Пример 10. Из матрицы A(6×6) выделить минор, который образуется в результате вычеркивания из этой матрицы нулевой строчки и третьего столбца.

Решение. Решение задачи можно свести к соединению двух подматриц, выделенных из матрицы A, как это показано на рис. 18.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A,1,5,0,2),\mathrm{submatrix}(A,1,5,4,5))$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Рис. 18. Выделение минора из заданной матрицы

Использование матриц специального вида для выполнения матричных операций в системе MathCAD

Известно, что в результате умножении матрицы на вектор получается вектор. Причем, каждый i-й элемент этого вектора-результата представляет собой сумму попарных произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы на элементы вектора-сомножителя. Очевидно, если в векторе, на который умножается матрица, все элементы равны нулю, а один элемент равен единице, то результатом такого произведения будет число, соответствующее тому элементу i-й строки матрицы, где векторным сомножителем будет единица. Такой вывод можно использовать для выделения (формирования) из матрицы нужного столбца.

Пример 11. Дана матрица: A(4×4). Требуется получить из этой матрицу два вектора. Первый вектор должен совпадать с 0-ым столбцом матрицы A, а второй – с 3-м столбцом матрицы A.

Решение. При создании новых векторов сформируем два вспомогательных вектора: вектор B1 – с единичным значением в строке с номером 0, а второй вектор B4 – с единичным значением в строке с номером 3. Тогда для получения векторов в соответствии с условием задачи достаточно умножить матрицу A справа на векторы B1 и B2, как это показано на рис. 19.

$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 11 & 1 & 0 \\ 3 & 34 & 0 & 2 \\ 9 & 7 & 4 & 44 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$A \cdot B1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad A \cdot B4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ 44 \end{pmatrix}$

Рис. 19. Выделение векторных значений из заданной матрицы

Аналогичным образом можно получить вектор-строку из матрицы. Для этого достаточно сформировать вспомогательный вектор-строку, у которой все компоненты равны нулю, а одна компонента, номер которой соответствует номеру выделяемой строки из матрицы, равна единице. Если этот вектор умножить слева на матрицу, то в результате будет получена нужная строка.

Пример 12. Дана матрица: A(4×4). Требуется выделить из матрицы первую строку по порядку (с номером 0).

Решение. Сначала требуется подготовить вспомогательный вектор-строку, а потом умножить эту строку слева на матрицу А. Вектор-строку можно получить из предыдущего примера транспонированием вектора-столбца В1.

Такой прием можно использовать для перестановки строк и столбцов матрицы, только для этого потребуется уже вспомогательная матрица, состоящая из векторов-столбцов (векторов-строк), место единичных элементы которых соответствуют тому порядку, который нужно иметь в результате преобразования матрицы.

Пример 13. Дана матрица: A(4×4). Требуется переставить в матрице строки с номерами 0 и 1.

Решение. Для преобразования исходной матрицы требуется подготовить вспомогательную матрицу. Во вспомогательной матрице местоположение единиц в строках должно соответствовать нужному порядку для расположения строк в новой матрице. После этого решение можно получить простым перемножением матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 34 & 0 & 2 \\ 9 & 7 & 4 & 44 \end{pmatrix}$$

Пример 14. Дана матрица: A(4×4). Требуется переставить в матрице столбцы с номерами 0 и 1.

Решение. Для преобразования исходной матрицы требуется подготовить вспомогательную матрицу. Во вспомогательной матрице местоположение единиц в столбцах соответствуют нужному порядку для выбора их в новую матрицу. После этого решение можно получить простым перемножением матриц:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 8 \\ 11 & 4 & 1 & 0 \\ 34 & 3 & 0 & 2 \\ 7 & 9 & 4 & 44 \end{pmatrix}$$

Рассуждая таким образом, можно с помощью вспомогательного вектора с единичными компонентами получить вектор, компоненты которого будут равны сумме строк (столбцов) матрицы, а также суммы отдельно выделенного столбика (строчки).

Пример 15. Дана матрица: A(4×4). Требуется найти сумму элементов в столбце с номером 3.

Решение. Для решения задачи требуется подготовить вспомогательный вектор-строку из единичных элементов и выполнить умножение:

$$E := (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)$$

$$E \cdot A \cdot B4 = (54)$$

Пример 16. Дана матрица: A(4×4). Требуется получить вектора, элементы которого будут представлять суммы элементов в столбцах матрицы.

Решение. Для решения требуется подготовить вспомогательный вектор-строку из единичных элементов и выполнить умножение:

$$E := (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)$$

$$E \cdot A = (17 \;\; 57 \;\; 12 \;\; 54)$$

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Как поменять местами строки матрицы?
2. Как вычислить построчные суммы матрицы?
3. Как изменить свойства уже созданной строки текста?
4. Как создать новый текстовый стиль?
5. Как загрузить дополнительный шрифт?

6. Как создать вертикальную строку текста?

<u>Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:</u>

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 7. Построение трехмерного графика зависимости тока в цепи R, L, C от R и X_L

<u>Теоретическая часть.</u>

Наряду с двухмерными графиками MATHCAD позволяет создавать и трехмерные графики. Для этого необходимо создать матрицу, содержащую значения функции двух переменных, и показать ее в виде поверхности в трехмерном пространстве.

Используем полученные ранее навыки построения и редактирования графиков для решения задач электротехники.

<u>Оборудование и материалы.</u>

Персональный компьютер, программа MathCAD.

<u>Указания по технике безопасности:</u>

Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

<u>Задания</u>

Пусть, например, в схеме, показанной на рис. 1, изменяются два параметра: индуктивное сопротивление XL и активное сопротивление R. Величина емкости конденсатора С и емкостное сопротивление Достаются постоянными. Постоянным остается и внутреннее активное сопротивление индуктивной катушки г. Полное сопротивление цепи переменному току Z = y](R + r)~ + (XC - XL)2 и ток в цепи I = U / Z являются функциями этих двух параметров.

Пусть питающее напряжение U - 10 В, Хс = 1 Ом, внутреннее постоянное активное сопротивление индуктивной катушки г = 0,4 Ом.

Активное сопротивление R изменяется от нуля до 0,4 Ом с шагом 0,02 Ом. Индуктивное сопротивление XL изменяется от нуля до 2 Ом с шагом 0,1 Ом.

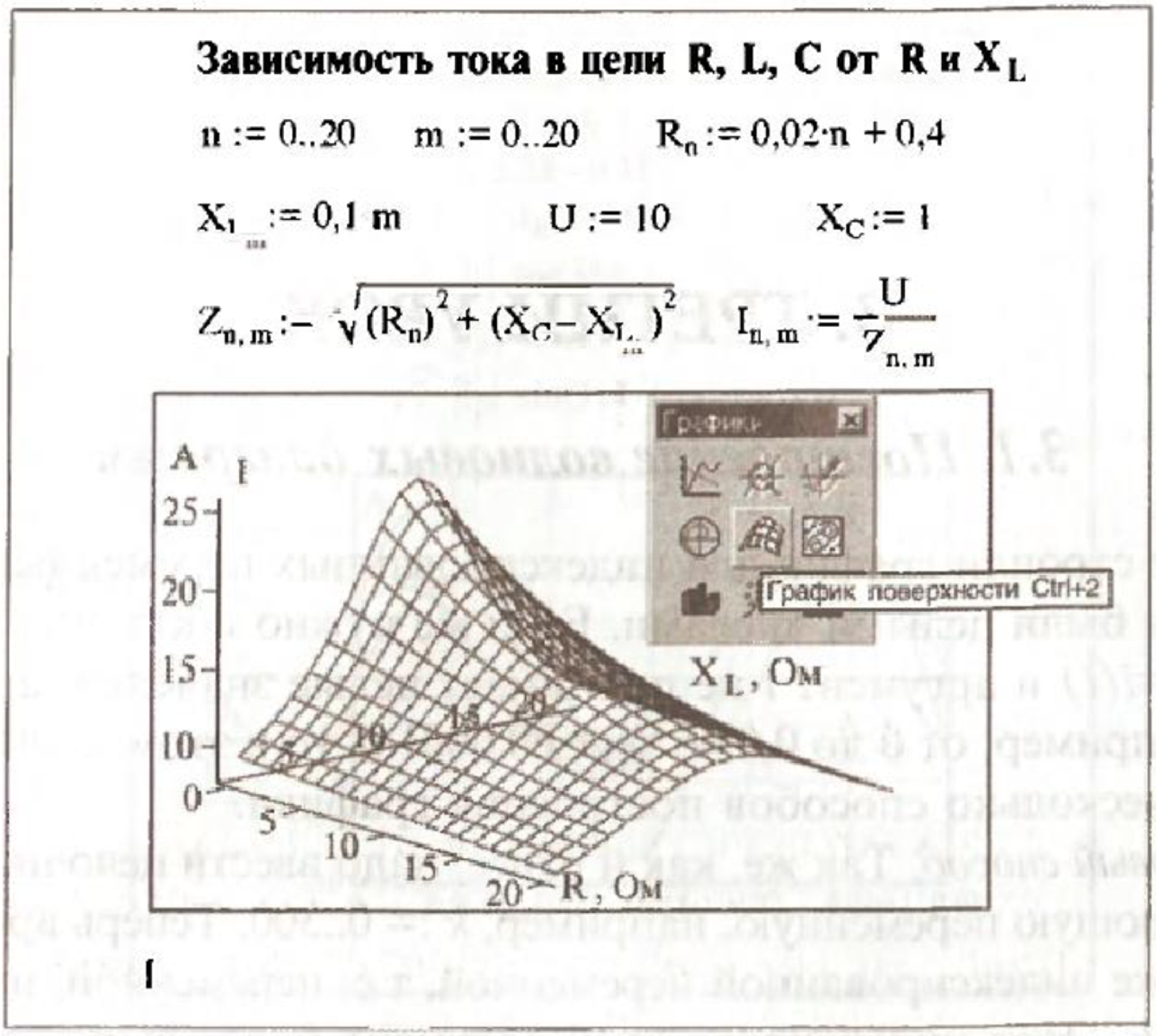


Рисунок 1. Трехмерный график с резонансными кривыми

Индексы элементов массивов R, XL, Z и I должны быть целыми числами. Поэтому определим целые дискретные аргументы пити выразим переменные R и XL как индексированные переменные Rn и XL (см. рис1). Из этого рисунка видно, что дискретные аргументы пит изменяются от нуля до 20 с шагом, равным единице.

После того как будут определены значения функций Z и / от аргументов пит, можно строить график. Для этого надо нажать клавиши [Ctrl]+I2] или выбрать в меню Вставка (Insert) — График (Graph) — Поверхности (Surface Plot). Можно также воспользоваться кнопкой Инструменты графиков (Graph Toolbar) и в информационном окне (см. рис1) выбрать среднюю кнопку График поверхности (Surface Plot). Введите одним из указанных способов шаблон трехмерного графика и в поле ввода (в черном прямоугольничке) напечатайте имя функции, т.е. I.

Вы увидите наглядное представление матрицы. По горизонтальным осям откладываются аргументы п и т, а по вертикальной оси — ток I. Поместите указатель мыши на график поверхности и попробуйте перемещать мышь с нажатой левой кнопкой. Вы увидите, как поворачивается график.

Подберите для него наиболее подходящий ракурс.

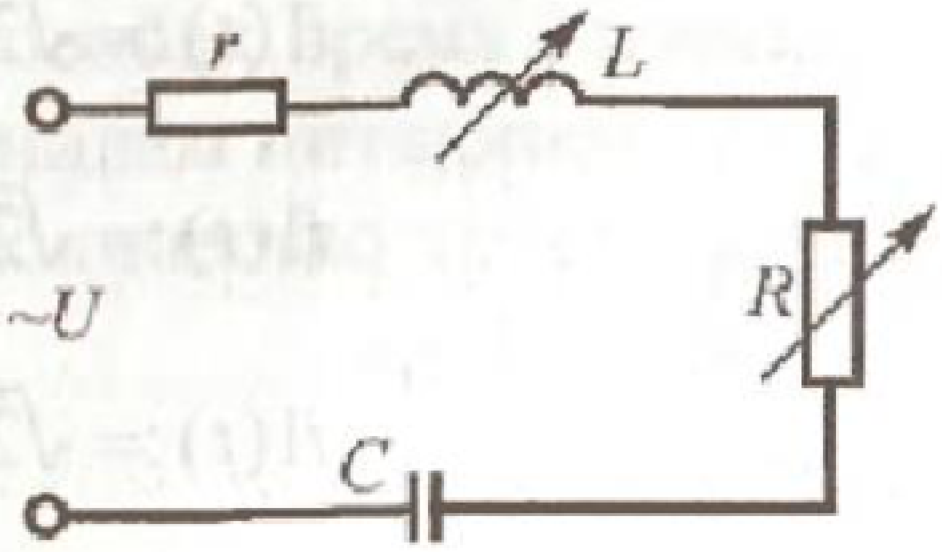


Рис. 2.15. Электрическая цепь для исследования явления резонанса напряжений

Контрольные вопросы

1. Команды редактирования векторов и матриц в среде MathCAD.
2. Для чего применяются шаблоны?
3. Как создать документ на основе шаблона?
4. Как создать новый шаблон?
5. Трехмерные графики.
6. Создание матрицы, содержащей значения функции двух переменных, и отображение ее в виде поверхности в трехмерном пространстве.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 8. Решение уравнений

Цель работы:

Научиться создавать блоки, использовать готовые библиотеки блоков и разрабатывать собственные библиотеки.

Теоретическая часть.

Огромное количество задач вычислительной математики связано с решением нелинейных алгебраических уравнений, а также систем таких уравнений. При этом необходимость решения нелинейных уравнений возникает зачастую на промежуточных шагах, при реализации фрагментов более сложных алгоритмов (к примеру, при расчетах дифференциальных уравнений при помощи разностных схем и т. п.). Численное решение нелинейного уравнения Алгоритм приближенного решения уравнения f(x)=0 состоит из двух этапов:

1. нахождения промежутка, содержащего корень уравнения (или начальных приближений для корня);

2. получения приближенного решения с заданной точностью с помощью функции root. Если после многих итераций MathCAD не находит подходящего приближения, то появится сообщение `Can't converge to a solution.` (отсутствует сходимость).

Оборудование и материалы.

Персональный компьютер, программа MathCAD.

Указания по технике безопасности:

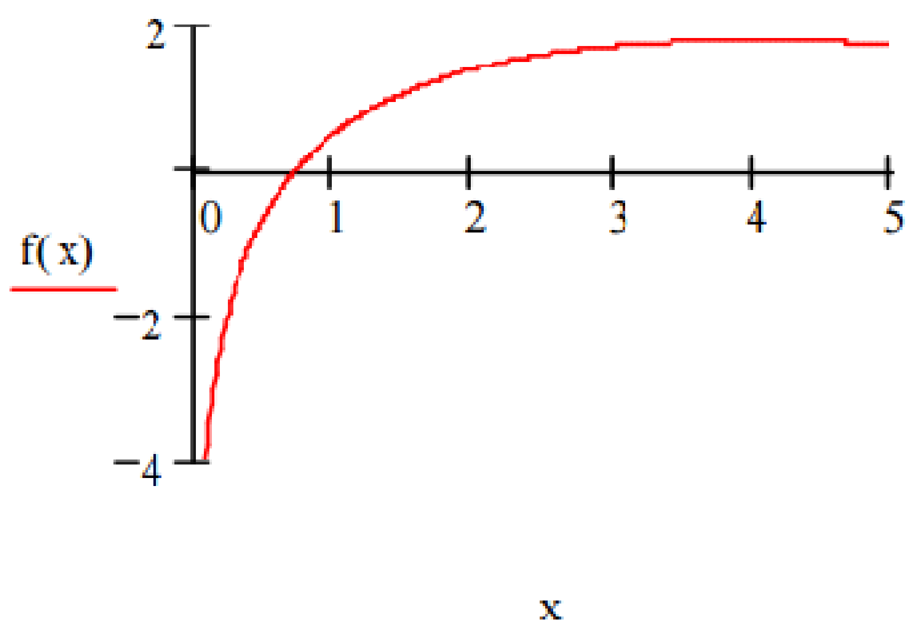
Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

Задания

Пример 1. Решение уравнения с помощью функции ROOT

Пример 1. Решение уравнения с помощью функции ROOT

$f(x) := 2\cdot\ln(x) - \frac{x}{2} + 1$ Задаем функцию f(x)



Строим график и находим начальное приближение

$x := 0.7$

$\mathrm{root}(f(x), x) = 0.728$

Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

• уравнение не имеет корней;

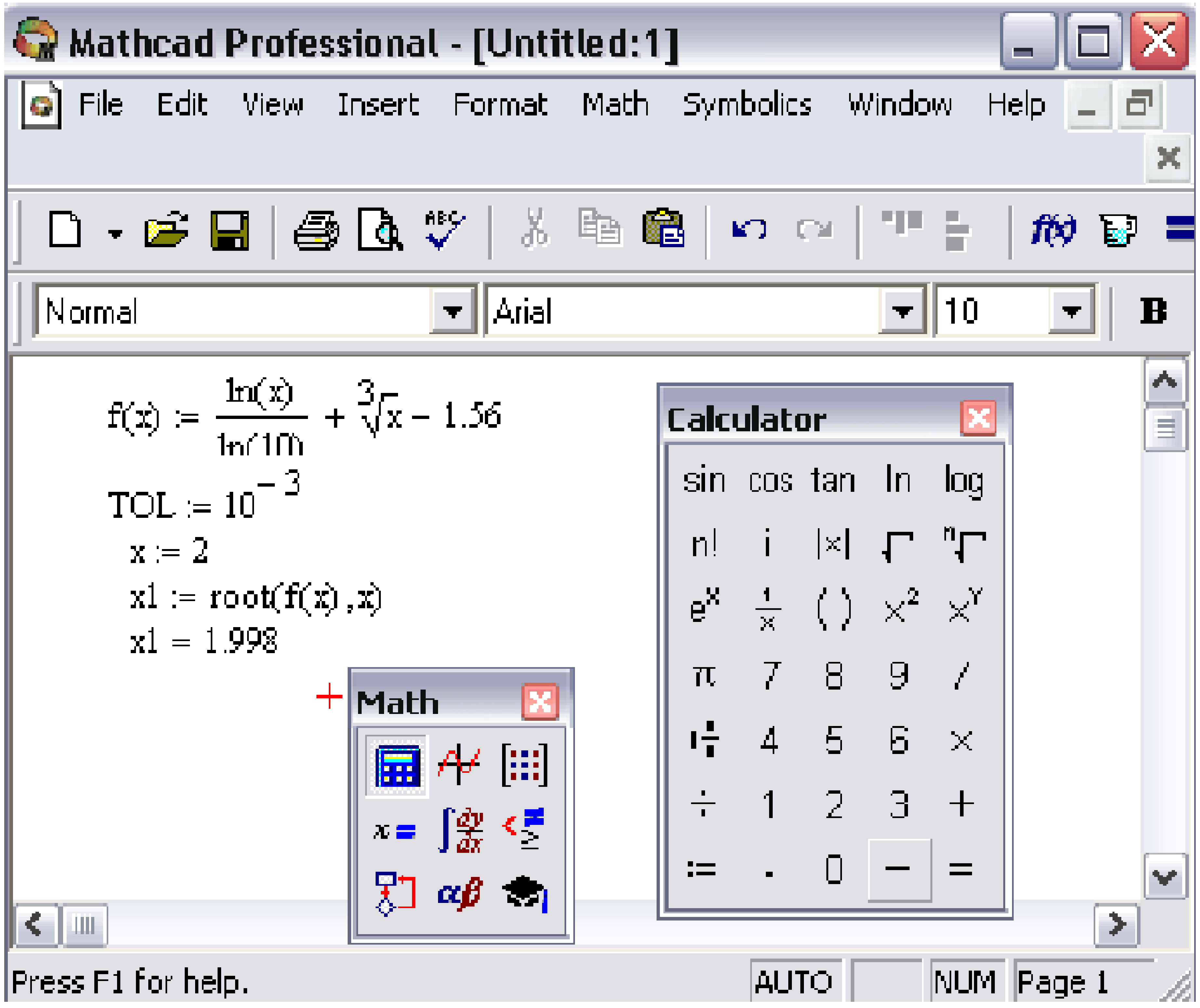
• корни уравнения расположены далеко от начального приближения;

• выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, исследуйте график f(x). Он поможет выяснить наличие корней уравнения f(x) = 0 и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет root сходиться.

