МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине
«Теория вероятностей и математическая статистика»
для направления подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии
направленность (профиль) Информационные системы и технологии обработки цифрового контента

Пятигорск 2022 г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» проводятся в учебной аудитории с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ темы	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
	6 семестр		
1	Решение комбинаторных задач: перестановки, размещения, сочетания.	1,5	1,5
3	Основные теоремы теории вероятностей. Применение теорем сложения и умножения при решении задач.	1,5	1,5
7	Вариационные ряды и их графическое изображение.	1,5	1,5
9	Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.	1,5	1,5
	Итого за 6 семестр	**6**	**6**

4. Содержание практических работ

Практическая работа 1. Решение комбинаторных задач: перестановки, размещения, сочетания.

Цель: формирование основных понятий комбинаторики и методов решения комбинаторных задач в приложении к теории вероятностей.

Теоретическая часть:

Комбинаторика - ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, - возникла в XVII в. Долгое время казалось, что комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений. Положение дел резко изменилось после появления быстродействующих вычислительных машин и связанного с этим расцвета конечной математики. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, вычислительной математике, планировании экспериментов и т. д.

Комбинаторикой (от латинского combinare – соединять, сочетать) называют раздел математики, в котором изучаются задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества.

Элементарными комбинаторными конфигурациями являются сочетания, размещения, перестановки. Для подсчёта числа этих конфигураций используются правила суммы и произведения.

Правило суммы:

Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать k способами, то выбор элемента A или B можно осуществить m + k способами.

Обобщением правила суммы является правило произведения.

Правило произведения:

Если элемент A можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента A элемент B можно выбрать k способами, тогда, упорядоченную пару элементов (A, B) можно выбрать m*k способами.

Пример 1:

Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Решение: n_1=6 (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), n_2=7 (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), n_3=4 (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6). Итак, $N=n_1*n_2*n_3=6*7*4=168$.

Пример 2:

Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение: Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит N=5*5*5*5=54=625.

Размещения

Назовём множество, содержащее n элементов, n-множеством.

Последовательность (x_1, x_2, …, x_k) длины k без повторяющихся элементов из элементов данного n-множества назовём k-размещением.

Обозначим символом A_n^k число размещений из n по k элементов (от фран. "arrangement" - размещение). Используя правило произведения, вычислим число A_n^k.

Пусть произвольное размещение длины k имеет вид:

(x_1, x_2, …, x_k).

Элемент x_1 можно выбрать n способами. После каждого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать (n-1) способами. После каждого выбора элементов x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать (n-

2) способами, и т.д. После каждого выбора элементов x_1 , x_2, …, x_{k-1} элемент x_k можно выбрать n-(k-1)) = (n-k+1) способами. Тогда, по правилу произведения, последовательность (x_1; x_2; , …, x_k) можно выбрать числом способов, равным n(n-1)(n-2) … (n-k + 1) = A_n^k .

Произведение в левой части равенства умножим и разделим на (n - k)!, получим

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Если в форуме k = n, то A_n^k есть число P_n перестановок из n элементов P_n=n! (от "permutation"- перестановка).

Пример 3:

Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$$A_2^5 = 4 \cdot 5 = 20 .$$

Сочетания

k-подмножество данного n-множества называется k-сочетанием.

Обозначим через C_n^k число k-сочетаний из данных n элементов. Формулу для числа C_n^k получим, рассуждая следующим образом. Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными способами, то получим все k-последовательностей из n элементов, без повторений, то есть все k-размещения.

Иными словами,

$$C_n^k \bullet k! = A_n^k .$$

Откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)..(n-k+1)}{k!} .$$

Пример 4: Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15 .$$

Предполагая, что n и k - целые положительные числа и 0!=1, сформулируем основные свойства сочетаний.

Основные свойства сочетаний

1. Условились, что $C_n^0 = 1$
2. $C_n^1 = n$
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$
4. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
5. $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Задачи и упражнения:

1.Определить, какой объект комбинаторики применяется для решения задачи, обосновать выбор.

2.Решить задачу.

1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

3. В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

4. Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?

5. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

6. Из трех математиков и десяти экономистов надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и шести экономистов. Сколькими способами это можно сделать?

7. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?

8. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?

9. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

10. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трёх дверей, а за каждой из них её ожидают четыре двери. Пройдя дверь, крыса не может вернуться через неё обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

Практическая работа 2. Основные теоремы теории вероятностей. Применение теорем сложения и умножения при решении задач.

Цель: формирование представления об основных теоремах теории вероятностей и методах их применения для решения задач.

Теоретическая часть:

Суммой двух событий А и В называется событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А или В.

