МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ
Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

УТВЕРЖДАЮ
Директор Пятигорского института (филиал) СКФУ Т.А. Шебзухова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ЕН. 01 Математика
Специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
квалификации бухгалтер

Пятигорск 2023

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к подготовке выпуска для получения квалификации Бухгалтер. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности: 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

Пояснительная записка

Методические указания призваны оказывать помощь студентам в изучении основных понятий, идей, теорий и положений дисциплины, изучаемых в ходе конкретного занятия, способствовать развитию их умений, навыков и профессиональных компетенций.

В данном учебном пособии согласно специфике дисциплины и прописываются:

Современные требования к учебному процессу ориентируют преподавателя на проверку знаний, умений, навыков через деятельность учащихся.

Практическое занятие может быть определена как деятельность, направленная на применение, углубление и развитие теоретических знаний в комплексе с формированием необходимых для этого умений и навыков, самостоятельное использование учебника, наглядных пособий, биологических приборов и материалов и т.д..

Выполнение практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемых дисциплин;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений: аналитических, проектировочных; конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Дисциплины, по которым планируются практических работы и количество часов, отводимое на их выполнение, определяются рабочим учебным планом.

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности;

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные понятия и методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

Практическое занятие № 1

Тема 1.2: Вычисление пределов функции.

Цель: Сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретическая часть

Число *A* называют *пределом функции* *f*(*x*) при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (*c*=const).

2. Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \ \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x = e$$ или $$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Примеры решения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1} = \frac{2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию

1)Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

1) деление на x в старшей степени:

<u>Пример 1:</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Пример 2:

Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

П ример 3

Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

2. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

1) разложение числителя и знаменателя на множители.

Пример 4

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение: $2x^2-3x-5=0$

Сначала находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$

Далее находим корни: $x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$ $\quad x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ Таким образом: $2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$

Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$ можно сократить на $(x+1)$:

$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$ Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела: $=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

2) умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

П ример 5

Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

выражение**:**

Применяем вверху

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$: Неопределеннос

ть $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с суммой корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Решение данного примера в чистовом варианте выглядит так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

3) использование 1-го замечательного предела

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$ Пример 6

Найти предел

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом 7х, значит, в знаменателе тоже нужно получить 7х».

А делается это очень просто:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Пример 7

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример 8

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 9

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Пример 10

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin\ x\cdot(x^2+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin\ x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin\ x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin\ x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin\ x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin\ x\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ 3x\cdot\sin\ 3x}{\sin\ x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\ 3x\cdot\sin\ 3x}{\sin\ x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название второго замечательного предела**.**

Справка: $e=2{,}718281828...$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x , но и сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.**

<u>Пример 11</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$ Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву e :

При этом сам значок предела перемещаем в показатель**:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

e (2-ой замечательный предел)

1. Вычислить пределы функции:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-5x+1}{8x^2-9x+1}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-9x}{6x^3-x+1}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^4+1}{8x^2-11x+1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3\sqrt{x}}{x^2-1}\quad \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3-x^2}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg 2x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin 2x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{tg 9x}\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Практическое занятие № 2

Тема 1.3: Производная элементарной и сложной функции.
Цель: Научить вычислять производные и дифференциалы высших функций.

Теоретическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

1. $C' = 0,$ где $C - const$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

5. $(f \cdot C)' = f' \cdot C$, где $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной. Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y''. Аналогично определяются производные 3-го, 4-го,…, порядка.

Решение упражнений

1. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
2. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
3. $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$
4. $y = cosln(1 - x^2)$
5. $y = sin\sqrt{3} + \frac{1sin^2 3x}{3cos6x}$
6. $y = ctg\sqrt[3]{5}$-$\frac{1cos^2 4x}{8sin8x}$
7. $y = arcsin^3\sqrt{4 - 5x}$
8. $y = arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$
9. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6}}$
10. $y = lnsin\frac{2x+4}{x+1}$
11. $y = lntg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
12. $y = ln^3(1 + cos4x)$
13. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + 2^{\pi^{\sqrt{2}}}$
14. $y = \ln arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}$
15. $y = e^{-x^2}cos^3(2x + 3)$
16. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot arctg^2 2x$
17. $y = \frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$
18. $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
19. y=$(19)^{x^{19}}x^{19}$
20. $y = (ctgx)^{lntg\frac{x}{4}}$

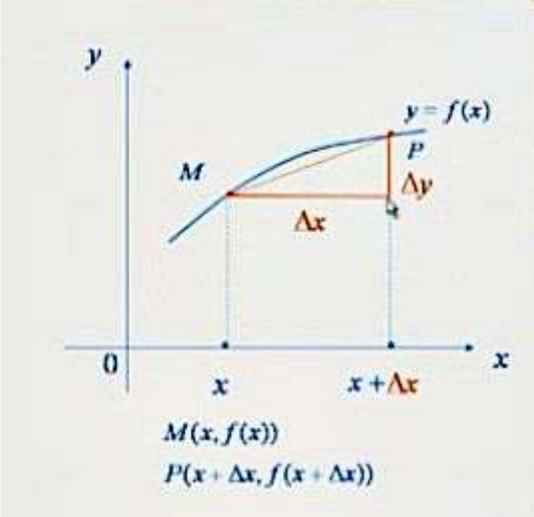
Практическое занятие №3

Тема 1.4: Правила вычисления производной функции.
Цель: Научить вычислять производные

Теоретическая часть:

Определение производной

Пусть задана функция f(x) на интервале (a,b). Зафиксируем точку x внутри (a,b) и придадим x приращение Δx, MP секущая, приращение функции Δy = f(x+Δx)-f(x). Рассмотрим отношение



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ это тангенс угла наклона секущей MP, он зависит от Δx.

Определение. Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

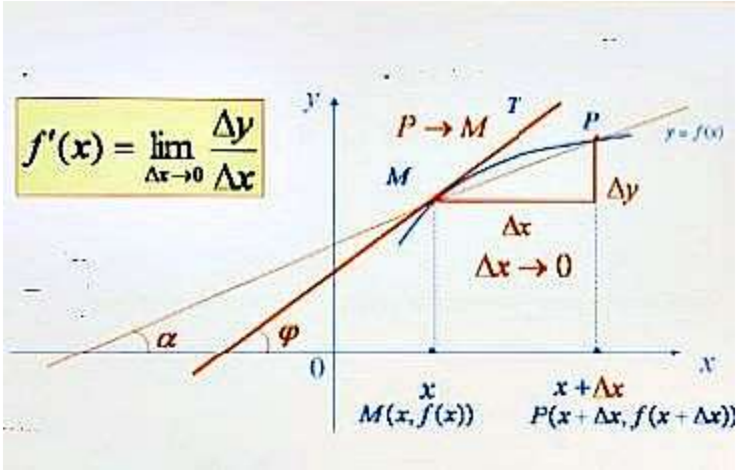
Существует несколько способов обозначения производной, самые важные это $f'(x)$ и y'_x.

Пример нахождения $f'(x)$, используя определение:

$$f(x) = x^2, \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x; \quad f'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Геометрический смысл производной



По определению $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ устремим точку М к точке Р , это эквивалентно стремлению $\Delta x\to 0$.

Предельное положение секущей МР это касательная к кривой в точке М , ее угловой коэффициент равен $k=tg\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\alpha=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Следовательно, производная в точке х равна тангенсу угла наклона касательной в этой точке.

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y-y_0=k(x-x_0),\ y_0=f(x_0)$, т.к.

$k=f'(x)$, то уравнение касательной примет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Найдем уравнение нормали, перпендикулярной данной касательной и проходящей через точку x_0. Из условия перпендикулярности прямых $k_1\cdot k_2=-1$ угловой коэффициент нормали равен $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$, а уравнение нормали в точке x_0 примет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

Механический смысл производной

Пусть прямолинейное движение материальной точки задано законом S = S(t). Путь, который проследует точка за время Δ равен ΔS = S(t+Δt)-S(t). Средняя скорость есть $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, мгновенная скорость $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t)$

Пример.

