МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

УТВЕРЖДАЮ

Директор Пятигорского института (филиал) СКФУ
Т.А. Шебзухова

ПМ.02 ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЦИИ ПРОГРАММНЫХ МОДУЛЕЙ

МДК 02.03 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Специальности СПО

09.02.07 Информационные системы и программирование

Пятигорск, 2023 г.

Методические указания для практических занятий по дисциплине МДК 02.03 Математическое моделирование составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема Построение простейших математических моделей.

Цель работы: закрепить практические навыки по построению простейших математических.

Краткая теория

Построение математической модели процесса, явления или объекта начинается с построения упрощенного варианта модели, в котором учитываются только основные черты. В результате прослеживаются основные связи между входными параметрами, ограничениями и показателем эффективности. Общего подхода к построению модели нет. В каждом конкретном случае при построении математической модели учитывается большое количество факторов: цель построения модели, круг решаемых задач, точность описания модели и точность выполнения вычислений. Математическая модель должна отражать все существенные факторы, определяющие ее поведение, и при этом быть простой и удобной для восприятия результатов. Каждая математическая модель процесса, явления или объекта в своей основе имеет математический количественный метод.

Применение математических количественных методов для обоснования выбора того или иного управляющего решения во всех областях человеческой деятельности называется *исследованием операций.* Целью исследования операций является нахождение с использованием специального математического аппарата решения, удовлетворяющего заданным условиям. На самом деле при решении практически любой задачи имеется неограниченное количество решений. Множество решений, удовлетворяющих заданным условиям (ограничениям), называется допустимым множеством решением. Выбор из множества допустимых решений одного решения, наилучшего в каком-либо смысле, называемого *оптимальным* решением, и есть задача исследования операций.

Модель — это материальный или идеальный объект, заменяющий оригинал, наделенный основными характеристиками (чертами) оригинала и предназначенный для проведения некоторых действий над ним с целью получения новых сведений об оригинале.

Рис. 1. Классификация моделей

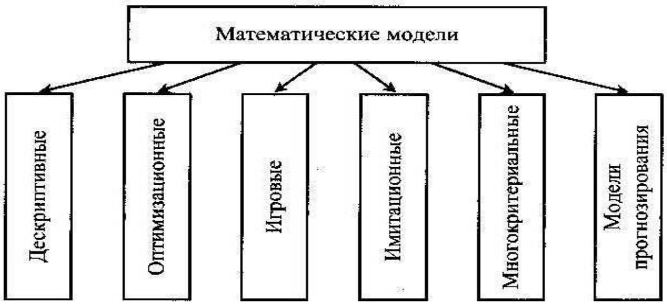


Рис. 2. Классификация математических моделей

При построении математической модели необходимо обеспечить *достаточную* точность вычислений (точность решения) и *необходимую* подробность модели. Любая математическая модель включает в себя описание основных, т. е. *необходимых* для исследования свойств и законов функционирования исследуемого объекта, процесса или явления. В своей основе каждая математическая модель имеет целевую функцию, которая описывает функционирование реального объекта, процесса или явления. В зависимости от исследуемого (моделируемого) объекта, явления или процесса *целевая функция* может быть представлена одной функциональной зависимостью, системой уравнений (линейных, нелинейных, дифференциальных и т. д.), набором статистических данных и т. д. При работе с целевой функцией исследователь воздействует на нее через ***набор входных параметров*** (рис. 3).

Входной параметр 1		Выходной параметр 1
Входной параметр 2		Выходной параметр 2
Входной параметр 3	Модель системы	Выходной параметр 3
Входной параметр n- 1	(объекта или процесса)	Выходной параметр m - 1
Входной параметр n		Выходной параметр m

Рис. 3. Обобщенная схема математической модели

По способу реализации математические модели можно разделить следующим образом.

1. Линейное программирование.

Математическая модель целиком (целевая функция и ограничения) описывается уравнениями первого порядка. Линейное программирование включает в себя несколько методов решения (задач):

- симплексный;
- графический;
- транспортная задача;
- целочисленное программирование.

2. Нелинейное программирование.

Целевая функция и ограничения, составляющие математическую модель, содержат хотя бы одно нелинейное уравнение (уравнение второго порядка и выше). Нелинейное программирование содержит несколько методов решения (задач):

- графический;
- регулярного симплекса;
- деформируемого многогранника (Нелдера - Мида);
- градиентный.

3. Динамическое программирование.

Ориентировано на решение задач прокладки магистралей кратчайшим путем и перераспределения различных видов ресурсов.

4. Сетевое планирование.

Решает проблему построения графика выполнения работ, распределения производственных, финансовых и людских ресурсов.

5. Принятие решений и элементы планирования.

В этом случае и качестве целевой функции выступает набор статистических данных или некоторые данные прогноза. Решением задачи являются рекомендации о способах поведения (стратегии). Решение носит рекомендательный характер (приблизительное решение). Выбор стратегии целиком остается за человеком — ответственным лицом, принимающим решение. Для принятия решения разработаны следующие теории:

- теория игр;
- системы массового обслуживания.

Задание 1. Составить математическую модель следующей задачи. На складе имеется 300 кг сырья. Надо изготовить два вида продукции. На изготовление первого изделия требуется 2 кг сырья, а на изготовление второго изделия — 5 кг. Определить план выпуска двух изделий.

Решение.

Обозначим, x1 – единица первого изделия, x2 – единица второго изделия. Тогда составим математическая модель: 2x1+5x2=300.

Задание 2. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал 3-х сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется 14 кг первого сорта, 12 кг второго сорта и 8 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется 8 кг первого сорта, 4 кг второго сорта, 2 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта 624 кг, второго сорта 541 кг, третьего сорта 376 кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида 7 руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида 3 руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

Решение.

Составим математическую модель задачи:

Пусть x1 – единица готовой продукции вида А, x2 - единица готовой продукции вида В,

Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов

А и В, тогда:

$F = 7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \max$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 \le 624 \\ 12x_1 + 4x_2 \le 541 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 376 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ *условие неотрицательности*

Задание 3. Составить математическую модель следующей задачи. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве 200, 450, 250 тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно 100, 125, 325, 250, 100 тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**
А1	5	8	7	10	3
А2	4	2	2	5	6
А3	7	3	5	9	2

Решение:

Проверка сбалансированности модели задачи. Модель является сбалансированной, т.к. суммарный объем запасов сырья равен суммарному объему потребности в ней:

200+450+250=100+125+325+250+100.

Построение математической модели – неизвестными в этой задачи является объем перевозок. Пусть x_{ij} - объем перевозок с i-го предприятия в j-го пункт потребления. Суммарные транспортные расходы - это функционал качества (критерий цели): $F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$,

Где c_{ij} - стоимость перевозки единицы продукции с i-го предприятия в j-й пунктах потребления.

Неизвестные в этой задачи должны удовлетворять следующим ограничениям:

Объем перевозок не могут быть отрицательными;

Поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятия, а потребность всех пунктов потребления должна быть полностью удовлетворены.

Итак, имеем следующую задачу:

Найти минимум функционала: $F = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min,$

При ограничениях: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 100, & \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 125, & \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 325, & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 200, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 250, & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 450, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 100, & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 250, \end{cases}$ $x_{ij} \geq 0, i \in \lfloor 1,3 \rfloor, j \in \lfloor 1,5 \rfloor.$,

Задания для самостоятельной работы

1 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *a1* кг первого сорта, *a2* кг второго сорта и *a3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *c1* кг, второго сорта *c2* кг, третьего сорта *c3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 19, a2= 16, a3= 19, b1= 26, b2= 17, b3= 8, c1= 868, c2= 638, c3= 853,

$\alpha=5$, $\beta=4$.

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве *a1, a2 и a3* тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно *b1, b2, b3, b4, b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	В1	В2	В3	В4	В5

A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=300, a2=250, a3=200, *b1=210, b2=150, b3=120, b4=135, b5=135* .	$D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *a1* кг первого сорта, *a2* кг второго сорта и *a3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *c1* кг, второго сорта *c2* кг, третьего сорта *c3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.
a1= 14, a2= 15, a3= 20, b1= 40, b2= 27, b3= 4, c1= 1200, c2= 993, c3= 1097,
α*=5,* β*=13.*

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза A1, A2, A3 и пять пунктов B1, B2, B3, B4, B5 потребления этого груза. На пунктах A1, A2 и A3 находится груз соответственно в количестве *a1, a2 и a3* тонн. В пункты B1, B2, B3, B4, B5 требуется доставить соответственно *b1, b2, b3, b4, b5* тонн груза.

Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=350, a2=200, a3=300, *b1=170, b2=140, b3=200, b4=195, b5=145* .	$D = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что такое модель?
2. Приведите классификацию моделей.
3. Какие вы знаете виды математических моделей?
4. Дайте определение целевой функции.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема Построение простейших статистических моделей

Цель работы: закрепить практические навыки по построению простейших статистических моделей.

1 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида A и B можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида A расходуется a1 кг первого сорта, a2 кг второго сорта и a3 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида B расходуется b1 кг первого сорта, b2 кг второго сорта, b3 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта c1 кг, второго сорта c2 кг, третьего сорта c3 кг. От реализации единицы готовой продукции вида A фабрика имеет прибыль вида α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида B фабрика имеет прибыль вида β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов A и B.

a1= 9, a2= 15, a3= 15, b1= 27, b2= 15, b3= 3, c1= 606, c2= 802, c3= 840,

α=11, β=6.

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза A1, A2, A3 и пять пунктов B1, B2, B3, B4, B5 потребления этого груза. На пунктах A1, A2 и A3 находится груз соответственно в количестве a1, a2 и a3 тонн. В пункты B1, B2, B3, B4, B5 требуется доставить соответственно b1, b2, b3, b4, b5 тонн груза.

Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=200, a2=250, a3=200, *b1=190, b2=100, b3=120, b4=110, b5=130* .	$D = \begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \end{pmatrix}$

4 Вариант

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *a1* кг первого сорта, *a2* кг второго сорта и *a3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *c1* кг, второго сорта *c2* кг, третьего сорта *c3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 13, a2= 13, a3= 11, b1= 23, b2= 11, b3= 1, c1= 608, c2= 614, c3= 575,
$\alpha=5$, $\beta=7$.

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза A1, A2, A3 и пять пунктов B1, B2, B3, B4, B5 потребления этого груза. На пунктах A1, A2 и A3 находится груз соответственно в количестве *a1, a2 и a3* тонн. В пункты B1, B2, B3, B4, B5 требуется доставить соответственно *b1, b2, b3, b4, b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=230, a2=250, a3=170, *b1=140, b2=90, b3=160, b4=110, b5=150* .	$D = \begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \end{pmatrix}$

5 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *a1* кг первого сорта, *a2* кг второго сорта и *a3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *c1* кг, второго сорта *c2* кг, третьего сорта *c3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

a1= 19, a2= 16, a3= 19, b1= 31, b2= 9, b3= 1, c1= 1121, c2= 706, c3= 1066,
α*=16,* β*=19.*

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза A1, A2, A3 и пять пунктов B1, B2, B3, B4, B5 потребления этого груза. На пунктах A1, A2 и A3 находится груз соответственно в количестве *a1, a2 и a3* тонн. В пункты B1, B2, B3, B4, B5 требуется доставить соответственно *b1, b2, b3, b4, b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	B2	B3	B4	B5
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

$a1=200,\ a2=300,\ a3=250,$ $b1=210,\ b2=150,\ b3=120,\ b4=135,\ b5=135$.	$D = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{bmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение целевой функции.
2. Что такое область допустимых решений?
3. Что называется допустимым решением, оптимальным решением?
4. Какие способы реализации математических моделей вы знаете?

Практическое занятие №3

«Решение простейших однокритериальных задач»

Цели занятия:

1. Отработать и закрепить умения графически решать системы неравенств с двумя переменными.

2. Отработать и закрепить умения записывать взаимосвязь показателей задачи в виде математической модели.

Методические указания к выполнению заданий практического занятия

Решение системы неравенств с двумя переменными графическим методом включает следующие этапы.

1. На плоскости X_1OX_2 строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств.

3. Строят многоугольник решений.

Пример:

Решить систему неравенств графическим способом.

$$P = \begin{cases} X_1 + 2 \cdot X_2 \le 6 & (а) \\ 2 \cdot X_1 + X_2 \le 8 & (б) \\ X_1 + 0.8 \cdot X_2 \le 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 \le 1 & (\ \ ) \\ X_2 \le 2 & (д) \\ X_1 \ge 0,\ \ X_2 \ge 0 & (е) \end{cases}$$

Решение:

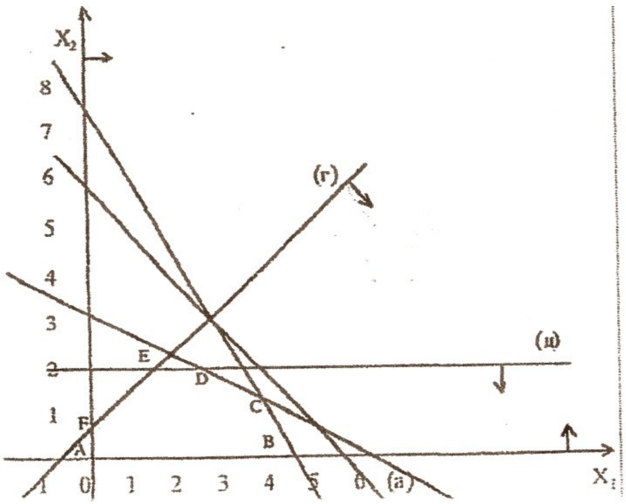
<u>Шаг 1.</u> Строим область допустимых решений - область P, т.е. геометрическое место точек, в котором одновременно удовлетворяются все ограничения ЗЛП. Каждое из неравенств (а)-(д) системы ограничений задачи

геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$X_1 + 2 \cdot X_2 = 6 \quad (а)$$
$$2 \cdot X_1 + X_2 = 8 \quad (б)$$
$$X_1 + 0.8 \cdot X_2 = 5 \quad (в)$$
$$-X_1 + X_2 = 1 \quad (г)$$
$$X_2 = 2 \quad (д)$$

Условия неотрицательности переменных (е) ограничивают область допустимых решений первым квадратом. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных

Решение системы – многоугольник ABCDEF.



Вариант 1

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + x_2 \leq 5$

$3x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

б) $x_1 + x_2 \leq 4$

$6x_1 + 2x_2 \geq 6$

$x_1 + 5x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений:

Чулочно-носочная фирма производит и продает два вида товаров: мужские носки и женские чулки. Фирма получает прибыль в размере 10 руб. от производства и продажи одной пары чулок и в размере 4 руб. от производства и продажи одной пары носков. Производство каждого изделия осуществляется на трех участках. Затраты труда (в часах) на производство одной пары указаны в следующей таблице для каждого участка:

Участок производства

Чулки

Носки

1

0,02

0,01

2

0,03

0,01

3

0,03

0,02

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма ежедневно будет располагать следующими ресурсами рабочего времени на каждом из участков: 60 ч на участке 1; 70 ч на участке 2 и 100 ч на участке 3. Сколько пар носков и чулок следует производить ежедневно, если фирма хочет максимизировать прибыль?

Вариант 2

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + x_2 \leq 5$

$3x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

б) $x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 9$

$-x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 + x_2 \geq 3/2$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений:

После предпринятой рекламной компании фирма «Отдых» испытывает рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе – газовые и угольные. Фирма заключила контракт на ежемесячную поставку в магазины 300 угольных и 300 газовых мангалов. Производство мангалов ограничивается мощностью следующих трех участков: производства деталей, сборки и упаковки. В таблице показано, сколько человекочасов затрачивается на каждом участке на каждую единицу продукции, а также приведен допустимый ежемесячный объем трудозатрат:

Участок
Трудозатраты на производство одного мангала, ч
Фонд времени, человекочасы
угольного
газового
Производство
5
8
2600
Сборка
0,8
1,2
400
Упаковка
0,5
0,5
200

Вариант 3

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + 3x_2 \geq 3$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

б) $-x_1 + 3x_2 \leq 9$
$2x_1 + 3x_2 \leq 18$
$2x_1 - x_2 \leq 10$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений:

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы каждого вида товара и прибыль, получаемая предприятием, а также объем ресурсов указаны в таблице. Составить план выпуска товаров, дающий максимальную прибыль.

Ресурсы
Затраты ресурсов на 1 ед. товара
Объем ресурсов

1
2
3
4
Сырье, кг
3
5
2
4
60
Рабочая сила, чел.
22
14
18
30
400
Оборудование, станко-ч
10
14
8
16
130
Прибыль на 1 ед.товара, руб.
30
25
56
48

Вариант 4

1. Решить графически систему неравенств:

а) $x_1 + 3x_2 \geq 3$
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

б) $x_1 - x_2 \leq 3$
$2x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 - 3x_2 \leq 1$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2. Составить математическую модель задачи и найти решение системы ограничений:

Обработка деталей А и В может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали А – 100 ден. ед., детали В – 160 ден. ед. Исходные данные приведены в таблице. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь А не менее 300 шт., на деталь В - не более 200 шт.

Станок	Норма времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема Основы работы с Math CAD

Mathcad работает с *документами*. С точки зрения пользователя, документ - это чистый лист бумаги, на котором можно размещать области трех основных типов: математические выражения, текстовые фрагменты и графические области.

Математические выражения

К основным элементам математических выражений Mathcad относятся т*ипы данных, операторы, функции и управляющие структуры*.

Типы данных

К *типам данных* относятся числовые константы, обычные и системные переменные, массивы (векторы и матрицы) и данные файлового типа.

Константами называют поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. *Переменные* являются поименованными объектами, имеющими некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Имена констант, переменных и иных объектов называют *идентификаторами*. Идентификаторы в Mathcad представляют собой набор латинских или греческих букв и цифр.

В Mathcad содержится небольшая группа особых объектов, которые нельзя отнести ни к классу констант, ни к классу переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Их правильнее считать системными переменными, имеющими предопределенные системой начальные значения.

Обычные переменные отличаются от системных тем, что они должны быть предварительно определены пользователем, т. е. им необходимо хотя бы однажды присвоить значение. В качестве оператора присваивания используется знак :=, тогда как знак = отведен для вывода значения константы или переменной.