Пример:

Нахожде… уравнения:



1. Определите корень нелинейного уравнения:

$$X+0{,}323-\frac{-e^{x}}{2}=0$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, если $x_0 = 0{,}8$.

2. Определите корень нелинейного уравнения:

$$x \cdot e^{x} = 4.28$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, если $x_0 = 1.2$.

3. Определите корень нелинейного уравнения:

$$x + x^{2} + \sqrt{x} = 4.75$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если $x_0 = 1.5$.

4. Определите корень нелинейного уравнения:

$$x - \sqrt[3]{x} = 0.109$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, если $x_0 = 1.1$.

5. Определите корень нелинейного уравнения:

$$x^{2} + x = 3.3$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, если $x_0 = 1.4$.

Для нахождения корней выражения, имеющего вид v0+v1x+… vn-1x n-1 +vnx n , лучше использовать функцию polyroots, нежели root. В отличие от функции root, функция polyroots не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

Функция Polyroots(v) - возвращает корни полинома степени n. Коэффициенты полинома находятся в векторе v длины n + 1. Возвращает вектор длины n, состоящий из корней полинома.

Пример 2. Нахождение корней полинома

$0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5$

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \\ .75 \end{pmatrix}$$

Для создания вектора v:

1. Поставьте курсор на переменную x в выражении $0.75 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 5$
2. Выполните команду **Символы → Коэффициенты полинома**
3. Выполните команду **Правка → Вырезать**
4. Напечатайте v:= и выполните команду **Правка → Вставить**

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -3.542 \\ 0.651 \\ 2.892 \end{pmatrix}$$

Решение систем уравнений Решение систем уравнений матричным методом Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x1, x2, …, xn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде:

Ax = b, где:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Если det A ≠ 0 то система или эквивалентное ей матричное уравнение имеет единственное решение. Решение систем уравнений с помощью функции Lsolve Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции lsolve. Функция lsolve(A, b) - возвращает вектор решения x такой, что Ax = b.

Пример 3. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

Запишем в матричном виде:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4$$

$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x := \text{lsolve}(A, b)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему уравнений приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей. В матричной записи это означает, что сначала (прямой ход метода Гаусса) элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, а затем (обратный ход метода Гаусса) эту ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица. Последний, (n + 1) столбец этой матрицы содержит решение системы.

В MathCAD прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция rref(A).

Пример 4. Решение системы уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{ORIGIN} := 1$$

Формирование расширенной матрицы системы:

$$A1 := \mathrm{augment}(A, b) \qquad A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Приведение расширенной матрицы к ступенчатому виду (прямой и обратный ходы метода Гаусса

$$A2 := \mathrm{rref}(A1) \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{submatrix}(A2, 1, 4, 5, 5) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение систем уравнений с помощью функций Find или Minner

Для решения системы уравнений с помощью функции Find необходимо выполнить следующее:

1. Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений. MathCAD решает систему с помощью итерационных методов;

2. Напечатать ключевое слово Given. Оно указывает MathCAD, что далее следует система уравнений;

3. Введите уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте [Ctrl]= для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов , ≥ и ≤;

4. Введите любое выражение, которое включает функцию Find, например: x:= Find(x, y).

Ключевое слово Given, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое - либо выражение, содержащее функцию Find, называют **блоком решения уравнений**.

Пример 5. Решение системы уравнений с помощью функции Find

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0 \quad x4 := 0$ Начальные приближения

Given

$$x1 + 2x2 + 3x3 + 4x4 = 30$$

$$-x1 + 2 \cdot x2 - 3 \cdot x3 + 4x4 = 10$$

$$x2 - x3 + x4 = 3$$

$$x1 + x2 + x3 + x4 = 10$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3, x4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Функция Minner очень похожа на функцию Find (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, Minner возвращает это приближение. Функция Find в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции Minner такие же, как и функции Find. Функция Minerr(x1, x2, . . .) - возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных

Символьное решение уравнений

Имеются некоторые задачи, для которых возможности MathCAD позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде. Решение уравнений в символьном виде позволяет найти точные или приближенные корни уравнения:

• если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Поэтому вместо того чтобы решать уравнение для каждого нового значения параметра, можно просто заменять его значение в найденном символьном решении;

• если нужно найти все комплексные корни полинома со степенью меньше или равной 4, символьное решение даст их точные значения в одном векторе или в аналитическом или цифровом виде.

Команда Символы → Переменные → Вычислить позволяет решить уравнение относительно некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения.

Чтобы решить уравнение символьно, необходимо:

1. Напечатать выражение (для ввода знака равенства используйте комбинацию клавиш Ctrl + =);

2. Выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, щелкнув на ней мышью;

3. Выбрать пункт меню Символы → Переменные → Вычислить. Нет необходимости приравнивать выражение нулю. Если MathCAD не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять выражение нулю.

Чтобы решить ***систему уравнений в символьном виде***, необходимо выполнить следующее:

1. Напечатать ключевое слово Given;

2. Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова Given. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется Ctrl + =;

3. Напечатать функцию Find, соответствующую системе уравнений;

4. Нажать Ctrl +. (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). MathCAD отобразит символьный знак равенства →;

5. Щелкнуть мышью на функции Find.

Пример 6. Решение системы уравнений в символьном виде

Given

$$x + 2\cdot\pi\cdot y = a$$

$$4\cdot x + y = b$$

$$\text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot\pi\cdot b - a}{-1 + 8\cdot\pi} \\ \dfrac{-(-4\cdot a + b)}{-1 + 8\cdot\pi} \end{bmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Решение уравнения с помощью функции ROOT.
2. Нахождение корня нелинейного уравнения.
3. Нахождение корней полинома.
4. Решение системы уравнений методом Гаусса.
5. Решение систем уравнений с помощью функций Find или Minner.
6. Символьное решение уравнений.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 9. Решение дифференциальных уравнений.

Цель работы:

Научиться ставить линейные, радиальные, диаметральные размеры, настраивать размерные линии и размерный текст, наносить штриховку на чертеже.

Теоретическая часть.

В систему MathCAD введена возможность решения дифференциальных уравнений и систем с такими уравнениями в численном виде. Эту возможность трудно переоценить, так как многие серьезные научно-технические задачи (особенно относящиеся к анализу динамических систем и к их математическому моделированию) базируются на численных методах решения систем дифференциальных уравнений.

Нелинейные дифференциальные уравнения и системы с такими уравнениями, как правило, не имеют аналитических методов решения, и здесь особенно важна возможность их решения численными методами. В большинстве случаев желательно представление решений в графическом виде, что и позволяет MathCAD.

Для решения дифференциальных уравнений (систем) различного порядка и различными методами в MathCAD введены 13 встроенных функций: rkadapt, Rkadapt, rkfixed, Bulstoer, bulstoer, bvalfit, multigird, relax, sbval, Stiffb, stiffb, Stiffr и stiffr. Назначение и описание аргументов этих функций даны в лекции.

В функцию rkfixed заложен широко распространенный метод решения дифференциальных уравнений – метод Рунге-Кутта. Несмотря на то, что это не самый быстрый метод, функция rkfixed почти всегда справляется с поставленной задачей. Однако есть случаи, когда лучше использовать более сложные методы. Эти случаи попадают под три широкие категории: система может быть жесткой (Stiffb, Stiffr), функции системы могут гладкими (Bulstoer) или плавными (Rkadap). Нередко приходится пробовать несколько методов на одном дифференциальном уравнении (на одной системе), чтобы определить, какой метод лучше. Как известно, что решение гладкое, используется функция Bulstoer, куда заложен метод Бурлиш-Штера, а не Рунге-Кутта, используемый функцией rkfixed. В этом случае решение будет точнее. Можно решить задачу более точно (более быстро), если уменьшить шаг там, где производная меняется быстро, и увеличить шаг там, где она ведет более спокойно. Для этого предусмотрена функция Rkadap. Но, несмотря на то что она при решении дифференциального уравнения использует непостоянный шаг, функция Rkadap представит ответ для точек, находящихся на одинаковом расстоянии, заданном пользователем. Система дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме y=A·x, где A – почти вырожденная матрица, называется жесткой. При решении жестких систем следует использовать одну из двух встроенных функций, разработанных специально для таких случаев: Stiffb и Stiffr. Они используют метод Булирш-Штера (b) или Розен-брока (r). Функции, начинающиеся со строчной буквы, дают решения только для конечной точки. Для решения двухточечных краевых задач предназначены функции: sbval и bvalfit. Для решения дифференциальных уравнений Пуассона (в частных производных второго порядка) и уравнений Лапласа в систему введены следующие функции: bvalfit, multigird, relax, sbval.

<u>Оборудование и материалы.</u>

Персональный компьютер, программа MathCAD.

<u>Указания по технике безопасности:</u>

Соответств[illegible]асности по работе с компьютерной техникой.

<u>Задания</u>

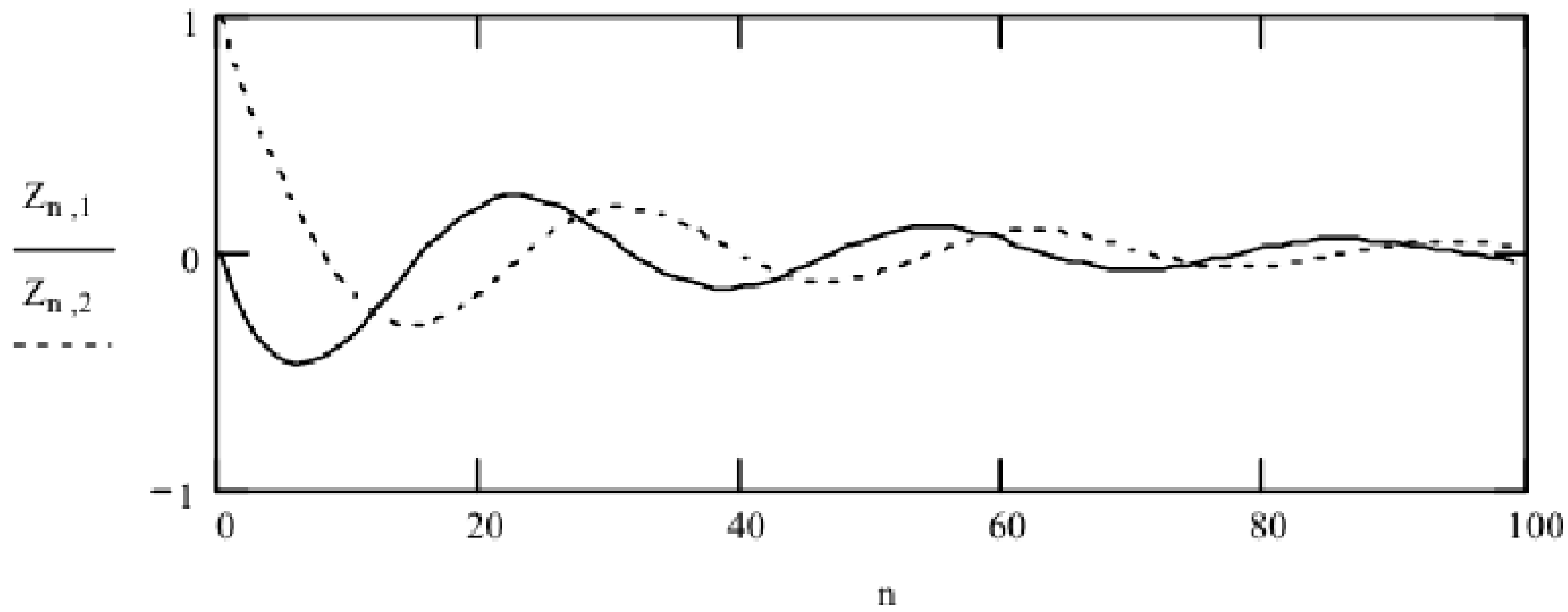
Решить обыкновенное дифференциальной уравнение

Решение системы из двух дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта с фиксированным шагом

$\mu := -0.1$ Параметр системы $X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Вектор начальных условий

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} \mu \cdot X_0 - X_1 - \left[(X_0)^2 + (X_1)^2 \right] \cdot X_0 \\ \mu \cdot X_1 + X_0 - \left[(X_0)^2 + (X_1)^2 \right] \cdot X_1 \end{bmatrix}$$ Система нелинейных дифференциальных уравнений

$Z := \mathrm{rkfixed}(X, 0, 20, 100, D)$ $n := 0..99$ Задание решения



Задание к работе: Решите на отрезке $[x_0, x_N]$ задачу Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ методом Рунге-Кутты с постоянным шагом. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h, 2h и h/2. Значение $x_N > x_0$ выберите самостоятельно.

Варианты индивидуальных заданий

№	$F(x,y,y')=0$	***Начальное условие***
1	$(e^x+1)dy+e^x dx=0$	$y(0)=0.5$
2	$y\ln y+xy'=0$	$y(1)=e$
3	$\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0$	$y(0)=-tg2$
4	$3e^x tgydx+\dfrac{2-e^x}{\cos^2 x}dx=0$	$y(1)=arctg(2-e)$
5	$(1+e^x)yy'=e^x$	$y(0)=1$
6	$y'\sin x=y\ln y$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$
7	$\dfrac{xdx}{1+y}-\dfrac{ydy}{1+x}=0$	$y(1)=1$
8	$(1+y^2)dx=xdy$	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$
9	$y'\sin x=\sin y$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$
10	$3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$	$y(0)=1$

Решить задачу Коши $y_1'=f_1(x,y_1,y_2)$, $y'_2=f_2(x,y_1,y_2)$, $y_1(a)=y_{1,0}$, $y_2(a)=y_{2,0}$ на отрезке [a,b] методом Рунге-Кутта с постоянным шагом h=0.1. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h, 2h и h/2.

Варианты индивидуальных заданий

№	$f_1(x,y_1,y_2)$	$f_2(x,y_1,y_2)$	$y_1(a)$	$y_2(a)$	a	b
1	$x+y_1$	$(y_1-y_2)^2$	0	1	-1	1
2	$\sin y_2$	$\cos y_1$	0.5	-0.5	-1	3
3	$x\cos(y_1+y_2)$	$\sin(y_1-y_2)$	-0.6	2	2	5
4	$\sin y_1\cos^2 y_2$	$\cos y_1\cos y_2$	0	0	-1	3
5	$\cos(y_1y_2)$	$\sin(y_1+y_2)$	0	0	0	2
6	$y_2\ln x$	y_1+y_2	-2	-1	1	4
7	$2y_1/y_2$	$2y_1-y_2$	1	1	1	3
8	y_1+y_2	$1/(1+y_1+y_2)$	0	0	0	4
9	$arctg(xy_2)$	$\sin y_1$	0	0	-2	1
10	$\sin(x^2+2y_2)$	$\cos(xy_1)$	0	0	0	4

Контрольные вопросы

1. Решение дифференциальных уравнений (систем) различного порядка и различными методами в MathCAD
2. Встроенная функция rkadapt, ее назначение, особенности, синтаксис.
3. Встроенная функция Rkadapt, ее назначение, особенности, синтаксис.
4. Встроенная функция rkfixed, ее назначение, особенности, синтаксис.
5. Встроенная функция Bulstoer, ее назначение, особенности, синтаксис.
6. Встроенная функция bulstoer, ее назначение, особенности, синтаксис.
7. Встроенная функция bvalfit, ее назначение, особенности, синтаксис.
8. Встроенная функция multigird, ее назначение, особенности, синтаксис.
9. Встроенная функция relax, ее назначение, особенности, синтаксис.
10. Встроенная функция sbval, ее назначение, особенности, синтаксис.
11. Встроенная функция Stiffb, ее назначение, особенности, синтаксис.
12. Встроенная функция stiffb, ее назначение, особенности, синтаксис.
13. Встроенная функция Stiffr, ее назначение, особенности, синтаксис.
14. Встроенная функция stiffr, ее назначение, особенности, синтаксис.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 10. Символьные вычисления

Цель работы:

Научиться вводить трехмерные координаты объектов, использовать фильтры точек. Переключать режимы трехмерного отображения, настраивать визуальные стили.

Теоретическая часть.

Символьный знак равенства позволяет Mathcad выйти за рамки численного вычисления выражений. Можно подумать, что это обычный знак =. В отличие от обычного знака равенства, который всегда возвращает число, символьный знак равенства может возвращать выражение.

Чтобы иметь возможность использовать символьный знак равенства, требуется Mathcad PLUS. Если это так, упростить выражение можно следующим образом:

- Удостоверьтесь, что команда **Автоматический режим** в меню **Математика** помечена, в противном случае сделайте это из меню.
- Удостоверьтесь, что команда **Использовать символику** в меню **Математика** помечена, в противном случае сделайте это из меню. Обратите

внимание, что эта команда написана серым, пока не установлен **Автоматический режим** из меню **Математика**.

- Введите выражение, которое нужно упростить.
- Нажмите **[Ctrl]**. (клавишу CTRL, сопровождаемую точкой). Mathcad отобразит стрелку “®”.
- Щёлкните мышью вне выражения. Mathcad отобразит упрощенную версию первоначального выражения. Если выражение не может быть упрощено, Mathcad просто повторит его справа от стрелки.

Символьный знак равенства является оператором, подобным любому оператору Mathcad. Когда делаются изменения где-либо выше или левее от него, Mathcad модифицирует результат. Символ равенства знает предварительно определенные функции и переменные и использует их везде, где необходимо. Можно предписать символу равенства игнорировать предшествующие определения функций и переменных, используя ключевое слово assume, как показано на Рисунке 4.

