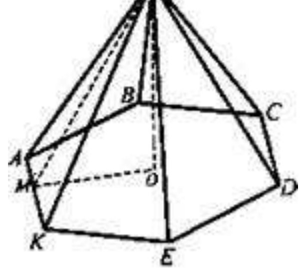


Рис. 5

Решение:

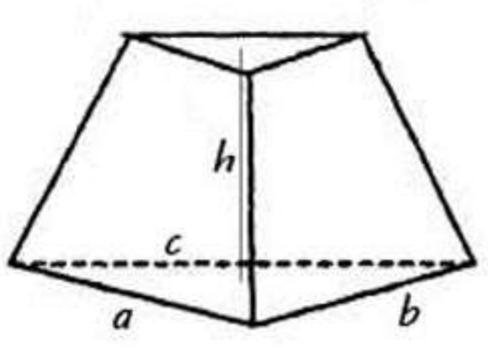
1) Рассмотрим ΔFOM: $\angle O = 90°$ (так как $FO \perp (ABC)$, значит, $FO \perp OM$) $FO = 4$, $FM = 5$. $OM = \sqrt{MF^2 - FO^2}$ (по теореме Пифагора), $OM = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$. $OM = r$ (r - радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник). $AK = 2r \cdot \text{tg}\frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3\text{tg}\frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$

2) $S_{осн.} = 6S_{\Delta AOK}$, $S_{AOK} = \frac{1}{2}AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$. $S_{осн.} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

3) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$; $V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

(Ответ: а) $18\sqrt{3}$, б) $24\sqrt{3}$.)

13.Задача: Дана треугольная усеченная пирамида. Ее высота ***h*** = 10 см, стороны одного из оснований равны ***a*** = 27 см, ***b*** = 29 см, ***c*** = 52 см. Периметр второго основания равняется ***P2***=72 см. Найдите объем пирамиды.



Для расчета объема нам потребуется площадь оснований. Зная длины сторон одного треугольника, мы можем рассчитать площадь по формуле Герона. Для этого потребуется найти полупериметр:

$$P_1 = 27 + 29 + 52 = 108 cm$$

$$P_1 = \frac{108}{2} = 54 cm$$

Теперь найдем S2:

$$S_1 = \sqrt{p(p\text{-}a)(p\text{-}b)(p\text{-}c)}$$

$$S_1 = \sqrt{54(54\text{-}27)(54\text{-}29)(54\text{-}52)} = \sqrt{54 \times 27 \times 25 \times 2} = \sqrt{72900} = 270 cm^2$$

Зная, что пирамида усеченная, делаем вывод, что треугольники, лежащие в основаниях подобны. Коэффициент подобия этих треугольников можно найти из соотношения периметров. Отношение площадей треугольников будет равно квадрату этого коэффициента:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{P_1^{\ 2}}{P_2^{\ 2}} = \frac{108^2}{72^2} = \frac{9}{4}$$

$$S_2 = \frac{4S_1}{9}$$

$$S_2 = \frac{4 \times 270}{9} = 120cm^2$$

Теперь, когда мы нашли площади оснований усеченной пирамиды, можем легко рассчитать ее объем:

$$V = \frac{1}{3} \times 10 \times \left(270 + \sqrt{270 \times 120} + 120\right) = \frac{10}{3}\left(270 + 180 + 120\right) = \frac{10}{3} \times 570 = 1900cm^3$$

Таким образом, вычислив коэффициент подобия и рассчитав площадь оснований, мы нашли объем заданной усеченной пирамиды.

14. Дано: A1A2A3A4 - ромб, SA1A2A3A4 - пирамида, A1A4 = a, ∠SBO = β, OB ⊥ A3A4, ∠A2A1O = a (рис. 6).

Найти: V - ?

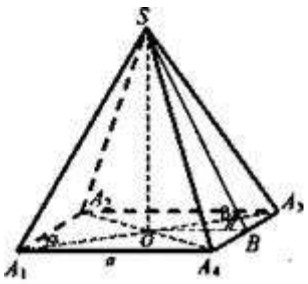


Рис. 6

Решение:

1) Рассмотрим $\Delta OA_3A_4 : OA_3 = a\cos\alpha, \qquad \Delta OA_3B : OB = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha.$

2) $\Delta SOB: SO = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta.$

3) $S_{осн.} = 4S_{\Delta A_3OH_4} = 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot OB = 2a \cdot \frac{1}{2}a\sin 2\alpha = a^2\sin 2d$

4) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot SO, \; V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot a^2\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\beta$

(Ответ: $\frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\beta.$)

Практическая работа № 12

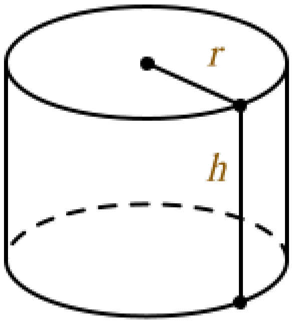
Тема: Вычисление объема конуса, шара, цилиндра.

Цель: Научить решать задачи на вычисление объема конуса, шара, цилиндра..

Теоретическая часть

Цилиндр это геометрическое тело, которое сформировано вращением прямоугольника на оси, совпадающей с одним из его сторон. Слово «цилиндр» происходит от греческого слова «kylindros».

Вычисление объема цилиндра производится по следующей формуле:



$V = \pi r^2 h$

V – объем цилиндра

h – высота цилиндра

r – радиус основания

π – 3.14

Как рассчитать объем цилиндра? Этими знаниями наиболее активно пользуются в своей работе конструкторы различных машин и механизмов, потребительских товаров, а также архитекторы. Инженерам приходится производить расчет объема цилиндра в тех случаях, когда они занимаются проектированием заданий, снабженных колоннами. Правда, в последнее время эти архитектурные элементы в их, так сказать, «классическом» варианте (то есть вместе с базой и капителем) встречаются достаточно редко, но их «упрощенные» разновидности, состоящие из одного ствола (который, собственно говоря, и представляет собой цилиндр) используются весьма широко. Нередко с колоннами приходится иметь дело реставраторам различных сооружений, имеющих большую историческую и культурную ценность, правда, в их работе вычисление объема цилиндра – далеко не самая распространенная процедура. Впрочем, если речь идет о полном восстановлении утраченных по тем или иным причинам колонн, то ее также приходится производить.

Расчет объема цилиндра осуществляется тогда, когда ведётся разработка разнообразных емкостей соответствующей формы. В качестве наглядного примера таковых можно привести, скажем, медицинские шприцы, а также колбы термосов. Следует заметить, что в

первом случае такой параметр, как объем, имеет очень важное значение, поскольку от него зависит точное количество медикаментов, вводимого пациенту при инъекциях.

В технике цилиндры распространены чрезвычайно широко: достаточно сказать, что их форму имеют практически все валы и их отдельные составные части, используемые, скажем, в двигателях внутреннего сгорания. К тому же, расчет объема цилиндра – одна из важнейших задач, которую приходится решать конструкторами при проектировании современных бензиновых и дизельных силовых агрегатов, ведь от этого параметра зависит множество их характеристик, и в первую очередь такая важнейшая, как мощность. Почти все типы ДВС снабжаются поршнями, которые также имеют цилиндрическую форму.

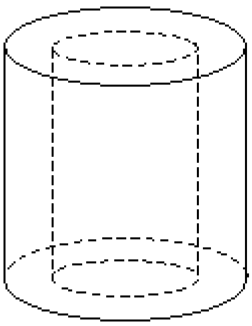
Чрезвычайно распространенными деталями, которые присутствуют в конструкции многих сложных технических устройств, являются роликовые подшипники. Как нетрудно догадаться по самому их названию, одними из основных их компонентов являются прочные и износостойкие металлические ролики, имеющие цилиндрическую форму. Именно благодаря такой геометрии, эти детали имеют достаточно большую несущую способность и в большинстве случаев способны выдерживать весьма значительные нагрузки, чем их шариковые аналоги. Роликовые подшипники являются высокоточными деталями, и поэтому при их разработке и проектировании правильный расчет объема цилиндра (в данном случае – ролика) играет немаловажную роль.

Решение задач:

1.Найдите объем цилиндра с высотой, равной 3см и диаметром основания – 6см.

2.Площадь осевого сечения цилиндра равна 21см^3, площадь основания - 18п см^2 Найдите объем цилиндра.

3.Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 25 м?



$\rho = 11{,}4$ г/см^3

$R_1 = 6{,}5$мм + 4мм = 10,5мм = 1,05см (наружный)

$R_2 = 6{,}5$мм = 0,65см

$V = V_1 - V_2 = \pi \cdot (1{,}05)^2 \cdot 2500 - \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot 2500 = 1700\pi \approx 5338$ (см^3)

$M = \rho \cdot V = 11{,}4 \cdot 5338 \approx 61$кг.

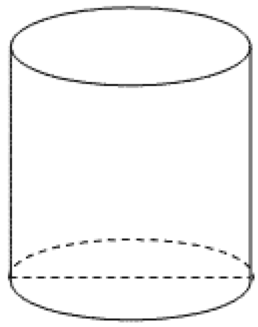
4. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметра 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

H = 7м; d = 1м; $\rho_{нефти} = 0{,}85$ г/см^3

m =?

$V_ц = \pi R^2 H = \pi \cdot 9^2 \cdot 7 = 567\pi$ (м^3)

$m = V \cdot \rho \approx 1513$ т



Домашнее задание:

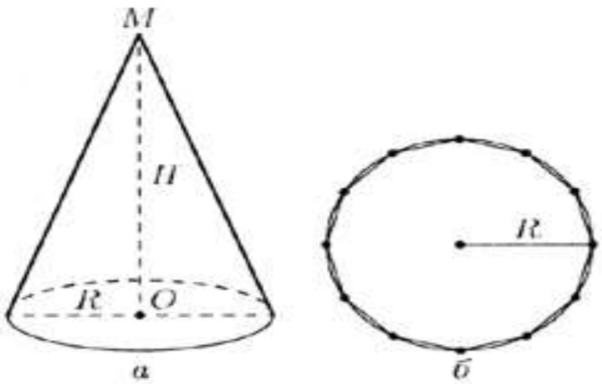
1. Диагональ осевого сечения цилиндра составляет с плоскостью основания цилиндра угол 60^0. Найдите объем цилиндра , если площадь осевого сечения равна $16\sqrt{3}$ $см^3$.