Пусть дан закон движения материальной точки $S(t)=t^2$, найти скорость точки через t = 3 сек.

$$v=S'(t)=\left(t^2\right)'=2t,\ v(3)=2\cdot 3=6\frac{м}{сек}$$

Дифференциал функции

Пусть задана y = f(x) на интервале (a,b). Функция y = f(x) называется дифференцируемой в точке x, если Δy можно представить с помощью следующего выражения:

$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta)\Delta x$

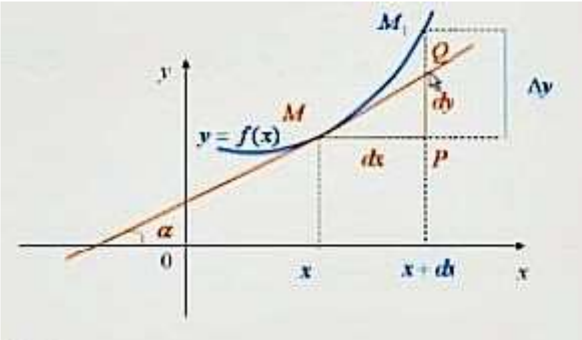
где A= const при фиксированном x и $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$

Теорема. Для дифференцируемости функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы функция имела в этой точке конечную производную.

Дифференциалом функции y = f(x) называется выражение вида dy=A Δx - это главная линейная часть приращения Δy , на основании предыдущей теоремы $dy = f'(x)\Delta x$, обозначив дифференциал независимой переменной через dx=Δx, получим выражение для дифференциала:

$$dy = f'(x)dx$$

Геометрический смысл дифференциала виден из следующего рисунка



$f'(x) = tg\alpha,\ \ PQ = MPtg\alpha = f'(x)dx$, т.е. дифференциал функции равен отрезку PQ это приращение ординаты касательной, а приращение Δy это отрезок PM_1

Формулы дифференцирования

$C' = 0$	$x' = 1$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(Cu)' = Cu'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(sh\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = chx$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\left(chx\right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = shx$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(thx\right)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(cthx\right)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

Правила вычисления производных

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

$$а)\ x^5 + 2x; \qquad б)\, 12x^6 - 45; \qquad в)\, \sin x - 3\cos x; \qquad г)\, \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

2. Найдите производную функции: $а)\ \left(x^2 - 3\right)\left(x + x^3\right); \qquad б)\ \frac{x^5 + x^2}{x+1}$.

3. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 0,5\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ в точке } {}_0 = \frac{\pi}{12}$$

4. Найдите значения x , при которых значения производной функции $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$ положительны.

5. Найдите производную функции $y=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$.

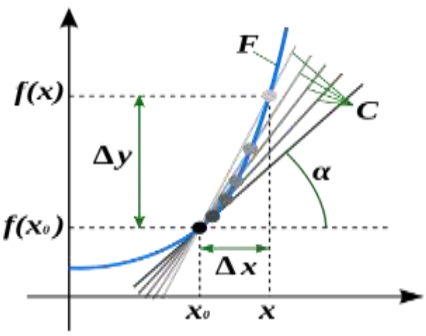
6. При каких значениях x производная функции $y=(5-3x)^4(3x-1)^3$ принимает отрицательные значения ?

Практическое занятие № 4

Тема 1.5: Правила вычисления производной функции.
Цель: Научить правилам вычисления производной.
Теоретическая часть.
Произво́дная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как **предел отношения** приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

Иллюстрация понятия производной



Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция $f : U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Таблица производных

Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- …$(g \neq 0)$
- $(g \neq 0)$

Задание: Вычислите производные следующих функций:

1.	а) $5x^4 - 3{,}5x^2 + x + 6$; б) $\left(\frac{8}{x} + x^2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1+x}{4-x^2}$.	4.	а) $2x^{10} + 0{,}05x^4 - \frac{1}{7}x + 0{,}3$; б) $(4 - x^2)\cos x$; в) $\frac{\sin x}{2-x^3}$.
2.	а) $\frac{5}{x} - x^3 + \sqrt{x} + 3$; б) $(x^2 - 3x - 2)\sqrt{x}$; в) $\frac{1-x^2}{1-x^3}$.	5.	а) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$; б) $x^2 \cdot 5^x$; в) $\frac{x^3 - 3x}{1-2x}$.
3.	а) $0{,}7x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}75x^2 + \frac{1}{10}$; б) $(x+2)\sin x$; в) $\frac{x^2}{x+3}$.	6.	а) $2^x + lg\, x - 3$; б) $(2 - \sqrt{x}) \cdot tgx$; в) $\frac{2x^2}{3-x}$.

Практическое занятие № 5

Тема 1.6: Правила вычисления производной сложной функции.

Цель: Научить правилам вычисления сожной производной.

Теоретическая часть.

Правило для вычисления производной сложной функции

Имея две функции *f(z)* и *g(x),* можно образовать сложную функцию *h(x) = f(g(x)).* При этом важно заметить, что при вычислении значения *h(x)* при *x = x0* сначала вычисляется значение функции *g(x)* в точке *x0,* а затем значение функции *f(z)* вычисляется уже в точке *z0 = g(x0).* Соответственно правило вычисления производной сложной функции *f(g(x))* в точке*a* использует значение производной функции *g(x)* в точке *a* и значение производной функции *f(z)* в точке *b = g(a).*

Сформулируем правило вычисления производной сложной функции.

Пусть функция g(x) имеет производную в точке a, функция f(z) имеет производную в точке b= g(a). Тогда функция h(x) = f(g(x)) имеет производную в точке a и
$h'(a) = f'_z(b)\cdot g'(a)$.

Пример 1. Вычислить производную функции

$\sin(3x-\frac{\pi}{3})$ при x = a.

Решение. $\sin(3x-\frac{\pi}{3}) = \sin(g(x))$, где $g(x) = 3x-\frac{\pi}{3}$. Поэтому нужно вычислить значение g(x) в точке a и значение $(\sin z)'$ в точке b = g(a) = $(3a-\frac{\pi}{3})$. Так как $g'(x) = (3x-\frac{\pi}{3})' = 3$, $(\sin z)' = \cos z$, то $g'(a) = 3, (\sin z)'(3a-\frac{\pi}{3}) = \cos(3a-\frac{\pi}{3})$. Отсюда

$$((\sin(3x-\frac{\pi}{3}))'(a) = (\cos(3a-\frac{\pi}{3}))\cdot 3 = 3\cos(3a-\frac{\pi}{3})$$.

Пример 2. Вычислить производную функции $\sqrt{x^2+x}$ при x = a.

Решение, $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{g(x)} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$, где $g(x) = x^2+x$. Поэтому нужно вычислить значение $g'(x)$ в точке a и значение $(\sqrt{z})'$ в точке b = a2+a. Так как (x2+x)' = 2x+1, $(\sqrt{z})' = (z^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$, то $g'(a) = 2a+1, (z^{\frac{1}{2}})'(a^2+a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+a}}$. Отсюда

$$(\sqrt{x^2+x})'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+a}}\cdot(2a+1) = \frac{2a+1}{2\sqrt{a^2+a}}$$.

Доказательство формулы для производной сложной функции для случая монотонных функций

В том случае, когда функция g(x) строго монотонна, правило вычисления производной сложной функции можно доказать следующим образом.

Пусть $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a),\ b=g(a)$ *и* $\lim_{z\to b}\frac{f(z)-f(b)}{z-b}=f'(b)$*. В силу монотонности* $g(x)-g(a)\neq 0$ *при* $x\neq a$*. Поэтому*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(b)}{g(x)-b}\cdot g'(a)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(z)-f(b)}{z-b}\cdot g'(a)=f'(b)\cdot g'(a).$$

В общем случае доказательство правила вычисления производной сложной функции непростое, и мы его не приводим.

Вопрос. *Как в приведенном доказательстве использовалось свойство монотонности функции g(x)?*

Иногда правило вычисления производной сложной функции записывают в следующем виде:

$$(f(g(x))'=f'_g(g(x))\cdot g'(x).$$

При этом предполагается, что значение производной функции f(g(x)) вычисляется в точке x; производная функции f(z) вычисляется по переменной z, а затем вместо z подставляется g(x), производная функции g(x) вычисляется в точке x.

Пример 3. $(\ln(\sin\ x))'=(\ln z)'_z(\sin\ x)\cdot(\sin\ x)'=\frac{1}{\sin\ x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin\ x}=\operatorname{ctg} x$

Пример 4. $(x^a)'=(e^{a\ln x})'=(e^z)'_z(a\ln\ x)'=e^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x}=x^a\cdot\frac{a}{x}=ax^{a-1}$.