Рисунок 2 показывает некоторые примеры использования этого оператора. Обратите внимание, что ®применяется только ко всему выражению. Нельзя, например, применить ® ни к части выражения, ни к результату предыдущего действия ®.

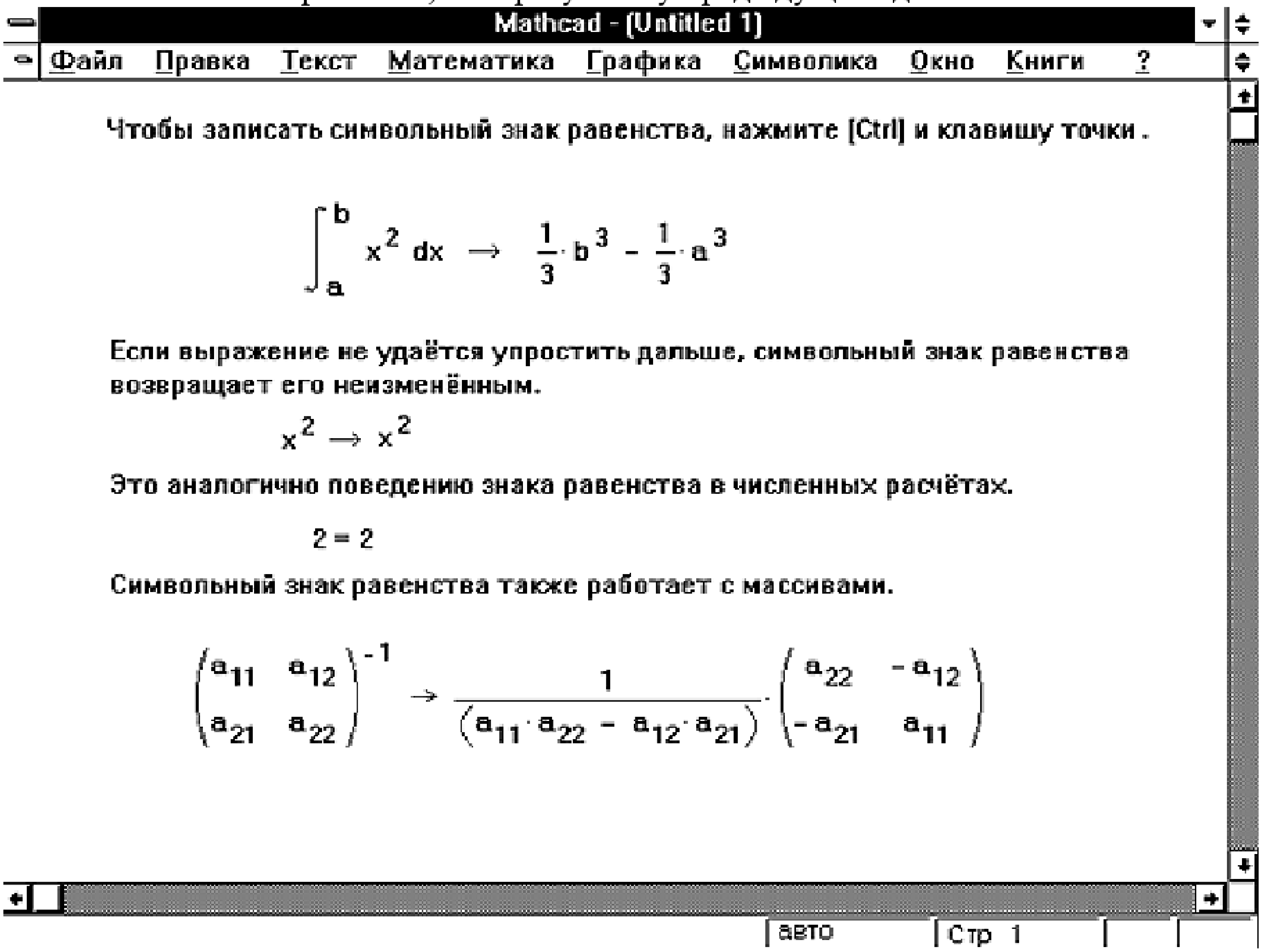


Рисунок 2: Использование символьного знака равенства.

Настройка символьного знака равенства

Символ ® берет выражение с левой стороны и помещает его упрощенную версию с правой стороны. По умолчанию эта операция упрощает левую сторону точно так, как это делает команда **Вычислить ⇒ Вычислить в символах** из меню **Символика**.

Конечно, что означает упростить — остаётся вопросом. До определённой степени можно управлять способом, которым оператор ® трансформирует выражение, помещая одно из ключевых слов перед выражением, содержащим ®. Для более всестороннего контроля над символьными преобразованиями нужно использовать меню **Символика**.

Ключевое слово	Функция

symplify	Упрощает выражение, выполняя арифметические преобразования, сокращая общие множители и используя основные тождества для тригонометрических и обратных функций.
expand	Разлагает все степени и произведения сумм в выражении.
series	Разлагает выражение от одной или нескольких переменных в окрестности определенной точки. По умолчанию разложение имеет вид полинома шестого порядка.
factor	Разлагает на множители выбранное выражение, если всё выражение может быть записано в виде произведения сомножителей.
assume	Предписывает Mathcad рассматривать переменную, которая следует после этой команды, в качестве неопределенной переменной, даже если ей присвоено определенное значение. Кроме этого, используется для определения ограничений, используемых для вычисления выражения.
complex	Предписывает Mathcad выполнить символьное преобразование в комплексной области. Результат будет обычно в форме $a + \mathrm{i} \cdot b$.
float	Предписывает Mathcad отображать число в формате с плавающей запятой всякий раз, когда это возможно.
literally	Запрещает символьному процессору пытаться оптимизировать любое последующее выражение.

Ключевые слова чувствительны к регистру и поэтому должны печататься точно так, как показано. Зато они нечувствительны к шрифту.

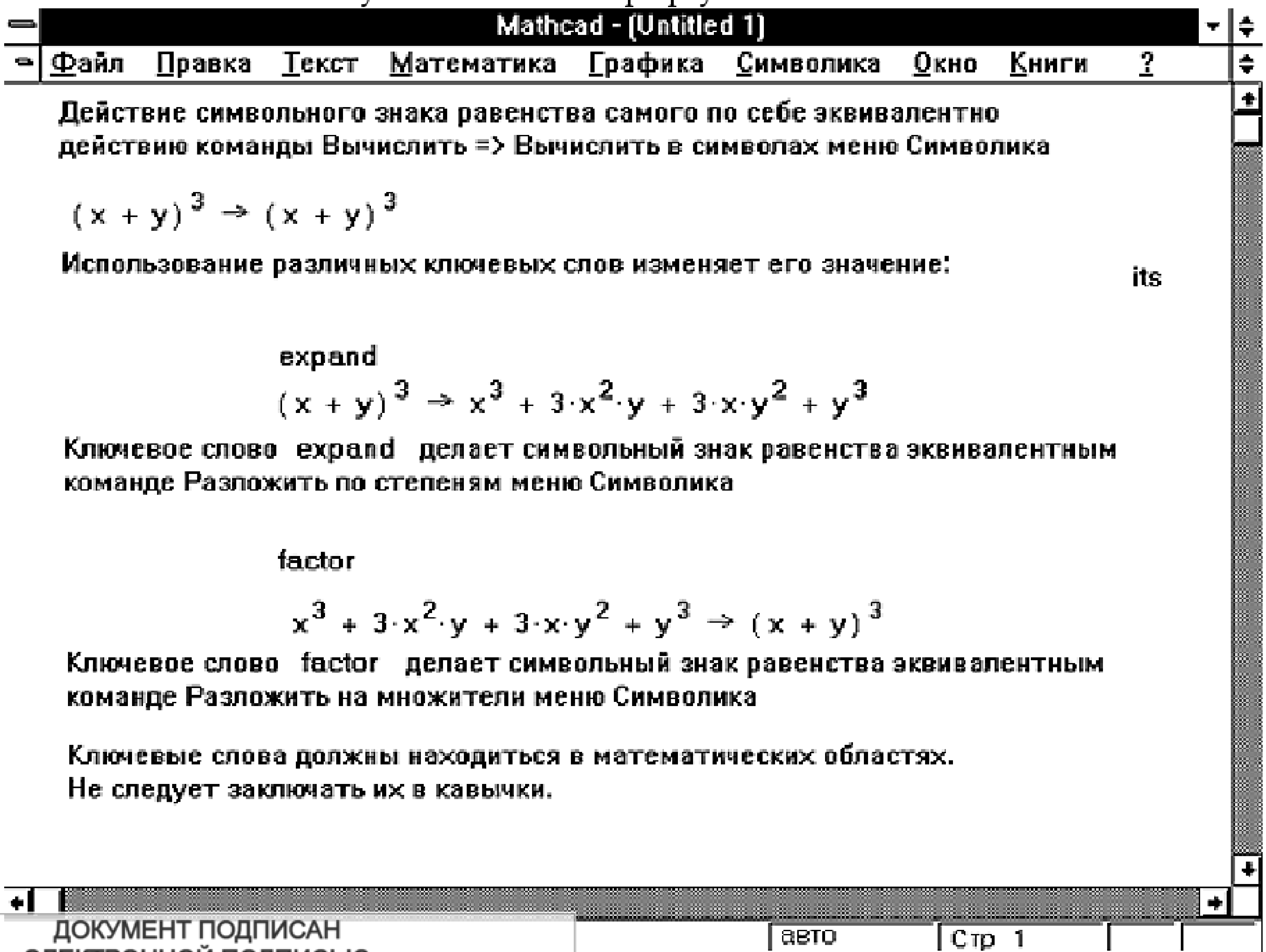


Рисунок 3. Использование ключевых слов с символьным знаком равенства.

Рисунок 3 показывает некоторые примеры использования этих ключевых слов. Заметьте, что ключевое слово действует только до следующего символа ®. Когда символьный знак равенства используется для преобразования выражения, Mathcad просматривает все переменные и функции, проверяя, были ли они ранее определены в рабочем документе. Если Mathcad находит определения, он их использует. Любые другие переменные и функции участвуют в преобразовании в виде символов. Есть три исключения из этого правила, иллюстрируемые на Рисунке 4. При преобразовании выражения, использующего ранее определенные переменные и функции, Mathcad игнорирует предшествующие определения, если:

- переменная определена как число, содержащее десятичную точку;
- ключевое слово **assume** предшествует определению или;
- переменная была определена как дискретный аргумент.

Можно также использовать ключевое слово **assume**, чтобы наложить ограничения на переменные в выражении. Последний пример на Рисунке 4 показывает, как заданием ограничений на параметр интеграл может быть сделан сходящимся. Чтобы определить несколько условий, достаточно отделить их запятыми, как показано в примере на Рисунке 4. Ключевое слово **assume** должно предшествовать любому другому ключевому слову, обращенному к выражению, поскольку ключевое слово будет применяться только к выражению, расположенному сразу после него. Пример показан в середине Рисунка 4.

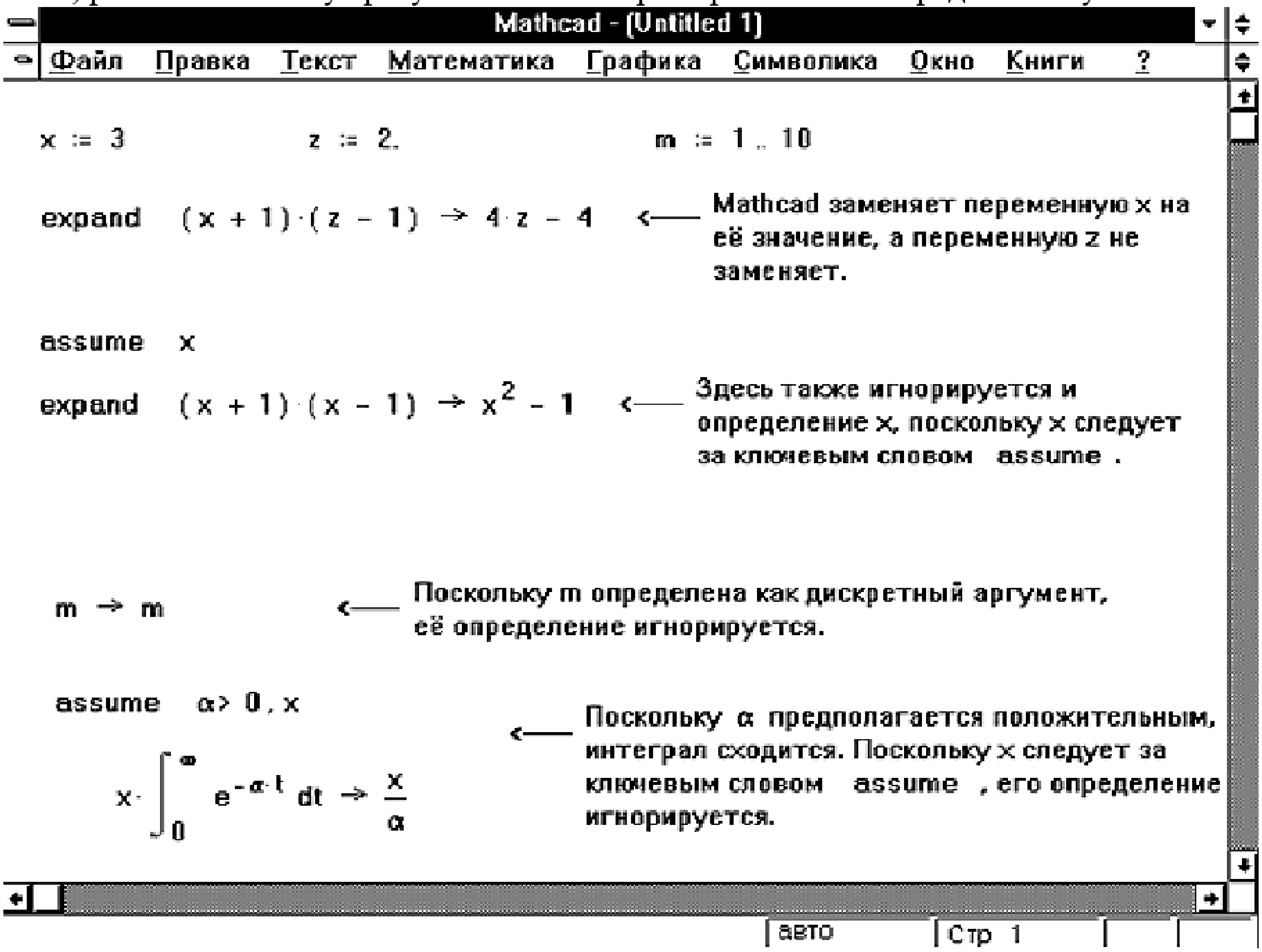


Рисунок 4: Ключевое слово **assume** *определяет, заменит или нет Mathcad значения переменной и имен функций в выражении.*

Ключевые слова **complex** и **float** обеспечивают некоторый дополнительный контроль над формой, в которой Mathcad отображает результат при символьных преобразованиях.

Ключевое слово **complex** перед выражением предписывает Mathcad возвращать результат в форме $a + i \cdot b$. Нет нужды каждый раз выводить такую громоздкую конструкцию, если все параметры вещественны. Однако, когда выражение может содержать комплексные величины, возможность увидеть более общее представление становится полезной. Рисунок 5 сравнивает некоторые преобразования с использованием и без использования ключевого слова **complex**.

Ключевое слово **float** предписывает отображать всякий раз, когда возможно, последующие символьные результаты в виде чисел с плавающей запятой. Можно управлять точностью этого числа, сопровождая **float** соответствующим целым числом, как показано на Рисунке 6. На этом рисунке Mathcad отображает величину p/2 в формате с плавающей запятой. Однако ключевое слово **float** никак не влияет на *X*. Пока величина *X* не определена, Mathcad не может отображать ничего, кроме *X*.

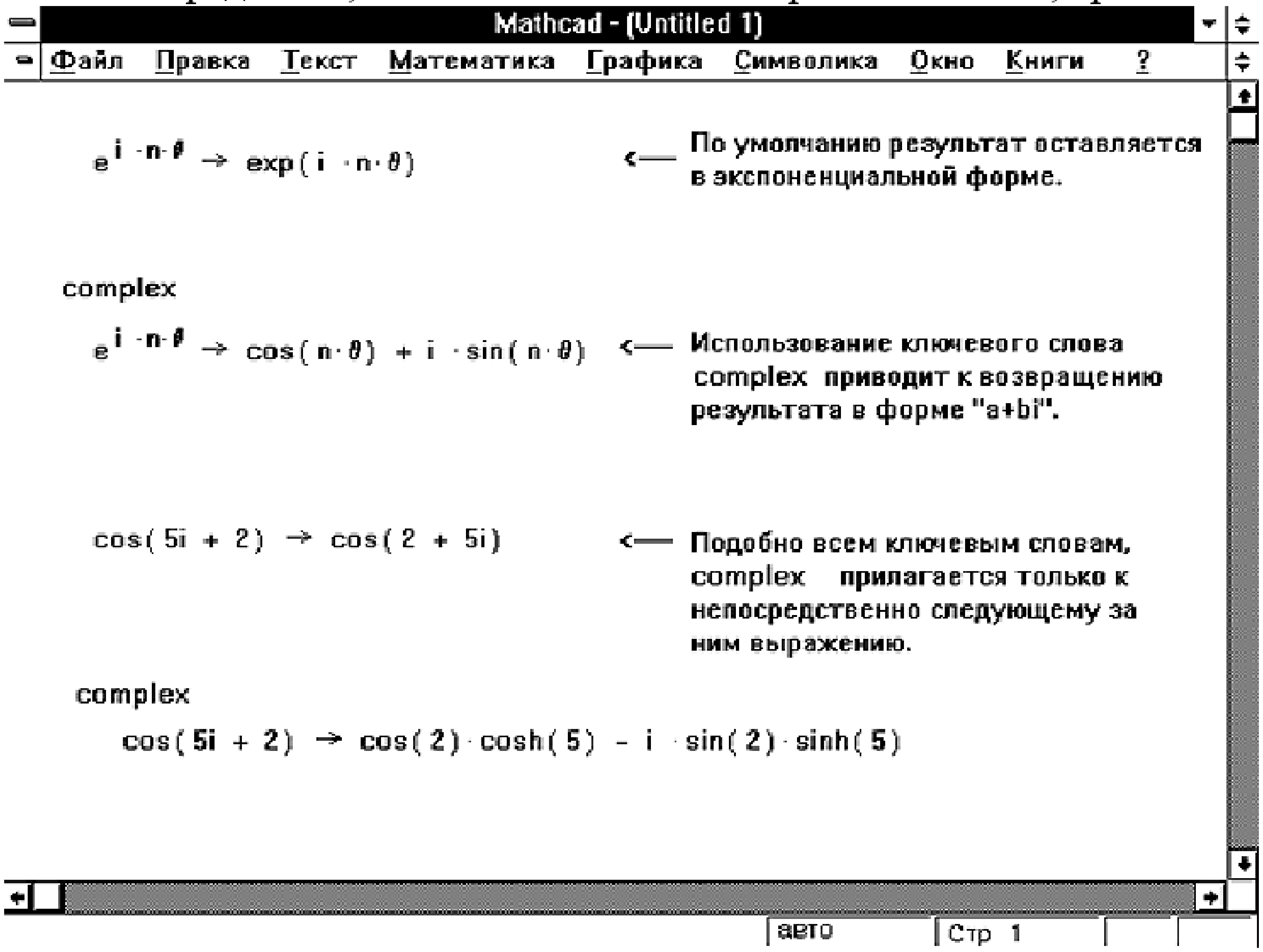


Рисунок 5: Ключевое слово complex *определяет, нужно или нет Mathcad возвращать результат в форме* $a + \mathrm{i} \cdot b$.