2. На склад в мастерской по пошиву одежды поступил рулон драповой ткани в форме цилиндра. При транспортировке был утерян товарный ярлык с указанием длины ткани в рулоне. Необходимо определить длину ткани в рулоне. Произвели необходимые измерения, определили высоту и диаметр рулона: 90см и 30см, толщина ткани 0,2см.

Объем конуса вычисляется по формуле

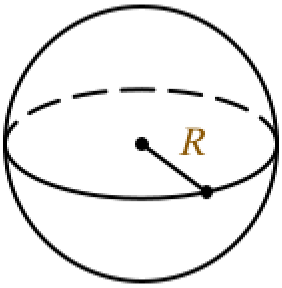
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

где R — радиус основания конуса, H -- его высота



Шар это геометрическое тело, образованное в результате вращения полукруга на оси своего диаметра.

Объем шара можно вычислить по формуле:



$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

R – радиус шара

V – объем шара

π – 3.14

Решение задач:

1. Авиационная бомба среднего калибра дает при взрыве воронку диаметром 6 м и глубиной 2 м. Какое количество земли (по массе) выбрасывает эта бомба, если 1 $м^3$ земли имеет массу 1650 кг?

Решение:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 6\pi$ ($м^3$).

$P = 1650 \cdot 6 \cdot 3{,}14 \approx 31\,086$ кг ≈ 31 т.

Ответ: $P = 31$ т.

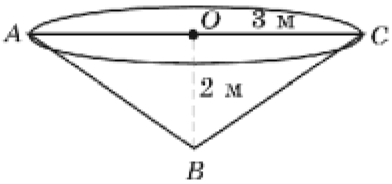


Рис. 3

2. Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить десятилитровое ведро?

$R=AC/2$, $R=5$см, $H=\sqrt{132-52}=12$(см), $V=1/3*3{,}14*5^2*12 \approx 314$($см^3$) $\approx 0{,}314$$дм^3$

$n=10/0{,}314 \approx 31{,}8$. *Ответ: 32 воронки.*

3. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/$см^3$. Определить массу стога сена.

Решение:

$R = 2{,}5$м

$01OO_1 = 4$м

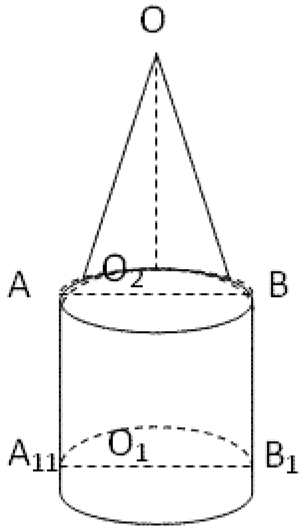
$O_1O_2 = 2{,}2$м

$\rho = 0{,}03$г/см^3

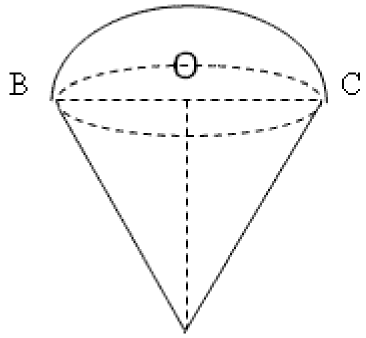
$m = \rho \cdot V$; $V_ц = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 2{,}2 = 13{,}75$ м^3= 13750000см^3

$V_к = 1/3\ \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 1{,}8 = 3{,}75$м^3 = 3750000 π см^3

M = 0,03 $\cdot$ 17500000π = 0,525 π т $\approx$ 1,6 т



4. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?



OA = 12 см

BC = d = 5 см

Переполнит ли мороженое стаканчик?

$V_ш = 4/3\ \pi R^3 (5/2)^3 = 125\pi/6 \approx 20\frac{5}{6}\pi$

$V_к = 1/3\ \pi R^2H = 1/3\ \pi (5/2)^2 \cdot 12 = \frac{25\pi 12}{12} = 25\pi$

Ответ: нет.

Задача:

Найти объем шара радиусом 10 сантиметров.

Решение:

Для того чтобы вычислить объем шара формула используется следующая:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

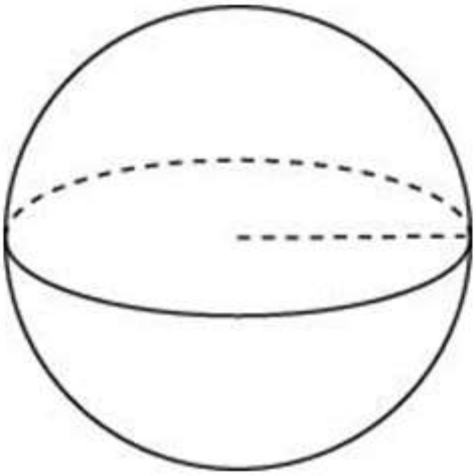
где V – искомый объем шара, π – 3,14, R – радиус.

Таким образом, при радиусе 10 сантиметров объем шара равен:

$V = \frac{4}{3}\, 3{,}14 \times 10^3 = 4082$ кубических сантиметров.

Решение задач:

1. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в шесть раз?



Объем шара находится по формуле:

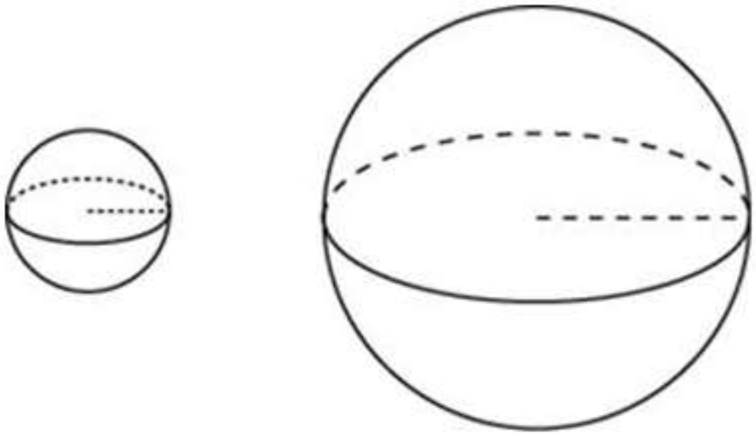
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

При увеличении радиуса в шесть раз его объём будет:

$$V = \frac{4}{3}\pi(6R)^3 = 216 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Таким образом, объем шара увеличится в 216 раз.
Ответ: 216

2. Объем одного шара в 216 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Формула объёма шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Формула площади поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2$$

Пусть объёмы шаров соответственно равны:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1{}^3 \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2{}^3$$

Из условия следует, что:

$$\frac{4}{3}\pi R_1{}^3 = 216 \cdot \frac{4}{3}\pi R_2{}^3$$

$$R_1{}^3 = 216 \cdot R_2{}^3$$

$$\frac{R_1{}^3}{R_2{}^3} = 216$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{216}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 6$$

То есть, мы установили, что радиус первого больше радиуса второго в 6 раз. Если радиус шара уменьшить в 6 раз, то площадь поверхности шара изменится следующим образом:

$$S = 4\pi\left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{4\pi R^2}{36}$$

То есть она уменьшится в 36 раз.

Практическая работа № 13

Тема: Исследования на экстремум в задачах на объемы многогранников

Цель: Научить решать задачи на нахождение экстремума

Теоретическая часть

Уже в глубокой древности возникали ситуации, когда требовалось решать задачи на экстремум. Одна из первых, дошедших до нас, задач подобного рода связана с легендой об основании города Карфагена. Как повествует в «Энеиде» римский поэт Вергилий, давным-давно финикийская царевна Дидона с небольшим отрядом преданных ей людей покинула родной город Тир, спасаясь от преследований своего брата тирана Пигмалиона. Ее корабли отправились на запад по Средиземному морю и плыли, пока Дидона не облюбовала удобное для поселения место на африканском побережье, в нынешнем Тунисском заливе.Высадившиеся финикийцы были встречены не очень гостеприимно местными жителями, нумидийцами. Король нубидийцевЯрб воинственно и презрительно разговаривал с непрошеной гостьей. Он принял драгоценности, предложенные Дидоной для покупки земли, но решительно заявил, что взамен он согласен уступить ей лишь клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Царевна безропотно согласилась. Ярб понял хитрость и коварство финикиянки слишком поздно: Дидона приказала разрезать шкуру на очень тонкие ремни и сшить их. Получив, таким образом, тонкий, но очень длинный ремень, она отгородила им от берега значительную территорию. Простодушный, но честный Ярб не стал отказываться от данного слова. А Дидона на этом месте основала город Карфаген. В память об этой истории карфагенская крепость была названа «Бирса», что на языке обитателей Карфагена означает «бычья шкура».

Легенда относит события к 825 году до н.э. и нам, конечно, судить об их достоверности трудно. Но для нас интересна математическая задача, которую, видимо, пришлось решать Дидоне. Предположим, что длина изготовленного тонкого ремня равна 600м. Тогда на современном языке задача Дидоны формулируется так:

Задача. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу моря, а три другие огораживаются ремнем, длина которого 600м. Каковы должны быть стороны этого участка, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Пусть одна сторона прямоугольника равна х м, тогда другая сторона равна (600 – 2х)м. Площадь прямоугольника будет функцией от переменной х: $y = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$, область определения которой (0; 300).