Вопрос. *Как из равенства* $(e^x)'=e^x$ *вывести, что* $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ *?*

Используя правило [дифференцирования]() сложной функции, можно вычислить производные обратных тригонометрических функций.

Пример 5. *Так как* $\sin(\arcsin\ x)=x$*, то* $1=(x)'=(\sin(\arcsin\ x))'=\cos(\arcsin\ x)\cdot(\arcsin\ x)'$*, откуда* $(\arcsin\ x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin\ x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin\ x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Логарифмическая производная и ее применение

С помощью правил, изложенных в уроках 2 и 3 настоящей темы можно найти производные практически всех элементарных функций. Не вполне ясно пока, как найти производную функции типа $h(x)=f(x)^{g(x)}$*, где f(x) > 0. Для отыскания производной* *такой функции можно использовать так называемую логарифмическую производную, или, иначе говоря, производную от логарифма функции.*

Действительно, вычислим производную от функции $\ln h(x)$ *по правилам дифференцирования сложной функции. Получим* $(\ln h(x))' = \frac{1}{h(x)} h'(x)$ *, откуда* $h'(x) = h(x)(\ln h(x))'$.

Подставляя теперь $h(x) = f(x)^{g(x)}$*, получим*

$$h'(x) = f(x)^{g(x)}(\ln (f(x)^{g(x)}))' = f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))' = f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)})$$

$$(x^{\sin x})' = x^{\sin x}((\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

Решить упражнения.

1. Найти производную функции:

а) 1n 5x; б) ln2 x; в) sin 3x; г) tg(x2 - 1);

д) $\sqrt{2x+3}$ *; е) esin x; ж) arccos 2x; з)* $\sqrt{9x^2 - 16}$ *;*

и) tg2 x; к) tg x + ctg2 x.

2. Изобразить графики функций ln x, ln 2x, ln 3x и показать, что они пересекают прямую x = 1 под углом 45°.

3. Найти производную функции $y = x^x$.

4. Предполагая существование производной и пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, найти производную функции:

а) y = ln x; б) y = arccos x; в) y = arctg x.

Практическое занятие № 6.

Тема 1.7: Применение производной к решению прикладных задач.
Цель: Научить определять непрерывность функции.
Теоретическая часть.
Применения непрерывности
Функция называется непрерывной в точке x0, если f(x) стремится к f(x0) при стремлении x к x0. При этом f(x) – A = f(x) – f(x0) = Δf. Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого промежутка A, то эта функция будет являться непрерывной на всем промежутке A. А сам промежуток A, называют в таком случае **промежутком непрерывности** функции f.
График непрерывных функций, изучаемых в школьном курсе математики, можно нарисовать «не отрывая карандаш от бумаги», так как он представляет собой сплошную линию. Если на некотором интервале (a;b) функция f непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она будет сохранять постоянный знак.

Это свойство очень легко для понимания. Функция, расположенная выше оси Ox, имеет знак «плюс», функция, расположенная ниже оси Ox, имеет знак «минус». Если линия функции не пересечет ось Ox (на оси Ox функция равна нулю), то она явно не изменит свой знак.

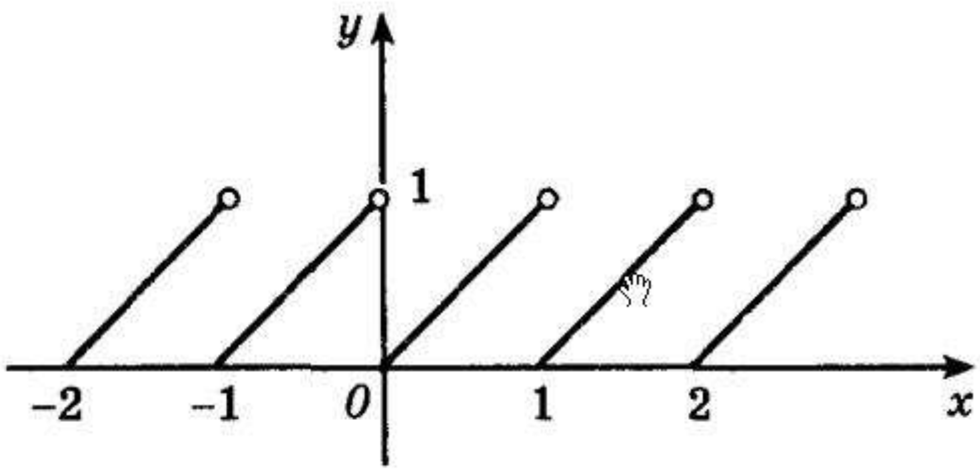
Метод интервалов

Одним из ярких применений свойств непрерывности функций является метод интервалов, который используется для решения неравенств с одной переменной. Пусть некоторая функции непрерывна на интервале A и обращается в нуль в конечном числе точек принадлежащих этому интервалу.

Используя свойство, приведенное выше, эти точки будут разбивать весь интервал A на промежутки, в которых функция будет сохранять свой знак. Чтобы определить знаки всех промежутков, достаточно знать знак одного любого из этих интервалов.

Пример функции, которая не является непрерывной

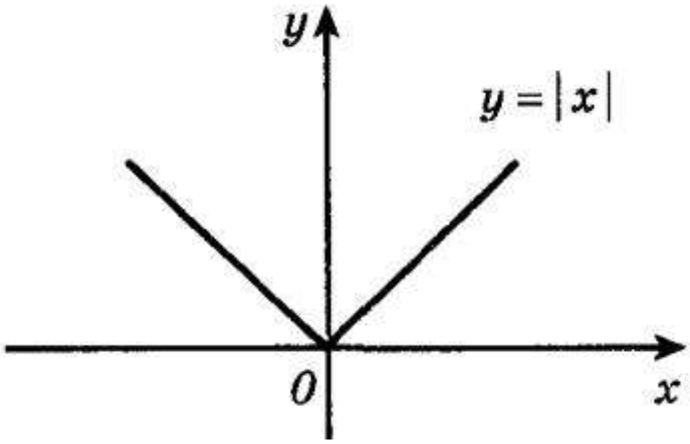
До сих пор мы сталкивались только с непрерывными функциями. Но существуют функции, которые не являются непрерывными в каждой точке, в которой они определены. Например, функция f(x) = {x}, где {x} – есть дробная часть числа x. Её график изображен на следующем рисунке.



Легко заметить, что основное свойство непрерывности функции в точке x0 равное любому целому числу, не будет выполняться. Но в тоже время функция f(x) = {x} непрерывна во всех других точках, на которых она определена, кроме точек, где x равно целому числу. На графике такие точки отмечены выколотыми кружками.

Функции непрерывные, но не дифференцируемые в данной точке

Есть функции которые являются непрерывными в каждой точке своей области определения. Но при этом не будут иметь производные в некоторых точках. Например, функция y=|x| непрерывна на все числовой оси, но при этом не дифференцируема в точке x = 0. Ниже представлен график этой функции.



Исследуйте функцию на непрерывность и постройте схематически график.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, \text{ если } x < 1 \\ x^2 + 3, \text{ если } 1 \le x < 2 \\ 3x + 5, \text{ если } x \ \ge 2 \end{cases}$$

Решение. Каждая отдельная функция, входящая в исходную, непрерывна, следовательно, разрывы могут возникнуть лишь в точках, при переходе через которые одно выражение сменяется другим, т.е. в точках $x = –1$ и $x = 2$. Рассмотрим, как ведёт себя функция в окрестности точки $x = –1$.

1) $x = –1$

$\lim_{x\to -1-}(x + 5) = 4$

$\lim_{x\to -1+}(x^2 + 3) = 4$

Следовательно, в точке x = –1 функция непрерывна.

2) $x = 2$

$\lim_{x\to -2-}(x^2 + 3) = 7$

$\lim_{x\to -2+}(3x + 5) = 11$

Следовательно, в точке функция имеет разрыв I рода.