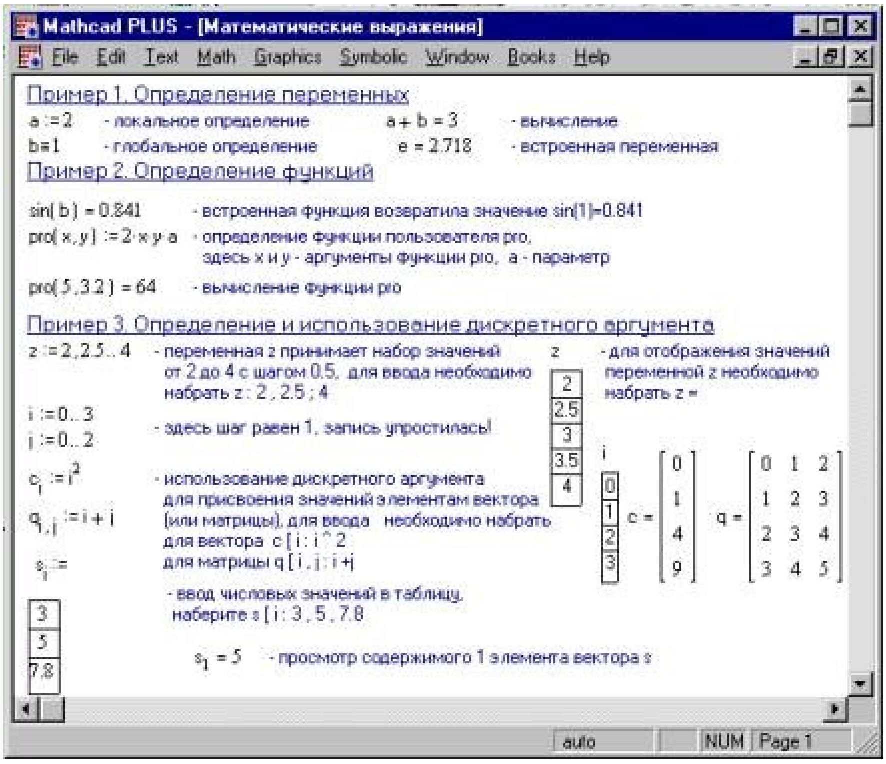


Рисунок 1. Математические выражения

Если переменной присваивается начальное значение с помощью оператора:=, такое присваивание называется локальным. До этого присваивания переменная не определена и ее нельзя использовать. Однако с помощью знака ≡ можно обеспечить глобальное присваивание (см. Пример 1 Рисунка 1). Существует также жирный знак равенства, который используется, например, как оператор приближенного равенства при решении систем уравнений.

Операторы

Операторы - элементы Mathcad, с помощью которых можно создавать математические выражения. К ним, например относятся символы арифметических операций, знаки вычисления сумм, произведений, производной и интеграла и т.д.

После указания операндов (параметров операторов) операторы становятся исполняемыми по документу блоками, например, 2 + 5 -оператор сложения с двумя операндами. В Приложении 2 данного пособия приведен список наиболее часто используемых операторов.

Функции

В пакете Mathcad имеется множество встроенных функций, т.е. функций, заблаговременно введенных разработчиками (см. Приложение 3). Главным признаком функции является возврат значения, т.е. функция в ответ на обращение к ней по имени с указанием ее аргументов должна возвратить свое значение.

Важной особенностью пакета является возможность задания внешних функций, или функций пользователя. Следует особо отметить разницу между аргументами и параметрами функции. Переменные, указанные в скобках после имени функции, являются ее аргументами и заменяются при вычислении функции значениями из скобок. Переменные в правой части определения функции, не указанные скобках в левой части, являются параметрами и должны задаваться до определения функции (см. Пример 2 Рисунка 1).

Дискретные аргументы

Дискретные аргументы - особый класс переменных, который в пакете Mathcad зачастую заменяет управляющие структуры, называемые циклами (однако полноценной такая замена не является). Эти переменные имеют ряд фиксированных значений, либо целочисленных, либо в виде чисел с определенным шагом, меняющихся от начального значения до конечного.

Дискретные аргументы значительно расширяют возможности Mathcad, позволяя выполнять многократные вычисления или циклы с повторяющимися вычислениями, формировать векторы и матрицы (Пример 3 Рисунка 1).

Массивы

Массив - имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных некоторым образом и имеющих определенные адреса. В пакете Mathcad используются массивы двух наиболее распространенных типов: одномерные (векторы) и двумерные (матрицы).

Порядковый номер элемента, который является его адресом, называется индексом. Индексы могут иметь только целочисленные значения. Они могут начинаться с нуля или единицы, в соответствии со значением системной переменной **ORIGIN** (см. Приложение 1).

Векторы и матрицы можно задавать различными способами:

- с помощью команды **Math->Matrics**,
- с использованием дискретного аргумента (Пример 3 Рисунка 1).

Текстовые фрагменты

Текстовые фрагменты представляют собой куски текста, которые пользователь хотел бы видеть в своем документе. Существуют два вида текстовых фрагментов - текстовая область (**region**) и текстовый диапазон (**band**). Текстовые области предназначены для небольших кусков текста - подписей, комментариев и т.п. Текстовые диапазоны применяются в том случае, если необходимо работать с абзацами или страницами.

Графические области

Графические области делятся на три основных типа - двумерные графики, трехмерные графики и импортированные графические образы. Двумерные и трехмерные графики строятся самим Mathcad на основании обработанных данных.

Создание анимационного клипа

Mathcad имеет встроенную переменную **FRAME**, чье единственное назначение - управление анимациями:

- Создайте объект, чей вид зависит от **FRAME**.
- Выберите **Windows->Animation->Create** для вызова диалогового окна.
- Заключите в выделяющий пунктирный прямоугольник часть рабочего документа, которую нужно анимировать.
- Установите нижние и верхние границы **FRAME**.
- В поле **At (Темп)** введите значение скорости воспроизведения (кадр/сек).
- Выберите **Animate**. Сейчас анимация только создается.
- Сохраните анимацию как **AVI** файл (Save as).

- Воспроизведите сохраненную анимацию **Windows->Animation-> Playback**.

Сообщения об ошибках

При выполнении вычислений возможны ошибки. Сообщение об ошибке в Mathcad выводится в красном прямоугольнике, от которого отходит линия, указывающая на место ошибки. В Приложении 4 приведен список сообщений об ошибках.

Порядок выполнения

Задание 1. Вычислить:

$\sqrt{100} =$, |-10| = , 10! = .

Это и все остальные задания снабдить комментариями, используя команды **Text Ю Create Text Region** или **Text Ю Create Text Paragraph**.

Задание 2. Іпределить переменные: $a := 3.4$, $b := 6.22$, $c \equiv 0.149$ (причем переменную *c* - глобально) и выражения:

$Z := \frac{2ab + \sqrt[3]{c}}{\sqrt{\left(a^2 + b^{a+c}\right) \cdot c}}$, $N := e^{\sin c} \cos \frac{a}{b}$.

- вычислить выражения.
- С помощью команды **Math Ю Numerical Format Ю Displayed Precision** изменить точность отображения результатов вычисления *глобально*.

Задание 3. Вывести на экран значение *системной константы* p и установить максимальный формат ее отображения *локально*.

Задание 4. Выполнить следующие операции с комплексными числами:

Z:= -3 + 2*i*, |*Z*| = , *Re*(*Z*) = , *Im*(*Z*) = , *arg*(*Z*) = ,

$\sqrt{Z}$ = , $\sqrt{-5}$ =, 2 *Z* = ,

*Z*1:= 1+2*i*, *Z*2:= 3+4*i*, *Z*1+*Z*2 = , *Z*1 - *Z*2 = , *Z*1 *Z*2 = , *Z*1/*Z*2 = .

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

Тема Решение уравнений

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Однако такие уравнения могут решаться итерационными методами с заданной точностью.

Итерационные методы

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационными методами состоит в следующем:

- *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня (например, графическим методом);
- *уточнение корней* - доведение их значений до заданной степени точности e .

При использовании *метода Нъютона* необходимо задаться начальным приближением x_0, расположенным достаточно близко к точному значению корня. Итерационный процесс строится по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ f'(x_i) \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

Метод *простых итераций* решения уравнения $f(x) = 0$ состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением $x = j(x)$ и построении итерационной последовательности по формуле:

$$x_{i+}1 = j(x_i),\ i = 0, 1, \ldots \qquad (2)$$

Достаточным условием сходимости рассмотренных итерационных процессов является выполнение неравенства

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon \qquad (3)$$

на каждом шаге итерации.

until(*a*, *z*) возвращает *z*, пока выражение *a* не становится отрицательным; *a* должно содержать дискретный аргумент.

Рисунок 2 иллюстрирует использование функции *until* для реализации *метода Ньютона*.

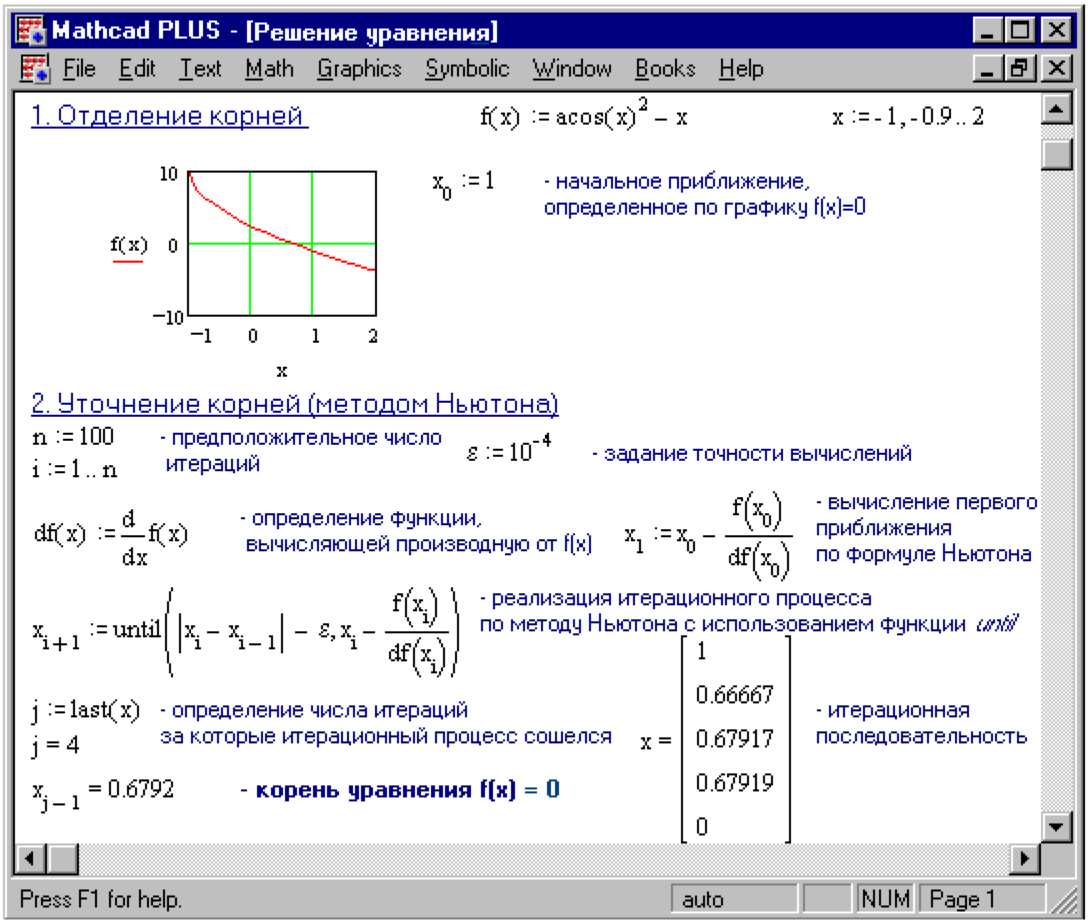


Рисунок 1.

Решение уравнений средствами Mathcad

Для простейших уравнений вида $f(x) = 0$ решение находится с помощью функции *root*.

root (*f*(*z*), *z*)	Возвращает значение *z*, при котором выражение или функция *f*(*z*) обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Первый аргумент - или функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Второй аргумент - имя переменной, которая используется в выражении. Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение.

Для нахождения корней выражения, имеющего вид

$v_n x^n + \ldots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0$,

лучше использовать функцию *polyroots*, нежели *root*. В отличие от функции *root*, функция *polyroots* не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

polyroots(**v**)	Возвращает корни полинома степени *n*. Коэффициенты полинома находятся в векторе **v** длины *n* + 1. Возвращает вектор длины *n*, состоящий из корней полинома.

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*.

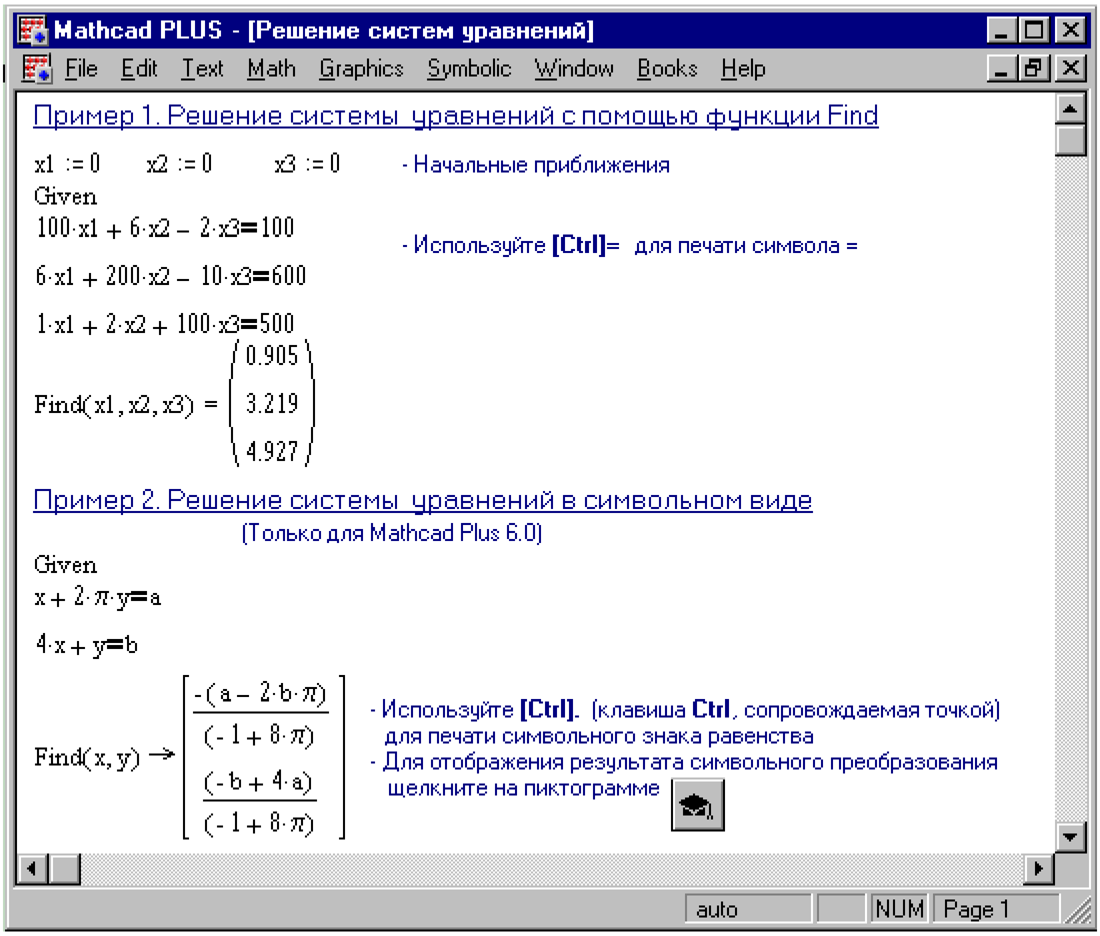


Рисунок 2. Решение систем уравнений

lsolve(**M, v**)	Возвращается вектор решения **z** такой, что **M** * **z** = **v**.

При решении систем уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом *Given* и оканчивающийся выражением с функциями *Find* или *Minerr*.

Find(*z1, z2, . . .*)	Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.
Minerr(*z1, z2, . . .*)	Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Пример 1 на Рисунке 2 иллюстрирует решение системы уравнений с помощью вычислительного блока *Given ... Find*.

Символьное решение уравнений и систем уравнений

Если задано некоторое выражение $f(x)$ и отмечена переменная x, то команда **Symbolic Ю Solve for Variable (Решить относительно переменной)** возвращает символьные значения указанной переменной x, при которой $f(x) = 0$.

Если вы работаете с пакетом Mathcad PLUS 5.0, не забудьте предварительно использовать команду **Symbolic Ю Load Symbolic Processor** для загрузки символьного процессора.

Если вы работаете с пакетом Mathcad PLUS 6.0, то сможете решать символьно не только уравнения, но и системы уравнений. Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, не нужно задавать начальные приближения. Пример 2 Рисунка 2 показывает решение системы уравнений в символьном виде.

Порядок выполнения

Задание 1. Построить график функции $f(x)$ и приблизительно определить один из корней уравнения.

Решить уравнение $f(x)= 0$ с точностью $е = 10^{-4}$:

- с помощью встроенной функции Mathcad *root*;
- методом Ньютона (касательных), используя функцию *until*;
- методом итераций, используя функцию *until*.

Определить число итераций в каждом методе, с помощью функции *last*.

Варианты задания 1

№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$
1	$3\sin(\sqrt{x}) + 0.35x - 3.8$ $x \in [2, 3]$	**6**	$0.25x^3 + x - 2$ $x \in [0, 2]$	**11**	$\sqrt{2x^2 + 1.2 - \cos x} - 1$ $x \in [0, 1]$
2	$x - \dfrac{1}{3 + \sin(3.6x)}$ $x \in [0, 1]$	**7**	$\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ $-x$ $x \subset [\,2, 3]$	**12**	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}$ $x \in [1, 2]$
3	$\arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3}$ $x \in [0, 1]$	**8**	$3x - 4\ln x - 5$ $x \in [2, 4]$	**13**	$0.1x^2 - x\ln x$ $x \in [1, 2]$
4	$\sqrt{1 - 0.4x^2} - \arcsin x$ $x \in [0, 1]$	**9**	$e^x - e^{-x} - 2$ $x \in [0, 1]$	**14**	$1 - x + \sin x - \ln(1 + x)$ $x \in [0, 2]$
5	$3x - 14 + e^x - e^{-x}$ $x \in [1, 3]$	**10**	$\sqrt{1 - x} - \operatorname{tg} x$ $x \in [0, 1]$	**15**	$e^{x-1} - x^3 - x$ $x \in [0, 1]$

Задание 2. Для полинома $g(x)$ выполнить следующие действия:

- с помощью команды **Symbolic Ю Polynomial Coefficients** создать вектор V, содержащий коэффициенты полинома;
- решить уравнение $g(x) = 0$ с помощью функции *polyroots*;
- решить уравнение символьно, используя команду **Symbolic Ю Solve for Variable**;
- разложить на множители, используя **Symbolic Ю Factor Expression.**
-

Варианты задания 2

№ варианта	$g(x)$	№ варианта	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 -$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$

	$55x$ - 150		
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Тема Интерполяция и предсказание

Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией j (x) так, чтобы отклонение функции j (x) от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция j (x) при этом называется *аппроксимирующей*. Типичной задачей аппроксимации функций является задача *интерполяции*. Необходимость *интерполяции* функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, $f(x)$ является спецфункцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).

2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т.е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание приближенно представляющее $f(x)$ (например, для вычисления: значений $f(x)$ в произвольных точках, определения интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.)