Найдем наибольшее значение этой функции на промежутке (0; 300).
Производная этой функции $y' = 600 - 4x$.
Критическая точка найдется из уравнения $600 - 4x = 0$ $x = 150$.
Исследуем знак производной на каждом интервале

(0; 150) $y' > 0$
(150; 300) $y' < 0$

Так как при переходе через точку $x = 150$ производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = 150$ функция имеет максимум. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник со сторонами 150 м и 300 м.
Найдем площадь огороженного участка земли $S = 45000$ м^2.

Мы решили задачу Дидоны, считая, что участок имеет форму прямоугольника. Решение подобных задач, если форма границы – кривая линия вызвало к жизни новый важный раздел математики – вариационное исчисление, в котором основным понятием является не функция, а функционал. В настоящее время этот раздел плодотворно используется во многих областях математики, физики, техники, экономики.

- В повседневной жизни, в практических задачах часто возникает необходимость определения условий, при которых мы получаем наилучшие результаты труда.

Задача. Из прямоугольного листа жести размером 25 х 40 см надо изготовить открытую коробку наибольшего объема.
Для изготовления коробки надо вырезать квадратные уголки. В зависимости от длины вырезаемого квадрата получаются коробки, имеющие различные объемы. Поэтому необходимо рассчитать размеры вырезаемых квадратов, при которых коробка имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через x. Дном коробки является прямоугольник, стороны которого равны а = 25 – 2x и в = 40 – 2x. Высота коробки равна x. Следовательно, объем коробки равен V = (25 – 2x)(40 – 2x)x, т.е. является функцией от переменной x.

$y = (25 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$

Область определения этой функции промежуток (0; 12,5). Найдем экстремумы этой функции.

$y' = (4x^3 - 130x^2 + 1000x)' = 12x^2 - 260x + 1000$

$12x^2 - 260x + 1000 = 0$

Критические точки функции x1 $\approx$ 16,7 – не входит в область определения функции.

$x^2 = 5$

Определим знак производной в промежутках

(0; 5) $y' > 0$
(5; 12,5) $y' < 0$

Так как при переходе через точку x = 5 производная меняет знак с плюса на минус, то при x = 5 функция $y = (25 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$ имеет максимум.

Следовательно, коробка будет иметь наибольший объем при вырезании квадратов со стороной 5 см. Найдем объем полученной при этом коробки: V(5) = 2250см^3.

Задача. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3В, а внутреннее сопротивление равно 2Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$. Обозначим сопротивление прибора R = x. С учетом данных задачи составим функцию $y = P(x) = \frac{9x}{(2 + x)^2} = \frac{9x}{x^2 + 4x + 4}$. Область определения этой функции промежуток (0; + ∞). Исследуем полученную функцию на экстремум.

$$y' = P'(x) = \left(\frac{9x}{x^2 + 4x + 4}\right)' = \frac{36 - 9x^2}{(x^2 + 4x + 4)^2}$$

Критические точки найдутся из уравнения $36 - 9x^2 = 0$.

$x_1 = -2$ точка не входит в область определения функции.
$x_2 = 2$
Найдем знак производной на каждом промежутке

(0; 2) $y' > 0$
(2; +∞) $y' < 0$

Так как при переходе через точку x = 2 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Значит, мощность, потребляемая прибором, будет наибольшей, если сопротивление его равно 2 Ом.

Решение упражнений

1. Из всех прямых параллелепипедов с данной площадью полной поверхности S и квадратным основанием найти тот, который имеет наибольший объем.
2. Из прямоугольного листа жести со сторонами 80и 50 смтребуется изготовит открытый сверху ящик наибольшего объема, отрезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать боковые стенки. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов?

3. Из всех прямых параллелепипедов с данным объемом и квадратным основанием найдите тот, который имеет наименьшую площадь полной поверхности.
4. Найдите размеры открытого (без крышки) ящика с квадратным дном, имеющего наименьшую площадь полной поверхности при заданном объеме.
5. Вычислите размеры открытого ящика с квадратным дном, имеющего наибольший объем, если общая площадь поверхности боковых стенок и дна равна S.

Практическая работа № 14

Тема: Исследования на экстремум в задачах на объемы фигур вращения

Цель: Научить решать задачи на нахождение экстремума

Теоретическая часть

Литр – это единица объёма. Один литр равен одному кубическому дециметру или тысяче кубических сантиметров:
$1\,л = 1\,дм^3 = 10 \times 10 \times 10\,см = 1000\,см^3$

Так как размеры банки, очевидно, выразятся в сантиметрах, то 0,5 литра следует сразу перевести в кубические сантиметры!

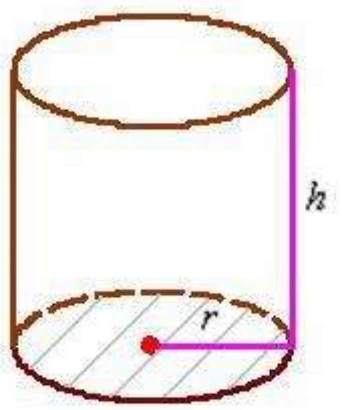
К слову, что это за размеры? Цилиндр стандартно определяется радиусом основания r и высотой h. Во-вторых. Освежим в памяти формулы:

площадь круга: $S_{кр} = \pi \cdot r^2$
площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi rh$
объём цилиндра: $V = \pi \cdot r^2 h$

Задача

Определить наибольшую вместимость цилиндрического бака, если его площадь поверхности (без крышки) должна равняться $S\,ед.^2$

Решение: в данном случае всё наоборот – известна площадь поверхности $S\,ед.^2$ *(если трудно, замените S конкретным числом)* и требуется определить максимальный объём $V = \pi r^2 h$ бака.



Сумма площадей дна *(не забываем, что крышка отсутствует!)* и боковой поверхности в точности равна известному значению: $\pi r^2 + 2\pi rh = S$, откуда находим:

$$2\pi rh = S - \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$$

Таким образом:

$$v(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{S - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r(S - \pi r^2)}{2} = \frac{1}{2}(Sr - \pi r^3)$$

Найдём критические точки:

$$v'(r) = \frac{1}{2}(Sr - \pi r^3)'_r = \frac{1}{2}(S - 3\pi r^2) = 0$$

$$3\pi r^2 = S$$

$$r^2 = \frac{S}{3\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Геометрическому смыслу задачи, разумеется, удовлетворяет положительный корень $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.
Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$v''(r) = \frac{1}{2}(S - 3\pi r^2)'_r = \frac{1}{2}(0 - 3\pi \cdot 2r) = -3\pi r$$

$$v''\left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right) = -3\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = -\sqrt{3\pi \cdot S} < 0$$

, значит, функция $v(r)$ достигает максимума в точке $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

При этом высота бака:

$$h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{S - \pi \cdot \frac{S}{3\pi}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{3\pi}}} = \frac{\frac{2S}{3}}{2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot S}{3}}} = \frac{2S \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot S}} = \frac{S \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{\pi \cdot S}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

максимальный объём:

$$v_{max} = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{S}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \frac{S}{3} \cdot \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Ответ: радиус основания оптимального бака: $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ *ед.*, высота: $h = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ *ед.*, при этом максимальный объём: $v_{max} = \frac{S}{3} \cdot \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ *ед.*^{3}

Практическое занятие № 15

Тема: Правила вычисления объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла

Цель: Научить вычислять с помощью определенного интеграла объемы фигур вращения

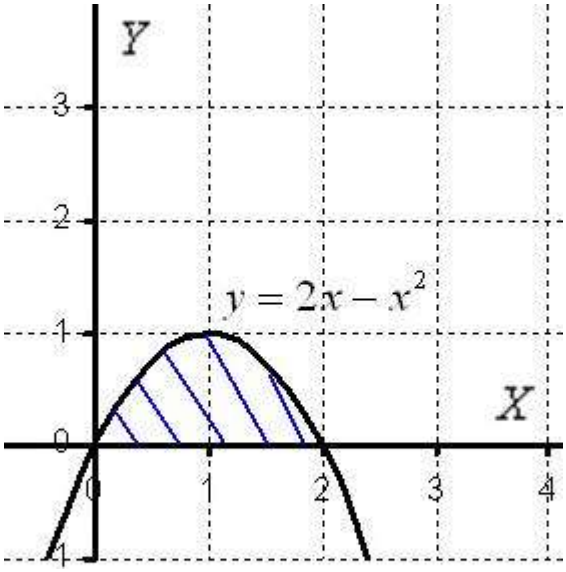
Теоретическая часть

Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX.

Пример 1

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.



Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси OX

Как вычислить объем тела вращения?

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом интеграл всегда неотрицателен, что весьма логично.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

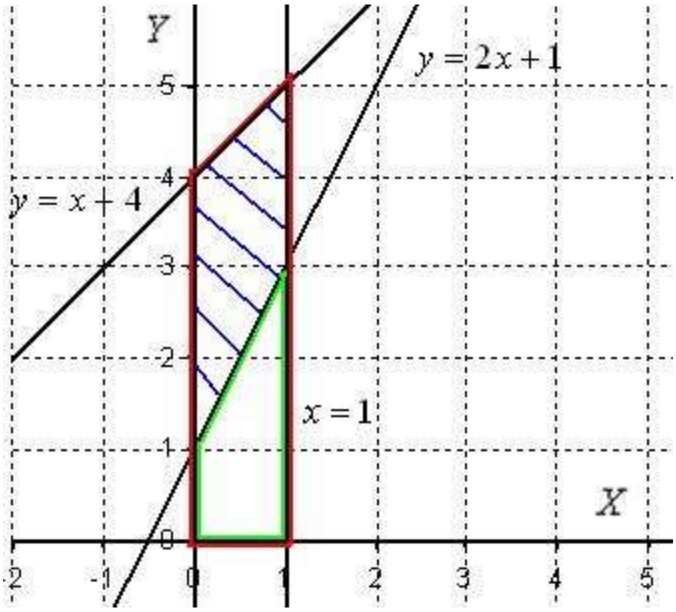
$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15} ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$ и $x = 1$

Решение: Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$, не забывая при этом, что уравнение $x = 0$ задает ось OY :



Искомая фигура заштрихована..