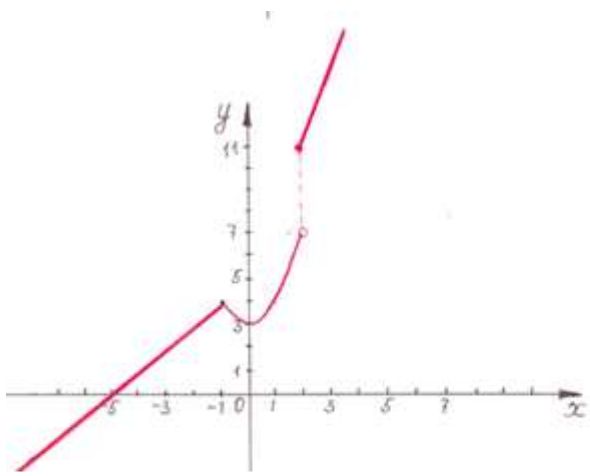


Рисунок 1

2 . Найдите область определения функции.

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 7x + 12}{x}}$$

Решение. Так как арифметический квадратный корень можно вычислить из неотрицательного числа, то $\frac{x^2 + 7x + 12}{x} \geq 0.$

Вводим функцию $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x}$, $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$

Находим нули функции $f(x) =$, тогда $x^2 + 7x + 12 = 0$; по теореме Виета и обратной к ней:

$x_1 + x_2 = -7$

$x_1 * x_2 = 12$

получаем $x_1 = -3$, $x_2 = -4$

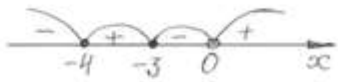


Рисунок 2

$x \in [-4;\ -3] \cup (0;\ +\infty)$

Ответ: $D(y) = [-4;\ -3]\ (0;\ +\infty).$

3 .

а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + \ldots + n} = 2$

б) Вычислите: $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$

а) В знаменателе дроби под знаком предела стоит сумма членов арифметической прогрессии, поэтому её можно записать как $s = \frac{a_1 + a_2}{2} * n = \frac{1+n}{2} * n = \frac{n^2 + n}{2}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + \ldots + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{\frac{n^2 + n}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+6n-4}{n^2+n} = \frac{[\infty]}{[\infty]} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{6}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

б) $$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-25} = \frac{[0]}{[0]} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

4 . Докажите, что уравнение $x^3 - 3x + 1$ имеет корень на отрезке [0; 1] и найдите его с точностью до 0,1.

Решение. Введём функцию $f(x) = x^3 - 3x + 1$, она непрерывна на всей числовой прямой, а её значения $f(0) = 1$; $f(1) = -1$.Так как функция разных знаков на концах отрезка, то на этом интервале она может обратиться в нуль хотя бы в одной точке. Разобьем интервал [0; 1] на более мелкие отрезки и составим таблицу:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	1	0,408	–0,135	–0,584	–0,888	–1

Вывод. Так как функция меняет знак на отрезке [0,2; 0,4], то корень уравнения с точностью до 0,1 будет равен $x = 0,3$.

Ответ: $x = 0,3$.

5 . Решить неравенство: $\dfrac{x^2+7x+12}{x} > 0.$

Решение. Вводим функцию $f(x) = \dfrac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2}$; $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Найдём нули функции $f(x) = 0$, следовательно, $(x-2)^3(x+5) = 0$, тогда $x = 2$, $x = -5$.

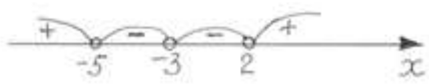


Рисунок 3

$$f(3) = \frac{(3-2)^3(3+5)}{(3+3)^2} > 0$$

$$f(3) = \frac{(3-2)^3(3+5)}{(3+3)^2} > 0$$

$f(-4)=\frac{-216}{(-1)^2}<0$

$f(-6)=\frac{(-8)^3(-1)}{(-3)^2}>0$

$x\in(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$.

Практическое занятие № 7

Тема 1.9: Неопределенный интеграл. Вычисление неопределенных интегралов.
Цель: Научить вычислять неопределенный интегралы

Теоретическая часть

Неопределенный интеграл

F(x) - **первообразная** для f(x) на множестве X если F'(x) = f(x) для всех x∈X. Если F(x) - первообразная для f(x) на множестве X, то F(x) + c - множество всех первообразных для f(x) на множестве X. Это множестве первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx=F(x)+C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
$$\int dF(x)=F(x)+C$$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$d\int f(x)d(x)=f(x)d(x)$$
3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
$$\int[f(x)+\varphi(x)]d(x)=\int f(x)\,d(x)+\int\varphi(x)d(x)$$
4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:
$$\int af(x)d(x)=a\int f(x)d(x)$$

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx=x+C$
2. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
3. $\int\frac{dx}{x}=lnx+C$
4. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{lna}+C$
5. $\int e^x\,dx=e^x+C$
6. $\int sinx\,dx=-cosx+C$

7$\int cosx\,dx=sinx+C$

8. $\int\frac{dx}{cos^2x}=tgx+C$

9. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a}$+C

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений:

1. $\int xdx$
2. $\int \frac{x}{5}dx$
3. $\int x^5dx$
4. $\int 7x^6dx$
5. $\int (7x+1)^3 dx$
6. $\int 10\sin 5xdx$
7. $\int 3(5x+1)^2dx$
8. $\int (2x-1)^2dx$
9. $\int \frac{dx}{x^3}$
10. $\int \sqrt[4]{x^3dx}$
11. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$.
12. $\int 3\cos 3xdx$
13. $\int 4(5-6x)^3 dx$
14. $\int \frac{dx}{x^4}$
15. $\int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$
16. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}$
17. $\int 2^3\sqrt{(7-3x)^2}dx$
18. $\int \frac{dx}{x^2-9}$
19. $\int \frac{dx}{x^2-25}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$
21. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$
23. $\int \frac{dx}{25+x^2}$
24. $\int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$
25. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$
27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{cos^2x} - \frac{1}{sin^2x})$

Практическое занятие № 8

Тема 1.13: Основные методы вычисления интегралов
Цель: Научить вычислять интегралы
Тема: Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Вычисление неопределенных интегралов.
Цель: Научить вычислять неопределенный интегралы

Теоретическая часть

Неопределенный интеграл

F(x) - **первообразная** для f(x) на множестве X если F'(x) = f(x) для всех x∈X. Если F(x) - первообразная для f(x) на множестве X, то F(x) + c - множество всех первообразных для f(x) на множестве X. Это множестве первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

5. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

6. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)d(x) = f(x)d(x)$$

7. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]d(x) = \int f(x)\,d(x) + \int \varphi(x)d(x)$$

8. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)d(x) = a\int f(x)d(x)$$

Основные формулы интегрирования

1.$\int dx = x + C$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = lnx + C$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$

6. $\int sinx\,dx = -cosx + C$

7$\int cosx\,dx = sinx + C$

8.$\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

9.$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

10.$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C

11.$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a}$+C

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений:

1. $\int xdx$

2. $\int \frac{x}{5}dx$

3. $\int x^5 dx$

4. $\int 7x^6 dx$

5. $\int (7x+1)^3 dx$

6. $\int 10\sin 5x dx$

7. $\int 3(5x+1)^2 dx$

8. $\int (2x-1)^2 dx$

9. $\int \frac{dx}{x^3}$

10. $\int \sqrt[4]{x^3} dx$

11. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$.

12. $\int 3\cos 3x dx$

13. $\int 4(5-6x)^3 dx$

14. $\int \frac{dx}{x^4}$

15. $\int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$

16. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}$

17. $\int 2^3\sqrt{(7-3x)^2} dx$

18. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

19. $\int \frac{dx}{x^2-25}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

21. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{25+x^2}$

24. $\int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$

25. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ 27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sin^2 x})$

Практическое занятие № 9

Тема 1.15: Определенный интеграл как предел интегрирования суммы. Вычисление определенного интеграла.

Цель: Научить вычислять определенные интегралы

Теоретическая часть.

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке [a, b] определена функция f(x). Разобьем отрезок [a, b] на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку x_iи составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i$,, где, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i$,,i называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\lambda = \max\Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции f(x) от a до b и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda} \sum_{i=n}^{n} f(x_1)dx_1 \; (1)$$

Функция f(x) в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* [a, b],числа a и b носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$, (k = const, k∈**R**);

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx =$$ f(ξ)(b-a) (ξ∈a,b]).

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.

Пусть f(x) непрерывна на [a, b]. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a) \; (2)$$

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y=f(x), прямыми x = a и x = b и отрезком оси *Ox*.

Решение упржнений.

1. Вычислить ∫ dx/(x+2).

2. Найти ∫ tgxdx.

3. Найти ∫ dx/sinx.

4. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

5. Найти ∫ arctgxdx.

6. Вычислить ∫ lnxdx.

7. Вычислить ∫ e^xsinxdx.

Пример3.37. Вычислить J = ∫ cos(lnx)dx/x.

Решение. Так как dx/x = d(lnx), то J= ∫ cos(lnx)d(lnx). Заменяя lnx через t, приходим к табличному интегралу J = ∫ costdt = sint + C = sin(lnx) + C.

8. Вычислить J = $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$.

9. Вычислить интеграл J = $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$.

10. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу $\int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$?

11. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$.

Практическое занятие № 10

Тема 2.2: Квадратная матрица. Операции над матрицами.
Цель: Научить решать определять значения матриц.

Теоретическая часть:

Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы

Цель: Освоить способы выполнения операций над матрицами, элементарные преобразования матриц, нахождения обратной матрицы

Теоретическая часть

Операции над матрицами

Сложение матриц. Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одной и той же размерности $m\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ той же размерности такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Итак, можно складывать только матрицы одной и той же размерности. При сложении матриц складываются соответствующие элементы.

Пример 1.

Найдите сумму матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

$C=A+B=\begin{pmatrix}3-3 & 2-2\\ -1+1 & 0+0\\ 1-1 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ — нуль-матрица размерности 3×2.

Из определения суммы следует, что сложение матриц подчинено:

а) коммутативному закону $A+B=B+A$;

б) ассоциативному закону $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$;

в) $A_{m\times n}+0_{m\times n}=A_{m\times n}$ — закон поглощения нуля.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ (или λ на матрицу A) называется матрица $B=(b_{ij})$, где $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, т.е. при умножении матрицы на число надо все элементы матрицы умножить на это число.

Пример 2

$$2\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 8\end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число:

а) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ (ассоциативность);

б) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

в) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

г) $1\cdot A=A$.

Пример 3

Найдите $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -2+3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размерности $n\times m$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размерности $m\times p$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размерности $n\times p$ такая, что $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{im}\cdot b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,p$.

Умножать матрицы A и B можно лишь в том случае, когда число столбцов первого сомножителя A (число элементов в каждой строке матрицы A) совпадает с числом строк второго сомножителя B (число элементов в каждом столбце B). В частности для квадратных матриц одинакового порядка определены оба произведения AB и BA, и матрицы произведения являются матрицами того же порядка

Пример 4 Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$. Найдите произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\text{выделяются 1-я строка матрицы } A\\ \text{и первый столбец матрицы } B,\\ \text{соответствующие элементы перемножаются,}\\ \text{а произведения складываются}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3\neq2)$.

Пример 5 Пусть $A=(3\quad 2\quad -1)$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. Найдите произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB=3\cdot(-1)+2\cdot1+(-1)\cdot2=-3+2-2=-3.$$
$$BA=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\cdot(3\quad 2\,-1)=\begin{pmatrix}-1\cdot3 & -1\cdot2 & -1\cdot(-1)\\ 1\cdot3 & 1\cdot2 & 1\cdot(-1)\\ 2\cdot3 & 2\cdot2 & 2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 6 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

Из приведенных выше примеров ясно, что в общем случае $AB\neq BA$..

Коммутирующими называют матрицы A и B, если для них выполнено условие $AB = BA$.

Свойства операции умножения матриц:

а) ассоциативность: если определено одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$, то определено также и второе произведение, и имеет место выше приведённое равенство $(AB)C = A(BC) = A \cdot B \cdot C$;

б) дистрибутивность: если C — такая матрица, что определено произведение AC, то определены произведения BC и $(A+B)C$ и верно равенство $(A+B)C = AC + BC$ (A и B — матрицы одинаковых размеров);

в) дистрибутивность: если A — такая матрица, что определено произведение AB, то определены произведения AC и $A(B+C)$ и верно равенство $A(B+C) = AB + AC$ (B и C — матрицы одинаковых размеров);

г) $A_{m\times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

Транспонированная матрица

Транспонированием матрицы называется такое её преобразование, при котором строки этой матрицы становятся её столбцами с теми же номерами.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обозначается A' или A^T.

Если $A^T = A$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется *симметрической.*

Пример 6 Транспонируйте матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей.

Определение 1

Определителем матрицы называется некоторая математическая функция элементов квадратной матрицы, результатом которой является число.

Обозначение:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 4 & -1 \\ 12 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

— определитель 3- го порядка (т.к. матрица размера 3 на 3) матрицы А.

Вычисление определителей первого порядка.

Матрица размера 1×1 это просто число. Определителем такой матрицы является само это число.

Пример:

$$|3| = 3$$

Вычисление определителей второго порядка

Определитель второго порядка (матрицы размера 2 на 2) вычисляется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 7:

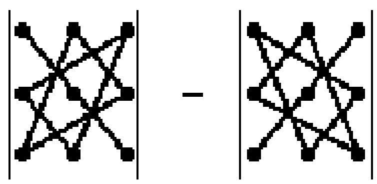
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot1 - 4(-3) = 3 + 12 = 15$$

Вычисление определителей третьего порядка

Определитель третьего порядка (матрицы размера 3 на 3) вычисляется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Запомнить порядок сомножителей можно, используя правило треугольников



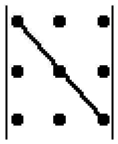
Пример 8.

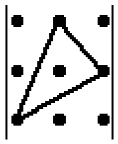
Вычислить определитель:

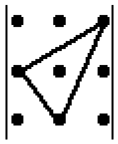
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 11 & 21 & -5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

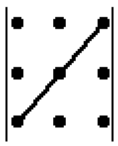
Решение:

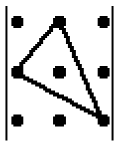
Воспользуемся правилом треугольника

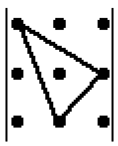
 $= a_{11}a_{22}a_{33} = 2\cdot 21\cdot 9 = 378$

 $= a_{12}a_{23}a_{31} = 3\cdot(-5)\cdot 4 = -60$

 $= a_{13}a_{21}a_{32} = 11\cdot(-1)\cdot 6 = -66$

 $= a_{13}a_{22}a_{31} = (-1)\cdot 21\cdot 4 = -84$

 $= a_{12}a_{21}a_{33} = 3\cdot 11\cdot 9 = 297$

 $= a_{11}a_{23}a_{32} = 2\cdot(-5)\cdot 6 = -60$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 11 & 21 & -5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 378 - 60 - 66 - (-84 + 297 - 60) = 108$$

Ответ 108

Нахождение обратной матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу A. Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц, матриц «два на два», «три на три» и т.д.

обратная матрица обозначается надстрочным индексом $^{-1}$

Пример 9:

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решаем.

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

В том случае, если определитель матрицы равен НУЛЮ – обратной матрицы не существует.

2) Найдем матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица A, то есть в данном случае $M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

осталось найти четыре числа и поставить их вместо звездочек.

Возвращаемся к нашей матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его минор?

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является минором данного элемента, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Рассматриваем следующий элемент матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 \\ \boxed{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \boxed{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений A_*.

Это просто. В матрице миноров нужно поменять знакиу двух чисел:

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$A_* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений A_*^T.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

5) Ответ.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Как проверить решение?

Необходимо выполнить матричное умножение AA^{-1} либо $A^{-1}A$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-3) & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) & 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Получаем единичную матрицу (с единицами по главной диагонали и нулями в остальных местах).

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Пример10Найти обратную матрицу для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Алгоритм точно такой же, как и для случая «два на два».

Обратную матрицу найдем по формуле: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T$, где B_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

1) Находим определитель матрицы.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-9+8) - 5 \cdot (-18-20) + 7 \cdot (-12-15) = -2 + 190 - 189 = -1$$

2) Находим матрицу миноров M.

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Матрица миноров имеет размерность «три на три» , и нам нужно найти девять чисел.