Интерполяция

Простейшая задача *интерполяции* заключается в следующем. Для заданных $n + 1$ точек $x_i = x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются *узлами интерполяции,* и значений в этих точках некоторой функции $f(x_i) = y_0, y_1, \ldots, y_n$ построить полином j (x) (*интерполяционный полином*) степени n вида

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

принимающий в узлах интерполяции x_i те же значения y_i, что и функция $f(x_i)$:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi(x_1) = y_1,\ \ldots,\ \varphi(x_n) = y_n,\quad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Глобальная интерполяция

Простейшим видом *глобальной интерполяции* является *параболическая интерполяция*, когда, используя описанные выше условия (2), для отыскания неизвестных $n + 1$ коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ выражения (1) получают систему из $n + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = y_0, \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases} \quad (3)$$

Интерполяционная формула Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i -} \quad (4)$$

Для построения *интерполяционной формулы Лагранжа* в Mathcad удобно использовать функцию *if*

if**(***cond, tval, fval***)**	Возвращает значение *tval*, если *cond* отличен от 0 (истина). Возвращает значение *fval*, если *cond* равен 0 (ложь).

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблично с *равноотстоящими* значениями аргумента ($h_i = x_{i+}1 - x_i =$ const). Введем предварительно понятие *конечных разностей:*

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-2)$$
$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, (i = 0, 1, \ldots, n-k)$$

С учетом введенных обозначений *первая интерполяционная формула Ньютона* имеет вид:

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$
$$P_{n1}(x) = P_{n1}(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta \quad (5)$$

Вторая интерполяционная формула имеет вид*:*

$$t = \frac{x - x_n}{h},$$
$$P_{n2}(x) = P_{n2}(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!} \quad (6)$$

Однако, интерполяция при большом числе узлов приводит к необходимости работать с многочленами высокой степени (например, 50-й или даже 100-й), что неприемлемо как с точки зрения вычислений, так и из-за склонности таких многочленов к осцилляции (колебаниям) между узлами сетки. Поэтому на практике часто используют интерполяцию кусочными многочленами (или *локальную интерполяцию*).

Локальная интерполяция

При *локальной* интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени. В среде Mathcad есть для этого инструментарий: средства *линейной интерполяции* (функция *linterp*) и *интерполяции сплайном* (функция *interp*) - линейным (*lspline*), параболическим (*pspline*) и кубическим (*cspline*). Рисунок 4 показывает некоторые примеры локальной интерполяции.

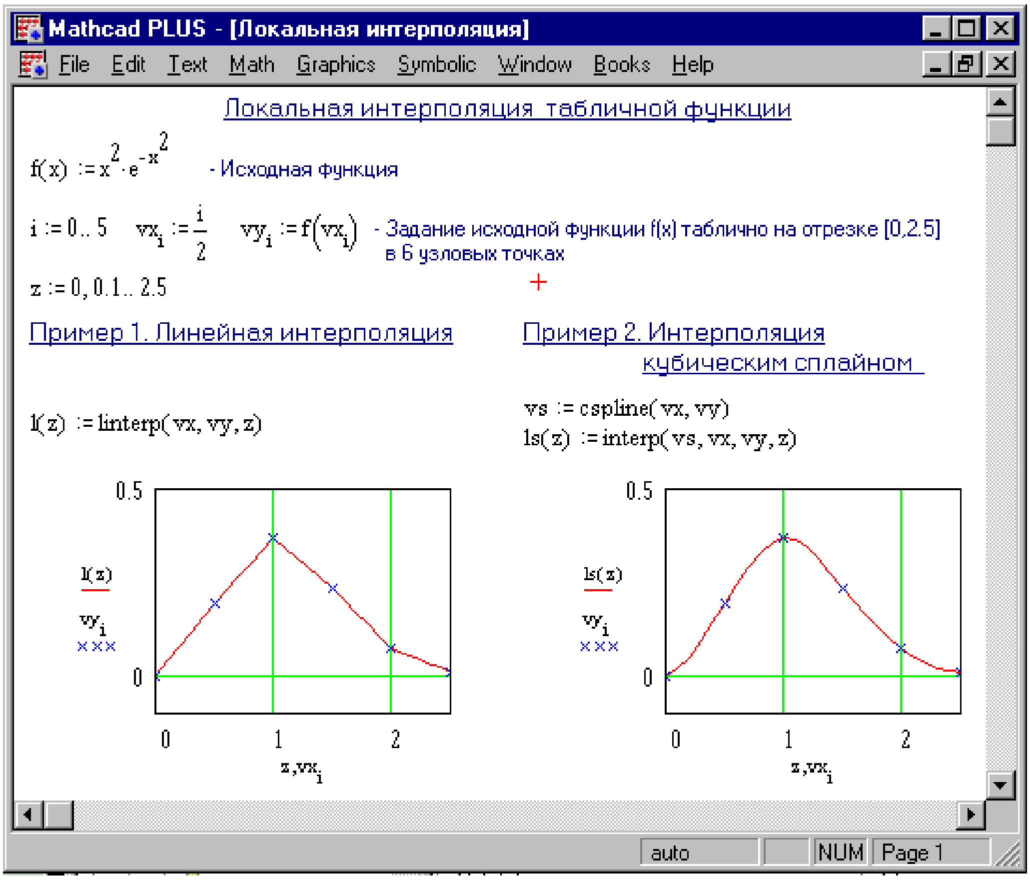


Рисунок 4. Локальная интерполяция

linterp(*vx, vy, x*)	Использует векторы данных *vx* и *vy*, чтобы возвратить линейно интерполируемое значение *y*, соответствующее третьему

	аргументу *x*.
lspline(*vx, vy*) pspline(*vx, vy*) cspline(*vx, vy*)	Все эти функции возвращают вектор коэффициентов вторых производных, который мы будем называть *vs*. Вектор *vs*, используется в функции *interp*:
interp(*vs, vx, vy, x*)	Возвращает интерполируемое значение *y*, соответствующее аргументу *x*.

Предсказание

Если необходимо оценить значения функции в точках не принадлежащих отрезку $[x_0, x_n]$, используйте функцию *predict* (Рисунок 5).

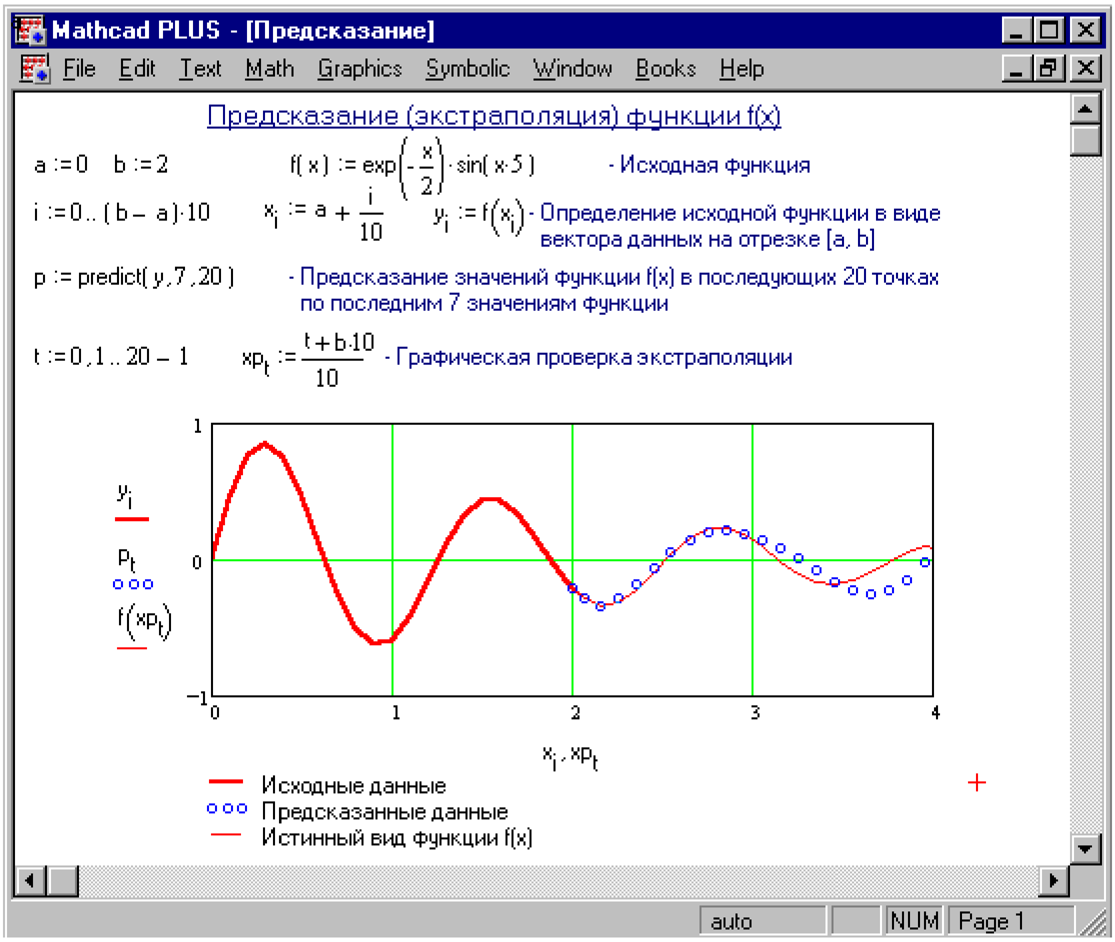


Рисунок 5. Экстраполяция функций

predict(*v, m, n*)	Возвращает *n* предсказанных значений, основанных на *m* последовательных значениях вектора данных *v*.

Порядок выполнения

Задание 1. Вычислить значения заданной функции $y_i = f(x_i)$ в узлах интерполяции $x_i = a + h\,i$, где $h = (b - a)/10$, $i = 0, 1, ..., 10$, на отрезке $[a, b]$.

Варианты заданий

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin x^2$	[0, 2]	**9**	$x \cdot \cos(x + \ln(1 + x))$	[1, 5]
2	$\cos x^2$	[0, 2]	**10**	$10 \cdot \ln 2x/(1 + x)$	[1, 5]
3	$e^{\sin x}$	[0, 5]	**11**	$\sin x^2 \cdot e^{-(x/2)^2}$	[0, 3]
4	$1/(0.5 + x^2)$	[0, 2]	**12**	$\cos\left(x + \cos^3 x\right)$	[0, 2]
5	$e^{-(x + \sin x)}$	[2, 5]	**13**	$\cos(x + e^{\cos x})$	[3, 6]
6	$1/(1 + e^{-x})$	[0, 4]	**14**	$\cos(2x + x^2)$	[0, 1]
7	$\sin(x + e^{\sin x})$	[0, 3]	**15**	$e^{\cos x?} \cos x^2$	[0, 2]
8	$e^{-(x + 1/x)}$	[1, 3]			

Задание 2. По вычисленной таблице (x_i, y_i) провести *параболическую интерполяцию.*

Для нахождения коэффициентов искомого полинома (1) необходимо составить систему линейных алгебраических уравнений (3).

Систему уравнений решить матрично с использованием функции *lsolve*.

Построить график интерполяционного многочлена и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Задание 3. Для вычисленной табличной функции составить формулу интерполяционного многочлена *Лагранжа*, используя операторы суммирования и перемножения по дискретному аргументу, а также функцию *if*.

Построить график интерполяционного многочлена и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Задание 4. Провести интерполирование заданной функции с помощью 1<u>ой</u> и 2<u>ой</u> интерполяционных формул *Ньютона*.

Построить графики интерполяционных многочленов и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Задание 5. Провести *линейную интерполяцию* заданной функции с помощью встроенной интерполяционной функции *linterp*.

Построить график функции *linterp* и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Задание 6. Провести *сплайн-интерполяцию* с помощью функций *lspline, pspline, cspline* и *interp.*

Построить график функции *interp* и отметить на нем узловые точки (x_i, y_i).

Задание 7. Вычислить значения заданной функции $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = a + i/10$, где, $i = 0, 1, ..., 10(b - a)$, на отрезке $[a, b]$.

С использованием функции *predict* выполнить *предсказание* (*экстраполяцию*) полученного вектора данных y_i в последующих **10** точках по последним 7 значениям функции.

Отобразить графически имеющиеся данные, предсказанные данные и истинный вид функции $f(x)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Тема: Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Цель: Ознакомить студентов с симплекс-методом решения задач линейного программирования. В результате проработки темы студент должен освоить алгоритм метода, уметь его использовать для отыскания оптимальных решений при моделировании.

Актуальность темы: симплекс-метод является основным для решения задач линейного программирования.

Теоретическая часть

Симплекс- метод, позволяющий решить любую задачу линейного программирования, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решать и вручную.

Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений (называемой первоначальной) к соседней, в которой линейная функция принимает лучшее (или не худшее) значение целевой функции до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение − вершина, где достигается оптимальное значение этой функции, если задача имеет конечный оптимум.

Для реализации симплексного метода − последовательного улучшения решения − необходимо освоить *три основныхэлемента:*

- способ определения какого-либо первоначального допустимого базисного решения задачи;

- правило перехода к лучшему (точнее, не худшему) решению;

- критерий проверки оптимальности найденного решения.

Для начала использования симплексного метода задача линейного программирования должна быть приведена к каноническому виду, т.е. система ограничений должна быть представлена с помощью дополнительных выпавнивающих (балансовых) переменных в виде уравнений. Алгоритм конкретной вычислительной реализации этих элементов рассмотрим на примере.

Задача1.

Пусть задана математическая модель в стандартном виде задачи линейного программирования:

$12x_1 + 3x_2 \leq 264$;

$4x_1 + 5x_2 \leq 136$; (1)

$3x_1 + 14x_2 \leq 266$;

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

$Z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow MAX$.

Решение

Решим задачу симплекс-методом. Для этого сначала приведем математическую модель (1) к каноническому виду, когда система ограничений имеет вид уравнений. Это достигается введением в каждое неравенство дополнительных неотрицательных переменных:

$x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$; $x_5 \geq 0$. Их экономический смысл – неиспользованное сырье каждого вида.

Получим:

$12x_1 + 3x_2 + x_3 = 264$;

$4x_2 + 5x_2 + x_4 = 136$; (2)

$3x_1 + 14x_2 + x_5 = 266$;

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$; $x_5 \geq 0$;

$U = 6x_1 + 4x_2$ - > MAX.

Решим систему уравнений математической модели (2), выразив базисные переменные x_3, x_4, x_5 через свободные x_1 и x_2.

$x_3 = 264 - 12x_1 - 3x_2$;

$x_4 = 136 - 4x_2 - 5x_2$; (3)

$x_5 = 266 - 3x_1 - 14x_2$;

$x_j \geq 0$; (j = 1; 2; 3; 4; 5.); $U = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow MAX$.

Система уравнений математической модели (3) записана в виде, когда часть переменных x_3, x_4, x_5 выражены через оставшиеся переменные x_1 и x_2, является общим решением СЛАУ ограничений (ее размер 3×5). Переменные x_3, x_4, x_5 – базисные (искусственный базис), переменные x_1 и x_2 – свободные. Придавая свободным переменным произвольные значения и вычисляя базисные переменные по формулам модели (3), можем найти бесконечное множество допустимых (т. е. неотрицательных планов). Заметим, что в общем решении системы уравнений базисными переменными могут быть для данной задачи любые три переменные из пяти (x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4; x_5), а свободными – оставшиеся две переменные.

Если свободные переменные положить равными нулю и вычислить базисные, то получим допустимый базисный план, который называется опорным: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 267$; $x_4 = 136$; $x_5 = 266$. Базисные переменные равны при этом свободным членам, которые должны быть, следовательно, неотрицательными.

Опорный план – это базисный допустимый план, т. е. неотрицательный план, для которого равны нулю свободные переменные. Количество опорных планов конечно и не превосходит количества базисных решений. Оно равно числу сочетаний из 5 по 3 (или по 2):

$$C_5^3 = C_5^2 = \frac{5!}{3!*2!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*3*1*2} = 10,$$

т. е. опорных планов не больше 10.

Основная теорема симплекс-метода говорит о том, что если оптимальный план ЗЛП существует, то его можно найти среди опорных. Это позволяет искать оптимальный план не среди всех допустимых планов, количество которых бесконечно, а лишь среди опорных, число которых конечно и в принципе их можно перебрать, и сравнив по значению критерия оптимальности, выбрать наилучший.

Сущность симплекс-метода состоит в целенаправленном переборе опорных планов для нахождения оптимального. При этом не требуется находить все опорные планы, а достаточно найти один из них и затем переходить к следующему, но так, чтобы решение улучшалось, т. е. значение U увеличивалось, и так до нахождения плана, при котором U – максимально.

Решение ЗЛП симплекс-методом осуществляется с помощью симплекс-таблиц. Математическую модель (3) запишем в виде симплекс-таблицы 1. Базисные переменные помещаем в левый столбец, свободные – в верхнюю строку со знаком «минус», цифрой 1 отмечаем столбец свободных членов

Таблица 1

Б.п.	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$		
$x_4 =$		
$x_5 =$		
U =	-6	-4

Заметим, что в таблице 1 и во всех последующих симплекс-таблицах столбец свободных членов не должен содержать отрицательных элементов в *силу условия неотрицательности, за исключением, может быть, элемента U-строки.*

Каждая строка таблицы 1 соответствует уравнению модели (3). Каждое уравнение модели (3) может быть получено из таблицы 1 умножением элементов соответствующей строки на элементы верхней строки-заголовка:

$x_3 = 264*1 + 12*(- x_1) + 3*(-x_2);$

$x_4 = 136*1 + 4* (-x_1) + 5* (-x_2);$

$x_5 = 266*1 + 3* (-x_1) + 14*(-x_2);$

$U = 0*1 - 6*(-x_1) - 4*(-x_2).$

Полученная таблица 1 называется первой симплекс-таблицей. Она соответствует первому опорному плану:

$(x_1: x_2; x_3; x_4; x_5) = (0; 0; 264; 136; 266).$

При таком плане прибыль $U = 6*x_1 + 4*x_2 = 6*0 + 4*0 = 0.$

Этот опорный план не является оптимальным, на что указывает наличие отрицательных элементов в U-строке таблицы 1

Перейдем к следующему опорному плану, для этого сначала в таблице 1 выберем ключевой элемент по следующему правилу.

1. Выбираем ключевой (разрешающий) столбец, он соответствует отрицательному элементу U-строки (любому), отметим его стрелкой внизу таблицы 1 Чаще из нескольких отрицательных элементов U-строки выбирают тот, который больше по абсолютной величине. У нас это элемент

« -6 » в U-строке. Выбор ключевого столбца гарантирует увеличение (не уменьшение) значения U.

2. Выбираем ключевую строку, она соответствует минимальному из отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам ключевого столбца:

$$\min\left\{\frac{264}{12};\frac{136}{4};\frac{266}{3}\right\} = \min\left\{22;34;88,67\right\} = 22,$$

что указывает на первую строку, отметим ее стрелкой справа.

Выбор ключевой строки гарантирует сохранение условия неотрицательных переменных.

*3. На пересечении ключевой строки и ключевого столбца отмечаем ключевой элемент**.** Он равен 12.*

Строим новую симплекс-таблицу 2, совершая однократное замещение базисной переменной на свободную.

Таблица 2

Б.п. $-x_3$ $-x_2$

$x_1 = x_4 = x_5 =$ 1/12 -1/3 -1/4 ¼ 53/4

U = 1/2 -5/2

1. Поменяем местами базисную и свободную переменные, стоящие в ключевой строке и в ключевом столбце: x_3 и x_1.