Объем тела вращения вычислим как *разность объемов тел*.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси OX получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси OX, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2.

И, очевидно, разность объемов $V = V_1 - V_2$ – в точности объем нашей фигуры. Используем стандартную формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

1) Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой $y = x + 4$, поэтому:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2 + 8x + 16)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} + 4 + 16\right) = \frac{61\pi}{3}$$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой $y = 2x + 1$, поэтому:

$$V_2 = \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}$$

3) Объем искомого тела вращения: $V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$

Ответ: $V = 16\pi$ ед.$^3 \approx 50{,}3$ ед^3.

Вычисление объема тела, образованного вращением
плоской фигуры вокруг оси Оу

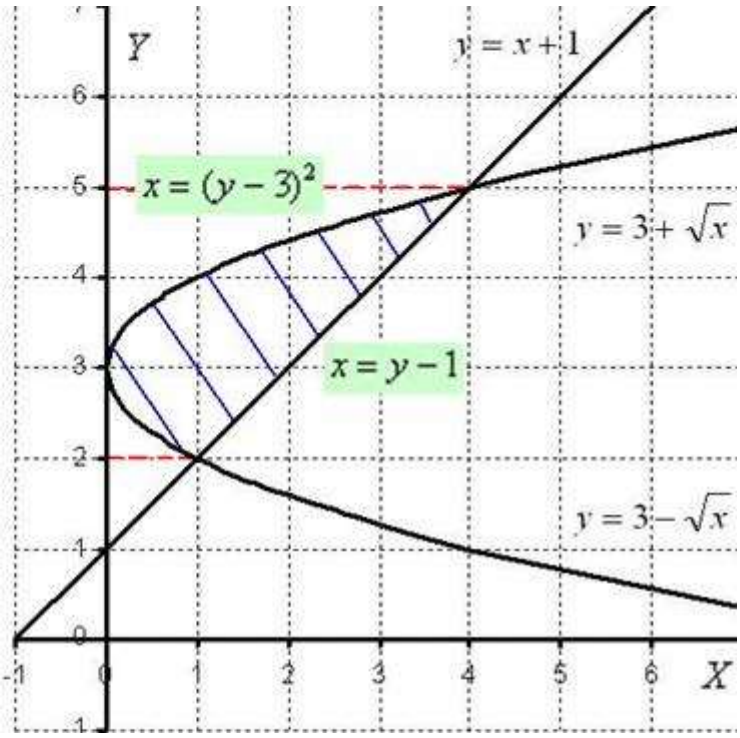
Пример 3

Дана плоская фигура, ограниченная линиями $y = 3 + \sqrt{x}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $y = x + 1$.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси OY.

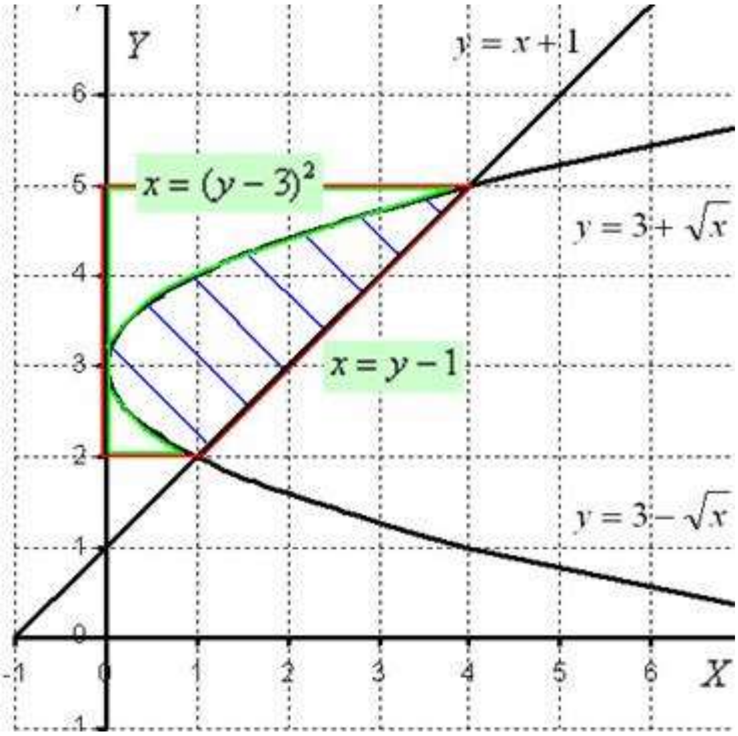
Решение:

1) Выполним чертёж:



2) Вычислим объем тела, образованного вращением данной фигуры, вокруг оси OY.

Перерисуем чертеж немного в другом оформлении:



Итак, фигура, заштрихованная синим цветом, вращается вокруг оси OY. Для нахождения объема тела вращения будем интегрировать по оси OY.

Вращаем фигуру, обведенную красным цветом, вокруг оси OY, в результате получается усеченный конус. Обозначим этот объем через V_1.

Вращаем фигуру, обведенную зеленым цветом, вокруг оси OY и обозначаем через V_2 объем полученного тела вращения.

Объем нашей фигуры равен разности объемов $V = V_1 - V_2$.

Используем формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 ((y-3)^2)^2 dy = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 (y-3)^4 dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(y-1)^3\Big|_2^5 - \frac{\pi}{5}(y-3)^5\Big|_2^5 = \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{5}(32-(-1)) = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}$$

Ответ: $V = \frac{72\pi}{5}$ $ед.^3 \approx 45{,}24\, ед^3.$

Практическое занятие № 16

Тема: Решение задач с помощью определенного интеграла

Цель: Научить решать задачи с помощью определенного интеграла для вычисления объемы фигур вращения

Теоретическая часть

Дана плоская фигура, ограниченная линиями $x = 2$, $y = -\ln x$ и осью OX.

1) Перейти к обратным функциям и найти площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями, интегрированием по переменной y.
2) Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси OY.

Это пример для самостоятельного решения. Желающие также могут найти площадь фигуры «обычным» способом, выполнив тем самым проверку пункта 1). А вот если, повторюсь, будете вращать плоскую фигуру вокруг оси OX, то получится совершенно другое тело вращения с другим объемом, кстати, правильный ответ $(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2)\pi\, ed.^3 \approx 0{,}59\, ed^3.$ (тоже для любителей порешать).

Полное же решение двух предложенных пунктов задания в конце урока.

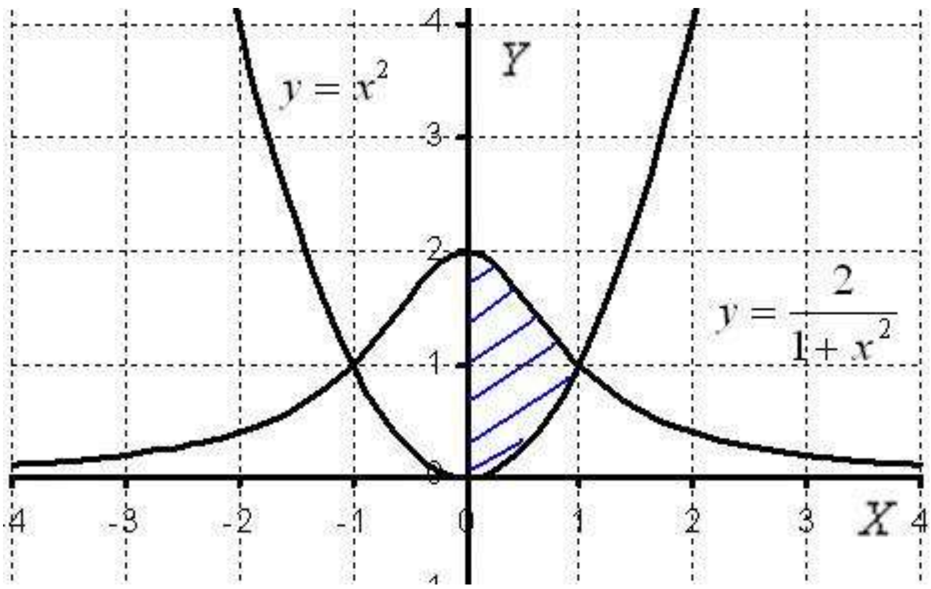
Да, и не забывайте наклонять голову направо, чтобы разобраться в телах вращения и в пределах интегрирования!

Хотел, было уже, закончить статью, но сегодня принесли интересный пример как раз на нахождение объема тела вращения вокруг оси ординат. Свежачок:

<u>Пример 7</u>

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.

Решение: Выполним чертеж:



Для цели нахождения объема тела вращения достаточно использовать правую половину фигуры. Обе функции являются четными, их графики симметричны относительно оси OY, симметрична и наша фигура. Таким образом, заштрихованная правая часть, вращаясь вокруг оси OY, непременно совпадёт с левой нештрихованной частью.

Перейдем к обратным функциям, то есть, выразим «иксы» через «игреки»:

$$y = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

Обратите внимание, что правой ветке параболы $y = x^2$ соответствует обратная функция $x = \sqrt{y}$. Левой неиспользуемой ветке параболы соответствует обратная функция $x = -\sqrt{y}$. В таких случаях нередко возникают сомнения, какую же функцию выбрать? Сомнения легко, развеиваются, возьмите любую точку правой ветки и подставьте ее координаты в функцию $x = \sqrt{y}$. Координаты подошли, значит, функция $x = \sqrt{y}$ задает именно правую ветку, а не левую.

Теперь замечаем что:

– на отрезке $[0;1]$ над осью OY расположен график функции $x = \sqrt{y}$;

– на отрезке $[1;2]$ над осью OY расположен график функции $x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$;

Логично предположить, что объем тела вращения нужно искать уже как сумму объемов тел вращений!