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и является минором данного элемента. Его нужно вычислить:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

нахождение еще одного минора

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-6\cdot 7=8-42=-34$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Окончательный результат:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

– матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо сменить знаки строго у следующих элементов:

$$M=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$$B_{*}=\begin{pmatrix}-1 & 38 & -27\\ 1 & -41 & 29\\ -1 & 34 & -24\end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_{*}^{T}.

$$B_{*}^{T}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot B_{*}^{T}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+5\cdot(-38)+7\cdot 27 & 2\cdot(-1)+5\cdot 41+7\cdot(-29) & 2\cdot 1+5\cdot(-34)+7\cdot 24\\ 6\cdot 1+3\cdot(-38)+4\cdot 27 & 6\cdot(-1)+3\cdot 41+4\cdot(-29) & 6\cdot 1+3\cdot(-34)+4\cdot 24\\ 5\cdot 1-2\cdot(-38)-3\cdot 27 & 5\cdot(-1)-2\cdot 41-3\cdot(-29) & 5\cdot 1-2\cdot(-34)-3\cdot 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Задание для выполнения практической работы

Задание 1. Вычислить 3A+2B

Задание 2. Вычислить AB

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы A и B

1.	$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$		$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$
2.	$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$		$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

3.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 11

Тема 2.3: Метод Гаусса и метод Крамера при решении систем.
Цель: Освоить способы решения систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

Теоретическая часть

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = s_1 \\ a_2x + b_2y = s_2 \end{cases}$

Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют *главным определителем системы*.

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$

Корни уравнения находим по формулам:

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

РассмотримправилоКрамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если $D=0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если $D\neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1=\begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

Ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

Пример 1

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9 \\ 2x_1-x_2-x_3=10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=$$

$=3\cdot(-4-2)+2\cdot(-3+4)+4\cdot(-3-8)=-18+2-44=-60\neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1=\begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=21\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=21\cdot(-4-2)+2\cdot(-9+20)+4\cdot(-9-40)=-126+22-196=-300$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-300}{-60}=5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}-21\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=33-21+48=60$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 21\\ 3 & 4 & 9\\ 2 & -1 & 10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4 & 9\\ -1 & 10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ -1 & 10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ 4 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=147-3-284=-60$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-60}{-60}=1$$

Ответ: $x_1=5, x_2=-1, x_3=1$.

Пример 2

Решить систему с матричным методом

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=21\\ 3x_1+4x_2-2x_3=9\\ 2x_1-x_2-x_3=10\end{cases}$$

Решение: Запишем систему в матричной форме:

$AX=b$, где $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}21\\ 9\\ 10\end{pmatrix}$

Нужно найти обратную матрицу A^{-1} и выполнить матричное умножение $A^{-1}b$

Обратную матрицу найдем по формуле:

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_*^T$, где A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Найдем определитель:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-4-2)+2\cdot(-3+4)+4\cdot(-3-8)=-18+2-44=-60$$

Если $|A|=0$, то обратной матрицы не существует, и решить систему матричным методом невозможно. В этом случае система решается методом исключения неизвестных (методом Гаусса).

Теперь нужно вычислить 9 миноров и записать их в матрицу миноров

$$M=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{pmatrix}$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-4-2=-6$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3+4=1$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=2+4=6$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-8=-11$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3+4=1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}=4-16=-12$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-6-12=-18$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=12+6=18$$

Порядок расчета миноров совершенно не важен.

$M=\begin{pmatrix}-6 & 1 & -11\\ 6 & -11 & 1\\ -12 & -18 & 18\end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$A_*=\begin{pmatrix}-6 & -1 & -11\\ -6 & -11 & -1\\ -12 & 18 & 18\end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений.

$A_*^T=\begin{pmatrix}-6 & -6 & -12\\ -1 & -11 & 18\\ -11 & -1 & 18\end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Теперь записываем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_*^T=\frac{1}{-60}\begin{pmatrix}-6 & -6 & -12\\ -1 & -11 & 18\\ -11 & -1 & 18\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6 & 6 & 12\\ 1 & 11 & -18\\ 11 & 1 & -18\end{pmatrix}$$

Проведем матричное умножение.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}b=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6&6&12\\1&11&-18\\11&1&-18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}21\\9\\10\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}6\cdot21+6\cdot9+12\cdot10\\1\cdot21+11\cdot9-18\cdot10\\11\cdot21+1\cdot9-18\cdot10\end{pmatrix}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}300\\-60\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1=5,\ x_2=-1,\ x_3=1$

Наиболее универсальным способом решения системы является метод исключения неизвестных – метод Гаусса. Суть метода заключается в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду, если система имеет единственное решение, то матрица приведется к треугольному виду

Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1\\5x_1+3x_2-2x_3=2\\3x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)$$

1)К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-1\\0&-2&3&-3\\0&-1&0&-3\end{array}\right)\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&0&3\\0&-2&3&-3\end{array}\right)\xrightarrow{(4)}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&0&3\\0&0&3&3\end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

5) Третью строку разделили на 3.

Получаем:

$x_3 = 1$

$x_2 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Задание для выполнения практической работы

Решить систему уравнений тремя методами

1	$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$	7	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x+5y+z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x-y-2z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+3z=0 \end{cases}$

Практическое занятие № 12

Тема 2.4: Решение систем линейных уравнений

Цель: Научить решать линейные уравнения

Теоретическая часть

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Уравнение вида $y` + p(x) = f(x)$ (1)

где $p(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*
Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) называется *линейным однородным уравнением.*
Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным уравнением.*
Для нахождения общего решения такого уравнения сначала решают соответствующее однородное уравнение $y` + p(x) = 0$, а затем применяют метод вариации постоянной.
Рассмотрим на примере решение линейных дифференциальных неоднородных уравнений первого порядка.
Пример.
Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y` + ycosx = sin2x$$

Решение.
Найдем общее решение однородного уравнения$y` + ycosx = 0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -cosxdx$
интегрируя, находим $lny = -sinx + lnC; y = Ce^{-sinx}$. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-sinx}$ методом вариации постоянной, то есть C будем считать не постоянной , а новой неизвестной функцией от x. Дифференцируя, имеем $y = C`e^{-sinx} - cosxCe^{-sinx}$. Подставляя в данное уравнение выражения для $y$ и $y`$, получаем

$$C`e^{-sinx} - cosxCe^{-sinx} + C(x)e^{-sinx}cosx = sin2xC`(x)e^{-sinx} = sin2xC`(x) = e^{-sinx}sin2x$$

$$dC = e^{sinx}sin2xdxC(x) = \int e^{sinx}\, 2sinxcosx$$

Применяя подстановку $sinx = t$ и интегрирование по частям, получим

$$C(x) = 2e^{sinx}(sinx - 1) + C_2$$

Следовательно ,общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-sinx} = \left(2e^{sinx}(sinx - 1) + C_2\right)e^{-sinx} = 2(sinx - 1) + C_2e^{-sinx}$$

Решение упражнений

1. $(1 + y)dx - (x - 1)dy = 0;$
2. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0;$
3. $(1 + y^2)dx - xydy = 0$
4. $y` - (2y + 1)ctgx = 0$
5. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0;$
6. $x^2y` + y^2 = 0$
7. $ydx - (x^2 - 4)dy = 0$
8. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$
9. $(2x + 1)dy - y^2dx = 0;$
10. $2dy + (y - 6x)dx = 0$
11. $y` - ytgx = \frac{1}{cosx}$
12. $xy` + y = e^x$
13. $xy` - \frac{y}{x+1} = x$
14. $xy` + 2y = x^2$
15. $y` + 2y = 4x$
16. $y` + y = cosx$
17. $y` = x + y$
18. $y` + 4y = e^{2x}$

19. $y^{`} - y = e^x$

Практическое занятие №13

Тема 2.5: Различные виды применения линейных уравнений.
Цель: Изучить различные виды применения линейных уравнений.

Теоретическая часть

Рассмотрим вначале случай, когда число уравнений равно числу переменных, т.е. m = n. Тогда матрица системы - квадратная, а ее определитель называют определителем системы.

Метод обратной матрицы

Рассмотрим в общем виде систему уравнений AX = Bc невырожденной квадратной матрицей A. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Домножим слева обе части на A^{-1}. Получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Отсюда $EX = A^{-1}B$ и

$$X = A^{-1}B.$$

Последнее равенство представляет собой матричную формулу для нахождения решения таких систем уравнений. Использование этой формулы получило название метода обратной матрицы

Например, решим этим методом следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: $AX = B$. Найдем определитель $|A| = 5$. Так как $|A| \neq 0$, то матрица A — невырожденная, и существует обратная матрица

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

В конце решения системы можно сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы. При этом они должны обратиться в верные равенства.