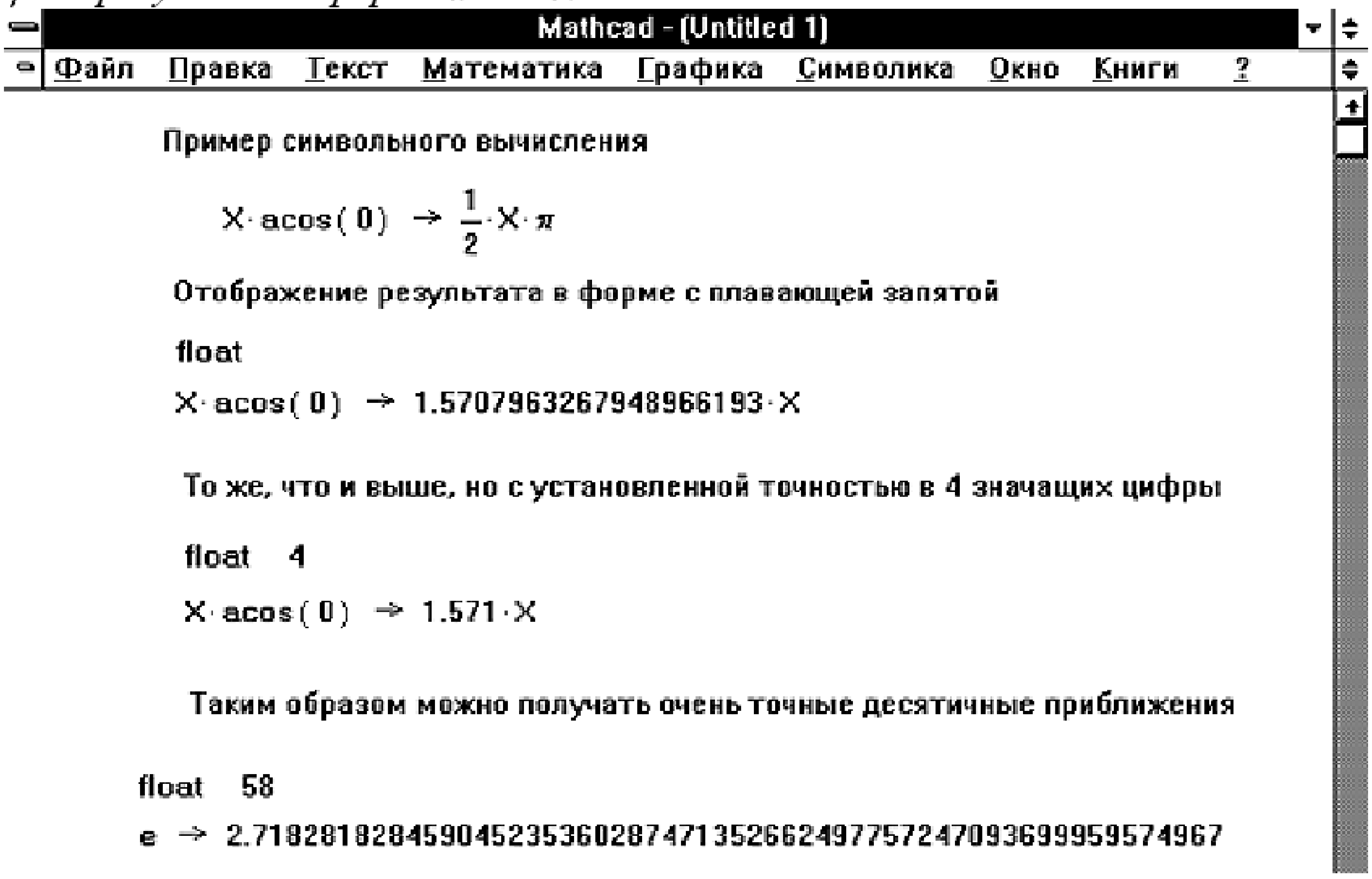


Рисунок 6: Используйте ключевое слово **float**, *чтобы отобразить результаты в числовом виде всякий раз, когда это возможно.*

Ключевое слово series используется, чтобы сопоставить выражению отрезок его ряда Тейлора по определенной комбинации переменных. По умолчанию Mathcad разлагает в ряд относительно точки 0 и использует все члены ряда, у которых сумма показателей степени меньше шести. Можно, впрочем, определять точки, в которых необходимо получить разложение в ряд, как показано на Рисунке 7. Это особенно полезно, когда выражение имеет особенность в 0. Можно также определять порядок разложения, как показано в последнем примере Рисунка 7.

Иногда ряд будет содержать коэффициенты, отображаемые в довольно длинной символьной форме. Полезно использовать ключевое слово **float** вместе с **series**, как показано на Рисунке 7. В приведенном разложении при отсутствии ключевого слова float можно было бы получить выражение, содержащее exp(1).

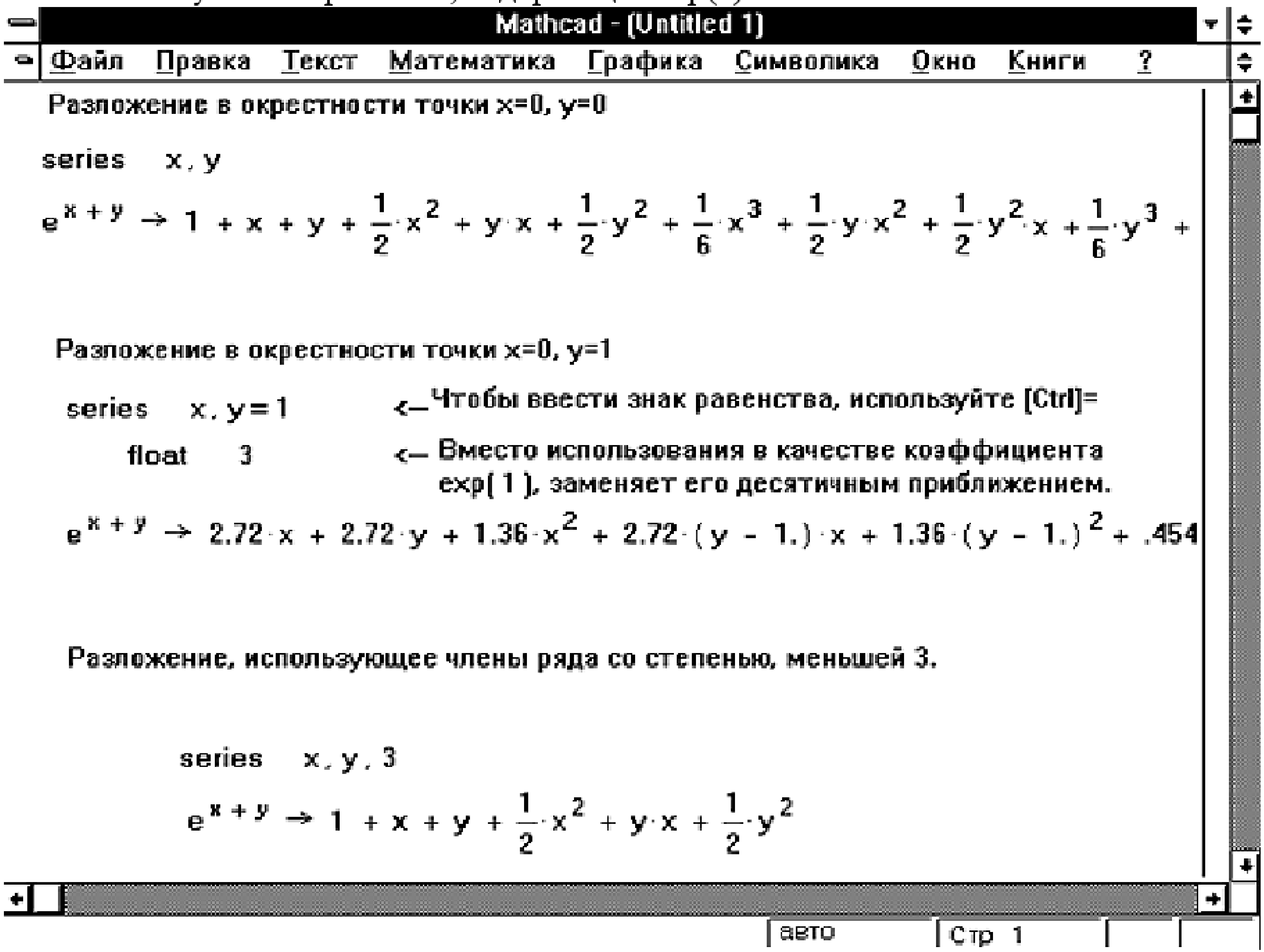


Рисунок 7: Используйте ключевое слово **series,** *чтобы разложить выражение в окрестности выбранной точки.*

Использование меню Символика

Хотя символьный знак равенства, обсужденный в последнем разделе, удобен для использования, набор предоставляемых им символьных преобразований ограничен. Команды из меню **Символика**обеспечивают значительно большее управление видами доступных символьных преобразований.

Основные шаги для использования меню **Символика** — те же самые, что и для всех команд меню:

- Заключите всё, что требуется преобразовать, в выделяющую рамку.
- Выберите соответствующую команду из меню **Символика**.
- Mathcad поместит преобразованное выражение в рабочий документ.

Имеется важное различие между символьным преобразованием, использующим меню **Символика**, и преобразованием, использующим символьный знак равенства, описанный в предыдущем разделе. Результаты с правой стороны от символьного знака равенства вычисляются заново всякий раз при внесении изменений в рабочий документ. Результат, полученный с использованием меню **Символика**, автоматически модифицироваться не будет.

Предположим, например, что после выделения выражения выбран пункт **Разложить на множители** из меню **Символика** — Mathcad вставит разложенный на множители результат. Если теперь отредактировать первоначальное выражение, символьный ответ не изменится. Чтобы получить новый ответ, придётся снова выделить выражение, которое только что изменили, и снова выбрать из менюпункт **Разложить на множители** — Mathcad заменит результат.

В следующих разделах подробно описываются различные команды меню **Символика**.

Оборудование и материалы.

Персональный компьютер, программа MathCAD.

Указания по технике безопасности:

Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

Задания

В MathCad имеется достаточно широкий спектр вычислений в символьном виде. Для вычисления в символьном виде нажатием кнопки на палитре математических знаков откройте панель *Символика*, как это показано на рис.51.13.

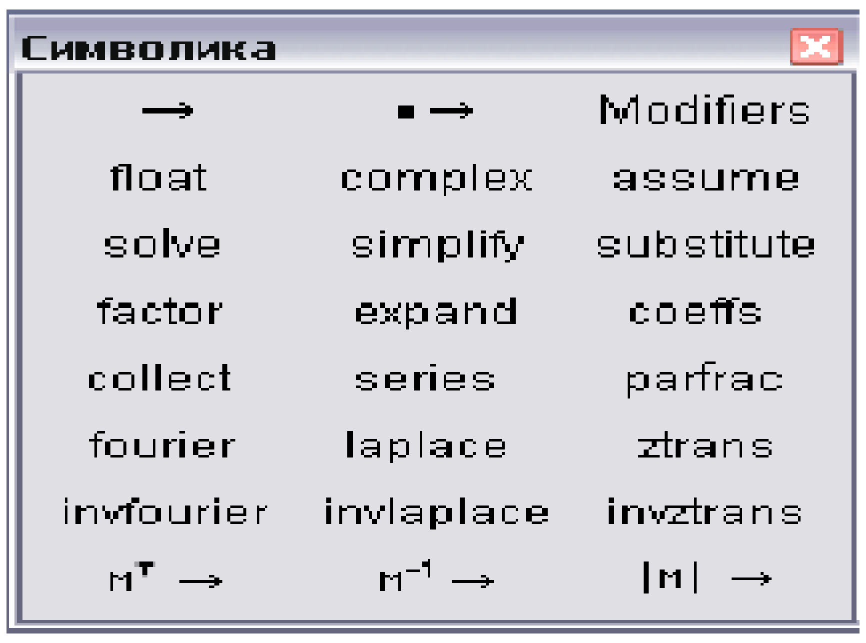


Рис.51.13

Простейшим примером символьных вычислений является вычисление неопределенных интегралов. Для этого с использованием символа неопределенного интеграла на панели *Исчисление* наберите требуемый неопределенный интеграл. Затем вместо символа = наберите символьный знак равенства → на панели *Оценка* и нажмите [Enter]. Знак → также вводится комбинацией клавиш [Ctrl+·].

Пример символьного вычисления интеграла показан на рис.51.14. На этом же рисунке показаны примеры символьного вычисления тройного интеграла и определенного интеграла с параметрами a,b.

Заметим, что далеко не все интегралы и тем более двойные и тройные Mathcad может вычислить в символьном виде. Пример невычисляемого в символьном виде интеграла (неберущийся интеграл) приведен на рис.51.14.

Аналогичным образом в символьном виде можно вычислить производные любого порядка, суммы, произведения. Пример таких вычислений приведен на рис.51.15.

$$\int \sin(x)\cdot e^{x}\,dx \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot \exp(x)\cdot \cos(x) + \frac{1}{2}\cdot \sin(x)\cdot \exp(x)$$

$$\int\int\int x^{2}\cdot \sin(y)\cdot e^{z}\,dx\,dy\,dz \rightarrow \frac{-1}{3}\cdot \cos(y)\cdot x^{3}\cdot \exp(z)$$

$$\int_{0}^{a}\int_{x\left(\frac{b}{a}\right)}^{b} (a-x)^{2} + (b-y)^{2}\,dy\,dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot a^{3}\cdot b + \frac{1}{12}\cdot a\cdot b^{3}$$

$$\boxed{\int \frac{x^{2}}{e^{x} + \sin(x)}\,dx \rightarrow \int \frac{x^{2}}{(\exp(x) + \sin(x))}\,dx}$$

Рис.51.14

Mathcad имеет также следующие возможности: упрощение выражения Simplify, разложение выражения по степеням Expand и разложение выражения на меожители Factor. Операция → подразумевает Symplify по умолчанию, однако ее непосредственное использование дает более простой результат, как это показано на рис.51.15 для произведений.

$$\sum_{i} i^{2} \rightarrow \frac{1}{3}\cdot i^{3} - \frac{1}{2}\cdot i^{2} + \frac{1}{6}\cdot i \qquad \sum_{k} \frac{1}{(2\cdot k-1)^{2}} \rightarrow \frac{-1}{4}\cdot \mathrm{Psi}\left(1, k-\frac{1}{2}\right)$$

$$\prod_{k} \frac{k^{2}}{k-1}\ \text{simplify} \rightarrow \Gamma(k)\cdot(k-1)$$

Рис.51.15

Для выполнения соответствующей команды типа Simplify, Factor или Expand необходимо вместо → выбрать соответствующее слово на панели *Символика*. Пример команд Simplify, Expand, Factor приведен на рис.51.16.

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 \text{ simplify } \rightarrow 1 \qquad \frac{a^2 - b^2}{(a+b)\cdot(a-b)} \text{ simplify } \rightarrow 1$$

$$\frac{-5}{x} + \frac{5}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{6}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^4} \text{ simplify } \rightarrow \frac{\left(x^2 - 5\right)}{\left[x\cdot(x-1)^4\right]}$$

$$\sin(5\cdot x) \text{ expand},2 \rightarrow 16\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^4 - 12\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2 + \sin(x)$$

$$(a+b)^5 \text{ expand},2 \rightarrow a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a\cdot b^4 + b^5$$

$$3 - (4\cdot\cos(2\cdot a) + \cos(4\cdot a)) \text{ expand},2 \rightarrow 2 - 4\cdot\cos(2\cdot a) - 8\cdot\cos(a)^4 + 8\cdot\cos(a)^2$$

$$x^2 - y^2 \text{ factor},2 \rightarrow (x-y)\cdot(x+y) \qquad \left[\left(a^2\right) - 2\cdot a\cdot b + b^2\right] \text{factor},2 \rightarrow (a-b)^2$$

$$\sum_n x - n \text{ factor},2 \rightarrow n\cdot(x-1) \qquad x^3 - 1 \text{ factor},2 \rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$$

Рис.51.16

Команда Collect разлагает выражение по степеням указанной в этой команде переменной, если такое представление возможно. Пример использования команды Collect приведен на рис.51.17.

$$(a+b)^5 \text{ collect}, a \rightarrow a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a\cdot b^4 + b^5$$

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c) \text{ collect}, x \rightarrow x^3 + (-a-b-c)\cdot x^2 + [a\cdot b - (-a-b)\cdot c]\cdot x - a\cdot b\cdot c$$

$$(a+b+c)^2 \text{ collect}, a \rightarrow a^2 + (2\cdot b + 2\cdot c)\cdot a + (b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2 \text{ collect}, b \rightarrow b^2 + (2\cdot a + 2\cdot c)\cdot b + (a+c)^2$$

$$(a+b+c)^2 \text{ collect}, c \rightarrow c^2 + (2\cdot a + 2\cdot b)\cdot c + (a+b)^2$$

Рис.51.17

Команда Coeffs используется для вычисления коэффициентов полинома относительно указанной в команде переменной. Пример команды Coeffs приведен на рис.51.18.

$$(x-b)\cdot(x+b)\ \text{coeffs},x\ \rightarrow \begin{pmatrix} -b^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left[(4)\cdot x^3+3\cdot x^2\right]\cdot(x+1)\ \text{coeffs},x\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(x-b)\cdot\left(x^2+2\right)\ \text{coeffs},x\ \rightarrow \begin{pmatrix} -2\cdot b \\ 2 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(x+b^2\right)(b-1)\ \text{coeffs},b\ \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рис.51.18

Команда Solve позволяет решить уравнение или неравенство с нулевой правой частью относительно указанной в этой команде переменной. Пример использования команды Solve приведен на рис.51.19.

$$x^2+a\cdot x+b\ \text{solve},x\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{2}\cdot a+\dfrac{1}{2}\cdot\left(a^2-4\cdot b\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \dfrac{-1}{2}\cdot a-\dfrac{1}{2}\cdot\left(a^2-4\cdot b\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$$e^x-a\ \text{solve},x\ \rightarrow \ln(a)$$

Рис.51.19

Команда Solve позволяет также решать системы линейных и нелинейных уравнений (с нулевой правой частью). Пример решения систем уравнений приведен на рис.51.20.