2. Ключевой элемент 12 заменим числом, ему обратным: 1/12.

3. Остальные элементы строки разделим на ключевой элемент:

264 : 12 = 22; 3 : 12 = 1/4.

4. Остальные элементы ключевого столбца разделим на ключевой элемент и поменяем знаки на противоположные:

-4 : 12 = -1/3; -3 : 12 = -1/4; 3 : 12 = 1/2.

5. Элементы, не принадлежащие ключевой строке и ключевому столбцу, вычислим по правилу прямоугольника.

Например, вычислим элемент таблицы 2, соответствующий элементу 266 таблицы 1. Для его нахождения в таблице 1 мысленно строим прямоугольник, у которого на концах одной диагонали стоят число 266 и ключевой элемент 12, а на концах другой – числа 264 и 3. Диагональ, содержащая ключевой элемент, считается главной, а другая – побочной. Из произведения элементов по главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали и эта разность делится на ключевой элемент:

*(266*12 – 264*3):12 = 200.*

Полученное число 200 вписываем в таблицу 4.3 на то место, где стояло число 266 в таблице 1.

5.п. -x_1 -x_2

x_3 = x_4 = x_5 =

U = -6 -4

Подсчитаем, какое число будет стоять в таблице 2 вместо числа «-4» в U-строке таблицы 1. На рисунке показан прямоугольник, который мы должны мысленно выделить в таблице 1. Главная диагональ прямоугольника содержит рассматриваемый элемент «- 4» и ключевой элемент 12, а побочная диагональ – элементы 3 и «- 6». В результате вычислений получим число, которое вписываем в U-строку таблицы 2:

*[- 4*12 – 3*(-6)] : 12 = (-48 + 18): 12 = -30:12 = -5/2.*

Б.п. -x_1 -x_2

x_3 = x_4 = x_5 =

U = -6 -4

Аналогично заполняем все оставшиеся клетки таблицы 2. На месте числа 136 из таблицы 1 в таблице 2 будет стоять число:

*(136*12 – 264*4) : 12 = 48.*

На месте элемента «0» в U-строке таблицы 1 в таблице 2 запишем число:

*[0*12 – 264*(-6)] : 12 = 132.*

В последнем столбце таблицы 2 на месте элемента «5» будет стоять число:

*(5*12 - 4*3) : 12 = 4.*

На месте элемента «14» вписываем в таблице 2 число:

*(14*12 – 3*3) : 12 = 150/12 = 53/4.*

Чтобы получить опорный план из симплекс-таблицы 2, полагаем равными нулю свободные переменные x_3 и x_2, стоящие в верхней строке. Тогда значения базисных переменных x_1, x_4 и x_5 равны значениям, стоящим в первом столбце таблицы 2.

В результате выпишем второй опорный план:

$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (22; 0; 0; 48; 200)$,

при котором U = 132. Этот план не является оптимальным, т. к. в U-строке таблицы 2 имеется отрицательный элемент.

Переходим к новой, третьей симплекс-таблице. Для этого сначала в таблице 2 выберем ключевой элемент, повторив предыдущие рассуждения.

1. Отмечаем ключевой столбец. Он содержит отрицательный элемент U-строки: «-5/2».

2. Отмечаем ключевую строку, которая соответствует минимальному из положительных отношений свободных членов к элементам ключевого столбца:

,

что указывает на вторую строку.

3. На пересечении ключевой строки и ключевого столбца в таблице 2 отмечаем ключевой элемент «4».

Переходим к заполнению симплекс-таблицы 3 по правилам 1 – 5.

Таблица 3

Б.п.	$-x_3$		$-x_4$	
$x_1 =$	5/48	-1/12	-1/16	1/4
$x_2 = x_5 =$	41/48		-53/16	
U =	7/24		5/8	

Этой таблице соответствует опорное решение:

$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (19; 12; 0; 0; 41)$.

Оно является оптимальным, т. к. все коэффициенты U-строки в таблице 3 неотрицательны. Максимальное значение целевой функции U max = 162.

Оно достигается при $x_1 = 19$; $x_2 = 12$. Дополнительные переменные при этом равны: $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 41$. Это означает, что сырье первого и второго видов используется полностью, а сырье третьего вида остается не использованным в количестве 41 кг.

Замечание. При решении задач симплекс-методом количество симплекс-таблиц может быть различным. В рассмотренном решении оно равно трем.

Ответ. Чтобы получить максимальную прибыль в размере 162 тыс. руб., нужно изготовить 19 изделий А и 12 изделий В.

Задание к практическому занятию:

Задачи выбираются в соотвествии со своим вариантом.

Базовый уровень:

Задание 1. Решить симплексным методом задачи (табл. 1).

Таблица 1. Варианты заданий

Вариант	Задача	Вариант	Задача
	$Z(X)=x_1+4x_2+x_3$®max, $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1+x_2+2x_3\le 9, \\ 2x_1+3x_2+x_3\ge 6, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3		$Z(X)=-2x_1-2x_2-2x_3$®min, $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\le 4, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+x_2+2x_3\ge 6, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3

Продолжение таблицы 1.

	$Z(X)=2x_1+x_2-x_3$®min, $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3\ge 5, \\ x_1+2x_2+x_3\le 7, \\ x_1-x_2+2x_3=1, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3		$Z(X)=-3x_1-2x_2-2x_3$®min, $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\ge 3, \\ x_1+x_2\le 2, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3
	$Z(X)=x_1-x_2+x_3$®max, $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3\ge 6, \\ -x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+4x_3\le 24, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3		$Z(X)=-2x_1+8x_2+3x_3$®min, $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3\ge 12, \\ x_1+x_2+x_3=8, \\ 2x_1-3x_2+x_3\ge -8, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3
	$Z(X)=5x_1+2x_2+x_3$®max, $\begin{cases} x_1+x_2+x_3\ge 3, \\ x_1+2x_2+2x_3=4, \\ 3x_1+4x_2+2x_3\le 12, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3		$Z(X)=6x_1+7x_2+9x_3$®min, $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3\ge 5, \\ -x_1+x_2+x_3=2, \\ -x_1-x_2+x_3\ge -2, \end{cases}$ x_j³0, j=1,2,3
	$Z(X)=x_1-8x_2-3x_3$®max,		$Z(X)=5x_1+2x_2+x_3$®max,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -4, \end{cases}$$ $x_j³0$, j=1,2,3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12, \end{cases}$$ $x_j³0$, j=1,2,3

Вопросы для самостоятельной работы

Базовый уровень:

1. В чем заключается симплекс-метод задачи линейного программирования ?

2. В какой форме необходимо сделать постановку задачи, если применять для ее решения симплекс – метод?

3. Как получить опорное решение задачи линейного программирования для дальнейшего ее решения симплекс-методом?

4. В чем геометрический смысл симплекс-метода?

5. Как строится опорное решение ЗЛП методом искусственного базиса?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Тема Численное интегрирование и дифференцирование

Численное интегрирование

Формулы для приближенного вычисления определенных интегралов применяются очень часто. Дело в том, что для большого числа элементарных функций первообразные уже не выражаются через элементарные функции, в результате чего нельзя вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Встречаются также и случаи, когда приходится прибегать к формулам приближенного интегрирования даже для таких интегралов, которые могут быть найдены в конечном виде, но такое выражение оказывается слишком сложным. Особенно важны формулы приближенного интегрирования при решении задач, содержащих функции, заданные таблично.

Квадратурные формулы

Наиболее распространенным подходом к численному вычислению интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

является разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, интерполирование функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (получение интерполяционного многочлена j (x)) и замена в (1) интеграла интегральной суммой:

$$I_n = \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot y_i, \; I_n » I. \qquad (2)$$

Соотношения вида (2) называют *квадратурными формулами*.

В простейших случаях в качестве интерполяционного многочлена j (x) берут ступенчатую, кусочно-линейную или кусочно-параболическую функции, а также полином степени $k = n$ (j $(x) = x^k$) для которых квадратурные формулы принимают вид (см. Пример 1 Рисунка 8):

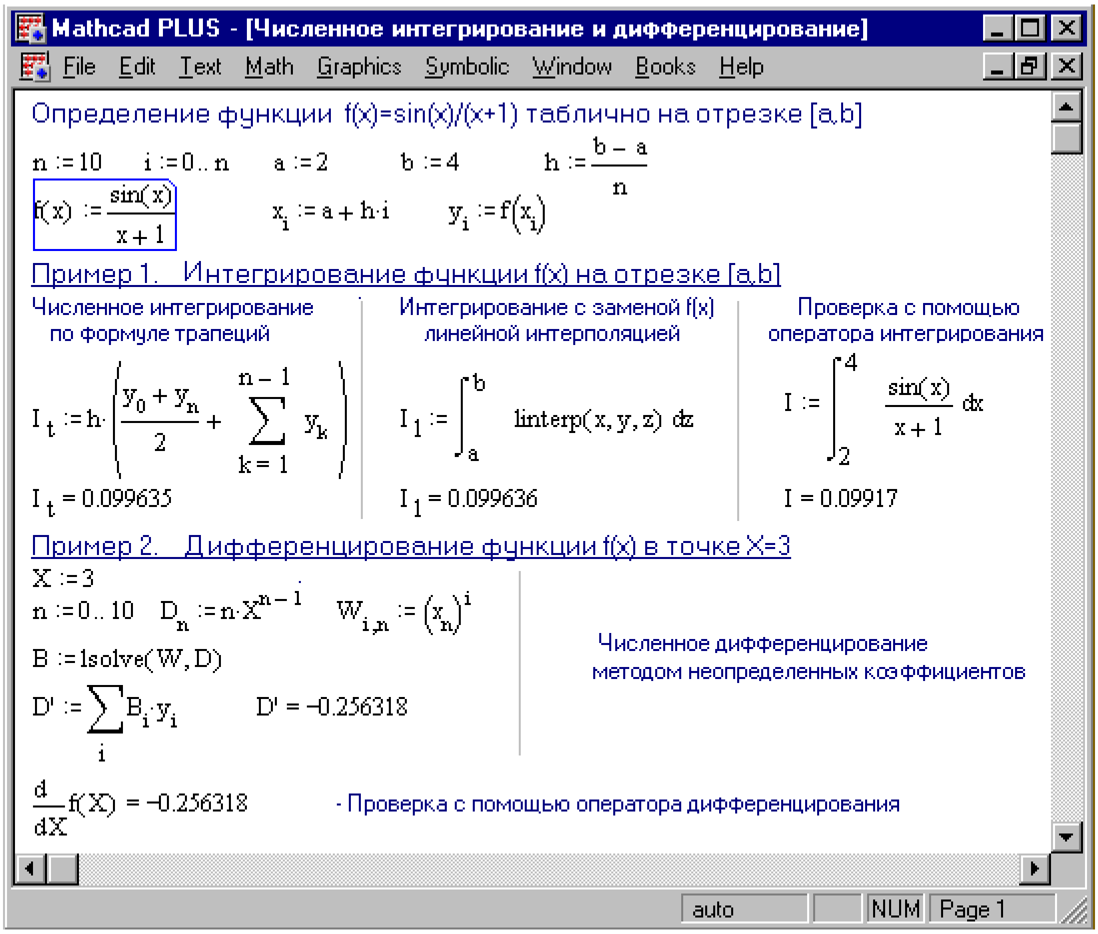


Рисунок 8. Численное интегрирование и дифференцирование

формула прямоугольников:

$$I_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}), \quad x_{i-1/2} = x_{i-1} + \frac{1}{2}h, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{3}$$

формула трапеций:

$$I_n = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right); \tag{4}$$

формула Симпсона (n - четное число):

$$I_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right); \tag{5}$$

метод неопределенных коэффициентов состоит в вычислении определенного интеграла (1) с помощью формулы (2) коэффициенты A_i, которой находятся в результате решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} I_0 = A_0 + A_1 + \ldots + A_n \\ I_1 = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots A_n x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ I_n = A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \ldots A_n x_n^n, \end{cases} \qquad (6)$$

где $I_k = \int_a^b x^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Метод Монте-Карло

Во многих задачах исходные данные носят случайный характер, поэтому для их решения должен применяться статистико-вероятностный подход. На основе такого подхода и построен метод статистических испытаний, называемый также методом *Монте-Карло*.

Пусть h - равномерно распределенная на отрезке [*a, b*] случайная величина, :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(\eta_i) \qquad (7)$$

Для генерирования последовательности случайных чисел с нормальным законом распределения в Mathcad возможно использовать функцию *rnd*

rnd(*x*)	Возвращает равномерно распределенное случайное число между 0 и *x*.

Для реализации метода Монте-Карло удобно использовать функцию *mean*

mean(*A*)	Возвращает среднее арифметическое значение элементов массива *A*.

Численное дифференцирование

Численное дифференцирование аналитически или таблично заданной функции *f*(*x*) на отрезке [*a, b*] в точке *x* = *X* заключается в замене *f*(*x*) интерполяционным полиномом j (*x*), i?iecaiaiua $\frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \approx \frac{d^m f(x)}{dx^m}$ которого можно найти аналитически с помощью соответствующих формул:

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} \approx \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} = \sum_{i=0}^{n} B_i \cdot y_i \qquad (8)$$

Метод неопределенных коэффициентов (см. Пример 2 Рисунка 8) предполагает использование в качестве интерполяционного многочлена j (x) полином степени $k = n$ (j (x) = $(X - x_i)^k$), а коэффициенты B_i формулы (8) находятся в результате решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} D_0 = B_0 + B_1 + \ldots + B_n, \\ D_1 = B_0 x_0 + B_1 x_1 + \ldots + B_n x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_n = B_0 x_0^n + B_1 x_1^n + \ldots + B_n x_n^n, \end{cases} \qquad (9)$$

где $D_k = \left(X^k\right)' = k \cdot X^{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Символьное интегрирование и дифференцирование

Для вычисления интегралов (или нахождения первообразных) аналитически заданной функции используется команда **Symbolic Ю Integrate on Variable (Интегрировать по переменной)**. Она возвращает символьное значение неопределенного интеграла по указанной маркером ввода переменной. Выражение, в состав которого входит переменная, является подынтегральной функцией.

Команда **Symbolic Ю Differentiate on Variable (Дифференцировать по переменной)** возвращает символьное значение производной выражения по той переменной, которая указана курсором. Для вычисления производных высшего порядка нужно повторить вычисление необходимое число раз.

Результат символьного преобразования иногда содержит *специальные функции*, которые не являются частью списка *встроенных функций* Mathcad. Вот определения некоторых из них:

g - константа Эйлера,

Ci(x) = g + ln(x) + $\int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt$, Si(x) = $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$,

Chi(x) = g + ln(x) + $\int_0^x \frac{\cosh(t) - 1}{t} dt$, Shi(x) = $\int_0^x \frac{\sinh(t)}{t} dt$.

Порядок выполнения

Задание 1. Определить функцию $f(x)$ таблично, вычислив значения $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = a + h\,i$, $i = 0, 1, ..., 8$,

$h=(b - a)/8$ на отрезке $[a, b]$.

Варианты задания 1

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	$[c, d]$
1	$1/(\mathrm{tg}2x+1)$	[0.4, 0.8]	[2, 2.1]
2	$\cos 3x/(1-\cos 3x)^2$	[0.8, 1.6]	[-1, -0.9]
3	$1/(x\sqrt{x^3+4})$	[0.18, 0.98]	[0.5, 0.6]
4	$\sin x/(1+\sin x)$	[0.8, 1.6]	[2, 2.1]
5	$x^2\ \lg(x+2)$	[0, 0.4]	[1.5, 1.6]
6	$x^2\ \mathrm{arctg}(x/3)$	[0.8, 1.6]	[1, 1.1]
7	$e^{2x}\sin 3x$	[0.4, 1.2]	[2, 2.1]
8	$\mathrm{ctg}2x/(\sin 2x)^2$	[0.8, 1.2]	[1, 1.1]
9	$(x + 1)\sin x$	[1, 5]	[1, 1.1]
10	$5x + x\lg x$	[0.2, 1]	[1.3, 1.4]
11	$(2x + 3)\sin x$	[0.4, 1.2]	[0.5, 0.6]
12	$\cos x/(2x+5)$	[0.4, 1.2]	[1, 1.1]
13	$1/(1 + x + x^2)$	[0, 4]	[2, 2.1]
14	$(1+x)/(2+x)$	[0.4, 0.8]	[1.5, 1.6]
15	$\sqrt{1+e^{-x}}$	[0.4, 1.2]	[0.5, 0.6]

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_c^d f(x)dx$:

- с помощью встроенного *оператора интегрирования*;
- по формуле *прямоугольников*;
- по формуле *Симпсона*;
- с помощью встроенного *оператора интегрирования* и интерполяцией табличной функции *кубическим сплайном* (функции *cspline* и *interp*);
- методом *неопределенных коэффициентов* для численного интегрирования.

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом *Монте-Карло*. Для этого необходимо:

- определить диапазон случайных чисел, например j: = 0..1000;
- определить с помощью функции *rnd* равномерно распределенную случайную величину h_j на отрезке интегрирования [a, b];
- создать вектор $F_j = f(h_j)$;
- с помощью функции *mean* вычислить интеграл.

Задание 4. Найти первообразную аналитически заданной функции $f(x)$, используя команду **Symbolic Ю Integrate on Variable**.

Задание 5. Вычислить значения первой и второй производных функции $f(x)$ в точке $X = c$:

- с помощью операторов дифференцирования Mathcad;
- *методом неопределенных коэффициентов* для численного дифференцирования. Определить функцию $f(x)$ таблично, вычислив значения $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = c + h?\ i$, i = 0, 1, ..., 10, h = 0.01 на отрезке [c, d].

Задание 6. Определить символьное значение первой и второй производных $f(x)$, используя команду **Symbolic Ю Differentiate on Variable**.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

Тема: Решение транспортной задачи

Цель работы: Найти начальное решение транспортной задачи двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости. Найти оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов.

Краткая теория

Симплексный метод для решения задач линейного программирования является универсальным, он позволяет решить любую задачу, но решение иных задач связано с трудоемкими расчетами. Можно выделить класс задач, которые решаются более простыми специальными методами. К числу таких задач относятся так называемые **транспортные задачи.**

Классическая транспортная задача - о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов отправления в пункты назначения.

Классическая транспортная задача (сокращенно ТЗ) формулируется следующим образом.

В пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые будем называть также поставщиками, сосредоточены запасы однородного груза в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно. В пункты назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, именуемые потребителями, надлежит доставить соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц груза.

Известен транспортный тариф c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j, $i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость F всех перевозок была бы наименьшей, при этом все заявки были бы выполнены.

В термин "транспортный тариф" вкладывается условное понимание стоимости единицы груза - это может быть себестоимость, расстояние, тариф, время, расход топлива или электроэнергии и др.

Пусть суммарные запасы грузов у поставщиков равны суммарным потребностям потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Это условие называется условием баланса. Если для ТЗ условие баланса выполняется, то модель ТЗ называется закрытой, если условие баланса не выполнено, то модель ТЗ - открытая. Составим математическую модель ТЗ.