Используем формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy$$

В данном случае:

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1\right) dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}(y^2)\Big|_0^1 + \pi(2\ln y - y)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(1-0) + \pi(2\ln 2 - 2 - 0 + 1) = \frac{\pi}{2} + \pi(2\ln 2 - 1) = \pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $V = \pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ $ед.^3 \approx 2{,}78$ $ед.^3$

Решение упражнений

Вычислите объемы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями:

1. $y^2 = 4x, y = 0, x = 4$ вокруг оси Ox
2. $y = x^2 - 9, y = 0$ вокруг оси $0x$
3. $x - 2y + 6 = 0, y = 0, x = 2$ вокруг оси $0x$

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\, y=0$ вокруг оси $0x$
5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\, y=0\ x=a, x=2a$ вокруг оси $0x$
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\, x=0$ вокруг оси $0y$
7. $x+2y-4=0, y=0, x=2$ вокруг оси $0x$
8. $y^2=x, y=0, x=1, x=4$ вокруг оси Оx
9. $y^2=2(x+2), y=0, x=4$ вокруг оси Оx
10. $y=x^2-1, y=0$ вокруг оси $0x$

Практическая работа № 17

Тема: Исследования на экстремум в задачах на площади поверхностей фигур вращения
Цель: Научить решать задачи на нахождение экстремума

Теоретическая часть

При решении задач на экстремум учащиеся нередко испытывают трудности в составлении аналитической записи функции, описывающей условие задачи. Причиной этому часто бывает нерациональный выбор независимой переменной. Ее желательно выбрать так, чтобы более коротким путем получить аналитическое выражение данной функции и чтобы выражение было более простым.

Решение задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения геометрической величины с помощью общего метода, основанного на применении производной, не всегда является рациональным. Иногда к цели можно прийти быстрее и более коротким путем, используя элементарные методы и приёмы.

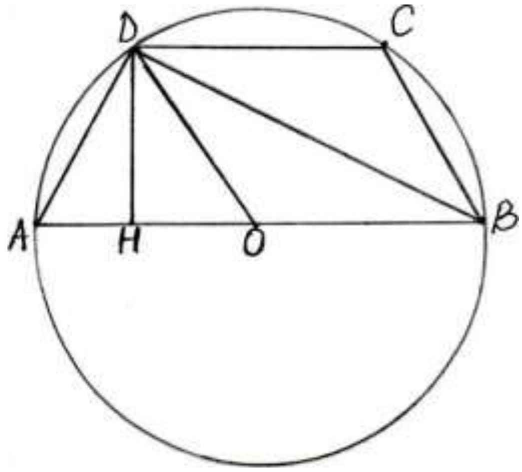
Задача № 1.

В окружность радиуса R вписана трапеция ABCD, основание AB которой является диаметром окружности. Какова должна быть длина боковой стороны трапеции, чтобы трапеция имела наибольшую площадь?

Решение:

1 способ.

В задаче требуется найти длину боковой стороны трапеции, при которой площадь трапеции будет наибольшей. Ее можно принять за независимую переменную, затем через неё и радиус R окружности выразить площадь трапеции. Обычно учащиеся решают таким способом.



2 способ.

Пусть высота трапеции DH = x. Из прямоугольного $\triangle$ODH

(O – центр окружности) находим: $OH = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Значит, $BH = R + \sqrt{R^2 - x^2}$, и получим:

$S = (R + \sqrt{R^2 - x^2})x$, где 0 < x < R – простое по форме выражение для функции S. Однако вычисление производной требует более сложных выкладок, чем при решении задачи первым способом.

3 способ.

Пусть BH = x, тогда AH=2R - x. Из свойства высоты прямоугольного ?ABD имеем: $DH = \sqrt{x(2R - x)}$ и, следовательно,

$S = x\sqrt{x(2R - x)}$, R< x <2R.

Производная функции $S^2 = 2Rx^3 - x^4$ находится проще, чем при решении задачи первым и вторым способом. Задачу можно решить и без использования производной.

Так как $3S^2 = (6R - 3x)\cdot x\cdot x\cdot x$. В правой части - произведение переменных, сумма которых постоянна и равна 6R. Это произведение принимает наибольшее значение в случае их равенства, т.е. x= 6R – 3x, откуда

x = 3/2R. При этом AH=1/2R и AD=OD=R.

4 способ.

Пусть $\angle BAD = x$. Тогда $BD=2R\sin^2 x$, $DH=2R\sin x\cos x$.

Находим:

$S=4R^2\sin^3 x\cos x$, $45^0 < x < 90^0$,

$S' = 0$ при tg x = $\sqrt{3}$, т.е. при x = 60^0 . Остаётся сравнить значение функции S в критической точке со значениями на концах промежутка [45^0, 90^0].

5 способ.

Введем независимую переменную $\angle AOD = x,$ площадь трапеции, равна сумме площадей треугольников AOD,BOC и COD. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}R^2(2\sin x + \sin(180^0 - 2x)), 0^0 < x < 90^0.$$

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции:

$$f(x) = 2\sin x + \sin 2x.$$

Ее производная $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x.$

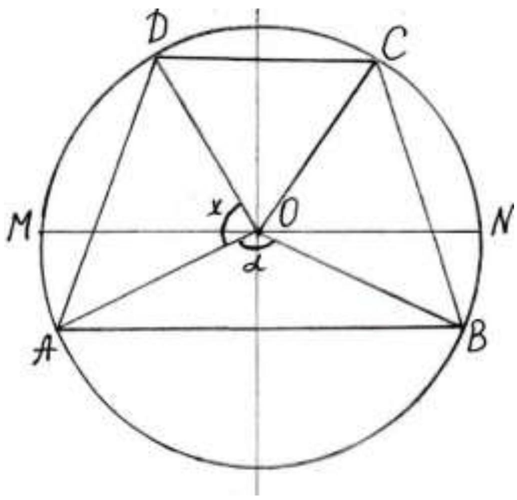
Критические точки получим, решив уравнение: $\begin{matrix} \cos x + \cos 2x = 0 \\ при\, 0^0 < x < 90^0. \end{matrix}$

Задача № 2.

В окружность радиуса R вписана трапеция ABCD с основанием AB. При какой длине стороны AD площадь трапеции будет наибольшей, если

$\angle AOB = \alpha,$ где O – центр окружности?

Решение:



пусть $\angle AOD = \angle BOC = x$. Площадь $\triangle$AOD:

$S(AOD) = \frac{1}{2}R^2 \sin \alpha.$ Найдём площади треугольников: AOD, BOC и COD.

Учитывая, что $\angle COD = 360^0 - (\alpha + 2x),$ получим:

$$S = \frac{1}{2}R^2(2\sin x - \sin(\alpha + 2x) + \sin\alpha).$$

Проведём диаметр М? окружности параллельно основанию АВ трапеции. Площадь трапеции не может быть наибольшей, если хорды АВ и CD будут лежать по одну сторону от М?.

Поэтому следует считать, что $90^0 \le x + \frac{\alpha}{2} \le 180^0, где 0^0 < \alpha \le 180^0.$

Функция S имеет наибольшее значение одновременно с функцией

$$f(x) = 2\sin x - \sin(\alpha + 2x),$$
$$90^0 - \frac{\alpha}{2} \le x \le 180^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Найдём производную этой функции:

$$f'(x) = 2(\cos x - \cos(\alpha + 2x)) = 4\sin\frac{\alpha + x}{2}\sin\frac{\alpha + 3x}{2}.$$

С учётом границ изменения x, получим:

$$45^0 + \frac{\alpha}{4} \le \frac{\alpha + x}{2} \le 90^0 + \frac{\alpha}{4},$$
$$135^0 - \frac{\alpha}{4} \le \frac{\alpha + 3x}{2} \le 270^0 - \frac{\alpha}{4},$$

или, несколько расширяя границы этих промежутков:

$$45^0 \le \frac{\alpha + x}{2} \le 135^0, 90^0 \le \frac{\alpha + 3x}{2} \le 270^0.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях x имеем: $\sin\frac{\alpha + x}{2} > 0,$ и $f'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha + 3x}{2} = 180^0,$ откуда $x_0 = \frac{360^0 - \alpha}{3}.$

Итак, в промежутке $\left[90^0 - \alpha/2, 180^0 - \alpha/2\right]$ функция f(x) имеет единственную критическую точку x_0, в которой, производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в этой точке функция имеет максимум, а значит и искомое наибольшее значение. Таким образом, площадь трапеции ABCD будет наибольшей в том случае, когда дуги ВС, CD и AD равны и

$$AD = 2R\sin(60^0 - \alpha/6).$$

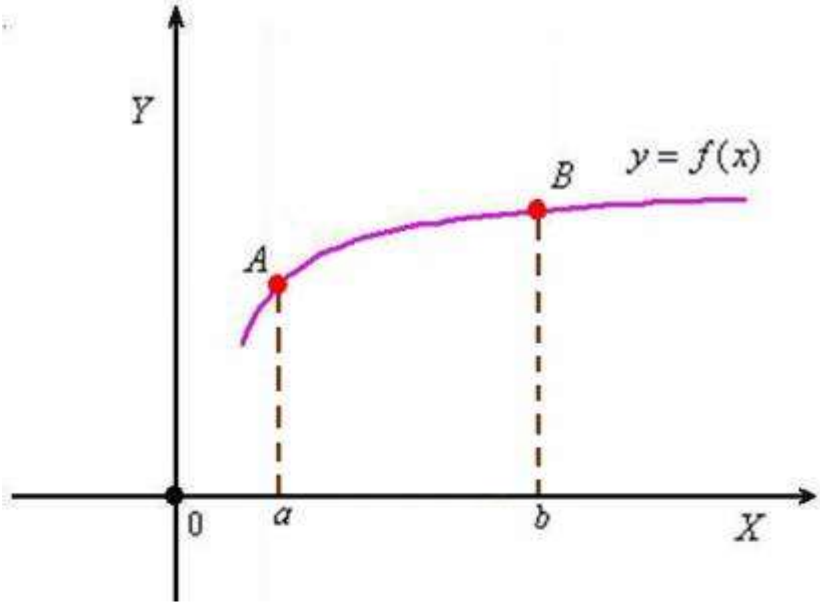
Практическая работа № 18

Тема: Правила вычисления площадей поверхностей фигур вращения с помощью определенного интеграла

Цель: Научить вычислять с помощью определенного интеграла площади поверхностей фигур вращения

Теоретическая часть

Рассмотрим рисунок



Что можно вычислить с помощью определённого интеграла?