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2-7 \\ 2\cdot x-y \end{pmatrix}\text{solve},x,y\ \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{35} & \dfrac{2}{5}\cdot\sqrt{35} \\ \dfrac{-1}{5}\cdot\sqrt{35} & \dfrac{-2}{5}\cdot\sqrt{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-3 \\ x+y-z-1 \\ x\cdot y\ \ldots \end{pmatrix}\text{solve},x,y,z\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Рис.51.20

Возможны также символьные операции $M^T \rightarrow$, $M^{-1} \rightarrow$ и $|M| \rightarrow$ над матрицей.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ substitute}, x = 5 \rightarrow 25 \cdot a + 5 \cdot b + c$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, c = 3 \\ \text{substitute}, x = 5 \end{array} \right. \rightarrow 25 \cdot a + 5 \cdot b + 3$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = 5 \\ \text{substitute}, c = 4 \\ \text{substitute}, b = 11 \end{array} \right. \rightarrow 25 \cdot a + 59$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = 5 \\ \text{substitute}, c = 3 \\ \text{substitute}, b = 4 \\ \text{substitute}, a = 3 \end{array} \right. \rightarrow 98$$

Рис.51.21

Команда Substitute используется для подстановки значений переменных в выражение и вычисление этого выражения. Для этого наберите выражение, на панели *Символика* выберите команду Substitute, заполните трафарет. Далее установите обрамление в виде: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \text{ substitute}, x = 5 \rightarrow$ и выберите опять команду Substitute, и так далее до присваивания числовых значений всем переменным. Пример использования команды Substitute приведен на рис.51.21

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Символьный знак равенства.
2. Mathcad PLUS.
3. Меню Математика.
4. Настройка символьного знака равенства.
5. Символьные операции: assume, complex и float, series ,
6. Использование меню Символика.

<u>Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:</u>

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьев, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.

4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 11. Построение волновых и потенциальных диаграмм

Цель работы:

Научиться использовать режим динамического ввода для задани трехмерных координат объектов.

Теоретическая часть.

Динамический ввод позволяет вводить информацию около курсора, не используя командную строку, которая находится в нижней части окна команд. Более того, само окно команд может отсутствовать в текущей конфигурации рабочего пространства. В AutoCAD 2006 имеется возможность циклически удалять и выводить заново окно команд при помощи нажатия комбинации клавиш <Ctrl>+<9>.

Динамический ввод может реализоваться в двух режимах.

– *Курсорный ввод,* который используется для ввода абсолютных и относительных координат точек в специальное поле около курсора. По умолчанию вводятся относительные координаты, а если нужно ввести абсолютные координаты, измеряемые от начала текущей системы координат, то следует сначала ввести знак # перед первой координатой.
– *Размерный режим ввода*, который доступен для команд рисования LINE (ОТРЕЗОК), ARC (ДУГА), CIRCLE (КРУГ), ELLIPSE (Эллипс) и PLINE (ПОЛИЛИНИЯ), выводит около курсора подсказку команды и имеет поля для расстояния и абсолютного угла его наклона к оси *Ох. Переход* от одного поля к другому выполняется при помощи клавиши «Tab». В этом режиме можно вывести динамическое меню, в котором содержатся ранее введенные координаты и динамическое меню с опциями команды, если нажать клавишу со стрелкой, направленной вниз (<↓>). Обратная операция — отказ от меню — выполняется после нажатия клавиши со стрелкой, направленной вверх (<↑>).

Настройка динамического ввода выполняется в диалоговом окне **Drafting Settings** (Режимы рисования) на дополнительной вкладке **Dynamic Input** (Динамический ввод), появившейся впервые в AutoCAD 2006.

Оборудование и материалы.

Персональный компьютер, программа MathCAD.

Указания по технике безопасности:

Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

Задания

В предыдущих работах мы строили график для индексированных переменных, когда индексы были целыми числами. Если же нужно построить зависимость i=i(t) и аргумент t не принимает целые значения, а изменяется, например, от 0 до 0,03 с через 0,0001 с, то в этом случае существует несколько способов построения графика.

Первый способ. Так же, как и ранее, надо ввести целочисленную управляющую переменную, например, k := 0..300. Теперь аргумент t будет уже индексированной переменной, т.е. переменной, имеющей индекс к. Этот индексированный аргумент будет выражаться через управляющую переменную (или индекс k) следующим образом:

$$t_k := 0{,}0001 * k.$$

. Функция тока также будет индексированной переменной I_k. Пусть, например, в результате расчета электрической цепи комплексным методом получены комплексные значения токов:

$$I_1 = 5{,}673+2{,}419j; \qquad I_2 = 2{,}094+2{,}532j; \qquad I_3 = 3{,}58-0{,}112j.$$

Построим по этим данным волновые диаграммы токов (рис. 3.1). Токи на рис. 3.1 представлены как индексированные функции от индексированного аргумента t_k.

Отметим, что аргумент t может задаваться не как индексированная переменная, зависящая от k, а как функция k, которая выражается через к следующим образом:

$$t(k) := 0.0001 * k.$$

Переменные i1,i2, i3 задаются как функции аргумента t, т.е.:

$$i1(t) := \sqrt{2} \cdot \left|I_1\right| \cdot \sin(314 \cdot t(k) + \arg(I_1))\ ;$$

$$i1(t) := \sqrt{2} \cdot \left|I_1\right| \cdot \sin(314 \cdot t(k) + \arg(I_1))\ ;$$

$$i1(t) := \sqrt{2} \cdot \left|I_1\right| \cdot \sin(314 \cdot t(k) + \arg(I_1))\ .$$

Построение волновых диаграмм (первый способ)

$I_1 := 5.673 + 2.419j \quad I_2 := 2.094 + 2.532j$

$I_3 := 3.58 - 0.112j$

$k := 0..300 \qquad t_k := 0.0001 \cdot k$

$i1_k := \sqrt{2} \cdot |I_1| \cdot \sin(314 \cdot t_k + \arg(I_1))$

$i2_k := \sqrt{2} \cdot |I_2| \cdot \sin(314 \cdot t_k + \arg(I_2))$

$i3_k := \sqrt{2} \cdot |I_3| \cdot \sin(314 \cdot t_k + \arg(I_3))$

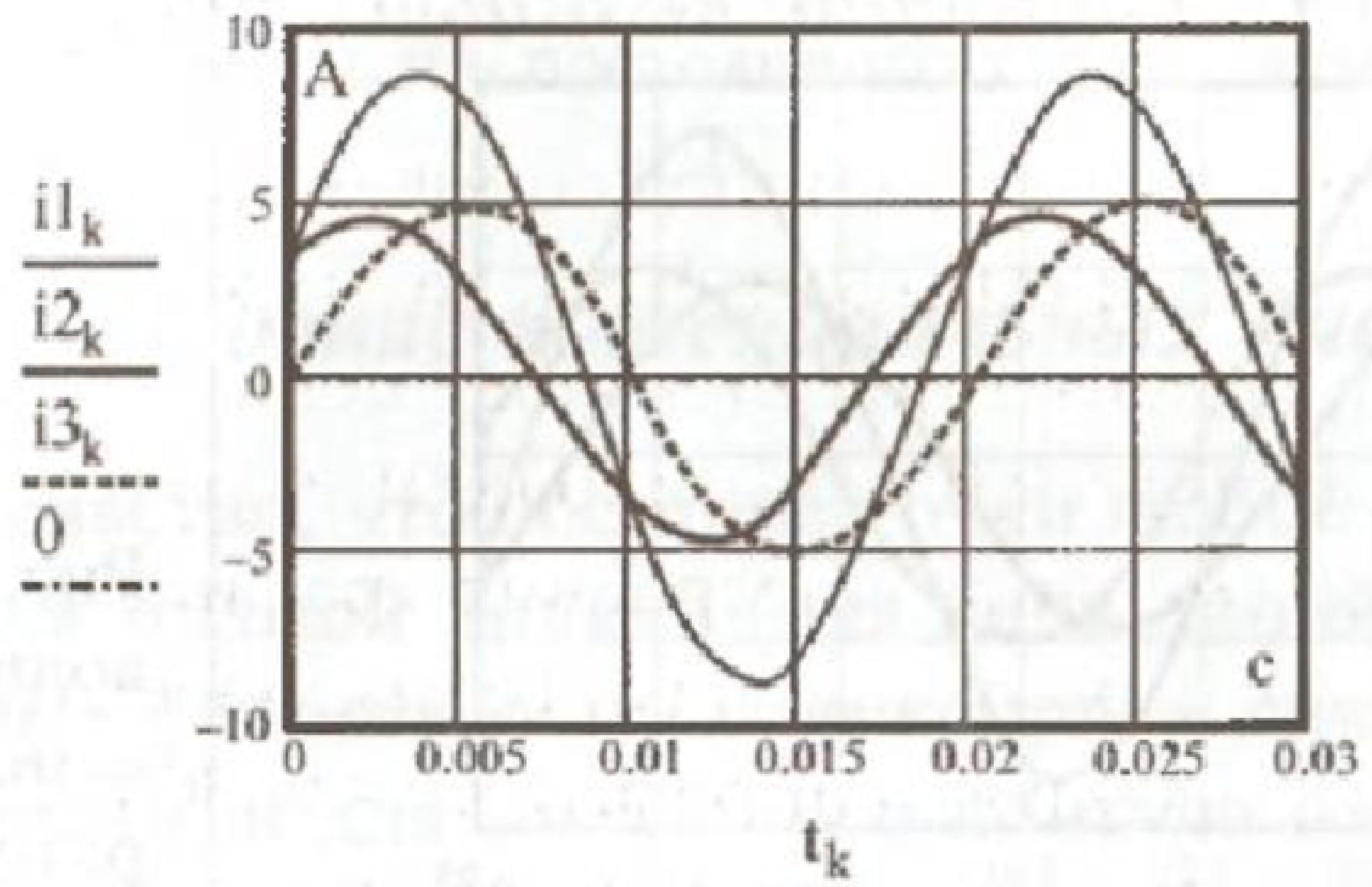


Рис. 3.1. Построение волновых диаграмм с применением индексированных переменных

Постройте график даным способом самостоятельно.

Во втором способе вместо нижних индексов у токов используется векторная запись с помощью оператора векторизации (рис. 3.2).

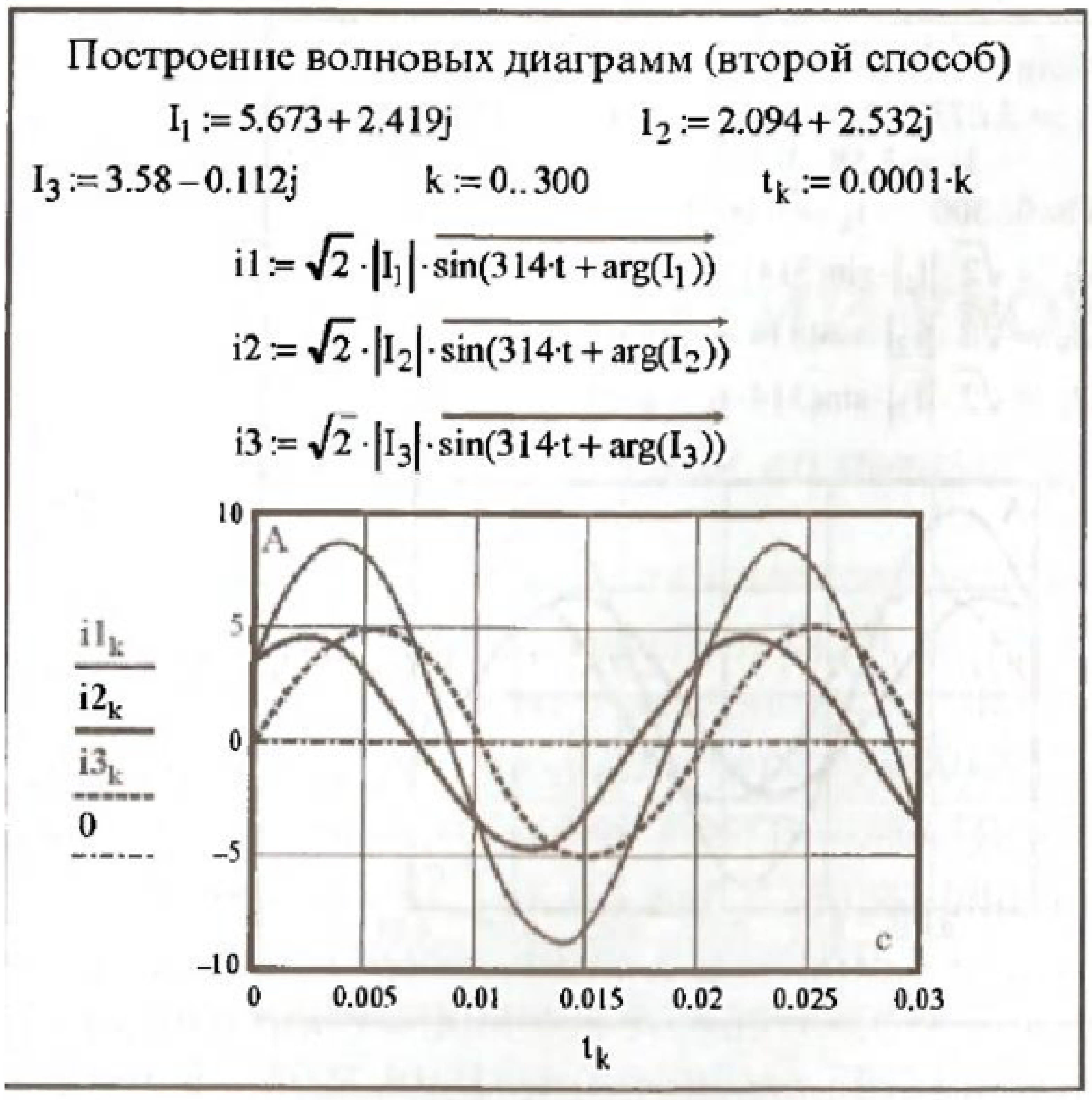


Рис. 3.2. Построение волновых диаграмм с использованием оператора векторизации

Формулы, которые используют векторную запись вместо нижних индексов, обычно вычисляются намного быстрее. Напомним, что символ векторизации вводится как [Ctrl]+[-].

В третьем способе управляющая переменная вообще отсутствует. Аргумент t задается с шагом 0,001 с, а ток записывается как функция аргумента t. Этот способ построения волновых диаграмм приведен на рис. 3.3.

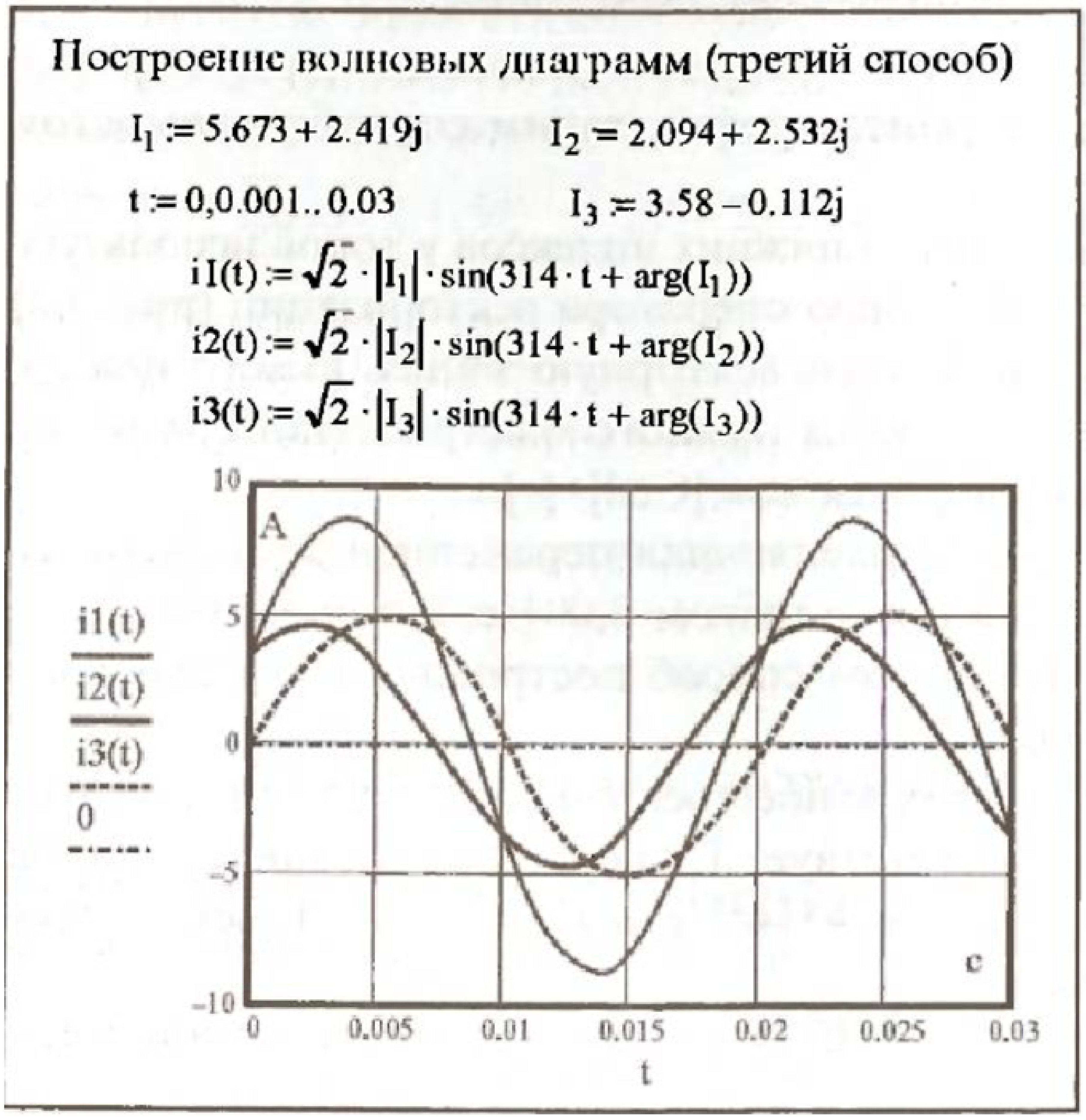


Рис. 3.3. Построение волновых диаграмм с использованием функций дискретного аргумента

Во всех рассмотренных выше трех способах время t изменяется от 0 до 0,03 с, что соответствует 1,5 периодам питающего напряжения с угловой частотой ω =314 1/с, а количество точек на этом интервале равно 300.

Построение потенциальных диаграмм

То обстоятельство, что соседние точки любой заданной функции соединяются прямой линией (для типа линий line или draw), позволяет строить потенциальные и векторные диаграммы. Потенциальной диаграммой для замкнутого контура называют зависимость потенциалов в точках контура от величины сопротивлений.