Теорема сложения вероятностей:

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

P (A + B) = P (A) + P (B).

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой
P (A +B) = P (A) + P (B) – P (AB),
где AB – произведение событий A и B.

Два события называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

Условной вероятностью P(A/B) события A называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло. Аналогично через P(B/A) обозначается условная вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Произведением двух событий A и B называется событие C, состоящее в совместном появлении события A и события B.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:
P (AB) = P(A) · P(B/A), или P (AB) = P(B) · P(A/B).

Следствие. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:
P (AB) = P(A) · P(B).

Следствие. При производимых n одинаковых независимых испытаниях, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, вероятность появления события A хотя бы один раз равна 1 - (1 - p)n.

Задачи и упражнения:

1. Менеджер имеет 8 кандидатов для взятия в штат фирмы, при этом 6 женщин и 3 мужчин. Требуется взять 3 человека. Какова вероятность того, что при произвольном выборе 3 – х людей будет выбрана хотя бы одна женщина.
2. В ящике 12 шаров, из которых 3 белых, 4 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найти вероятность, что все 3 шара разного цвета.
3. Из группы студентов, в которой 18 юношей и 12 девушек, в совет факультета избираются два человека. Какова вероятность того, что среди избранных окажется хотя бы один юноша.
4. В корзине 6 белых и 8 черных мячей. Наудачу извлекается 3 мяча. Рассчитать вероятности:

   A - все 3 мяча белые;
   B - один мяч белый а два черных;
   C - все три мяча черных
5. Какова вероятность того,что при подбрасывании двух монет выпадет хотя бы один герб? Выписать пространство элементарных исходов.
6. Среди 30 билетов 5 выигрышных. Наити вероятность того, что среди двух выбранных наугад билетов хотя бы один выигрышный
7. Имеется 5 белых и 8 черных шаров. Вынимают два. Найти вероятность того ,что они разного цвета.
8. Имеется 2 урны: в первой a белых и b черных шаров; во второй c белых и d черных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми (событие A) и вероятность того что оба шара будут разного цвета (событие B).
9. Какова вероятность того, что при одновременном бросании двух правильных игральных кубиков выпавшее число очков составит величину равную 9.

10. В корзине 6 белых и 8 черных мячей Рассчитаь вероятность что наудачу взятые два мяча белые.

11. В корзине 6 белых и 8 черных одинаковых по размеру и весу шариков. Наугад выбираются 3 шарика. Рассчитать вероятности следующих событий:

- Все три шарика белые;
- Один шарик белый, а два других черные;
- Все три шарика черные

12. Правильный игральный кубик бросается 3 раза. Посчитать вероятности следующих событий:

- Все три раза выпадет шестерка;
- Все три раза выпадет одно и тоже число.

13. Три раза бросается монета достоинством 5 сантимов. Найти вероятности следующих случайных событий:

- А –“все три раза выпадет цифра”,
- В - “цифра выпадет 1 раз”,
- С - “цифра выпадет большое число раз, чем герб”,
- D - “цифра выпадет 2 раза”.

14. Из букв слова “полюс” наугад выбираются две буквы дна за другой. Выписать пространство элементарных исходов.

15. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко 2 сорту, а остальные к первому. Найти частоту изделий первого сорта, частоту изделий 2 сорта.

16. Студент знает 14 вопросов из 20. В билете содержится 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит хотя бы на один из них.

17. Из ящика, в котором 90 годных деталей и 10 негодных деталей наудачу выбраны 10 деталей. Рассчитать вероятность того, что все выбранные детали годные.

18. В ящике 20 деталей, 15 из которых окрашены. Из ящика выбираются произвольным образом 4 детали. Найти вероятность, что они все окрашены

19. В ящике 5 белых шаров, 2 черных и 3 красных. Какова вероятность, что два вынутых шара будут одного цвета.

20. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся изношенные элементы.

21. Из n изделий, среди которых k бракованных, наудачу берется k изделий. Какова вероятность, что все они бракованные

22. В урне a белых и b черных шаров (a $¿2, b \geq 3$)Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность p того, что 2 из них будут белыми и 3 черными.

23. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятности событий -

- а: на кости выпало четное число очков
- б:на кости выпало не менее 5 очков
- с: на кости выпало не более 5 очков

Практическая работа 3. Вариационные ряды и их графическое изображение.

Цель: формирование основных понятий математической статистики.

Теоретическая часть:

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики явл

- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;
- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и *объем выборки* n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была *репрезентативной* (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$, где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_к$ называют вариантами, а $n_1, n_2, \ldots, n_к$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим *относительные частоты* $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом.

Пример 1:

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 0 , 5, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 1.

Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для этого [illegible] интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h, а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется *группированным статистическим рядом*.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот.

Этапы первичной обработки выборки:

1.Ранжирование опытных данных (расположение значений признака по убыванию или возрастанию).

2.Частотный анализ (построение статистического ряда, определение относительных частот).

3.Группировка (частотная табуляция выборки).

Задачи и упражнения:

1. Имеются следующие данные об успеваемости 20 студентов группы по статистике в летнюю сессию: 4, 4, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4. Постройте: ряд распределения студентов по баллам оценок; ряд распределения студентов пол уровню успеваемости, выделив в нем две группы студентов: неуспевающие и успевающие. Изобразите каждый из рядов графически.

2.Построить кривую и гистограмму суммы налоговых неуплат, зафиксированных по условным регионам страны, данные по которым приведены в таблице (в млн. руб.):

21	43	72	84
22	54	75	32
26	49	77	45
27	53	78	65
28	54	81	12
32	58	83	34
34	61	84	54
37	65	84	34
39	68	88	41

3.Дана исходная выборка по росту и весу студентов группы:

Рост	160	168	175	169	170	169	162	166	163	160	158	173	162	173	156
Вес	48	58	69	64	69	70	51	60	67	54	48	58	44	50	56

Определите объем выборки. Составьте ранжированный и вариационный ряды по каждому из признаков.

4.Построить гистограмму нагрузки на одного следователя по расследованным уголовным делам по данным таблицы:

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2001	2003
По линии МВД	63,2	49,6	41	31,5	32,3	32,4	37,9	34,2	36,2
По линии прокуратуры	17,2	16,8	15,5	15,1	16	17,7	18,2	18,3	19,7

5.Три варианта исходных данных таблицы ниже – результаты телефонных переговоров в минутах сотрудников трех отдельных служб в течение рабочего дня. Требуется составить интервальный ряд распределения.

№ выборки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Служба 1	1,9	2,6	3,1	3,3	2,1	2,0	4,7	0,9	2,8
Служба 2	6,9	1,1	3,6	1,0	7,0	2,1	8,7	1,0	8,0
Служба 3	4,7	6,8	3,8	3,1	1,8	7,1	9,2	8,1	4,0

6. Дана выборка 7,3,3,6,4,3,5,1,2,1,3. Построить вариационный ряд. Определить размах выборки.

Практическая работа 4. Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.

Цель: формирование основных понятий интервального оценивания и методов оценки характеристик генеральной совокупности по малой выборке.

Теоретическая часть:

При выборке малого объёма точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объёме выборки следует пользоваться интервальными оценками. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика $\Theta^{¿}$ служит оценкой неизвестного параметра Θ. Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что $\Theta^{¿}$ тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности $\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|$. Другими словами, если $\delta>0$ и $\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|<\delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка $\Theta^{¿}$ удовлетворяет неравенству $\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|<\delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по $\Theta^{¿}$ называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|<\delta$. Обычно надёжность оценки задаётся наперёд, причём в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|<\delta$, равна γ: $P\left[\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|<\delta\right]=\gamma$.

Заменив неравенство $\left|\Theta-\Theta^{¿}\right|<\delta$ равносильным ему двойным неравенством

$-\delta<\Theta-\Theta^{\text{¿}}<\delta$, или $\Theta^{\text{¿}}-\delta<\Theta<\Theta^{\text{¿}}+\delta$, имеем $P\left[\Theta^{\text{¿}}-\delta<\Theta<\Theta^{\text{¿}}+\delta\right]=\gamma$.

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $\left(\Theta^{\text{¿}}-\delta,\Theta^{\text{¿}}+\delta\right)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ , равна γ . Доверительным называют интервал $\left(\Theta^{\text{¿}}-\delta,\Theta^{\text{¿}}+\delta\right)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ .

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ .

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надёжностью γ .

Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы:

$$M(\bar{X})=a,\ \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Приняв во внимание, что по условию нам задана вероятность γ , получаем следующую формулу (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через $\bar{x}$)

$$P\left(\bar{x}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi_0(t)=\gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надёжностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a ; точность оценки $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Укажем ещё, что число *t* определяется из равенства $2\Phi_0(t)=\gamma$, или $\Phi_0(t)=\frac{\gamma}{2}$; по таблице функции Лапласа находят аргумент *t*, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Надёжность γ =0,95 указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключён; лишь в 5 % случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно воспользоваться результатами предыдущего параграфа, в котором σ предполагалось известным.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину $T=\frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n}}$, которая имеет распределение Стьюдента с k = n-1 степенями свободы; здесь $\bar{X}$ - выборочная средняя, S – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n – объём выборки.