В первую очередь, конечно, площадь криволинейной трапеции.

Если же данная фигура вращается вокруг координатной оси, то речь уже идёт о нахождении объёма тела вращения..

На данном занятии мы научимся рассчитывать ещё одну характеристику – ещё одну площадь. Представьте, что линия AB *вращается* вокруг оси OX. В результате этого действия получается геометрическая фигура, называемая *поверхностью вращения*. В данном случае она напоминает такой горшок без дна т.е. с геометрической точки зрения наш «горшок» имеет *бесконечно тонкую* стенку и две поверхности с одинаковыми площадями – внешнюю и внутреннюю. Так вот, все дальнейшие выкладки подразумевают площадь только внешней поверхности.

В прямоугольной системе координат площадь поверхности вращения рассчитывается по формуле:

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

или, если компактнее:

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

.

К функции и её производной предъявляются те же требования, что и при нахождении длины дуги кривой, но, кроме того, кривая AB должна располагаться выше оси OX. Это существенно! Нетрудно понять, что если линия располагается под осью $(f(x)<0)$, топодынтегральная функция будет отрицательной: $f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}<0$, и поэтому к формуле придётся добавить знак «минус» дабы сохранить геометрический смысл задачи.

Рассмотрим фигуру:

Площадь поверхности тора

В двух словах, тор – это бублик.

Практическая работа № 19

Тема: Решение задач с помощью определенного интеграла для вычисления площадей поверхностей фигур вращения

Цель: Научить решать задачи с помощью определенного интеграла для вычисления площадей поверхностей фигур вращения

Теоретическая часть

Вычислить площадь поверхности тора, полученного вращением окружности $x^2+(y-3)^2=1$ вокруг оси OX.

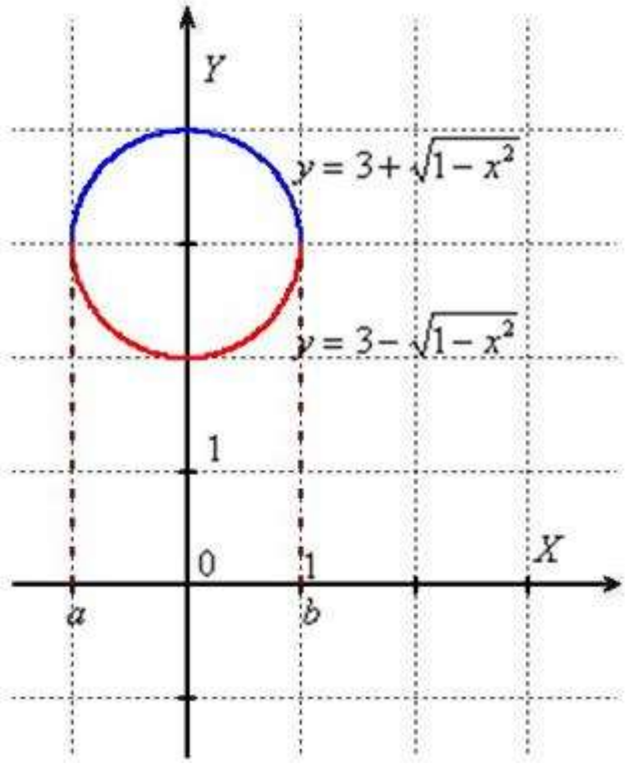
Решение: уравнение $x^2+(y-3)^2=1$ задаёт окружность единичного радиуса с центром в точке $(0;3)$. При этом легко получить две функции:

$(y-3)^2=1-x^2$

$y-3=\pm\sqrt{1-x^2}$

$y=3+\sqrt{1-x^2}$ – задаёт верхнюю полуокружность;

$y=3-\sqrt{1-x^2}$ – задаёт нижнюю полуокружность:



Суть кристально прозрачна: <u>окружность</u> вращается вокруг оси абсцисс и образует *поверхность* бублика. Единственное, здесь во избежание грубых оговорок следует проявить аккуратность в терминологии: если вращать круг, ограниченный окружностью $x^2+(y-3)^2=1$

, то получится геометрическое тело, то есть сам бублик. И сейчас разговор о площади его поверхности, которую, нужно рассчитать как сумму площадей:

Найдём площадь поверхности, которая получается вращением «верхней»

дуги $y = 3 + \sqrt{1-x^2}$ вокруг оси абсцисс. Используем формулу $P_1 = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$.

Берём функцию $y = 3 + \sqrt{1-x^2}$ и находим её производную:

$$y' = (3+\sqrt{1-x^2})' = 0 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(0-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Далее максимально упрощаем корень:

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

И, наконец, заряжаем результат в формулу:

$$P_1 = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3+\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\cdot 2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)dx =$$

$$= 4\pi(3\arcsin x + x)\Big|_0^1 = 4\pi(3\arcsin 1 + 1 - (0+0)) = 4\pi\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+1\right) = 6\pi^2 + 4\pi$$

2) Найдём площадь поверхности, которая получается вращением «нижней»

дуги $y = 3 - \sqrt{1-x^2}$ вокруг оси абсцисс. Все действия будут отличаться фактически только одним знаком.

$$P_2 = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+((3-\sqrt{1-x^2})')^2}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+\left(0-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(0-2x)\right)^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}dx = 2\cdot 2\pi\int_0^1\frac{(3-\sqrt{1-x^2})dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 4\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx = 4\pi(3\arcsin x - x)\Big|_0^1 = 4\pi(3\arcsin 1 - 1 - (0-0)) = 4\pi\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-1\right) = 6\pi^2 - 4\pi$$

3) Таким образом, площадь поверхности тора:

$P = P_1 + P_2 = 6\pi^2 + 4\pi + 6\pi^2 - 4\pi = 12\pi^2$ **Ответ**: $P = 12\pi^2$ $ед^2. \approx 118{,}44\ ед^2$. Пример 2

Вычислить площадь поверхности тела, полученного вращением параболы $y^2 = x$ вокруг оси OX на промежутке $0 \le x \le 4$.

Решение: *вычислим площадь поверхности, образованной вращением верхней*

ветви $y = \sqrt{x}$ *вокруг оси абсцисс. Используем формулу* $P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$.

В данном случае: $y' = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4x}} = \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} = \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$$

Таким образом:

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_0^4 \sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx = \pi\int_0^4 \sqrt{4x+1}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^4 (4x+1)^{\frac{1}{2}}d(4x+1) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{(4x+1)^3}\Big|_0^4 = \frac{\pi}{6}\cdot(\sqrt{17^3}-\sqrt{1^3}) = \frac{\pi}{6}\cdot(17\sqrt{17}-1)$$

Ответ: $P = \dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)\,ед^2. \approx 36{,}18\,ед^2.$

Пример 1. Найдем площадь поверхности шара радиуса R.

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Будем рассматривать поверхность шара как поверхность, полученную в результате вращения полуокружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox. Тогда площадь поверхности шара найдется по формуле

$$P = 2\pi\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,.$$

Так как $y=\sqrt{R^2-x^2}$ — функция четная, то

$$P = 4\pi\int_{0}^{R} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,.$$

Найдя $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и вычислив сумму $1+(y')^2 = 1+\dfrac{x^2}{R^2-x^2} = \dfrac{R^2}{R^2-x^2}$, получим:

Решение упражнений

1.Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением дуги параболы = вокруг оси Ox от x = 0 до x = 2.

2.Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги окружности $(x-4)^2+y^2=36$? Заключенной между точками

$A(2;4\sqrt{2})$, B(4;6)

3.Найти площадь поверхности шарового пояса, образованной вращением вокруг оси Ох дуги окружности $x^2+y^2=16$. Заключенной между точками $A(2;2\sqrt{3})$, B$(3;\sqrt{7})$

4.Найти площадь поверхности шарового пояса, образованной вращением вокруг оси Оу дуги окружности $x^2+y^2=25$. Заключенной между точками $A(4;-3)$, B$(3;4)$

5.Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Оу дуги окружности $x^2+(y-2)^2=25$. Заключенной между точками $A(2\sqrt{6};1)$, B$(4;5)$

6.Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги параболы$y^2=4x$, ограниченной точками $\mathrm{O}(0;0))$ $A(3;2\sqrt{3})$

7.Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги параболы$y^2=9x$, ограниченной точками $\mathrm{O}(0;0))$ $A(4;6)$

Практическое занятие № 20

Тема: Определение комплексных чисел в алгебраической форме

Цель: Изучить понятие числа, комплексных чисел.

Теоретическая часть

Одним из основных понятий математики является понятие *числа.* Это понятие прошло длительный путь развития, обогащаясь новым содержанием. Исторически первыми возникли в практике и были введены в науку ***натуральные числа***, которые являются инструментом для счета количества отдельных предметов, например количества пальцев на руке. Они образуют бесконечное множество, которое принято обозначать буквой ***N***.

Затем возникла необходимость во введении долей единицы и количества этих долей (например, для измерения длин отрезков), т. е. было введено так называемое ***дробное число.***

Далее те же потребности измерения привели к необходимости введения *отрицательных чисел* (например, если за начало отсчета берется уровень моря, то для отметки положения горы берется ***положительное число*** — высота горы, а для отметки положения глубины моря — *отрицательное число).* Целые отрицательные числа вместе с натуральными числами и числом 0 образуют множество *целых чисел,* обозначаемое буквой ***Z***

Множество, состоящее из всевозможных положительных и отрицательных целых и дробных чисел и числа *Q*, называется множеством ***рациональных чисел*** и обозначается буквой *Q*.