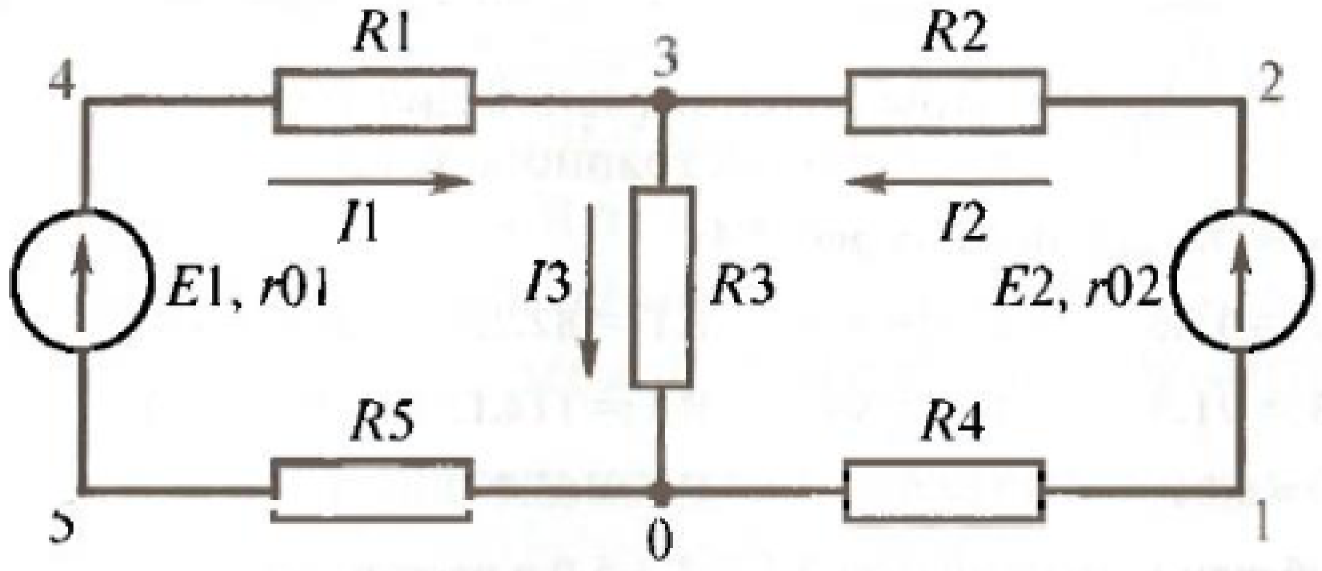


Рис. 3.4. Электрическая цепь постоянного тока с двумя источниками ЭДС

Величины сопротивлений откладываются по оси x, а значения потенциалов — по оси y. Поскольку сопротивления элементов, как правило, разные, то для того, чтобы отложить их по оси x, необходимо ввести целочисленную управляющую переменную к, которая будет соответствовать точкам замкнутого контура. Сопротивление участка обозначим Rk, а потенциал точки — Uk. Построение потенциальной диаграммы для схемы, приведенной на рис. 3.4, показано на рис. 3.5.

Построение потенциальной диаграммы для цепи постоянного тока

Известны для цепи на рис. 3.4:

$r01 := 14.5 \quad r02 := 7.5 \quad R1 := 82.72 \quad R2 := 110$

$R3 := 71.9 \quad R4 := 80 \quad R5 := 114.15 \quad I1 := 0.22$

$I2 := 0.04 \quad I3 := 0.26 \quad E1 := 65.4 \quad E2 := 26.8$

Выберем контур обхода 0-1-2-3-4-5-0 и рассчитаем в каждой точке сопротивление R (нарастающим итогом от начала обхода) и потенциал U

$R_0 := 0 \quad R_1 := R_0 + R4 \quad R_2 := R_1 + r02 \quad R_3 := R_2 + R2$

$R_4 := R_3 + R4 \quad R_5 := R_4 + r01 \quad R_6 := R_5 + R5 \quad U_0 := 0$

$U_1 := U_0 - R4 \cdot I2 \quad U_2 := U_1 + E2 - r02 \cdot I2 \quad U_3 := U_2 - R2 \cdot I2$

$U_4 := U_3 + R1 \cdot I1 \quad U_5 := U_4 - E1 + r01 \cdot I1 \quad U_6 := U_5 + R5 \cdot I1$

В результате получим два вектора

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 87.5 \\ 197.5 \\ 277.5 \\ 292 \\ 406.15 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.2 \\ 23.3 \\ 18.9 \\ 37.098 \\ -25.112 \\ 1.4\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

Введем переменную $k := 0..\ 6$

и построим график

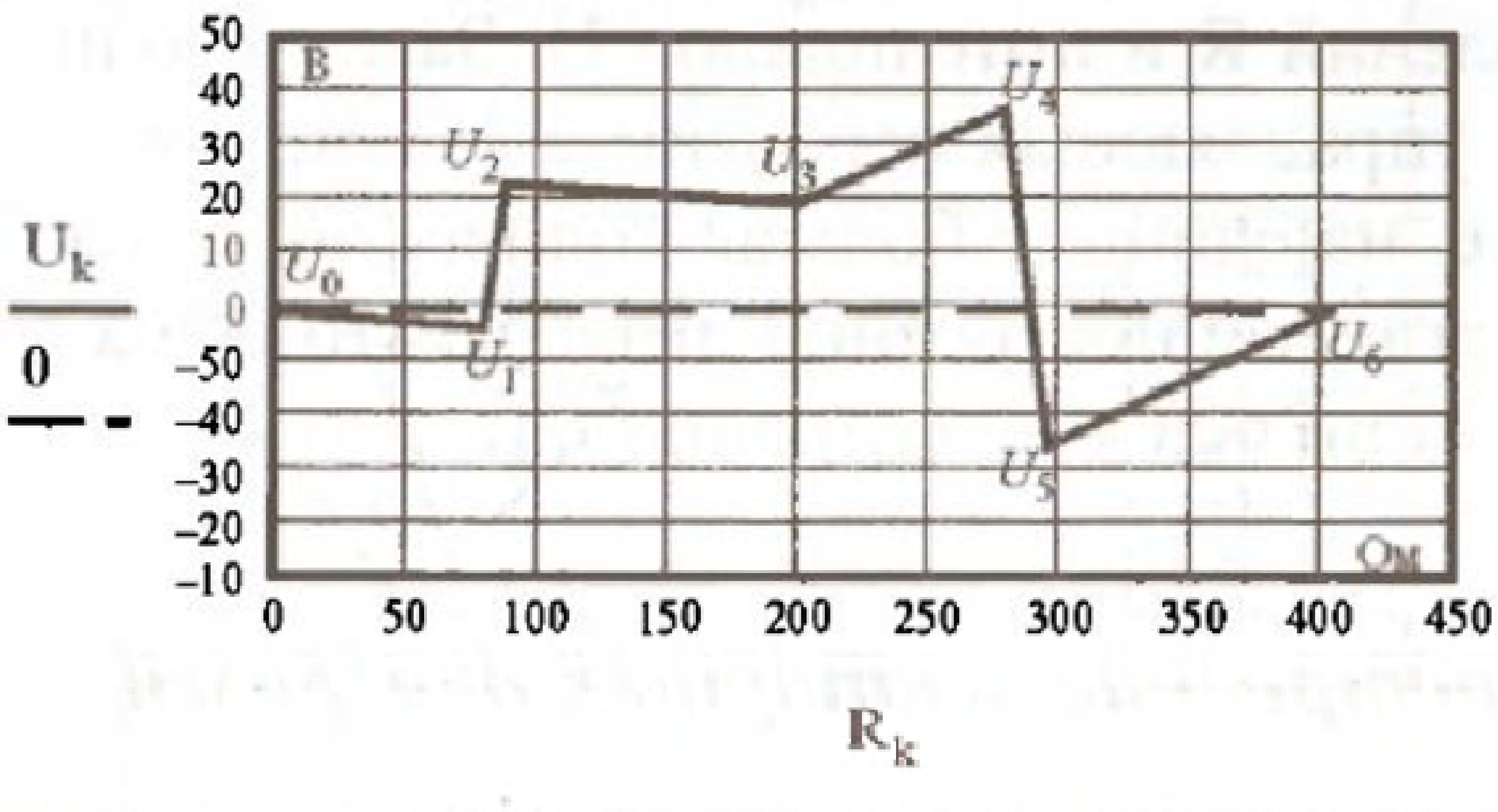


Рис. 3.5. Построение потенциальной диаграммы для цепи постоянного тока с двумя источниками ЭДС

Как видно из рис. 3.5, сначала формируются векторы сопротивлений R и потенциалов U. Затем вводится переменная цикла или управляющая переменная k, принимающая значения от 0 до 6, т.е. на единицу больше количества точек, так как нулевая точка участвует в построении дважды. По оси x отклады-вают аргумент R_k по оси y — функцию U_k

Контрольные вопросы

1. Построение графика зависимости с вещественным аргументом.
2. Построение волновых диаграмм с использованием оператора векторизации.
3. Построение потенциальных диаграмм
4. Какие способы форматирования графиков вы знаете?
5. Как выделить узловые точки графика?
6. Как изменить диапазон графика?
7. Как задать несколько аргументов функции на графике?
8. Как построить несколько графиков функций на одном рисунке?
9. Как построить график поверхности?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 12. Построение векторных диаграмм

Цель работы:

Научиться изменять текущие уровни черчения, создавать и настраивать пользовательские системы координат.

Теоретическая часть.

Все координаты точек при вводе и выводе определяются он начала текущей UCS (ПСК). Плоские рисунки выполняются в плоскости, параллельной или совпадающей с плоскостью XY текущей системы координат. Изменить положение текущей ПСК или создать новую можно с помощью группы команд, находящейся в меню «Инструменты».

Если для точки, расположенной в пространстве, указываются только координаты X и Y, то координата Z этой точки принимается равной тому значению, которое установлено командой ELEV (Уровень). Это значение координаты Z называется уровнем и не изменяется при переходе к другой пользовательской системе координат.

Управление назначением координаты Z вновь создаваемым объектам при привязке к точкам плоских, уже построенных объектов выполняется при помощи системной переменной **OSNAPZ,** которая принимает значение 0 или 1.

Если **OSNAPZ** = 0, то в качестве координаты Z используется координата той точки, к которой производится привязка при построении объекта.

Если же присвоить **OSNAPZ** — 1, то в качестве координаты Z используется значение уровня, заданного командой ELEV (УРОВЕНЬ).

Уровень используется для черчения над или под плоскостью *XУ* и позволяет задавать различные значения координате *Z,* в которой вычерчивается основание трехмерного объекта. Для вновь создаваемых объектов уровень устанавливается командой ELEV (УРОВЕНЬ), которая вводится с клавиатуры. Этой же командой можно придать плоским объектом и высоту **Thickness** (Высота).

Придание плоским объектам высоты позволяет создавать разнообразные поверхности с толщиной, равной толщине исходного объекта. Операция придания высоты плоскому объекту называется *выдавливанием.* При выдавливании строится поверхность, соответствующая контуру плоского объекта. Для выдавливания твердых тел из плоских объектов необходимо воспользоваться командой выдавливания, о которой речь пойдет позже.

Уже вычерченным объектам уровень **Elevation** (Уровень) и высоту **Thickness** (Высота) можно задавать на палитре свойств объекта **Properties** (Свойства).

Оборудование и материалы.

Персональный компьютер, программа MathCAD.

Указания по технике безопасности:

Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

Задания

Рассмотрим построение векторных диаграмм. Пусть в результате расчета трехфазной цепи получены значения токов в фазах a,b и c:

$$\dot{I}_a = 3 + 3j, \dot{I}_b = -1 - 4j, \dot{I}_c = -4 + j.$$

Требуется построить векторную диаграмму токов. Укажем для каждого вектора начальную и конечную точки. Начальной точкой для всех векторов будет нулевая точка, а конечной точкой — значение комплексного числа, соответствующего значению тока. Таким образом, нужно провести прямые линии между точками с координатами

$0 - \dot{I}_a, 0 - \dot{I}_b, 0 - \dot{I}_c.$

Следовательно, нужно сформировать вектор (одномерный массив) токов

$[0 \ \dot{I}_a \ 0 \ \dot{I}_b \ 0 \ \dot{I}_c],$

ввести управляющую переменную к:=0..5 (для шести точек, начиная с нуля) и на графике откладывать по оси x мнимые значения токов Im[Ik] , а по оси y — действительные (реальные) значения токов Re[Ik], как это принято в трехфазных системах. Построение векторной диаграммы токов приведено на рис. 3.6.

Стрелки у векторов и символьные обозначения тока на рис. 3.6 поставлены в графическом редакторе Paint вручную.

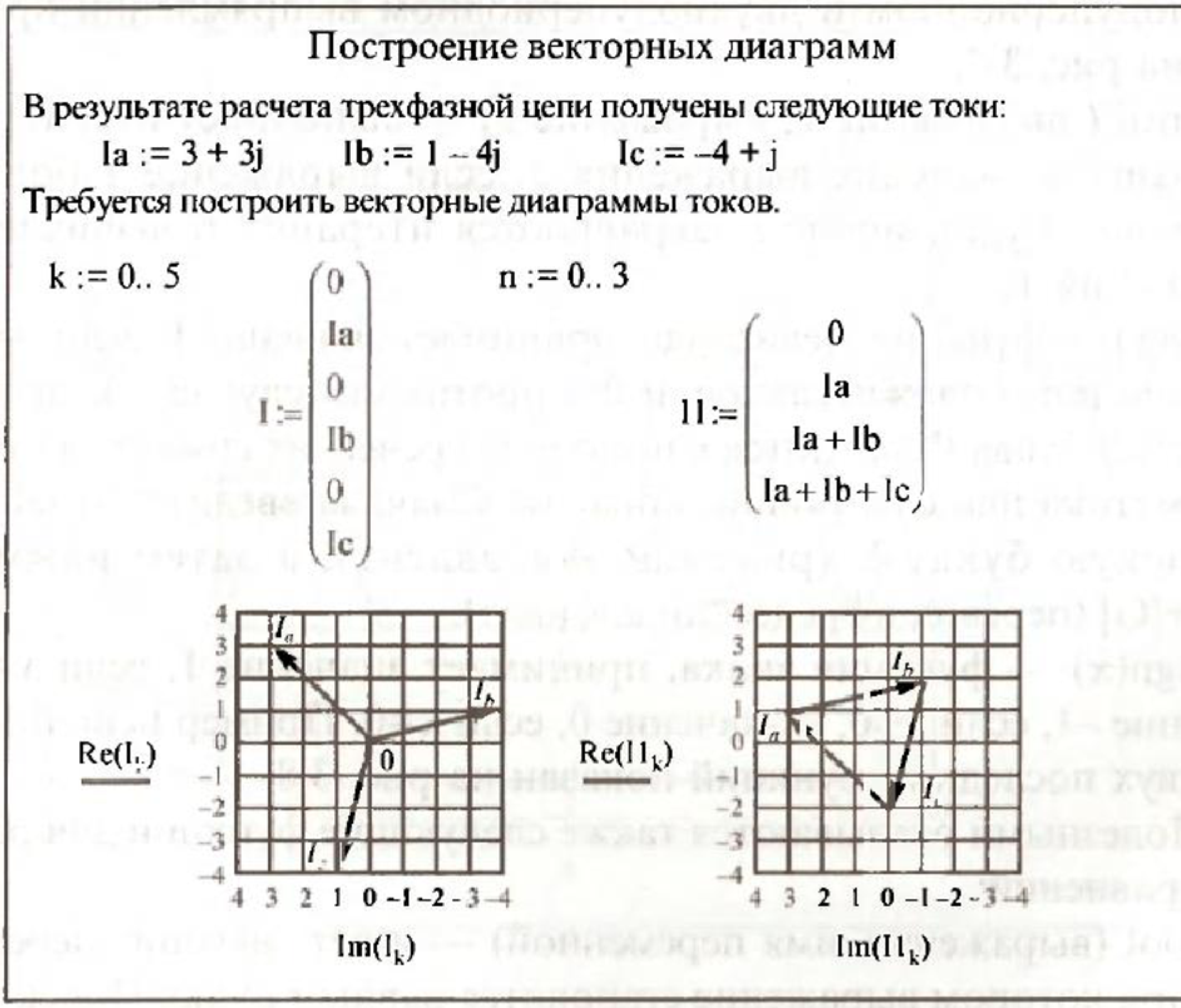


Рис. 3.6. Построение векторных диаграмм для симметричной трехфазной цепи

Сам MATHCAD стрелки не ставит. На этом же рисунке показана сумма векторов

$$[\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c],$$

которая, как видно из построения, равна нулю. Подобным же образом можно построить и векторные диаграммы напряжений, записывая в матрице не токи, а напряжения.

Контрольные вопросы

1. Построение векторных диаграмм для симметричной трехфазной цепи.
2. Какие способы форматирования графиков вы знаете?
3. Как выделить узловые точки графика?
4. Как изменить диапазон графика?
5. Как задать несколько аргументов функции на графике?
6. Как построить несколько графиков функций на одном рисунке?
7. Как построить график поверхности?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – М. : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.

3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : КноРус, 2014. – 472 с.
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 13. Функции с условием

<u>Цель работы:</u>

Изучить применение функций с условием.

<u>Теоретическая часть.</u>

Каркасные модели – это двумерные объекты, помещенные в пространство. Они состоят из точек, отрезков и кривых. Чтобы каркасная модель стала полноценной пространственной моделью, на нее нужно натянуть поверхности командами создания поверхностей.

<u>Оборудование и материалы.</u>

Персональный компьютер, программа MathCAD.

<u>Указания по технике безопасности:</u>

Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

<u>Задания</u>

Рассмотрим некоторые функции с условием, т.е. функции, результат которых зависит от выполнения или невыполнения какого-либо заданного условия. Эти функции записываются так:

if (условие, выражение 1, выражение 2).

Если условие, записанное в скобках, выполняется, то функция принимает значение, равное выражению 1, если же условие не выполняется, то функция принимает значение, равное выражению 2. Применение функции if для построения кривой выпрямленного напряжения при однополупериодном и двухполупериодном выпрямлении приведено на рис. 3.7.

until (выражение 1, выражение 2) — выполняет итерации и возвращает значение выражения 2, если выражение 1 больше или равно нулю, иначе прекращаются итерация и вычисления выражения 1.

Ф(а') — функция Хевисайда, принимает значение 1, если x равно нулю или положительное, и 0 в противном случае. Заглавная греческая буква Ф вводится с помощью греческих символов опции Математика или следующим образом. Сначала введите заглавную латинскую букву F (римский эквивалент), а затем нажмите [Ctrl]+[G] (перевод в греческий алфавит).

sign(x) — функция знака, принимает значение 1, если x>0 и значение -1, если x<0, и значение 0, если x=0. Пример использования двух последних функций показан на рис. 3.8.