Пусть x_{ij} - количество груза, которое поставщик A_i отправляет потребителю B_j ($i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$) со стоимостью перевозок c_{ij}. Данные задачи можно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

По смыслу своему величины $x_{ij} \geq 0$ и должны удовлетворять следующим ограничениям:

- Из пункта A_i все запасы должны быть вывезены (ограничения по ресурсам): $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \, (i=1,2,\ldots,m)$;

- Заявки потребителей B_j должны быть выполнены (ограничения по потребностям): $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j=1,2,\dots,n)$.

Затраты на перевозку x_{ij} единиц груза из пункта поставки A_i в пункт потребления B_j составляют $c_{ij} \cdot x_{ij}$ рублей; общая же стоимость всех перевозок x_{ij} равна сумме всех таких затрат: $F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$

Математическая постановка ТЗ состоит в следующем:

составить план перевозок x_{ij} *,* удовлетворяющих системе ограничении:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j=1,2,\dots,n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i=1,2,\dots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases},$$

условию неотрицательности: $x_{ij} \ge 0$, $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$, при котором целевая функция достигает своего минимума:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

Из математической модели видно, что ТЗ является частным случаем общей задачи линейного программирования. В общей теории линейного программирования доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Транспортная задача при выполнении условия баланса всегда имеет решение.

Теорема 2. Система ограничений транспортной задачи содержит m+n-1 линейно-независимых уравнений.

При решении задач практический смысл теоремы 2 заключается в следующем: число назначенных перевозок равно *m+n-1.*

Процедура решения ТЗ будет состоять в последовательном улучшении опорных планов и проверки их на оптимальность.

Методы построения начального плана.

Существует несколько методов построения первоначального опорного плана ТЗ (опорный план - план, удовлетворяющий системе ограничений и условию неотрицательности). Рассмотрим только два из них: метод северо-западного угла и метод наименьшей стоимости.

Как уже отмечалось, в опорном плане не более ***r = m + n - 1*** переменных x_{ij} , отличных от нуля. Если таких переменных равно ***r***, то такой план называют невырожденным, в противном случае - вырожденным.

Метод северо-западного угла. Назначение перевозок начинаем с левой верхней клетки (северо-западный угол). Сравнивая ресурсы поставщика и потребности потребителя, назначаем максимально возможную перевозку. Если ресурсов поставщика недостаточно, то переходим к следующему поставщику. Если ресурсов у поставщика достаточно, то назначив нужную перевозку первому потребителю, переходим к следующему потребителю. При назначении перевозок для удобства записываем остаток ресурсов (потребностей); если ресурсы закончились или потребности удовлетворены, то ставим букву "к" (конец). Если при назначении перевозки одновременно закончились запасы ресурсов у поставщика и удовлетворены потребности потребителя, то из "игры" выводим только одного участника, другому оставляем нуль запасов или нуль потребностей.

Метод наименьшей стоимости. Выбираем клетку с наименьшей тарифной ставкой и назначаем максимально возможную перевозку. Если запасы закончились или потребности удовлетворены, то поставщика или потребителя исключаем. Среди оставшихся клеток снова выбираем клетку с наименьшей стоимостью и назначаем максимально возможную перевозку. Если в результате назначения перевозки закончились запасы поставщика или удовлетворены потребности потребителя, то его исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Метод потенциалов построения оптимального плана.

Наиболее простым методом решения ТЗ является метод потенциалов. Потенциалами называются условные числа u_i, v_j приписанные определенным образом каждому поставщику и потребителю.

Теорема 3(условие оптимальности плана). Сумма потенциалов поставщика и потребителя равна тарифной ставке для занятых клеток; сумма потенциалов поставщика и потребителя не превышает тарифную ставку для свободных клеток:

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij}, & x_{ij} \geq 0, \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, & x_{ij} = 0. \end{cases}$$

Замечание. Опорный план должен быть невырожденным.

Алгоритм решения транспортной задачи:

Строим начальные планы методом северо-западного угла и наименьшей стоимости, из них выбираем лучший.

Находим потенциалы поставщиков и потребителей, используя первое условие оптимальности плана: $u_i + v_j = c_{ij}$

Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Если оно выполнено, то план оптимален. Если не выполнено, то улучшаем план.

4. Улучшение плана.

а) при невыполнении второго условия оптимальности плана в клетку заносим нарушение $u_i + v_j - c_{ij}$ со знаком "+". Такие клетки называются потенциальными;

среди всех потенциальных клеток выбираем клетку с наибольшим нарушением;

строим для выбранной клетки замкнутый контур, состоящий из вертикальных и горизонтальных отрезков прямой, причем вершины контура лежат в занятых клетках, за исключением той клетки, для которой строится контур. Виды контуров приведены на рисунке 1;

Рис. 1 Виды контуров

вершины контура поочередно помечаем, знаками "+","-", начиная с клетки, для которой построен контур;

е) среди клеток, помеченных знаком "-", выбираем наименьшую перевозку. На эту величину увеличиваем перевозки в клетках, помеченных знаком "+", и уменьшаем в клетках, помеченных знаком "-". В результате переназначения перевозок освобождается одна клётка.

5.Вновь полученный план проверяем на оптимальность.

Порядок выполнения заданий

Задание. Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***a1, a2 и a3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**
А1	D11	D12	D13	D14	D15
А2	D21	D22	D23	D24	D25
А3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=200, a2=250, a3=200,

b1=190, b2=100, b3=120, b4=110, b5=130.

$$D=\begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Построим начальный план двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости, и выберем тот план, который будет наилучшим, то есть получим минимальные затраты за перевозку однородного груза.

А) Строим начальный план методом северо-западного угла. Составим таблицу значений:

Потребители Поставщики	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	Запасы
A1	28 190	27 10	18	27	24	200, 10, к
A2	18	26 90	27 120	32 40	21	250, 160, 40, к
A3	27	33	23	31 70	34 130	200, 130, к
Потребности	190, к	100, 90, к	120, к	110, 70, к	130, к	650=650

Число назначенных перевозок ***m+n-1=3+5-1=7***, то есть начальный план

$x_{11}=190$, $x_{12}=10$, $x_{22}=90$, $x_{23}=120$, $x_{24}=40$, $x_{34}=70$, $x_{35}=130$

невырожденный.

При таком плане суммарные транспортные издержки равны:

$$F=28\cdot190+27\cdot10+26\cdot90+27\cdot120+32\cdot40+31\cdot70+34\cdot130=5320+270+2340+3240+$$
$$+1280+2170+4420=19040\,(\textit{единиц})$$

Б) Строим начальный план методом наименьшей стоимости. Составим таблицу значений:

Потребители Поставщики	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	Запасы
A1	28	27 10	18 120	27	24 70	200, 80, 10, к
A2	18 190	26	27	32	21 60	250, 60, к
A3	27	33 90	23	31 110	34	200, 90, к
Потребности	190, к	100, 90, к	120, к	110, к	130, 70, к	650=650

Начальный план:

$x_{12}=10$, $x_{13}=120$, $x_{15}=70$, $x_{21}=190$, $x_{25}=60$, $x_{32}=90$, $x_{34}=110$

При таком плане транспортные издержки

$$F=27\cdot10+18\cdot120+24\cdot70+18\cdot190+21\cdot60+33\cdot90+31\cdot110=270+2160+1680+3420+$$
$$+1260+2970+3410=15170\,(\textit{единиц})$$

Сравнивая транспортные издержки, видим, что план, построенный методом наименьшей стоимости, лучший.

2. Выбираем лучший план и находим потенциалы поставщиков и потребителей, используя первое условие оптимальности плана: $u_i+v_j=c_{ij}$

Потребители, v_j Поставщики, u_i		**21**	**27**	**18**	**25**	**24**
		B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**
0	**A1**	28	27 10	18 120	27	24 70
-3	**A2**	18 190	26	27	32	21 60
6	**A3**	27	33 90	23 **+1**	31 110	34

Используя первое условие оптимальности плана, составим систему линейных уравнений для определения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1+v_2=27 \\ u_1+v_3=18 \\ u_1+v_5=24 \\ u_2+v_1=18 \\ u_2+v_5=21 \\ u_3+v_2=33 \\ u_3+v_4=31 \end{cases}$$

Система линейных уравнений содержит 7 уравнений и 8 неизвестных, т.е. она имеет множество решений. Так как нужно одно решение, то любой из неизвестных задаем значение и вычисляем остальные неизвестные.

Пусть $u_1=0$, тогда

$u_2=-3,\quad u_3=6,\quad v_1=21,\quad v_2=27,\quad v_3=18,\quad v_4=25,\quad v_5=24$

1. Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток $u_i+v_j\le c_{ij}$. Если есть нарушения, то заносим их со знаком «+». В результате проверки получили одну потенциальную клетку. Таким образом, начальный план не оптимален.

2. Улучшение плана. Выбираем клетку с максимальным нарушением и для нее строим замкнутый контур.

Потребители, v_j Поставщики, u_i						
		B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**
	A1	28	27 + 10	18 - 120	27	24 70
	A2	18 190	26	27	32	21 60
	A3	27	33 - 90	23 **+1**	31 110	34

Среди клеток, помеченных знаком «-», выбираем наименьшую перевозку:

$q=\min(90,120)=90$

На эту величину увеличиваем перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшаем в клетках, помеченных знаком «-». В результате переназначения перевозок имеем план:

Потребители, v_j Поставщики, u_i		21 B1	27 B2	18 B3	26 B4	24 B5
0	**A1**	28	27 100	18 30	27	24 70
-3	**A2**	18 190	26	27	32	21 60
5	**A3**	27	33	23 90	31 110	34

Используя первое условие оптимальности плана, составим систему линейных уравнений для определения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1+v_2=27 \\ u_1+v_3=18 \\ u_1+v_5=24 \\ u_2+v_1=18 \\ u_2+v_5=21 \\ u_3+v_3=23 \\ u_3+v_4=31 \end{cases}$$

Система линейных уравнений содержит 7 уравнений и 8 неизвестных, т.е. она имеет множество решений. Так как нужно одно решение, то любой из неизвестных задаем значение и вычисляем остальные неизвестные.

Пусть $u_1=0$, тогда

$$u_2=-3,\quad u_3=5,\quad v_1=21,\quad v_2=27,\quad v_3=18,\quad v_4=26,\quad v_5=24$$

Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток $u_i+v_j\le c_{ij}$. Условие оптимальности выполнены, следовательно, план, соответствующий таблице, оптимален.

$$x_{12}=100,\quad x_{13}=30,\quad x_{15}=70,\quad x_{21}=190,\quad x_{25}=60,\quad x_{33}=90,\quad x_{34}=110$$

$$F=27\cdot100+18\cdot30+24\cdot70+18\cdot190+21\cdot60+23\cdot90+31\cdot110=2700+540+1680+3420+$$
$$+1260+2070+3410=15080\,(\text{единиц})$$

Ответ: Сравнивая три метода нахождения оптимального плана, делаем вывод, что метод потенциалов находит оптимальный план решения транспортной задачи, так как получили минимальные транспортные издержки равные 15080 единиц.

Задания для самостоятельной работы

1 вариант.

Задача. Имеются три пункта поставки однородного груза **A1, A2, A3** и пять пунктов **B1, B2, B3, B4, B5** потребления этого груза. На пунктах **A1, A2 и A3** находится груз соответственно в количестве ***a1, a2 и a3*** тонн. В пункты **B1, B2, B3, B4, B5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=200, a2=350, a3=300,
b1=270, b2=130, b3=190, b4=150, b5=110.

$$D=\begin{pmatrix} 24 & 50 & 55 & 27 & 16 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}$$

2 вариант.

Задача. Имеются три пункта поставки однородного груза **A1, A2, A3** и пять пунктов **B1**, **B2**, **B3**, **B4**, **B5** потребления этого груза. На пунктах **A1, A2 и A3** находится груз соответственно в количестве ***a1, a2 и a3*** тонн. В пункты **B1, B2, B3, B4, B5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	Пункты потребления				
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**
A1	D11	D12	D13	D14	D15
A2	D21	D22	D23	D24	D25
A3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=200, a2=300, a3=250,
b1=210, b2=150, b3=120, b4=135, b5=135.

$$D=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются транспортными?
2. В чем суть классической транспортной задачи?
3. Что означает термин «транспортный тариф»?
4. Как записывается условие баланса?
5. Как выглядит математическая постановка транспортной задачи?
6. В чем суть метода северо-западного угла?
7. Основная идея метода наименьшей стоимости?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10

Тема: Нахождение оптимального решение транспортной задачи методом потенциалов.

Цель работы: Найти начальное решение транспортной задачи двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости. Найти оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов.

Задания для самостоятельной работы

3 вариант.

Задача. Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***a1, a2 и a3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**
А1	D11	D12	D13	D14	D15
А2	D21	D22	D23	D24	D25
А3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=230, a2=250, a3=170,

b1=140, b2=90, b3=160, b4=110, b5=150.

$$D=\begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \end{pmatrix}$$

4 вариант.

Задача. Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***a1, a2 и a3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**
А1	D11	D12	D13	D14	D15
А2	D21	D22	D23	D24	D25
А3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=350, a2=200, a3=300,

b1=170, b2=140, b3=200, b4=195, b5=145.

$$D=\begin{pmatrix} 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \end{pmatrix}$$

5 вариант.

Задача. Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***a1, a2 и a3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**
А1	D11	D12	D13	D14	D15
А2	D21	D22	D23	D24	D25
А3	D31	D32	D33	D34	D35

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

a1=300, a2=250, a3=200,

b1=210, b2=150, b3=120, b4=135, b5=135.

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. В чем суть метода потенциалов?
2. Какие клетки называются потенциальными?
3. Какие виды контуров вы знаете?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

Тема: Решение задачи нелинейного программирования методом множителей Лагранжа.

Цель работы: Решить задачу нелинейного программирования методом множителей Лагранжа.

Краткая теория

Задачами нелинейного программирования называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции ***F(x)***, функциями ограничений и размерностью вектора х (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в таблице.

Вид *F(x)*	**Вид функции ограничений**	**Число переменных**	**Название задачи**
Нелинейная	Отсутствуют	1	Безусловная однопараметрическая оптимизация
Нелинейная	Отсутствуют	Более 1	Безусловная многопараметрическая

			оптимизация
Нелинейная или линейная	Нелинейные или линейные	Более 1	Условная нелинейная оптимизация

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует. В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции ***F(x)***.

Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Задачи нелинейного программирования относятся ***к трудным*** вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным **м*етодам оптимизации***. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

Общая формулировка нелинейных задач:

Найти переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\Psi (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) = b_i , i = 1, 2, \ldots, m \qquad (1)$$

и обращающие в максимум (минимум) целевую функцию

$$Z = f (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \qquad (2)$$

Примером типичной и простой нелинейной задачи является следующая: Данное предприятие для производства какого-то продукта расходует два средства в количестве x_1 и x_2 соответственно. Это факторы производства, например, машины и труд, два различных сырья и т.п., а величины x_1 и x_2 – затраты факторов производства. Факторы производства впредь будем считать взаимозаменяемыми. Если это «труд» и «машины», то можно применять такие методы производства, при которых величина затрат машин в сопоставлении с величиной затрат труда оказывается больше или меньше (производство более или менее трудоемкое).

Объем производства (выраженный в натуральных или стоимостных единицах) является функцией затрат производства $Z = f (x_1 , x_2)$. Эта зависимость называется **производственной функцией**. Издержки зависят от расхода обоих факторов (x_1 и x_2) и от цен этих факторов (c_1 и c_2). Совокупные издержки выражаются формулой $b = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Требуется при данных совокупных издержках определить такое количество факторов производства, которое максимизирует объем продукции Z.

Математическая модель этой задачи имеет вид: определить такие переменные x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = b \tag{3}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \tag{4}$$

при которых функция

$$Z = f(x_1, x_2) \tag{5}$$

достигает максимума. Как правило, функция (5) может иметь произвольный нелинейный вид.

Использую классические методы оптимизации, следует четко представлять себе различие между ***локальным*** экстремумом функции, ***глобальным*** экстремумом и ***условным*** экстремумом. Понятие условного экстремума вводится для случая, когда число переменных n не меньше 2 $(n \geq 2)$. Будем полагать, что функция $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ дважды дифференцируема в точке $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, $(X^* \in D(f))$ и в некоторой ее окрестности.

Если для всех точек X этой окрестности $f(X^*) \geq f(X)$ или $f(X^*) \leq f(X)$, то говорят, что функция $f(X)$ имеет экстремум в X^* (соответственно максимум или минимум).

Точка X^* , в которой все частные производные функции $Z = f(X)$ равны 0, называется **стационарной точкой**.

Необходимое условие экстремума.

Если в точке X^* функция $Z = f(X)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны 0:

$$f'_{x1}(X^*) = 0, i = 1, 2, ..., n.$$

Следовательно, точки экстремума функции $Z = f(X)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Для получения достаточных условий следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка. Дифференциала второго порядка обозначается ***$d^2f\ (x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots,\ x_n\ )\ f\ '_{x1}\ (X)$*** найти частную производную по переменной ***x_j*** , то получим частную производную второго порядка по переменным ***x_i***, ***x_j*** , которая обозначается ***$f\ ''_{xi,\,xj}\ (X)$***. В этом случае

$$d^2f(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{xi,\,xj}(X)\,\Delta x_i\,\Delta x_j$$

Достаточные условия экстремума.

Двух переменных:

- если ***$\Delta > 0$*** и ***$a_{11} < 0$ ($a_{22} < 0$)***, то в точке ***X^0*** функция имеет максимум: если ***$\Delta > 0$*** и ***$a_{11} > 0$ ($a_{22} > 0$)***,то в точке ***X^0*** – минимум (в этих случаях ***$X^0 = X^*$***);
- если ***$\Delta < 0$***, то экстремума нет;
- если ***$\Delta = 0$***, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Метод множителей Лагранжа

Способ определения условного экстремума начинается с построения вспомогательной функции Лагранжа, которая в области допустимых решений достигает максимума для тех же значений переменных ***$x_1, x_2, \dots, x_n$***, что и целевая функция ***z***.
Пусть решается задача определения условного экстремума функции ***$z = f\ (X)$*** при ограничениях ***$\varphi_i\,(x_1, x_2, \dots, x_n\ ) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m,\ m < n$***

Составим функцию

$$L(X) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(X) \qquad (7)$$

которая называется *функцией Лагранжа*. ***X***, — постоянные множители (*множители Лагранжа*). Отметим, что множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Если ***$f\ (x_1, x_2, \dots, x_n\ )$*** — доход, соответствующий плану ***$X = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\ )$***, а функция ***$\varphi_i\ (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\ )$*** — издержки i-го ресурса, соответствующие этому плану, то ***X***, — цена (оценка) i-го ресурса, характеризующая изменение экстремального значения целевой функции в зависимости от изменения размера i-го ресурса (маргинальная оценка). ***L(X)*** —

функция $n + m$ переменных $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Определение стационарных точек этой функции приводит к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X)}{\partial x_j} = 0, \ j = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial L(X)}{\partial \lambda_i} = 0, \ i = 1,2,\dots,m. \end{cases} \qquad (8)$$

Легко заметить, что $L'_{\lambda_i}(X) = \varphi_i(X)$. Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции $z = f(X)$ сводится к нахождению локального экстремума функции $L(X)$. Если стационарная точка найдена, то вопрос о существовании экстремума в простейших случаях решается на основании достаточных условий экстремума — исследования знака второго дифференциала $d^2L(X)$ в стационарной точке при условии, что переменные приращения Δx_i - связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Delta x_j = 0, \ i = 1, 2, ..., m, \qquad (9)$$

полученными путем дифференцирования уравнений связи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

Тема: Решение задачи нелинейного программирования графическим методом.