Очевидно, что $N \subset Z \subset Q$.

Потребности практики, а также внутренние требования самой математики, ее логического развития, показали недостаточность множества рациональных чисел для решения различных задач. Например, дано уравнение $x^2 = 2$,

или $x = \sqrt{2}$. Но не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 2. Такие числа получили незнание ***иррациональных чисел.***

Поэтому появилась необходимость создать новое расширенное множество чисел, в котором для каждой точки числовой оси находилось бы числовое значение и в котором решалось бы любое уравнение вида $x^n = a$.

Такое множество получило название ***вещественных(действительных) чисел*** и обозначается буквой *R,* причем $Q \subseteq R$.
Развитие науки и практики показало недостаточность введенного множества вещественных чисел.
Например, даже такое простейшее квадратное уравнение, как $x^2 + 1 = 0$, не имеет решения в множестве действительных чисел, так как не существует такого действительного числа *a,* что $a^2 + 1 = 0$. Это показывает необходимость дальнейшего расширения понятия числа. Кроме того, такие науки, как электротехника и различные разделы физики, рассматривают величины сложной природы, которые не могут быть охвачены понятием вещественных чисел.
В связи с этим возникла потребность нового расширения понятия числа.
Итальянские математики XVI в. Дж. Кардано и Р. Бомбелли, решая квадратные уравнения вида $x^2 + a^2 = 0$, ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$, который в XVIII в. петербургский математик Л. Эйлер(1708-1783) обозначил через *i*. Формальное решение уравнения $x^2 + a^2 = 0$ при использовании этого символа сводится к тому, что $x_{1,2} = \pm a\sqrt{-1}$ или, используя обозначение Эйлера, $x_{1,2} = \pm ai$.
Таким образом, возникает необходимость в расширении множества действительных чисел до нового множества, такого, чтобы в этом множестве уравнения вида $x^2 + a^2 = 0$имели решения.
Ниже мы изложим краткую теорию такого расширения.

Комплексным числом z называется выражение вида ***a+bi****, a* и *b*—действительные числа, а символ *i* удовлетворяет условию ***i = - 1***
Число *a* называется *действительной частью* комплексного числа, ***bi*** — *мнимой частью,* ***i***— *мнимой единицей.*
Множество комплексных чисел обозначается буквой ***C***.
Заметим, что множество ***R*** действительных чисел содержится в множестве комплексных чисел ***C: R*** $\subseteq$ ***C*** . В самом деле, всякое действительное число *a* можно рассматривать как комплексное число вида ***a+0i***.
Комплексные числа вида ***bi***называются *чисто мнимыми.* Они получаются из комплексных чисел $z_1 = a + bi$при $a = 0$.

Два комплексных числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называются *равными,* если, соответственно, равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. если $a = c$, $b= d$.
Комплексное число $z = 0 + 0i$ называется нулем и обозначается через 0. Оно совпадает с числом нуль множества действительных чисел. Таким образом, $z = a + bi = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b= 0$, или, что то же самое, когда $a^2+ b^2= 0$.

Комплексные числа $a + bi$ и $a — bi$ называются комплексно-сопряженными.
Число, комплексно-сопряженное числу z, обозначается через $\bar{z}$. Так, если $z = a + bi$, то $\bar{z} = a — bi$, если же $z = a - bi$, то $\bar{z} = a + bi$. Понятие сопряженности взаимное. Например, для комплексного числа z = = $-2 + 4i$ комплексно-сопряженным является комплексное число $\bar{z} = -2 - 4i$; точно также для комплексного числа $-2 - 4i$ комплексно-сопряженным является число $-2 + 4i$.

Практическое занятие № 21

Тема: Комплексные числа и их геометрическая интерпретация

Цель: Изучить понятие комплексная плоскость

Теоретическая часть

Комплексное число $z = a + bi$ геометрически можно представить точкой координатной плоскости *Oxy с* координатами *a, b* (рис. 1).

Плоскость, служащая для изображения множества комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью.* Так как любое комплексное число единственным образом определяется его действительной и мнимой частями, то каждому комплексному числу в комплексной плоскости соответствует единственная точка на плоскости. Очевидно, что справедливо и обратное утверждение: каждой точке $(x; y)$ плоскости Oxy соответствует единственное комплексное число $z = x + yi$.

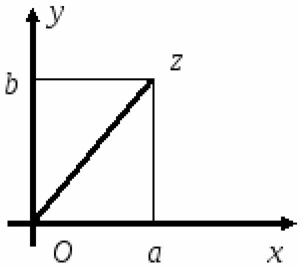


Рис. 1.

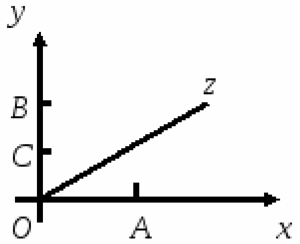


Рис. 2.

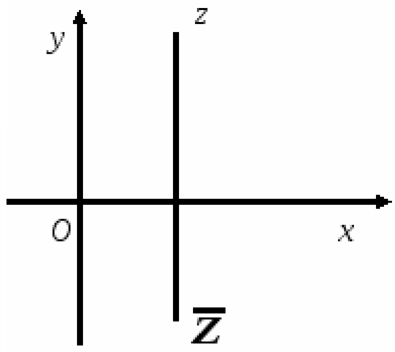


Рис. 3.

Таким образом, между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости существует взаимно-однозначное соответствие. При этом соответствии всякому действительному числу $z = a + 0i$ соответствует точка $A(a; 0)$ оси абсцисс, а всякому чисто мнимому числу $z = 0 + bi$ — точка $B(0; b)$ оси ординат. Числу $z = i$ соответствует точка $C(0; 1)$ (рис. 2). Если каждой точке M комплексной плоскости поставить в соответствие радиус-вектор OM этой точки, между множеством комплексных чисел множеством радиус-векторов можно также установить взаимно-однозначное соответствие. Ось Ox будем называть *действительной осью,* а ось Oy— *мнимой.*

Из определения комплексно-сопряженных чисел следует, что числа z и $\bar{z}$ на комплексной плоскости расположены симметрично относительно действительной оси (рис. 3).

Ранее мы отметили, что квадратное уравнение $ax^2+ bx + c = 0$, для которого дискриминант $D = b^2 – 4ac < 0$, в множестве $\boldsymbol{R}$ (действительных чисел) не имеет решения, так как корень из отрицательного числа в этом множестве не имеет действительного значения. Однако в множестве $\boldsymbol{C}$ (комплексных чисел) такое уравнение имеет два комплексно-сопряженных решения. В самом деле, пусть дано квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

причем $D < 0$.

Решения этого уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

представим в виде

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a},$$

где уже $-D > 0$, а потому $\sqrt{-D}$ есть некоторое действительное число.

Следовательно, решениями квадратного уравнения будут два комплексно-сопряженных числа

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Пример 1. Решить квадратное уравнение $2x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение. Находим:

$$x_1 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 72}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{6 \pm 6i}{4} = \frac{3}{2}(1 \pm i).$$

Таким образом, решениями данного квадратного уравнения будут два комплексно-сопряженных числа

$$x_1 = \frac{3}{2}(1+i) \text{ и } x_2 = \frac{3}{2}(1-i).$$

Итак, в множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет решение.

Практическое занятие № 22

Тема: Действия над комплексными числами, заданными в алгебраическом виде

Цель: Научиться производить арифметические операции над комплексными числами.

Теоретическая часть

Действия над комплексными числами определяются таким образом, чтобы для частного случая действительных чисел эти операции совпадали с известными операциями над ними.

Сумма *z* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ определяется как комплексное число $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. Его обозначают $z = z_1 + z_2$.

Таким образом,

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ (1)

В частности, если $z = a + bi$, то , $\bar{z} = a - bi$ поэтому $z + \bar{z} = 2a$, следовательно, *сумма комплексно-сопряженных чисел есть число действительное.* Операцию сложения легко распространить и на сумму любого конечного числа комплексных чисел. Так, если

$$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i,\ \ldots,\ z_n = a_n + b_n i$$

то

$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)i$. (2)

Пример 2. Найти комплексное число z из равенства $2 + 3i = z + 4 + i$.

Решение. Пусть $z = x + yi$. Тогда $2 + 3i = x + yi + 4 + i$

или

$$2 + 3i = (x+4) + (y+1)i.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части. Следовательно,

$$\begin{cases} x + 4 = 2; \\ y + 1 = 3. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим $x = -2$; $y = 2$. Таким образом, $z = -2 + 2i$.

***Вычитание** двух комплексных чисел определяется как операция обратная сложению.*

Комплексное число $z = a + bi$ называется *разностью* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, если $z_1 = z_2 + z$.

Разность комплексных чисел z_1 и z_2, обозначается $z_1 - z_2$-

Из определения следует, что

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ (3)

В частности,

$z - \bar{z} = a + bi - a + bi = 2bi$.

Умножение двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ определяется следующим образом:

$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$. (4)

Отсюда следует, что два комплексных числа $z_1 = a + b$ и $z_2 = c - di$ можно умножать по правилу умножения многочленов при условии, что $i^2 = -1$.В самом деле,

$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(сравните результат с определением (1)). В частности, если $z=a+bi$ то $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$.