Полезными оказываются также следующие функции для решения уравнений:

root (выражение, имя переменной) — ищет значение переменной, при котором выражение становится равным нулю. Поиск корня осуществляется итерационным методом, причем перед этим задается начальное значение искомой переменной.

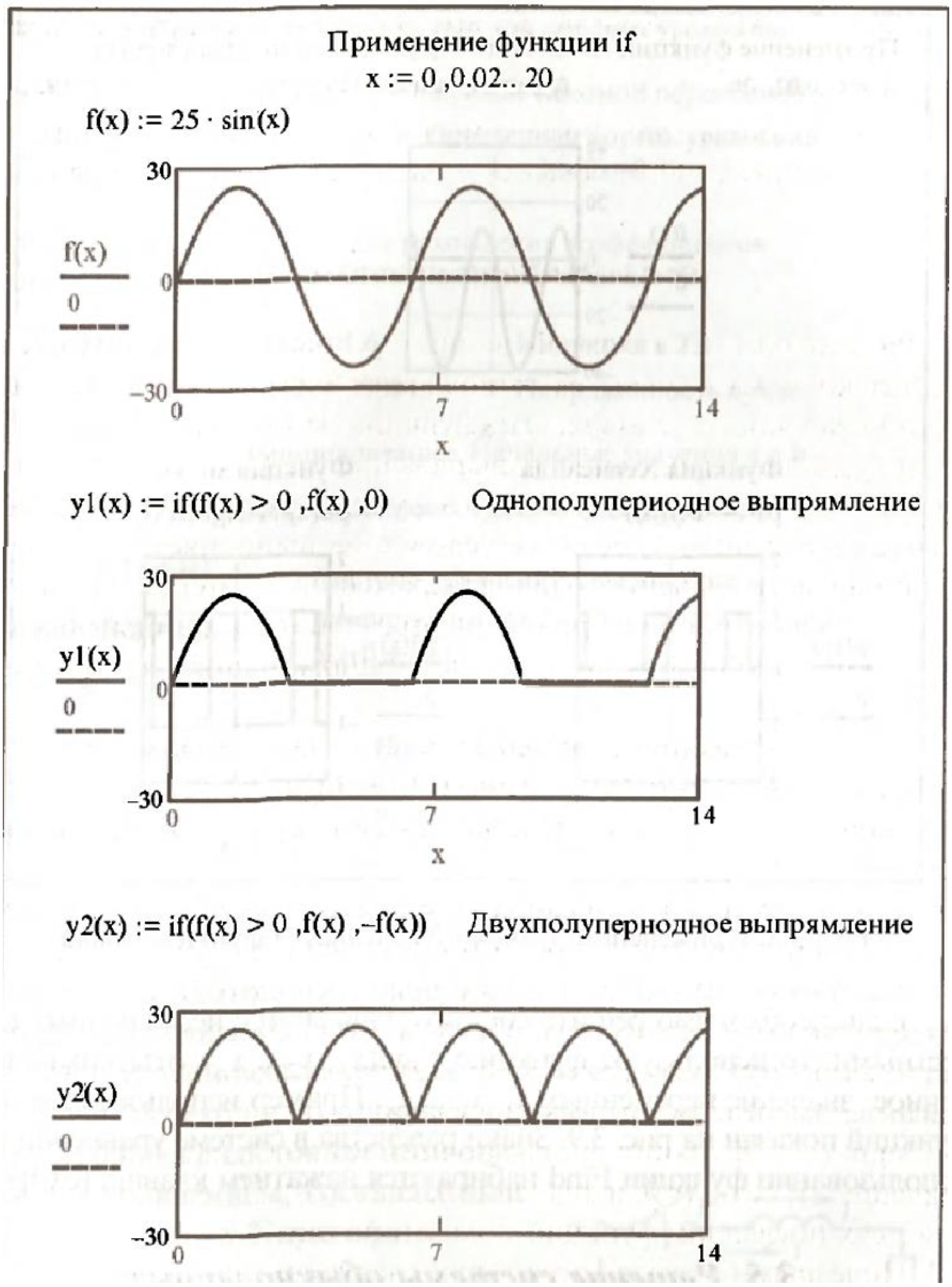


Рис. 3.7. Применение функции с условием для построения кривой выпрямленного напряжения

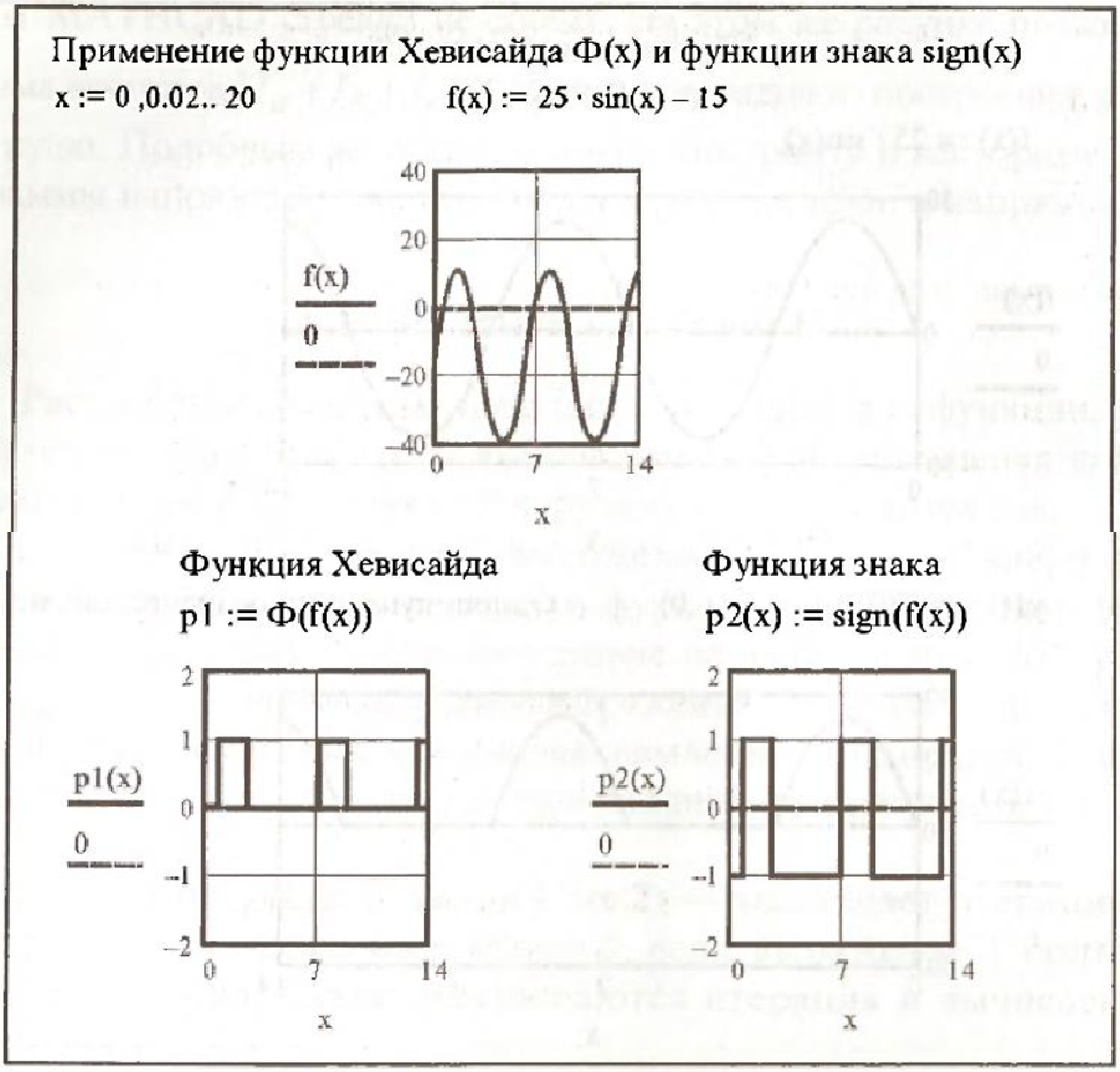


Рис. 3.8. Применение функции Хевисайда и функции знака

Если необходимо решить систему уравнений с несколькими неизвестными, то используют функцию $\mathrm{Find}(x_1, x_2 \ldots x_n)$,

отыскивающую точное значение переменных x,, x2 ....xп. Пример использования этих функций показан на рис. 3.9. Знаки равенства в системе уравнений при использовании функции Find набираются нажатием клавиш [Ctrl]+[=].

Применение функции root для решения уравнения

$x := 0.1$ — Начальное значение искомой переменной

$\mathrm{root}\left(\frac{1}{x} - 2 \cdot x, x\right) = 0.707$ — Определили корень уравнения 1/x-2x=0

Применение функции Find для нахождения коэффициентов аппроксимации кривой намагничивания H=a*sinh(b*B)

Дано: $B1 := 0.8$ $B2 := 1.6$ Индукция в Тл

$H1 := 400$ $H2 := 3900$ Напряженность в А/м

$a := 1$ $b := 1$ Инициализация. Начальные значения a и b

Given Ключевое слово. Начало блока решения

$a \cdot \sinh(b \cdot B1) = H1$

$a \cdot \sinh(b \cdot B2) = H2$

Система уравнений. Жирный знак равенства набирается нажатием клавиш [Ctrl] + [=]

$a > 0$ $b > 0$

$\mathrm{Find}(a, b) = \begin{pmatrix} 83.834 \\ 2.833 \end{pmatrix}$

Find — функция, находящая точное решение искомых неизвестных a и b

Рис. 3.9. Решение уравнений с применением функций root и find

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Применение функции с условием для построения кривой выпрямленного напряжения.
2. Применение функции Хевисайда и функции знака.

<u>Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:</u>

1. Берлинер, Э. М. САПР в машиностроении : учебник для вузов / Э. М. Берлинер, О. В. Таратынов. – Москва : Форум, 2014. – 448 с.
2. Афанасьева, Н. Ю. Вычислительные и экспериментальные методы научного эксперимента : [учеб. пособие*]. – М. : КНОРУС, 2013. – 330 с.
3. Хлебников, А. А. Информационные технологии : учебник / А. А. Хлебников. – М. : К
4. MATHCAD 14: Основные сервисы и технологии Пожарская Г. И., Назаров Д. М. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016

Практическая работа 14. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы:

Изучить особенности построения поверхностных моделей различными методами.

Теоретическая часть.

Каркасные модели – это двумерные объекты, помещенные в пространство. Они состоят из точек, отрезков и кривых. Чтобы каркасная модель стала полноценной пространственной моделью, на нее нужно натянуть поверхности командами создания поверхностей.

При моделировании пространственных объектов поверхностями создаются не только ребра, но и грани объектов. Сами поверхности в свою очередь моделируются плоскими треугольными и четырехугольными мозаичными кусочками, образуя структуру, называемую сетью.

Оборудование и материалы.

Персональный компьютер, программа MathCAD.

Указания по технике безопасности:

Соответствуют технике безопасности по работе с компьютерной техникой.

Задания

Рассмотрим сначала, как решается дифференциальное уравнение первого порядка. На рис. 3.10 приведена электрическая цепь, содержащая последовательно соединенные индуктивную катушку L и резистор R.

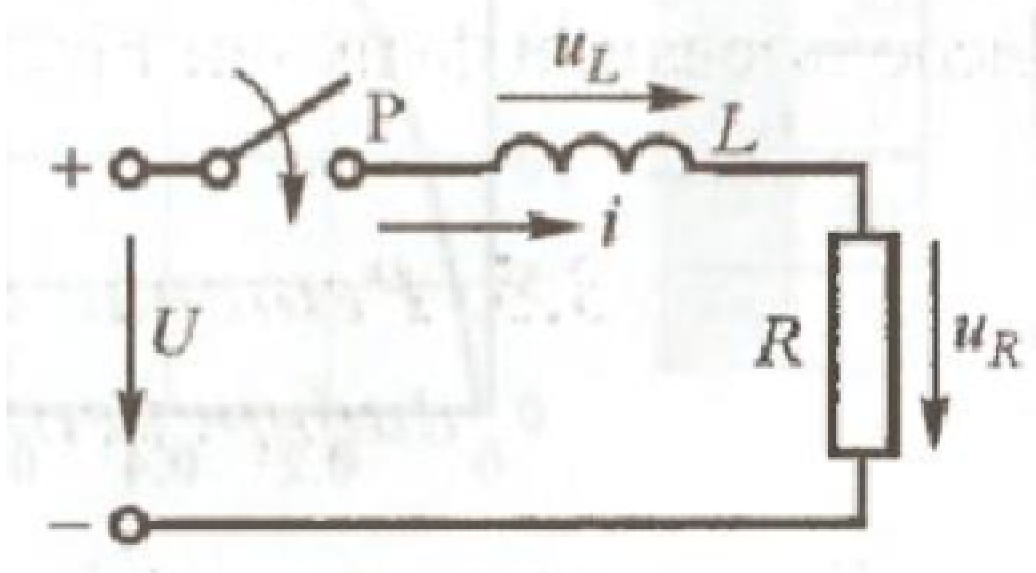


Рис. 3.10. Включение цепи *R*, *L* на постоянное напряжение

Замыканием рубильника P цепь подключается к источнику постоянного напряжения U и по цепи начинает протекать ток i. В цепи возникает переходный процесс. Требуется определить ток переходного процесса i. Известно, что после замыкания рубильника P состояние цепи описывается уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа:

$$u_L + u_R = U \quad \text{или} \quad L\frac{di}{dt} + Ri = U .$$

Таким образом, нахождение тока i сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка.

Покажем интегрирование дифференциального уравнения, записанного в форме Коши

$$\frac{di}{dt} = \frac{U - Ri}{L},$$

численным методом Эйлера первого порядка (простым методом Эйлера). Рекуррентная формула численного интегрирования дифференциального уравнения запишется:

$$i_{k+1} = i_k + \left(\frac{di}{dt}\right) \cdot \Delta t .$$

Согласно этой формуле интегрирование производится с шагом Δt и значение функции на шаге к+1 находится по известному значению функции на шаге k и приращению ее на данном шаге. Сказанное иллюстрирует рис. 3.11. Постоянная времени цепи $\tau = L/R = 0{,}2$ с.

Расчет переходного процесса методом Эйлера в линейной цепи R, L при подключении ее к источнику постоянного напряжения

Дано: $U := 100$ В, $R := 4$ Ом, $L := 0.8$ Гн

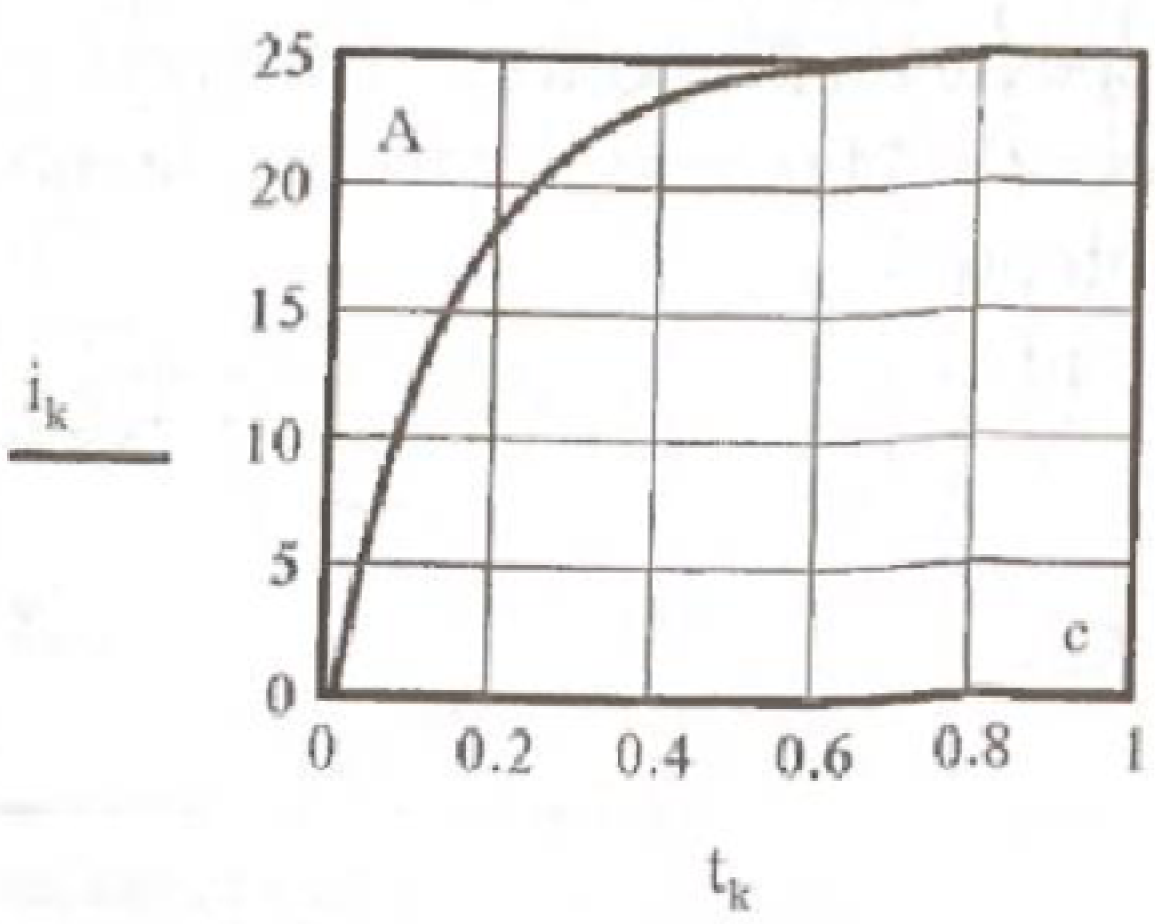
Начальное значение тока по первому закону коммутации $i_0 := 0$

$k := 0..9$ Индексная переменная

$dt := 0.1$ $t_k := k \cdot dt$ Шаг интегрирования и текущее время

Рекуррентная формула численного интегрирования

$$i_{k+1} := i_k + \frac{U - R \cdot i_k}{L} \cdot dt$$



i =

	0
0	0
1	12.5
2	18.75
3	21.875
4	23.438
5	24.219
6	24.609
7	24.805
8	24.902
9	24.951
10	24.976

Рис. 3.11. Расчет переходного процесса в цепи R, L методом Эйлера

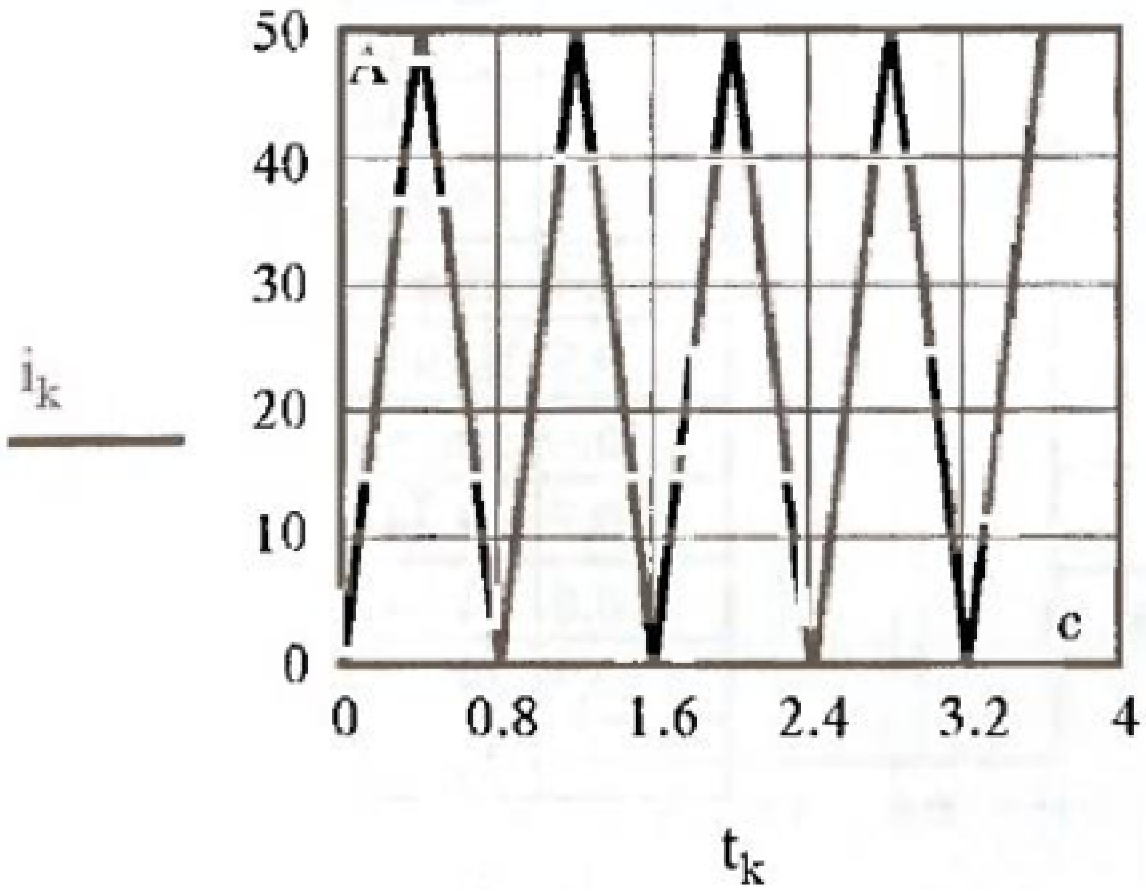
Длительность переходного процесса примерно равна 4τ = 0,8 с. Время интегрирования выбрано равным 0,9 с. Начальное значение тока по первому закону коммутации принято равным нулю.