Для рассмотренного примера проведем проверку:

$$\begin{cases} 4-2+1=3 \\ 2*4+2+1=11 \\ 4+2+2*1=8 \end{cases}$$

Метод решения систем линейных уравнений с квадратной матрицей по формулам Крамера

Пусть n= 2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Если обе части первого уравнения умножить на a_{22}, а обе части второго – на ($-a_{12}$), и затем сложить полученные уравнения, то мы исключим из системы переменнуюх$_2$. Аналогично можно исключить переменнуюх$_1$(умножив обе части первого уравнения на ($-a_{21}$), а обе части второго – наa_{11}). В результате получим систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_2 \end{cases}$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы 0, то система будет совместной и≠Δ определенной. Ее единственное решение можно вычислить по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Δ= 0, аΔЕсли $_1$Δ0 и/или≠$_2$0, то уравнения системы примут вид 0*x≠$_1$Δ=$_2$и/или0*x$_1$Δ=$_2$. В этом случае система будет несовместной.

Δ=ΔВ случае, когда $_1$Δ=$_2$= 0, система будет совместной и неопределенной (будет иметь бесконечное множество решений), так как примет вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

Теорема Крамера(доказательство опустим). Если определитель не равен нулю, тоΔматрицы системыn уравнений система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n},$$

Δгде $_j$- определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Вышеприведенные формулы называют **формулами Крамера**.

В качестве примера решим этим методом систему, которую до этого решали методом обратной матрицы:

Найдем определитель системы $\Delta = |A| = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матрицы A, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

Теперь по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Недостатки рассмотренных методов:

1) существенная трудоемкость (вычисление определителей и нахождение обратной матрицы);

2) ограниченная область применения (для систем с квадратной матрицей).

Реальных экономические ситуации чаще моделируются системами, в которых число уравнений и переменных довольно значительное, причем уравнений больше, чем переменных Поэтому на практике более распространен следующий метод.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных)

Этот метод используется для решения системы m линейных уравнений с n переменными в общем виде. Его суть заключается в применении к расширенной матрице системы равносильных преобразований, с помощью которых система уравнений преобразуется к виду, когда ее решения становится легко найти (если они есть).

Это такой вид, в котором левая верхняя часть матрицы системы будет представлять собой ступенчатую матрицу. Этого добиваются с помощью тех же приемов, с помощью которых получали ступенчатую матрицу с целью определения ранга. При этом применяют к расширенной матрице элементарные преобразования, которые позволят получить равносильную систему уравнений. После этого расширенная матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

Получение такой матрицы называют **прямым ходом**метода Гаусса.

Нахождение из соответствующей системы уравнений значений переменных называют **обратным ходом**метода Гаусса. Рассмотрим его.

Отметим, что последние (m – r) уравнений примут вид:

$$\{\ 0*x_1 + 0*x_2 + \dots + 0*x_n = b_i,\ i = \overline{r+1,m}$$

Если хотя бы одно из чисел $b_i,\ i = \overline{r+1,m}$ не равно нулю, то соответствующее равенство будет ложным, а вся система несовместной.

Поэтому для любой совместной системы $b_i = 0,\ i = \overline{r+1,m}$. В этом случае последние (m – r) уравнений при любых значениях переменных будут тождествами 0 = 0, и их можно не принимать во внимание при решении системы (просто отбросить соответствующие строки).

После этого система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \ldots + a_{1r} * x_r + a_{1\,r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ \qquad a_{22} * x_2 + \ldots + a_{2r} * x_r + a_{2\,r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{2n} * x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{rr} * x_r + a_{r\,r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{rn} * x_n = b_r \end{cases}$$

Рассмотрим вначале случай, когда r=n. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \ldots + a_{1r} * x_r = b_1 \\ \qquad a_{22} * x_2 + \ldots + a_{2r} * x_r = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{rr} * x_r = b_r \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы можно однозначно найти x_r.

Предпоследнее уравнение будет иметь вид:

$$a_{r-1\,r-1} * x_{r-1} + a_{r-1\,r} * x_r = b_{r-1}$$

Зная x_r, из него можно однозначно выразить x_{r-1}. Затем из предыдущего уравнения, зная x_r и x_{r-1}, можно выразить x_{r-2} и т.д. до x_1.

Итак, в этом случае система будет совместной и определенной.

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

Так как $a_{11} \neq 0$, то умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Так как теперь $a_{22} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right)$$

Учитывая, что $a_{33} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на 13,5/8=27/16, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right)$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14 \\ \quad\quad -8x_3 + x_4 = 6 \\ \quad\quad\quad -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8} \end{cases}$$

используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; −1; 2).

Теперь рассмотрим случай, когда r<n. Первые rпеременных будем называть **базисными**(основными), а все остальные –**небазисными**(неосновными, свободными). Последнее уравнение системы будет иметь вид:

$$a_{rr} * x_r + a_{r\,r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{rn} * x_n = b_r$$

Из этого уравнения можно выразить базисную переменную x_rчерез небазисные:

$$x_r = \frac{b_r - (a_{r\,r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{rn} * x_n)}{a_{rr}}$$

Предпоследнее уравнение будет иметь вид:

$$a_{r-1\,r-1} * x_{r-1} + a_{r-1\,r} * x_r + a_{r-1\,r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{r-1\,n} * x_n = b_{r-1}$$

Подставив в него вместо x_rполученное выражение, можно будет выразить базисную переменную x_{r-1}через небазисные. И т.д. до переменнойx_1. Чтобы получить решение системы, можно приравнять небазисные переменные к произвольным значениям и после этого вычислить базисные переменные по полученным формулам. Таким образом, в этом случае система будет совместной и неопределенной (иметь бесконечное множество решений).

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен 1):

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&3&\vert&-6\\2&-1&1&-1&\vert&5\\3&1&-1&2&\vert&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&3&\vert&-6\\0&-5&5&-7&\vert&17\\0&-5&5&-7&\vert&17\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&3&\vert&-6\\0&-5&5&-7&\vert&17\\0&0&0&0&\vert&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2&3&\vert&-6\\0&-5&5&-7&\vert&17\end{pmatrix}$$

Оставляем в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные. Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4\\ \quad\;\; -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4\end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad \text{и}$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2\right)$.

Практическое занятие №14

Тема 3.2: Свойства вероятности.
Цель: Изучить свойства вероятности.

Теоретическая часть

Совокупность базисных переменных будем называть **базисом**системы. Совокупность столбцов коэффициентов при них тоже будем называть**базисом**(базисными столбцами), или**базисным минором**матрицы системы. То решение системы, в котором все небазисные переменные равны нулю, будем называть**базисным решением**.
В предыдущем примере базисным решением будет (4/5; -17/5; 0; 0) (переменные x_3и x_4(c_1и c_2) приравнены к нулю, а базисные переменные x_1и x_2рассчитаны через них). Чтобы привести пример небазисного решения, надо приравнять x_3и x_4(c_1и c_2) к произвольным числам, неравным одновременно нулю, и рассчитать через них остальные переменные. Например, при c_1= 1 и c_2= 0 получим небазисное решение – (4/5; -12/5; 1; 0). Подстановкой легко убедиться, что оба решения – верные.
Очевидно, что в неопределенной системе небазисных решений может быть бесконечно много. Сколько может быть базисных решений? Каждой строке преобразованной матрицы должна соответствовать одна базисная переменная. Всего в задаче nпеременных, а базисных строк –r. Поэтому число всевозможных наборов базисных переменных не может превысить число сочетаний изnпоr[2]. Оно может быть меньше, чем C_n^r, потому что не

всегда можно преобразовать систему к такому виду, чтобы именно этот набор переменных был базисным.
Что это за вид? Это такой вид, когда матрица, образованная из столбцов коэффициентов при этих переменных, будет ступенчатой, и при этом будет состоять из rстрок. Т.е. ранг матрицы коэффициентов при этих переменных должен быть равенr. Большего быть не может, так как число столбцов равноr. Если он окажется меньшеr, то это говорит о линейной зависимости столбцов при переменных. Такие столбцы не могут составить базис.
Рассмотрим, какие еще базисные решения могут быть найдены в рассмотренном выше примере. Для этого рассмотрим всевозможные сочетания из четырех переменных по две базисных. Таких сочетаний будет $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2*3*4}{2*2} = 6$, причем одно из них ($x_1$и x_2) уже было рассмотрено.
Возьмем переменные x_1и x_3. Найдем ранг матрицы коэффициентов при них:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2{,}5 \\ 0 & -2{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2{,}5 \\ & \end{pmatrix}$$

Так как он равен двум, они могут быть базисными. Приравняем небазисные переменные x_2и x_4к нулю: $x_2 = x_4 = 0$. Тогда из формулы $x_1 = 4/5 - (1/5)*x_4$следует, что $x_1 = 4/5$, а из формулы $x_2 = -17/5 + x_3 - - (7/5)*x_4 = -17/5 + x_3$следует, что $x_3 = x_2 + 17/5 = 17/5$. Таким образом, мы получим базисное решение (4/5; 0; 17/5; 0).