Пример 3. Найти произведение комплексных чисел $z_1=3+2i$ и $z_2=-1-i$

Решение. Очевидно, что $z_1z_2=(3+2i)(-1-i)=-3-3i-2i-2i^2=-3-5i-2(-1)=-1-5i$

Деление вводится как действие, обратное умножению. *Частным от деления комплексного числа* $z_1=a_1+b_1i$ *на число* $z_2=a_2+b_2i\neq 0$ *называется комплексное число* $z_3=a_3+b_3i$ *такое, что* $z_1=z_3\cdot z_2$, *т. е.*

$$a_1+b_1i=(a_3+b_3i)\cdot(a_2+b_2i).$$

Отсюда на основании равенства (4.4) получаем:

$a_1=a_2a_3-b_2b_3$; $b_1=a_2b_3+a_3b_2$. (5)

Решая систему уравнений (5) относительно a_3 и b_3 находим:

$$a_3=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\quad b_3=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2},$$

причем, $a^2+b^2\neq 0$, так как по условию $z_2=a_2+b_2i\neq 0$. Таким образом

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i. \quad (6)$$

Равенство (6) можно получить путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ на число, комплексно-сопряженное знаменателю.

Пример 3. Найти частное от деления комплексного числа $z_1=\frac{1}{2}-3i$ на число $z_2=2+\frac{1}{3}i$.

Решение. Очевидно, что

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{1}{2}-3i}{2+\frac{1}{3}i}=\frac{\left(\frac{1}{2}-3i\right)\left(2-\frac{1}{3}i\right)}{\left(2+\frac{1}{3}i\right)\left(2-\frac{1}{3}i\right)}=\frac{1-\frac{1}{6}i-6i+i^2}{4+\frac{1}{9}}=\frac{1-\left(6+\frac{1}{6}\right)i-1}{4+\frac{1}{9}}=\frac{\left(6+\frac{1}{6}\right)i}{4+\frac{1}{9}}=-1{,}5i.$$

Возведение *комплексного числа* $z=a+bi$ *в* ***степень*** *n* (*n* $\in$ N) *рассматривается как частный случай умножения комплексных чисел:*

$z^n=z\cdot z\cdot z\cdot\ldots\cdot z$ (*n раз*) (7)

Найдем натуральные степени мнимой единицы *i*. На основании равенства (4) получаем:

$i^2=-1;\ i^3=i^2\cdot i=-i;\ i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1;\ i^5=i^4\cdot i=i;\ i^6=i^4\cdot i^2=-1;\ i^7=i^4\cdot i^3=-i;$

$i^8=i^4\cdot i^4=1$,

и вообще

$i^{4n}=1;\ i^{4n+1}=i;\ i^{4n+2}=-1;\ i^{4n+3}=-i;$

где *n* — любое натуральное число.

Пример 4. Найти i^{59}.

Решение. При делении числа 59 на 4 имеем: 59 = 14 • 4 + 3, поэтому

$i^{59}=i^{14\cdot4+3}=(i^4)^{14}\cdot i^3=i^3=-1$.

Предоставляем проверить самостоятельно, что для комплексно-сопряженных чисел выполняются следующие равенства:

$\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$; $\bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}$; $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2}$; $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$. (8)

Практическое занятие № 23

Тема: Тригонометрическая форма комплексного числа

Цель: Изучить понятие комплексного числа в тригонометрической форме.

Теоретическая часть

Как говорилось выше, комплексное число $z = x + i\,y$ удобно изображать точкой $M(x, y)$. Можно также такое число отождествлять с радиус-вектором этой точки $\overline{OM} = \{x, y\}$. При такой интерпретации сложение и вычитание комплексных чисел производится по правилам сложения и вычитания векторов. Для умножения и деления комплексных чисел более удобной оказывается другая форма.

Введём на комплексной плоскости Oxy полярную систему координат. Тогда $M(x, y) = M(\rho, \phi)$, где $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ и комплексное число $z = x + i\,y$ можно записать в виде:

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Эту форму записи называют тригонометрической (в отличие от алгебраической формы $z = x + i\,y$). В этой форме число ρ называют модулем, а ϕ – аргументом комплексного числа Z. Они обозначаются: $\rho = |z|$, $\phi = \operatorname{Arg} z$. Для модуля имеем формулу

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Аргумент числа определён неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi n$, $n^{\circ}\ Z$. Значение аргумента, удовлетворяющего неравенствам $-\pi < \phi \le \pi$, называется главным и обозначается $\arg z$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in N$. Для главного значения аргумента можно получить такие выражения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi\operatorname{sign} y,\ x < 0,\ y \ne 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign} y,\ x = 0,\ y \ne 0, \\ \pi,\ x < 0,\ y = 0, \end{cases}$$

аргумент числа $z = 0$ считается неопределённым.

Условие равенства двух комплексных чисел в тригонометрической форме имеет вид: модули чисел равны, а аргументы отличаются на число кратное 2π.

Найдём произведение двух комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot\rho_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$$
$$= \rho_1\cdot\rho_2((\cos\phi_1\cdot\cos\phi_2 - \sin\phi_1\cdot\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cdot\cos\phi_2 + \cos\phi_1\cdot\sin\phi_2) =$$
$$= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)).$$

Итак, при умножении чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Аналогичным образом можно установить, что при делении модули чисел делятся, а аргументы вычитаются.

Понимая возведение в степень как многократное умножение, можно получить формулу возведения комплексного числа в степень:

$$(|z|\cdot(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |z|^n\cdot(\cos\phi + i\sin\phi),\ \forall n\in Z.$$

Выведем формулу для $\sqrt[n]{z}$ – корня n-ой степени из комплексного числа z (не путать с арифметическим корнем из действительного числа!). Операция извлечения корня является обратной по отношению к операции возведения в степень. Поэтому $\sqrt[n]{z}$ – это комплексное число ζ такое, что $\zeta^n = z$.

Пусть $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ известно, а $\zeta = |\zeta|(\cos\psi + i\sin\psi)$ требуется найти. Тогда

$$\zeta^n = |\zeta|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Из равенства двух комплексных чисел в тригонометрической форме следует, что

$$|\zeta|^n = |z|,\ n\psi = \phi + 2\pi k,\ k\in Z.$$

Отсюда $|\zeta| = \sqrt[n]{|z|}$ (это арифметический корень!),

$$\psi = \frac{\phi + 2\pi k}{n},\ k\in Z.$$

Нетрудно убедиться, что ψ может принимать лишь n различных по существу значений, например, при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Окончательно имеем формулу:

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\phi + i\sin\phi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Итак, корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений. На комплексной плоскости эти значения располагаются в вершинах правильно n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. “Первый” корень имеет аргумент ϕ/n, аргументы двух “соседних” корней отличаются на $2\pi/n$.

Пример. Извлечём корень кубический из мнимой единицы: $z = i$, $|z| = 1$, $\arg z = \pi/2$. Тогда:

$$\zeta = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{3}\right)\ k = 0, 1, 2;$$

$$\zeta_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot i,$$

$$\zeta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot i,$$

$$\zeta_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -i.$$

Практическое занятие № 24

Тема: Умножение и деление комплексных чисел

Цель: Научиться умножать и делить комплексные числа

Теоретическая часть

Формула умножения в алгебраической форме
Умножение производится путём поэлементного перемножения с раскрытием скобок по формуле с учётом того, что $i^2=-1$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)i$$

Пример 1

Выполнить умножение комплексных чисел: $z1=3+i$

и $z2=2-3i$

Решение

$z1\cdot z2=(3+i)\cdot(2-3i)=$

Раскрываем скобки поэлементно перемножая множители:

$=(3\cdot 2+3\cdot(-3i)+i\cdot 2+i\cdot(-3i)=$

Упрощаем выражение с учётом того, что $i2=-1$

:

$=6-9i+2i+3=9-7i$

Ответ

z1·z2=9−7i

Формула деления в алгебраической форме

Чтобы разделить в алгебраической форме нужно числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное к знаменателю. Тем самым избавляемся от комплексности в знаменателе:

z1z2=a1+b1ia2+b2i=(a1+b1i)(a2−b2i)(a2+b2i)(a2−b2i)=a1·a2+b1·b2a22+b22+ia2·b1−a1·b2a22+b22

Пример

Разделить два комплексных числа: z1=3+i

и z2=2−3i

Решение

Так как числа заданы в алгебраической форме, то и нужно применить соответствующую формулу.

z1z2=3+i2−3i=

Сопряженным комплексным числом к знаменателю будет ‾‾‾z2=2+3i

. Домножим и разделим на него дробь, чтобы избавиться от комплексности в знаменателе:

=(3+i)(2+3i)(2−3i)(2+3i)=6+9i+2i−34+6i−6i+9=

Приводим подобные слагаемые:

=3+11i13=313+1113i

Ответ z1z2=313+1113i

Практическое занятие № 25

Тема: Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Цель: Научиться умножать и делить комплексные числа в тригонометрической форме.

Теоретическая часть

Зададим два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ и перемножим их по правилу умножения двучленов:

или

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Получили новое число z, записанное в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, для которого $r = r_1 \cdot r_2,\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Правило умножения. *При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

(1.10)

В результате умножения чисел может получиться аргумент произведения, не являющийся главным значением.

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Рассмотрим частное комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$, заданных в тригонометрической форме. Из определения частного $z = \frac{z_1}{z_2}$ имеем $z_1 = z \cdot z_2$ и, применяя к произведению правило умножения, получаем $r = \frac{r_1}{r_2},\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Правило деления. *Модуль частного, полученного в результате деления чисел, заданных в тригонометрической форме, равен частному от деления модуля числителя на модуль знаменателя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя:*

В результате деления чисел по формуле может получиться аргумент частного, не являющийся главным значением.

Литература:

Основные источники:
1.Балдин, К.В. Математика : учебное пособие К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. - М. :Юнити-Дана, 2015 - 543 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00980-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114423
2. Дадаян, А. А. Математика : [учебник] / А.А. Дадаян. -М. : ФОРУМ, 2015 - 544 с. (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-460-3 -2 экз
Дополнительные источники:
1. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике : [учеб. пособие] / А.А. Дадаян. - М. : ФОРУМ, 2016. - 352 с. : ил. - (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-803-8