Цель работы: Решить задачу нелинейного программирования графическим методом

Решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными с помощью средства *Поиск решения*

Настройка **Поиск решения** позволяет находить решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = C_1 \\ f_2(x,y) = C_2 \end{cases} \quad (10)$$

где $f_i(x,y), i=1,2$ - нелинейная функция от переменных x и y, $C_i, i=1,2$ - произвольная постоянная.

Известно, что пара (x, y) является решением системы уравнений (10) тогда и только тогда, когда она является решением следующего уравнение с двумя неизвестными:

$$(f_1(x,y) - C_1)^2 + (f_2(x,y) - C_2)^2 = 0 \quad (11)$$

С другой стороны, решение системы (10) — это точки пересечения двух кривых: $f_1(x,y) = C$ и $f_2(x, y) = C_2$ на плоскости *XOY*.

Из этого следует метод нахождения корней системы. нелинейных уравнений:

1. Определить (хотя бы приближенно) интервал существования решения системы уравнений (10) или уравнения (11). Здесь необходимо учитывать вид уравнений, входящих в систему, область определения каждого их уравнений и т. п. Иногда применяется подбор начального приближения решения;

2. Протабулировать решение уравнения (11) по переменным x и y на выбранном интервале, либо построить графики функций $f_1(x,y)$ = C, и $f_2(x,y) = C_2$ (система(10)).

3. Локализовать предполагаемые корни системы уравнений — найти несколько минимальных значений из таблицы табулирование корней уравнения (11), либо определить точки пересечения кривых, входящих в систему (10).

4. Найти корни для системы уравнений (10) с помощью надстройки **Поиск решения.**

Порядок выполнения заданий

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=4 \\ 5x+4y=2 \end{cases}$$

Решение:

Легко видеть, что решение системы уравнений являются точки пересечения окружности (с радиусом 2 и центром (1,-1)) и прямой $y=0,5-1,25x$.

Данную систему заменим равносильным уравнением:

$\left((x-1)^2+(y+1)^2-4\right)^2+(5x+4y-2)^2=0$, для которого будем искать решения с площадью надстройки **Поиск решения**.

Исходя из графиков уравнений, интервал локализации корней определим в границах от -3 до 3 (рис. 1). Ячейка **B3:B43** содержат значения X. Формулы для построения графиков:

В ячейке **C3**:

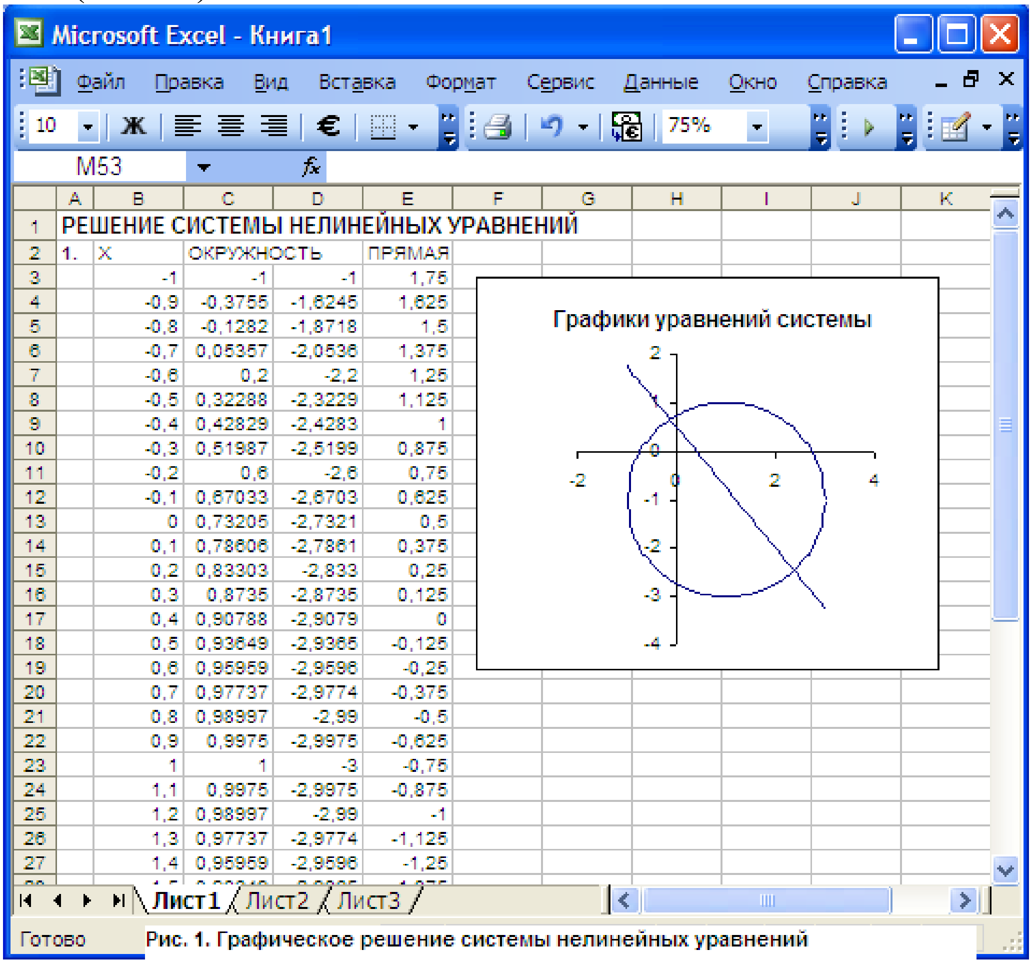
=-1+КОРЕНЬ(4-(B3-1)^2)

В ячейке **D3**:

=-1-КОРЕНЬ(4-(B3-1)^2)

В ячейке **E3**:

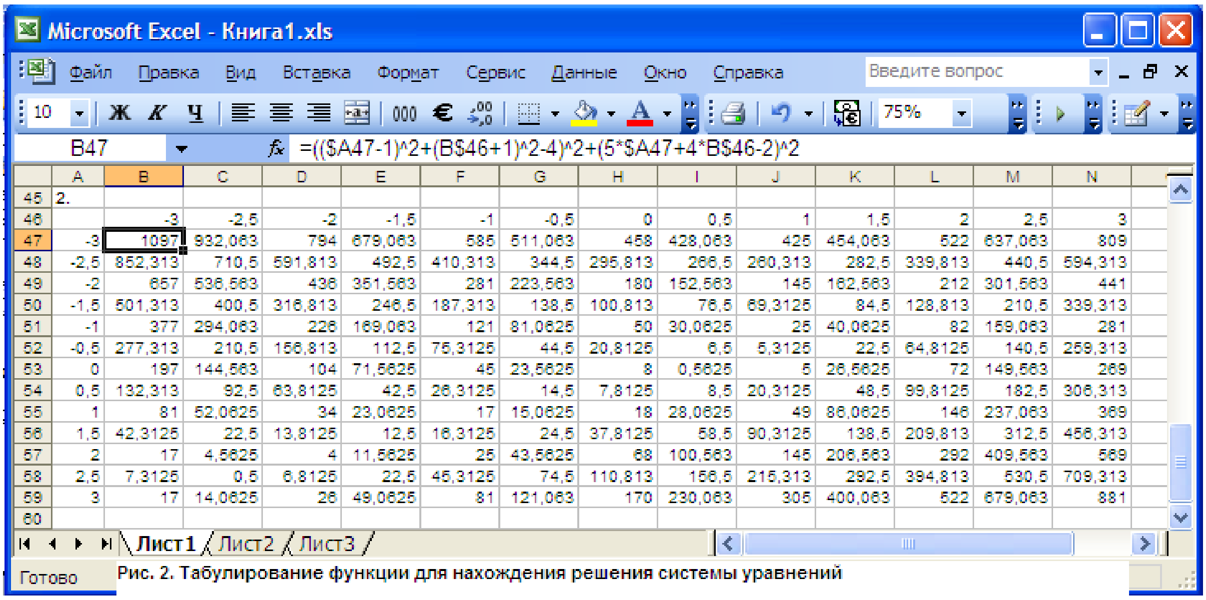
=(2-5*B3)/4



	A	B	C	D	E
1	РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ				
2	1.	X	ОКРУЖНОСТЬ		ПРЯМАЯ
3		-1	-1	-1	1,75
4		-0,9	-0,3755	-1,6245	1,625
5		-0,8	-0,1282	-1,8718	1,5
6		-0,7	0,05357	-2,0536	1,375
7		-0,6	0,2	-2,2	1,25
8		-0,5	0,32288	-2,3229	1,125
9		-0,4	0,42829	-2,4283	1
10		-0,3	0,51987	-2,5199	0,875
11		-0,2	0,6	-2,6	0,75
12		-0,1	0,67033	-2,6703	0,625
13		0	0,73205	-2,7321	0,5
14		0,1	0,78606	-2,7861	0,375
15		0,2	0,83303	-2,833	0,25
16		0,3	0,8735	-2,8735	0,125
17		0,4	0,90788	-2,9079	0
18		0,5	0,93649	-2,9365	-0,125
19		0,6	0,95959	-2,9596	-0,25
20		0,7	0,97737	-2,9774	-0,375
21		0,8	0,98997	-2,99	-0,5
22		0,9	0,9975	-2,9975	-0,625
23		1	1	-3	-0,75
24		1,1	0,9975	-2,9975	-0,875
25		1,2	0,98997	-2,99	-1
26		1,3	0,97737	-2,9774	-1,125
27		1,4	0,95959	-2,9596	-1,25

Рис. 1. Графическое решение системы нелинейных уравнений

1. Табулируем равносильное уравнение на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5 (рис. 2).



B47: =(($A47-1)^2+(B$46+1)^2-4)^2+(5*$A47+4*B$46-2)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
45	2.													
46		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
47	-3	1097	932,063	794	679,063	585	511,063	458	428,063	425	454,063	522	637,063	809
48	-2,5	852,313	710,5	591,813	492,5	410,313	344,5	295,813	266,5	260,313	282,5	339,813	440,5	594,313
49	-2	657	536,563	436	351,563	281	223,563	180	152,563	145	162,563	212	301,563	441
50	-1,5	501,313	400,5	316,813	246,5	187,313	138,5	100,813	76,5	69,3125	84,5	128,813	210,5	339,313
51	-1	377	294,063	226	169,063	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,063	281
52	-0,5	277,313	210,5	156,813	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,313
53	0	197	144,563	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,563	269
54	0,5	132,313	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,313
55	1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,063	369
56	1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	58,5	90,3125	138,5	209,813	312,5	456,313
57	2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,563	145	206,563	292	409,563	569
58	2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,813	156,5	215,313	292,5	394,813	530,5	709,313
59	3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,063	170	230,063	305	400,063	522	679,063	881
60														

Рис. 2. Табулирование функции для нахождения решения системы уравнений

Локализируем корни равносильного уравнения (рис. 3):

Ячейки **A47:A59** содержат значения X на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5;

Ячейки **B46:N46** содержат значения Y на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5;

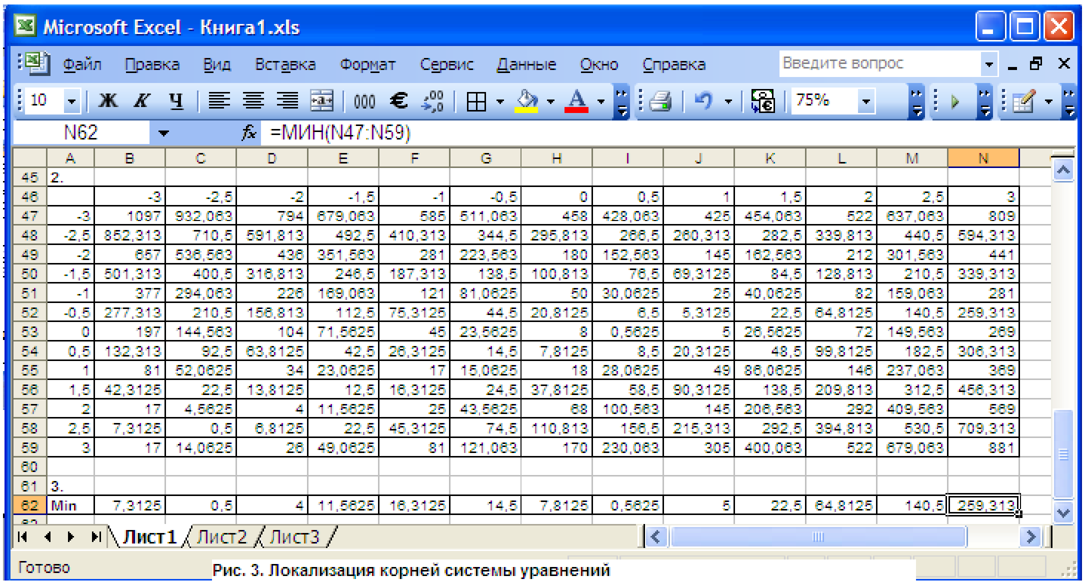
Формула для ячейки **B47** (копируется на диапазон **B47:N59**):

=(($A47-1)^2+(B$46+1)^2-4)^2+(5*$A47+4*B$46-2)^2

Формула для ячейки **B62** (копируется на диапазон **B62:N62**):

=МИН(B47:B59)

Исходя из результатов вычислений, определим следующие пары предполагаемых корней уравнения: (2,5; -2,5), (2; -2), (0; 0,5), (0; 1).

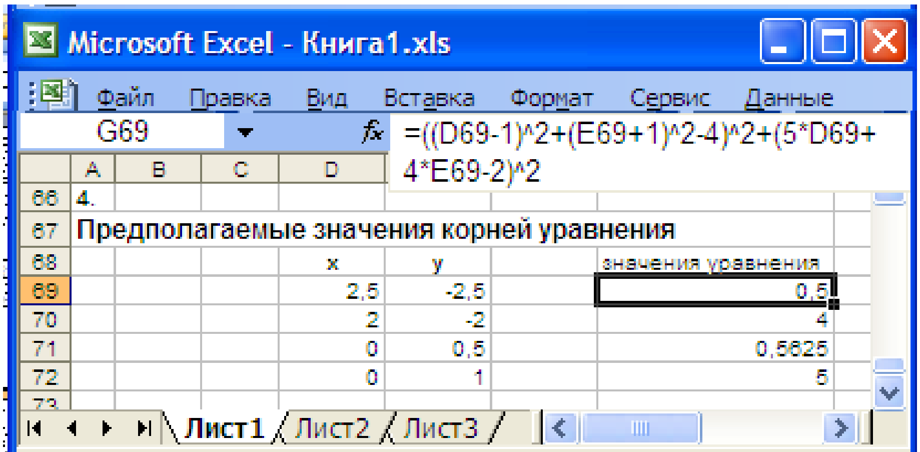


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
45	2.													
46		-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
47	-3	1097	932,063	794	679,063	585	511,063	458	428,063	425	454,063	522	637,063	809
48	-2,5	852,313	710,5	591,813	492,5	410,313	344,5	295,813	266,5	260,313	282,5	339,813	440,5	594,313
49	-2	657	536,563	436	351,563	281	223,563	180	152,563	145	162,563	212	301,563	441
50	-1,5	501,313	400,5	316,813	246,5	187,313	138,5	100,813	76,5	69,3125	84,5	128,813	210,5	339,313
51	-1	377	294,063	226	169,063	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,063	281
52	-0,5	277,313	210,5	156,813	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,313
53	0	197	144,563	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,563	269
54	0,5	132,313	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,313
55	1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,063	369
56	1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	58,5	90,3125	138,5	209,813	312,5	456,313
57	2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,563	145	206,563	292	409,563	569
58	2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,813	156,5	215,313	292,5	394,813	530,5	709,313
59	3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,063	170	230,063	305	400,063	522	679,063	881
60														
61	3.													
62	Min	7,3125	0,5	4	11,5625	16,3125	14,5	7,8125	0,5625	5	22,5	64,8125	140,5	259,313

Рис. 3. Локализация корней системы уравнений

Найдем корни равносильного уравнения (рис. 4) – для этого поместим пары значений для предполагаемых корней в ячейки **D69:E72**. В ячейку G69 введем формулу для равносильного уравнения (копируется на диапазон **G69:G72**):

=((D69-1)^2+(E69+1)^2-4)^2+(5*D69+4*E69-2)^2



	A	B	C	D	E	F	G
66	4.						
67	Предполагаемые значения корней уравнения						
68				x	y		значения уравнения
69				2,5	-2,5		0,5
70				2	-2		4
71				0	0,5		0,5625
72				0	1		5

Рис. 4. Подготовка листа рабочей книги для нахождения корней нелинейной системы уравнений

С помощью надстройки Поиск решения (в окне Параметры поиска решения флажок Линейная модель должен быть снят) установим необходимые параметры для поиска корня равносильного уравнения (рис. 5),

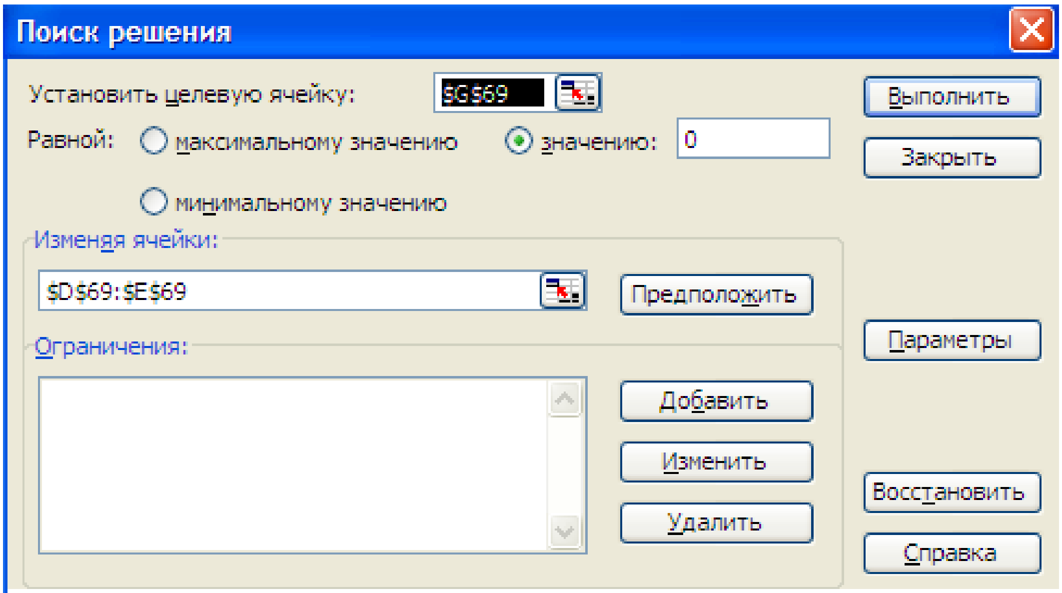


Рис. 5. Ввод данных в окно Поиск решения для задачи нахождения корней системы

Затем выполним поиск решения. Процедуру повторим для всех имеющихся пар корней.