Пользуясь распределением Стьюдента, находим:

$$P\left(\bar{X}-\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}<a<\bar{X}+\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$$

Значит, доверительный интервал $\left(\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$, покрывает неизвестный параметр a с надёжностью γ.

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве (то есть в генеральной совокупности) - распределена нормально. По выборке объёма n = 16 найдены выборочная средняя $\bar{x}$ =20,2 кг и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s=0,8 кг. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надёжностью 0,95.

Решение: Найдём t_γ. Пользуясь таблицей, по γ =0,95 и n = 16 находим t_γ =2,13.

Найдём доверительные границы:

$$\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}=20,2-\frac{2,13\cdot 0,8}{\sqrt{16}}=19,774\,кг,$$

$$\bar{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}=20,2+\frac{2,13\cdot 0,8}{\sqrt{16}}=20.626\,кг.$$

Итак, с надёжностью 0,95 неизвестный параметр a заключён в доверительном интервале 19,774< a <20,626 (кг).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s.

Доверительный интервал, покрывающий параметр σ с заданной надёжностью γ находят по следующей формуле:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)$$

Здесь параметр q определяют, пользуются таблицей приложения 2, а s находят по выборке.

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве – (то есть в генеральной совокупности) распределён нормально. По выборке объёма n=25 найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s=0,8 кг. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью 0,95.

Решение: По таблице по данным γ =0,95 и n=25 найдём q=0,32.

Искомый доверительный интервал таков:

$0{,}8\ (1 - 0{,}32) < \sigma < 0{,}8\ 1(1+0{,}32)$, или

$0{,}544 < \sigma < 1{,}056$ (кг).

Замечание. Если q>1, то неравенство примет вид

$0 < \sigma < s(1+q)$.

Задачи и упражнения:

Задача 1. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения, вычислить:

1) доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ;

2) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения для того же значения γ.

А) $\gamma = 0.999$

8.0 -1.1 13.5 10.0 2.4 4.1 20.0 12.4 13.4 4.8 7.8 0.0 10.9 13.7 6.6

Б) $\gamma = 0.95$

31.6 34.9 46.9 42.8 36.0 26.2 28.6 48.5 27.7 45.8 32.0 41.2 39.8 33.1 36.3 53.5 43.9 35.8 32.9 34.4

В) $\gamma = 0.999$

25.4 31.1 13.2 23.0 19.1 26.5 23.2 29.2 24.8 26.6 29.3 21.4 28.2 38.2 19.9 30.6 24.5 23.2.

Задача 2. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением s, вычислить доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ.

$s = 7$, $\gamma = 0.99$

13.4 8.6 22.1 2.3 14.6 13.0 11.1 29.4 23.3 1.7 13.6 2.1 21.6 6.1 8.6 6.6 16.0 11.6 16.6 1.6 15.8 18.9 10.6 11.9 0.1 10.7 3.8 -3.6 15.4 7.9
4.5 17.7 10.8 19.6 18.5 15.5 9.3 21.7 6.6 10.5 10.4 8.2 16.0 22.6 20.5 11.6 23.2 23.0 9.5 11.3 14.9 19.9 13.4 13.9 19.5 19.8 21.0 3.2 14.0 19.1
17.9 8.6 11.2 16.2 13.9 16.2 17.1 7.7 12.5 2.7 16.5 20.2 15.5 14.5 5.6 16.5 12.3 9.9 11.9 17.6 6.6 20.3 9.7 13.2 17.4 5.1 13.0 23.3 6.8 9.8
15.5 16.2 18.4 9.2 5.7 10.9 8.8 7.4 16.2 9.9

5.СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная л...

Гусак, А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 287 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28244.html

Дополнительная литература:

Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. — Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13115.html

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов направления подготовки 09.03.02 **Информационные системы и технологии** направленность (профиль) **Информационные системы и технологии обработки цифрового контента**

Пятигорск, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Алгебра» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код, формулировка компетенции	**Код, формулировка индикатора**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов**
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-1**$_{\text{ОПК-1}}$ Знаком с основами математики, физики, вычислительной техники и программирования. **ИД-2**$_{\text{ОПК-1}}$ Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования. **ИД-3**$_{\text{ОПК-1}}$ Проводит теоретическое и экспериментальное исследование объектов профессиональной деятельности	Применяет естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
6 семестр					
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	0,54	0,06	0,6
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	1,08	0,12	1,2
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-12	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	84,78	9,42	94,2
		Итого за 6 семестр	**86,4**	**9,6**	**96**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

Успеваемость студентов по дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

Гусак, А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 287 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28244.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. — Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13115.html