Метод Эйлера прост, но для получения приемлемой точности шаг интегрирования должен быть относительно небольшим. Чем меньше шаг, тем больше точность. При большом шаге интегрирования процесс может оказаться неустойчивым. Введите, например, шаг = 0,4 с, и Вы увидите, что процесс не приходит к установившемуся току (рис. 3.12).

Расчет переходного процесса методом Эйлера в той же цепи (рис. 3.10) при увеличенном шаге интегрирования

$U := 100$ В $R := 4$ Ом $L := 0.8$ Гн $i_0 := 0$ $k := 0..9$

$dt := 0.4$ $t_k := k \cdot dt$ $i_{k+1} := i_k + \frac{U - R \cdot i_k}{L} \cdot dt$



i =

	0
0	0
1	50
2	0
3	50
4	0
5	50
6	0
7	50
8	0
9	50
10	0

Рис. 3.12. Неустойчивый процесс при увеличении шага интегрирования

Чтобы решение получилось более точным, применяют модифицированный метод Эйлера, когда находят значение производной не только в начале, но и в конце интервала интегрирования (шага интегрирования), и берут среднее значение производной на интервале.

Еще более точные результаты дает метод Рунге—Кутта 4-го порядка. MATHCAD содержит набор функций для решения дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутта. Рассмотрим, как используется функция rkfixed для решения приведенного выше дифференциального уравнения (рис. 3.13). Rkfixed — это функция интегрирования дифференциальных уравнений в форме Коши с начальными условиями методом Рунге—Кутта четвертого порядка (rk) с фиксированным шагом (fixed). В скобках функции перечисляются через запятую: вектор начальных условий, начальная и конечная точки интервала интегрирования, число точек, не считая нулевой точки, и функция первых производных искомых функций.

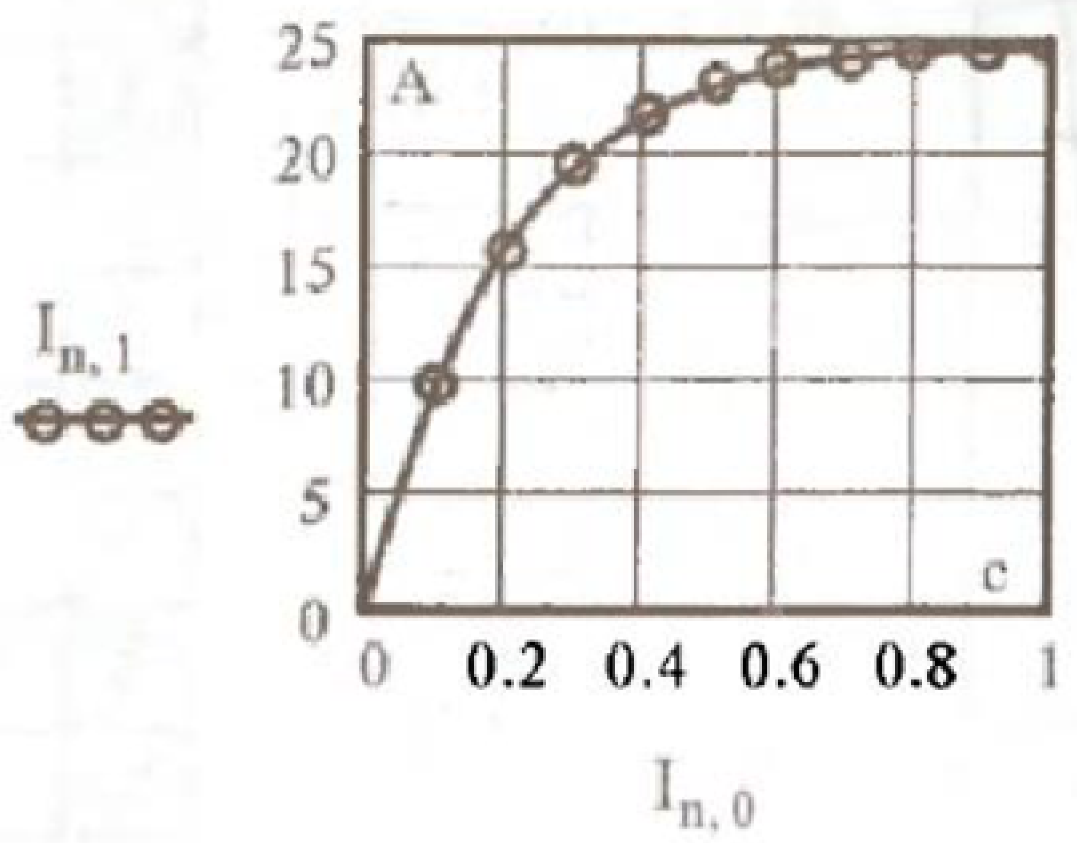
Расчет переходного процесса в той же цепи (рис. 3.10) методом Рунге—Кутта

$U := 100$ В, $R := 4$ Ом, $L := 0.8$Гн $\qquad i_0 := 0$

$D(t, i) := \dfrac{U - R \cdot i}{L}$ — Определение функции, задающей производную тока

$I := \mathrm{rkfixed}(1, 0, 1, 10, D)$ — Вычисление решения в10 точках на отрезке [0-1]

$n := 0..10$ — Индексная переменная для построения графика по 10 точкам



$I =$

0	0
0.1	9.831
0.2	15.796
0.3	19.415
0.4	21.611
0.5	22.944
0.6	23.752
0.7	24.243
0.8	24.541
0.9	24.721
1	24.831

Рис. 3.13. Расчет переходного процесса в цепи R, L методом Рунге—Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом интегрирования

В нашем случае речь идет только об одной неизвестной. Для функции первой производной D(t, i) в скобках указывается сначала переменная, по которой берется производная (в нашем случае это t), и через запятую указывается функция, от которой берется производная (в нашем случае это i).

При использовании функции rkfixed решение одного дифференциального уравнения получается в виде матрицы I, имеющей два столбца. Первый столбец содержит точки, в которых ищется решение дифференциального уравнения (время (). Второй столбец содержит значения найденного решения (тока г) в заданных точках t. На рис. 3.13 при построении графика i-i(t) по оси абсцисс (по оси x) откладываются значения первого столбца In 0 матрицы 1, а по оси ординат (по оси y) откладываются значения второго столбца 1п | матрицы I.

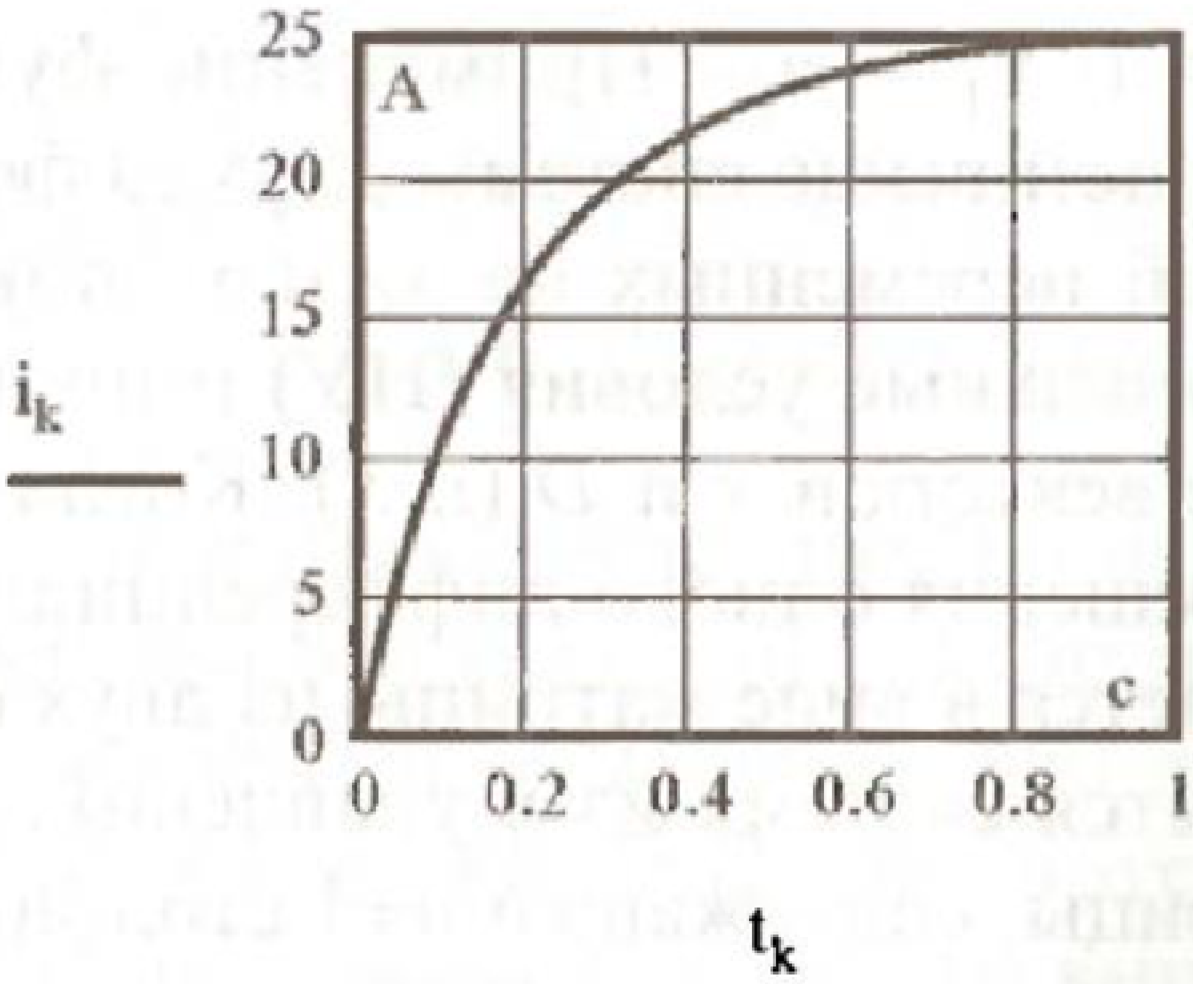
Как видно из рис. 3.13, метод Рунге-Кутга дает более точные результаты. Близкие к ним результаты можно получить, взяв более мелкий шаг в методе Эйлера. Например, на рис. 3.14 шаг и[illegible] dt = 0,001 с, это значительно повысило точность расчетов.

Расчет переходного процесса методом Эйлера в той же цепи (рис. 3.10) при малом шаге интегрирования

$U := 100$ В, $\quad R := 4$ Ом, $\quad L := 0.8$ Гн $\qquad i_0 := 0$

$k := 0..\,1000 \qquad dt := 0.001 \qquad t_k := k \cdot dt$

$$i_{k+1} := i_k + \frac{U - i_k \cdot R}{L} \cdot dt \qquad n := 0, 100..\,1000$$



$i_n =$
0
9.856
15.826
19.443
21.634
22.961
23.765
24.252
24.547
24.725
24.834

Рис. 3.14. Расчет переходного процесса в цепи R, L методом Эйлера при малом шаге интегрирования

Функция rkfixed интегрирует с фиксированным числом шагов. Имеются также функции, которые интегрируют с переменным шагом.
Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений второго порядка на примере включения цепи, содержащей последовательно включенные элементы R, L, C на постоянное напряжение U (рис. 3.15).

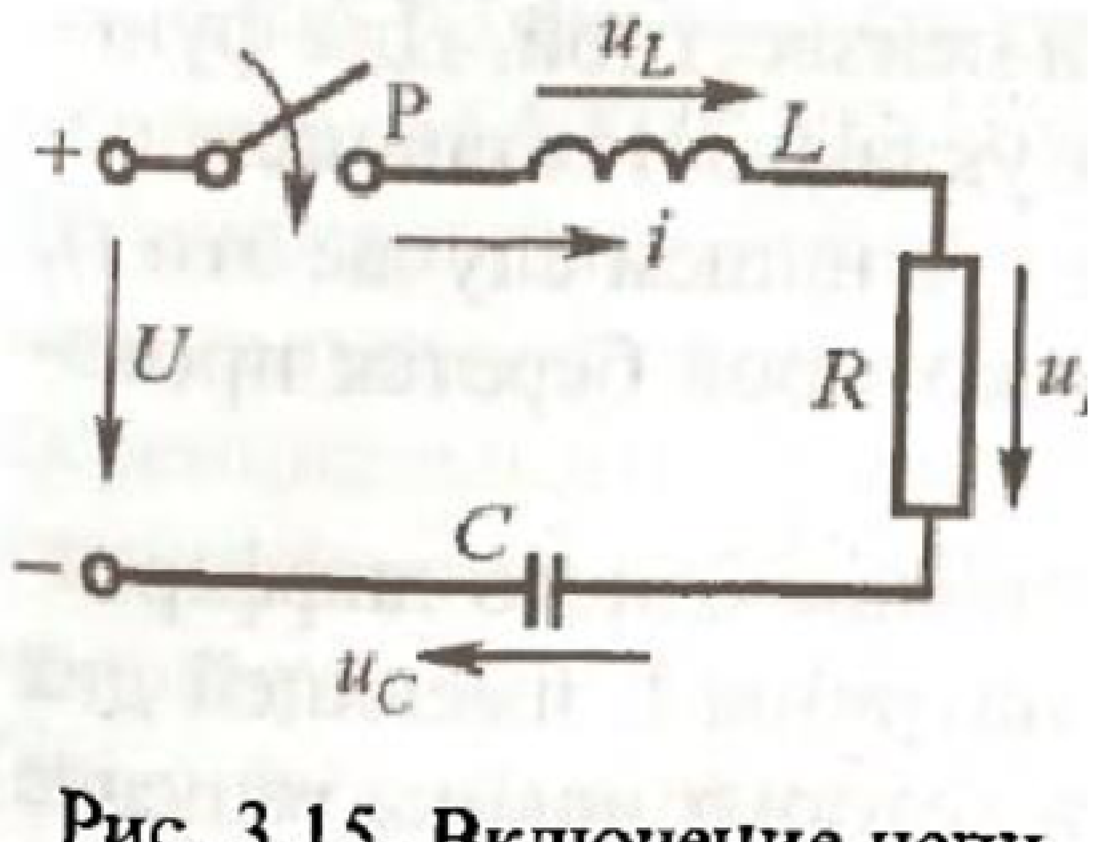


Рис. 3.15. Включение цепи R, L, C на постоянное напряжение

Дано: U = 100 В, R = 15 Ом, L = 0,1 Гн, С = 200 мкФ.
Система уравнений для послекоммутационной схемы:

$$u_L + u_R + u_C = U, \ \ i = C\frac{du_C}{dt}.$$

Или

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = U, \quad i = C\frac{du_C}{dt}.$$

Запишем уравнения в форме Коши:

$$\frac{di}{dt} = \frac{U - Ri - u_C}{L}, \qquad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i.$$

Введем переменные

$$x_0 = i, \ x_1 = u_C.$$

Применение функции rkfixed для решения приведенной выше системы двух дифференциальных уравнений с заменой переменных на x0 и x1 показано на рис. 3.16.

В этом случае начальные условия (НУ) и производные функций задаются в виде векторов x и D (t, x). Когда функция rkfixed применяется для решения одного дифференциального Уравнения, то решение получается в виде матрицы из двух столбцов. В том случае, если решается система из n уравнений, то решение получается в виде матрицы, содержащей n+1 столбцов. На рис. 3.16 такая матрица обозначена буквой Z. Первый столбец матрицы соответствует времени, второй — току, а третий — напряжению на конденсаторе.

Решение системы из двух дифференциальных уравнений с помощью функции rkfixed

Дано: U := 100 В R := 18 Ом L := 0.1 Гн C := $200 \cdot 10^{-6}$

Вектор начальных условий (НУ):

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор производных:

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \dfrac{U - (R \cdot x)_0 - x_1}{L} \\ \dfrac{1}{C} \cdot x_0 \end{bmatrix}$$

Z := rkfixed(x, 0, 0.06, 300, D) n := 0.. 300

Ток $i_n := Z_{n,1}$ Напряжение $u_n := Z_{n,2}$ Время $t_n := \dfrac{0.06}{300} \cdot n$

График строится по 300 точкам: Индекс для вывода 7 точек k := 0 ,50.. 300