Результаты поиска решения (рис. 6) позволяют делать вывод о том, что система имеет 2 решения:

(2,3675745729901; -2,45934248863711) и (-0,123564081639673; 0,654434224216163)

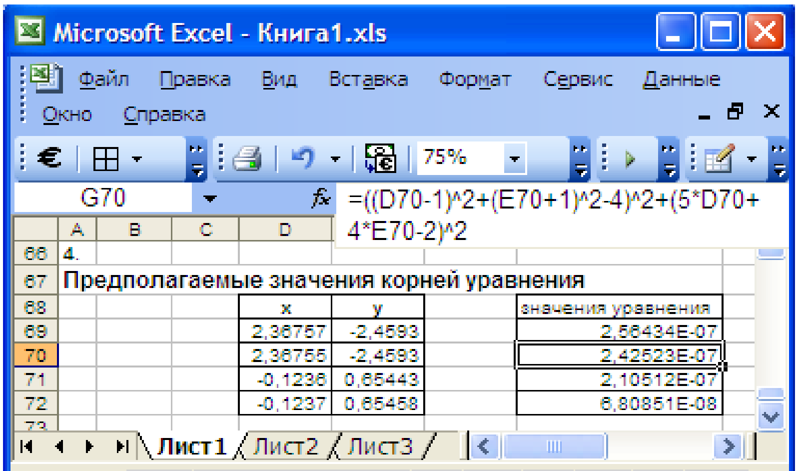


Рис. 6. Результаты поиска решений для нелинейной системы уравнений

Задания для самостоятельной работы

1 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2=4 \\ 6x+10y=4 \end{cases}$$

2 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 4(x-1)^2+5(y+1)^2=12 \\ 4x-2y=1 \end{cases}$$

3 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \\ x+6y=10 \end{cases}$$

4 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 3(x-3)^2+5(y+5)^2=25 \\ x=12+2y \end{cases}$$

5 вариант.

Задача. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x^2+3y^2=4 \\ 8x+4y=2 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются задачами нелинейного программирования?
2. Как записывается общая формулировка нелинейных задач?
3. Как выглядит классификация задач нелинейного программирования?
4. В чем суть метода множителей Лагранжа?
5. Какие способы решения нелинейных задач вы знаете?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13

Тема Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) широко применяется в практике научно-технических расчетов. Хотя линейные ОДУ могут иметь решения в виде специальных функций, многие физические системы нелинейны и описываются нелинейными ОДУ, не имеющими аналитического решения. В этом случае приходиться использовать численные методы решения ОДУ.

Чтобы решить ОДУ, необходимо знать значения зависимой переменной и (или) производных при некоторых значениях независимой переменной. Если эти дополнительные условия задаются при одном значении независимой переменной, то такая задача называется *задачей Коши*. Если же условия задаются при двух или более значениях независимой переменной, то задача называется *краевой*.

Задача Коши

Задачу Коши можно сформулировать следующим образом: пусть дано ОДУ:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую как указанному уравнению, так и начальному условию.

Численное решение задачи Коши состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где h - шаг приращения переменной x, n - число интервалов решения с шагом h.

Рассмотрим здесь две группы численных методов решения задачи Коши: *одношаговые* и *многошаговые*.

Одношаговые методы

Одношаговые методы - это методы, в которых для нахождения следующей точки на кривой $y = f(x)$ требуется информация лишь об одном предыдущем шаге. Простейшим из одношаговых методов является метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \; i = 0, 1, \ldots, n - 1. \qquad (2)$$

Метод Эйлера имеет невысокую точность (порядка h).

Для достижения более высокой точности (порядка h^4) используют *метод Рунге-Кутта* четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_0 + 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + k_3}{6}, \text{ где}$$

$$k_0 = h \cdot f(x_i, y_i), \qquad k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k}{2}\right.$$

$$k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \right. \qquad k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_2 \qquad (3)$$

Многошаговые методы

В *многошаговых методах* для отыскивания следующей точки кривой *y = f(x)* требуется информация *более чем об одной* из предыдущих точек.

Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных точках. При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части уравнения (1) $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$. Тогда схему *метода Адамса* можно представить в виде:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_i + \frac{h}{2} \cdot \Delta f_i + \frac{5 \cdot h}{12} \cdot \Delta^2 f_i + \frac{3 \cdot h}{8} \cdot \Delta^3 f_i, \; i = 3, 4, \ldots, n - 1. \qquad (4)$$

где конечные разности в точке x_i имеют вид:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}. \qquad (5)$$

Решение задачи Коши средствами Mathcad

Инструментарий для решения ОДУ (систем ОДУ) различного порядка в Mathcad представлен широким спектром встроенных функций, работа одной из которых (*rkfixed* - метод Рунге-Кутта (*rk*) четвертого порядка с фиксированным (*fixed*) шагом интегрирования) показана на Рисунке 9.

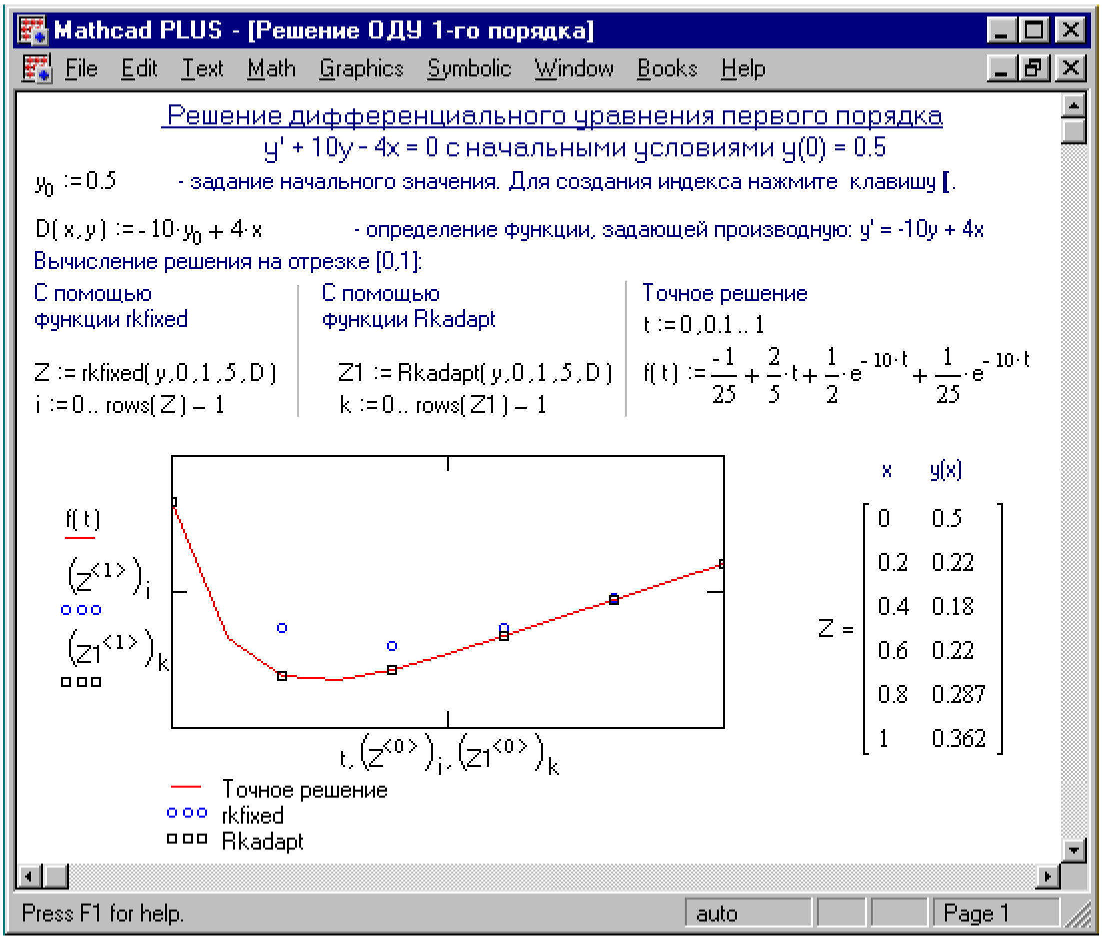


Рисунок 9. Решение ОДУ 1-го порядка

rkfixed*(y, a, b, n, D)*	Возвращает матрицу с $p + 1$ столбцами и $n + 1$ строками (p - количество уравнений или порядок уравнения, n - число шагов на интервале $[a, b]$) - таблицу решений системы: первый столбец - это значения аргумента x, а последующие столбцы - значения ординат решения. y - вектор начальных условий размерности n. $D(x, y)$ - функция-вектор из n элементов, содержащая первые производные неизвестных функций.

Можно решить задачу более точно (более быстро), если уменьшить шаг h там, где производная меняется быстро, и увеличить шаг там, где она ведет себя более спокойно. Для этого предусмотрена функция *Rkadapt* (*adaption* - адаптация). Аргументы и матрица, возвращаемая функцией *Rkadapt*, такие же, как при *rkfixed* (см. Рисунок 9). Решение системы ОДУ показано на Рисунке 11 (Пример 2).

Краевые задачи

Краевая задача формулируется следующим образом: пусть на отрезке [*a, b*] требуется найти решение дифференциального уравнения (для простоты изложение будем вести на примере ОДУ второго порядка):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \qquad (6)$$

при граничных условиях *y(a) = A, y(b) = B.*

В этом случае Mathcad предлагает использовать функцию *sbval*, чтобы найти недостающие начальные условия в точке *a*.

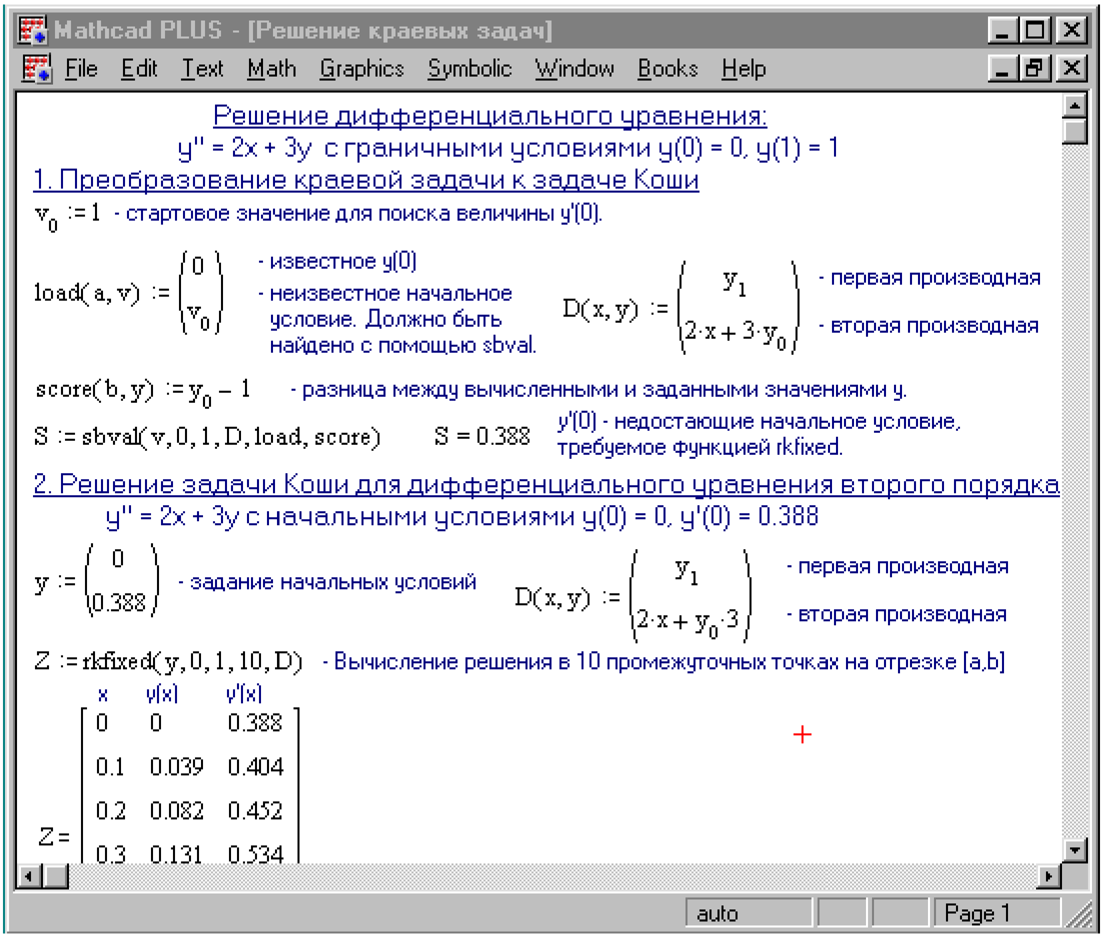


Рисунок 10. Решение краевой задачи

Sbval(*v, a, b , D, load , score*)	Возвращает вектор, содержащий недостающие начальные условия в точке *a*. Вектор *v* задает начальные приближения, *a, b* - граничные точки интервала решений, *D*(*x, y*) - функция-вектор с первыми производными неизвестных функций. *load*(*a, v*) - функция-вектор, возвращающая значение начальных

	условий в точке *a*. *score*(*b*, *y*) - функция-вектор, каждый элемент которого содержит разность между начальным условием заданным в точке *b*, и значением искомого решения в этой точке.

После того, как эти недостающие начальные условия будут получены, можно решать обычную задачу с начальными условиями - *задачу Коши*, используя любую из функций, описанных выше (Рисунок 9).Пример решения краевой задачи показан на Рисунке 10.

Символьное решение линейных дифференциальных уравнений

Для получения аналитического решения линейных ОДУ в Mathcad необходимо выполнить следующие действия (Пример 1 Рисунка 11):

Если вы работаете с пакетом Mathcad 5.0, не забудьте предварительно выполнить команду **Symbolic ? Load Symbolic Processor** для загрузки символьного процессора.. Пропустите этот пункт, если вы работаете с пакетом Mathcad 6.0.

- Напечатать исходное уравнение, используя операторы дифференцирования и комбинацию клавиш **[Ctrl]=** для печати символа =.
- Отметив независимую переменную, выполнить прямое преобразование Лапласа **Symbolic Ю Transforms Ю Laplace Transform (Преобразование Лапласа).** Результат для ОДУ выше 1-го порядка будет помещен в буфер обмена. Вызовите его нажав клавишу **F4**.
- По результатам преобразования Лапласа “вручную” составить алгебраическое уравнение, приняв обозначения *L* = *laplace*(*y*(*t*), *t, s),* *C*1 = *y*(0) и *C*2 = *diff*(*y*(0)*,* 0).
- Решить составленное алгебраическое уравнение относительно переменной *L*, используя команду **0Symbolic Ю Solve for Variable (Решить относительно переменной)**.

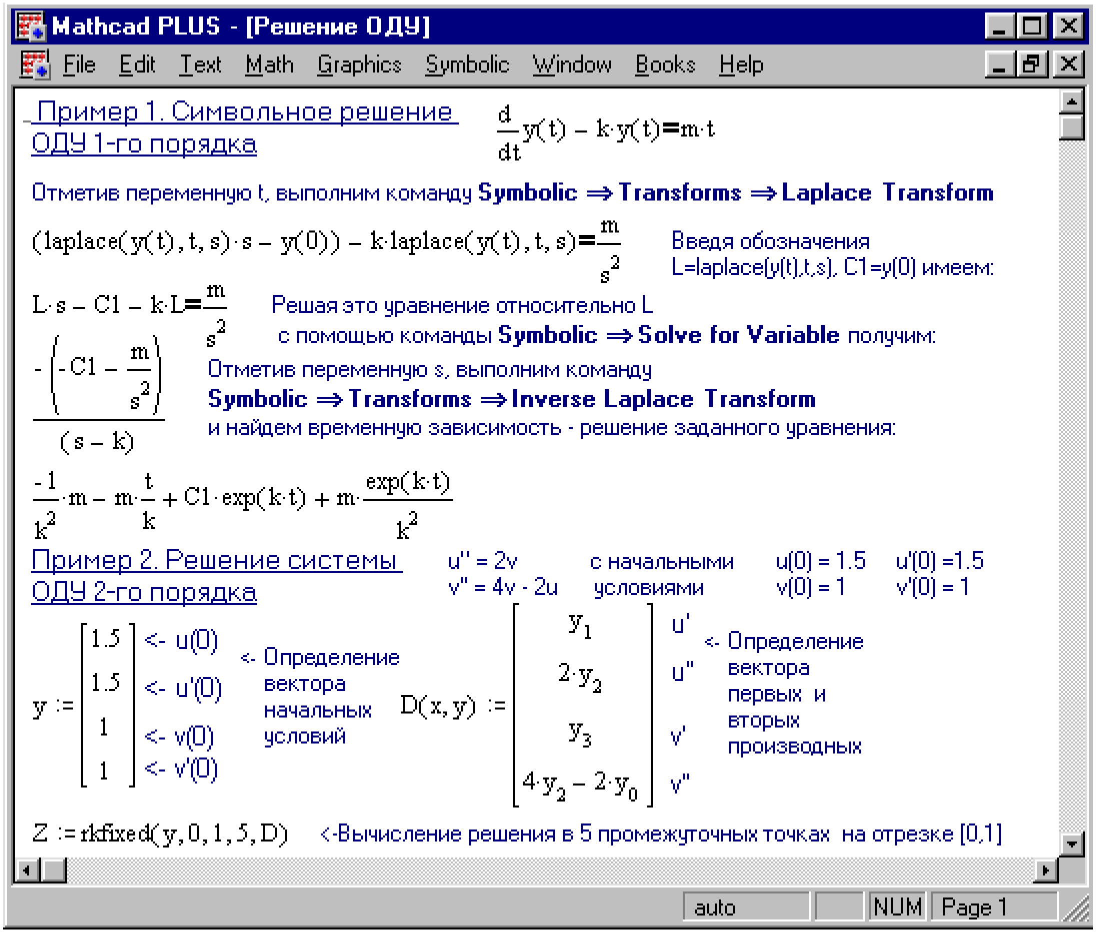


Рисунок 11. Некоторые возможности решения ОДУ в Mathcad

- Отметить переменную *s* и произведя обратное преобразование Лапласа **Symbolic Ю Transforms Ю Inverse Laplace Transform (Обратное преобразование Лапласа)** получить решение заданного ОДУ в виде временной зависимости.