Аналогично можно получить базисные решения для базисных переменных x_1и x_4– (9/7; 0; 0; -17/7); x_2и x_4– (0; -9; 0; 4); x_3и x_4– (0; 0; 9; 4).

Переменные x_2и x_3 в этом примере нельзя взять в качестве базисных, так как ранг соответствующей матрицы равен единице, т.е. меньше двух:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возможен и другой подход к определению того, можно или нет составить базис из некоторых переменных. При решении примера в итоге преобразования матрицы системы к ступенчатому виду она приняла вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Выбирая пары переменных, можно было рассчитать соответствующие миноры этой матрицы. Легко убедиться, что для всех пар, кроме x_2и x_3, они не равны нулю, т.е. столбцы линейно независимы. И только для столбцов при переменных x_2и x_3 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, что говорит об их линейной зависимости.

Рассмотрим еще один пример. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво - оно привелось к неверному равенству 0 = -1, следовательно, данная система несовместна.

Выполнить упражнения.

Практическое занятие № 15

Тема 3.3: Классификация событий. Операции над событиями.

Цель: Научиться проводить операции над событиями.

Теоретическая часть

Закон равномерного распределения вероятностей.

Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция имеет постоянное значение.

Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ C, a < x < b, \\ 0, b \le x, \end{cases}$ т.к. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$ то $C = \frac{1}{b-a},$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x < b, \\ 0, x \ge b. \end{cases}$$

Пример. Показательное распределение.

Решение. Показательное распределение задается своей дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda\_\_.$$

Проверим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda^{-\lambda}dx = \left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0. \end{cases}$$

Продолжительность существования радиоактивных частиц описывается показательным распределением.

Характеристиками положения н.с.в., так же как и дискретной, являются математическое ожидание, мода и медиана.

Математическим ожиданием н.с.в. называют число

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ - плотность вероятности, и предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Модой н.с.в. называется значение с.в., при котором плотность вероятности максимальна.

Медианой н.с.в. X называется такое ее значение M, что

P\{ X ^{e}\} = P\{ X M^{e}\}.

Основными характеристиками рассеивания н.с.в. являются дисперсия, асимметрия и эксцесс.

Дисперсия н.с.в. D[X] находится следующим образом:

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)dx \quad D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2[X].$$

Асимметрия - это число $A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M[(X - \bar{x})^3]}{\sigma^3},$ где σ - среднее квадратичное отклонение с.в. X. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то A^{s} = 0.

Эксцессом с.в. X называется число $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M[(X-\bar{x})^4]}{\sigma^4} - 3.$ Число E_k характеризует "крутость" кривой плотности вероятности по сравнению с кривой Гаусса. Для нормального закона распределения E_k = 0, для островершинных E_k 0, для пологих E_k

1) **Выполнить упражнения**
2) Дано следующее распределение дискретной случайной величины:

X	1	2	4	5
p	0,2	0,1	0,4	0,3

1. Найти ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2. В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

3) Случайная величина X задана плотностью вероятности 2x в интервале (О, 1), «не этого интервала/(x) = 0. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

1. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 12, а среднее квадратичное отклонение равно 3, Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (9, 11).

2. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 15, а вероятность ее попадания в интервал (16, 21) равна 0,98. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины

Практическое занятие № 16.

Тема 3.4: Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Цель: Научить определять числовые характеристики дискретной случайной величины.

Теоретическая часть.

Определение: Математическим ожиданием M(X)дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности: $M(X)=\sum x_i p_{i=}\ x_1p_1 + x_2p_2+\ldots+ x_np_n$

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1)M(C)=C, где C-постоянная величина;

2)M(C•X)=C•M(X),

3)M(X±Y)=M(X) ±M(Y);

4)M(X•Y)=M(X) •M(Y), где X,Y- независимые случайные величины;

5)M(X±C)=M(X)±C, где C-постоянная величина;

Определение:Дисперсией D(X)случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

D(X)=M(X-M(X))2

Свойства дисперсии:

1)D(C)=0, где C-постоянная величина;

2)D(X)>0, где X- случайная величина;

3)D(C•X)=C2•D(X), где C-постоянная величина;

4)D(X+Y)=D(X)+D(Y), где X,Y- независимые случайные величины;

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой:

D(X)=M(X2)-(M(X))2,где M(X)=∑ xi2pi= x12p1 + x22p2+…+ xn2pn

Определение: Средним квадратическим отклонением σ(X) случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

Задача 2.Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	-1				
p	0,1	P2	0,3	0,2	0,3

Найти P2, функцию распределения F(x) и построить ее график, а также M(X),D(X), σ(X).

Решение: Так как сумма вероятностей возможных значений случайной величины X равна 1, то

P2=1- (0,1+0,3+0,2+0,3)=0,1

Найдем функцию распределения F(x)=P(X<x).

Геометрически это равенство можно истолковать так: F(x) есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Если $x \leq -1$, то $F(x)=0$, т.к. на $(-\infty; x)$ нет ни одного значения данной случайной величины;

если $-1<x\leq 0$, то $F(x)=P(X=-1)=0,1$, т.к. в промежуток $(-\infty; x)$ попадает только одно значение $x1=-1$;

если $0<x\leq 1$, то $F(x)=P(X=-1)+P(X=0)=0,1+0,1=0,2$, т.к. в промежуток

$(-\infty; x)$ попадают два значения $x1=-1$ и $x2=0$;

если $1<x\leq 2$, то $F(x)=P(X=-1)+ P(X=0)+P(X=1)=0,1+0,1+0,3=0,5$, т.к. в промежуток $(-\infty; x)$ попадают три значения $x1=-1$, $x2=0$ и $x3=1$;

если $2<x\leq 3$, то $F(x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)= 0,1+0,1+0,3+0,2=0,7$, т.к. в промежуток $(-\infty; x)$ попадают четыре значения $x1=-1$, $x2=0$,$x3=1$ и $x4=2$;

если $x>3$, то $F(x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)= 0,1+0,1+0,3+0,2+0,3=1$, т.к. в промежуток $(-\infty; x)$ попадают четыре значения $x1=-1$, $x2=0$,$x3=1$,$x4=2$ и $x5=3$.

Итак,

0 при $x\leq -1$,

0,1 при $-1<x\leq 0$,

0,2 при $0<x\leq 1$,

$F(x)$= 0,5 при $1<x\leq 2$,

0,7 при $2<x\leq 3$,

1 при $x>3$

Найдем числовые характеристики случайной величины:

$M(X)=\sum xкpк =x1p1 + x2p2+\ldots+ xnpn$

$M(X)=-1\cdot 0,1+0\cdot 0,1+1\cdot 0,3+2\cdot 0,2+3\cdot 0,3=1,5$

$D(X)= \sum x2кpк -(M(X))2 = x21p1 + x22p2+\ldots+ x2npn -(M(X))2$

$D(X)=(-1)2 \cdot 0,1+12\cdot 3+22\cdot 0,2+32\cdot 0,3-(1,5)2=1,65$.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html

2. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/91847.html

3. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 с. — ISBN 978-5-4488-0484-7, 978-5-7996-2821-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/87795.html.

Дополнительная литература:

1. Лисичкин, В.Т. Математика в задачах с решениями : учебное пособие / В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 464 с. — ISBN 978-5-8114-1179-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/112074

Интернет-ресурсы:

- Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября»http://www.mat/septemba.ru
- Математика в открытом колледже http://www.mathematics.ru
- Образовательный математический сайт Exponenta.mhtto://www/ exponent/ru
- Общероссийский математический портал Mati-Net/Ru http://www/mathnet/ru
- Портал Alhnath.ni –вся математика в одном месте.