Порядок выполнения

Задание 1. Решить задачу Коши: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $y(0) = 1$
с шагом $h = 0.1$ на отрезке [0, 1]:

- методом *Эйлера*;
- методом *Рунге-Кутта* (коэффициенты k_i задать как функции от x и y);
- методом *Адамса*;
- используя функцию *rkfixed*.
-

Варианты задания 1

№ варианта	$f(x, y)$	№ варианта	$f(x, y)$	№ варианта	$f(x, y)$
1	$x + y$	**6**	$2y$ - cos $2x$	**11**	$2y + 3e^{-x}$
2	$2x^2 +$	**7**	$y - e^{x/}$	**12**	$y / 2 - e^{-x}$

	$2\,y$		$^2 + 2$		
3	$e^{x} - 3\,y$	**8**	$3\,y - 2$ $\sin x$	**13**	$y + (\cos x)/3$
4	$y - \sin x$	**9**	$e^{2x} - y$	**14**	$y - 4\,x + 5$
5	$y / 3 - x^{2}$	**10**	2 $\sin x + y$	**15**	$2\,x - y / 3 - e^{x}$

Задание 2. Построить графики решений, полученных методами *Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса* и с помощью функции *rkfixed.*

Вычислить в точке $x = 1$ относительную погрешность для каждого метода.

Задание 3. Найти аналитическое (точное) решение ОДУ из задания 1 с помощью преобразований Лапласа (команды **Symbolic Ю Transforms Ю Laplace Transform** и **Inverse Laplace Transform**).

Задание 4. Решить задачу Коши для системы ОДУ при заданных начальных условиях на отрезке [0, 2] с шагом $h = 0.2$. Решать с помощью функции *rkfixed*. Построить графики функций *u(t)* и *v(t)*.

Варианты задания 4

№ варианта	Система ОДУ	Начальные условия				№ варианта	Система ОДУ	Начальные условия			
		$u(0)$	$u'(0)$	$v(0)$	$v'(0)$			$u(0)$	$u'(0)$	$v(0)$	$v'(0)$
1	$\begin{cases} u'' = 2v + u \\ v'' = 4v - 2u \end{cases}$	1.5	1.5	1	1	**9**	$\begin{cases} u'' = 1/2 + v \\ v'' = 4 - u + t \end{cases}$	2	0	-1	1
2	$\begin{cases} u'' = -v + 3u \\ v'' = v - 2u \end{cases}$	-1	1	-1.5	3	**10**	$\begin{cases} u'' = -v + t \\ v'' = v + 3u \end{cases}$	-1	2	-1.5	0
3	$\begin{cases} u'' = 2v - u \\ v'' = 4v + u \end{cases}$	1.5	1.5	1	1	**11**	$\begin{cases} u'' = v - u - t \\ v'' = 2v + u \end{cases}$	1.5	1.5	-1	-1
4	$\begin{cases} u'' = 5v \\ v'' = v + 2u + t \end{cases}$	1	1.5	0	2	**12**	$\begin{cases} u'' = 5v + t \\ v'' = 3v + u \end{cases}$	-1	1.5	0	-2
5	$\begin{cases} u'' = v + u + t \\ v'' = v + 2u - t \end{cases}$	0.5	1.5	-1	2	**13**	$\begin{cases} u'' = v + u \\ v'' = v + u - t \end{cases}$	-0.5	1	-1	2
6	$\begin{cases} u'' = 2v + u + t \\ v'' = 4v \end{cases}$	0.5	2	1	2	**14**	$\begin{cases} u'' = 2v - u \\ v'' = 4v + t \end{cases}$	0	-2	0	2
7	$\begin{cases} u'' = -v + t \\ v'' = 5v - 7u \end{cases}$	5	5	-1	1	**15**	$\begin{cases} u'' = v - 2t \\ v'' = v + 3u \end{cases}$	3	3	-1	1
8	$\begin{cases} u'' = v - 5u \\ v'' = 2v + u + t \end{cases}$	1.5	1	3	1						

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

Тема Решение дифференциальных уравнений в частных производных

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых искомая величина зависит от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и *называются дифференциальными уравнениями в частных производных*. К сожалению, очень многие из таких уравнений не имеют аналитического решения, и чтобы решить их, приходиться прибегать к численным методам. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных численно используется *метод конечных разностей*.

Метод конечных разностей

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных *методом конечных разностей* состоит в следующем:

1. Построение в области решения равномерной сетки, содержащей *n* узловых точек (Рисунок 12).

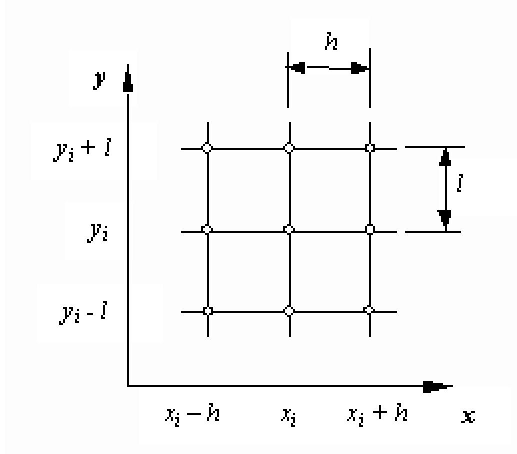


Рисунок 12. Двумерная сетка

2. Представление производных в конечно-разностной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2l}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{l^2}$$ и т. д.,

где $f_{i,\ j}, f_{i+1,\ j}, f_{i-1,\ j}, f_{i,\ j+1}, f_{i,\ j-1}$ - значения функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_j), $(x_i + h, y_j)$, $(x_i - h, y_j)$, $(x_i, y_j + l)$, $(x_i, y_j - l)$ соответственно.

Такие разностные уравнения записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему из n уравнений с n неизвестными.

3. Решение полученной системы с целью получения приближённого решения в узлах сетки.

Гиперболические уравнения в частных производных

Простейшим видом уравнения гиперболического типа является *волновое уравнение.* К исследованию волнового уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала и т. п.

Рассмотрим одномерное уравнение колебаний струны. В области $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ требуется найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

Искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять *начальным условиям,* описывающим начальную ($t = 0$) форму струны j (x) и скорость её точек y (x):

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \qquad (3)$$

и *граничным условиям*, указывающим, что происходит на концах струны ($x = 0$ и $x = l$):

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad ($$

4)

Совокупность начальных и граничных условий называется *краевыми условиями*.

Для построения разностной схемы решения задачи (2) - (4) построим в области $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ сетку $x_i = i\ h$, $i = 0,\ 1, ..., n,\ \ l = h\ \ n,\ \ t_j = j\ t$, $j = 0,\ 1,\ ..., m,$ $T = t\ \ \ m$ и аппроксимируем уравнение (2) в каждом внутреннем узле сетки на шаблоне “крест” (Рисунок 13).

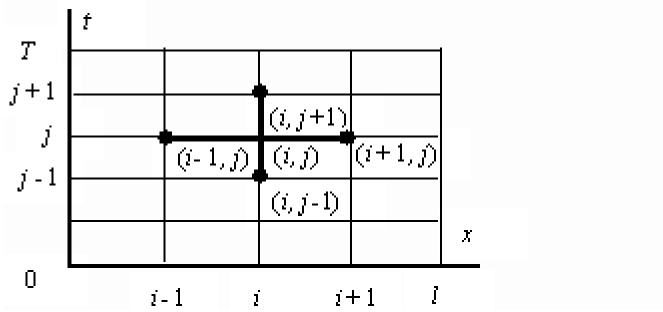


Рисунок 13. . Шаблон для волнового уравнения

Используя для аппроксимации частных производных выражения (1), получаем следующую разностную аппроксимацию уравнения (2):

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \qquad (5)$$

Решая уравнение (6) относительно единственного неизвестного значения $u_{i,j+1}$, получаем следующую схему:

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \qquad (6)$$

$l = a^{2t\,2} / h^2$, $i = 1, ..., n - 1, j = 1, ..., m - 1.$

Схема (6) называется *трехслойной* потому, что связывает между собой значения $u_{i,j}$ функции $u(x,\ t)$ на трех временных слоях с номерами: $j - 1, j, j + 1$. Схема (6) является *явной*, т.е. позволяет в явном виде выразить $u_{i,j}$ через значения u с предыдущих двух слоев.

Для начала счета по схеме (6) необходимы значения $u_{i,j}$ функции $u(x,\ t)$ на нулевом ($j = 0$) и первом ($j = 1$) временных слоях. Они определяются начальными условиями (3) и записываются в виде:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i),\quad \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{\tau} \approx \psi(x_i) \Rightarrow u_{i,1} = u_{i,0} + \tau\psi(x_i),\ i = 0, 1, ..., n. \qquad (7)$$

Граничные условия (4) также записываются в сеточном виде:

$$u_{0,j} = \mu_1(t_j),\quad u_{n,j} = \mu_2(t_j),\ j = 0, 1, ..., m. \qquad (8)$$

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (2) - (4) сводится к решению разностной задачи (6) - (8).

Схема устойчива, если выполнено условие Куранта $a\tau/h < 1$.

Параболические уравнения в частных производных

Простейшим видом уравнения параболического типа является *уравнение теплопроводности*, или *уравнение Фурье.* К исследованию уравнения теплопроводности, или уравнения Фурье, приводит рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде, некоторые вопросы теории вероятностей.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном стержне длины *l*, на концах которого поддерживается заданный температурный режим. Задача состоит в отыскании функции *u*(*x, t*), удовлетворяющей в области $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a > 0 \qquad (9)$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (10)$$

и *граничным условиям*

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t) \qquad (11)$$

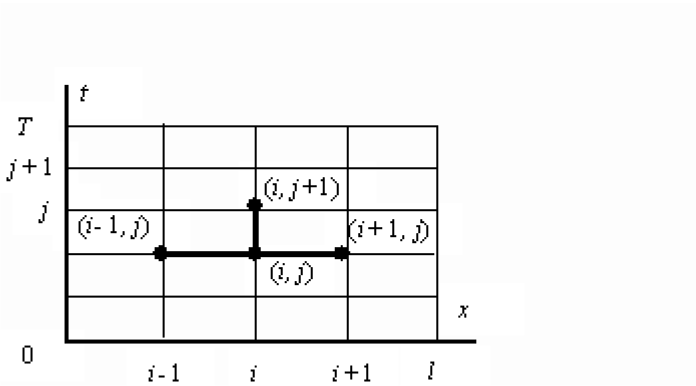


Рисунок 14. Шаблон для уравнения теплопроводности

Построим в области $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ равномерную прямоугольную сетку с шагом *h* в направлении *x* и шагом t - в направлении *t* (Рисунок 14). Тогда $x_i = i\,h$, $i = 0,1, ..., n$, $h = l / n$; $t_j = j\ t$, $j = 0,1, ..., m$, $t = T / m$.

Аппроксимируем дифференциальную задачу (9) - (11) на четырехточечном шаблоне, в результате получаем *явную двухслойную разностную схему*:

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j},$$

$i = 1, 2, ..., n - 1, j = 0, 1, ..., m - 1$

$u_{i,0} = \varphi(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n,$

$u_{0,j} = \mu_1(t_j)$, $u_{n,j} = \mu_2(t_j)$, j = 0, 1, ..., m, (12)

$\lambda = \dfrac{a\tau}{h^2}$.

Схема устойчива при $l \leq$ 1/2.

Эллиптические уравнения в частных производных

К исследованию такого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д. Рассмотрим решения *уравнения Пуассона* и его однородной формы - *уравнения Лапласа*.

Решение уравнения Пуассона будем искать в некоторой ограниченной области W = $\{0 \le x \le q_1,\ 0 \le y \le q_2\}$ изменения независимых переменных *x, y*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (13)$$

Граничные условия:

$u(0, y)$ =m$_1(y)$, $u(a, y)$ = m$_2(y)$, y I [0, b], (14)
$u(x, 0)$ = m$_3(x)$, $u(x, b)$ = m$_4(x)$, y I [0, a],

где f, m$_1$, m$_2$, m$_3$, m$_4$ - заданные функции (задача, состоящая в решении эллиптического уравнения при заданных значениях искомой функции на границе расчётной области, называется *задачей Дирихле*.).

Построим в области W равномерную прямоугольную сетку с шагами h и l по x и y соответственно: $x_i = i\,h$, i = 0, 1, ..., n, $h = q_1 / n$; $y_j = j\,l$, j = 0, 1, ..., m, $l = q_2 / m$.

Аппроксимируем дифференциальную задачу (13) - (14) на шаблоне “крест” (Рисунок 13), в результате получаем *неявную трехслойную разностную схему*:

$$a_{i,j}u_{i+1,j} + b_{i,j}u_{i-1,j} + c_{i,j}u_{i,j+1} + d_{i,j}u_{i,j-1} + e_{i,j}u_{i,j} = f_{i,j},$$

$$\text{где } a_{i,j} = b_{i,j} = \frac{1}{h^2},\ c_{i,j} = d_{i,j} = \frac{1}{l^2},\ e_{i,j} = -2\cdot\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2}\right) \qquad (15)$$

$i = 1,2 \ldots n-1, \quad j = 1,2 \ldots m-1$,

$$u_{0,j} = \mu 1(y_j), \quad u_{n,j} = \mu 2(y_j), \quad j = 0,1 \ldots m,$$
$$u_{i,0} = \mu 3(x_i), \quad u_{i,m} = \mu 4(x_i), \quad i = 0,1 \ldots n$$

Для решения уравнения Пуассона в Mathcad используется функция *relax*

relax***(****a, b, c, d, e, f, u, rjac****)***	Возвращает квадратную матрицу решения уравнения Пуассона. Здесь *a ,b ,c, d, e* - квадратные матрицы одинакового размера, содержащие коэффициенты уравнения (15); *f* - квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения (15) в каждой точке по

	области W, в которой ищется решение; *u* - квадратная матрица, содержащая граничные значения решения на границе области и начальное приближение для решения внутри области; *rjac*- число между 0 и 1, которое управляет сходимостью алгоритма.

При $f = 0$ получаем уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (16)$$

Если для уравнения Лапласа в области W ввести сетку с равным шагом по осям x и y, то разностная схема (16) существенно упрощается

$$\begin{gathered} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \\ i = 1,2..n-1,\ j = 1,2..m-1, \\ u_{0,j} = \mu 1(y_j),\quad u_{n,j} = \mu 2(y_j),\quad j = 0,1..m, \\ u_{i,0} = \mu 3(x_i),\quad u_{i,m} = \mu 4(x_i),\quad i = 0,1..n. \end{gathered} \qquad (17)$$

Решение уравнения Лапласа с помощью функции *relax* показано на Рисунке 15.

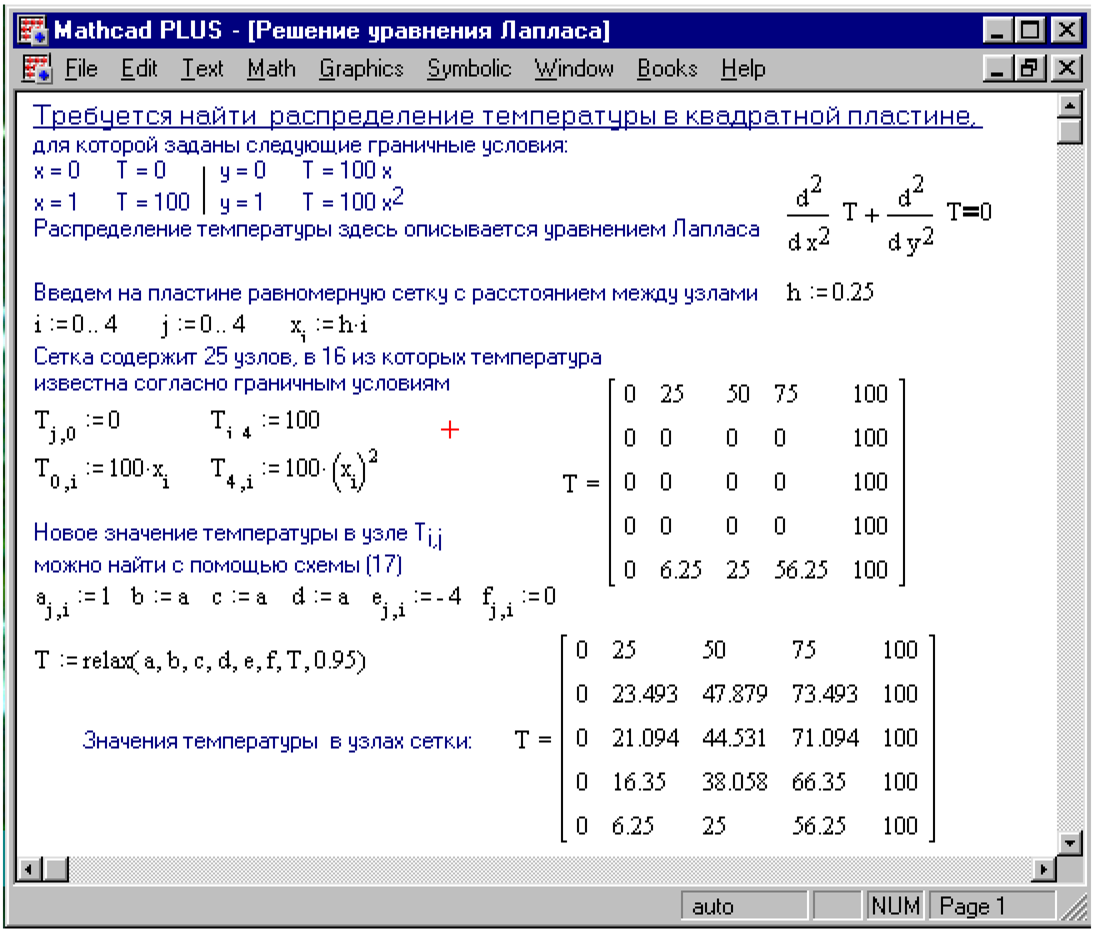


Рисунок 15. Решение уравнения Лапласа

Порядок выполнения

Задание 1. Решить задачу о колебании струны единичной длины с закрепленными концами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a = 1$$

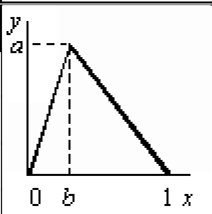
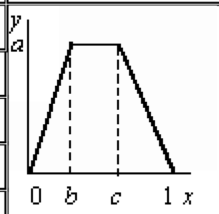
с начальными условиями

$u(x,\ 0) = f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $0 \le x \le 1$

и нулевыми граничными условиями

$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0$.

Варианты задания 1

№ варианта	*f(x)*	*a*	*b*	№ варианта	*f(x)*	*a*	*b*	*c*
1		1	0.1	**9**	*x* sin (2 (*x* - 1))			
2		2	0.1	**10**	4 *x* 3 (*x* - 1)			
3		4	0.2	**11**		1	0.1	0.2
4		6	0.3	**12**		3	0.2	0.4
5		8	0.4	**13**		5	0.4	0.6
6	*x* (*x* 2 - 1)			**14**		7	0.6	0.8
7	sin (p *x* 2)			**15**		9	0.8	0.9
8	sin (p *x*) cos *x*							

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по *x* ($i = 0, 1, ... 10$) и провести вычисления для 16 слоев по *t* ($j = 0, 1, ... 16$). Вычисления выполнить с шагом *h* по *x*, равным 0.1 и шагом t по *t*, равным 0.05. Отобразить графически решение задачи на 0-ом, 5-ом, 10-ом и 16-ом временных слоях.

Задание 2. Найти решение $u(x,\ t)$ для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a = 1$$

с начальными условиями

$u(x,\ 0) = f(x)\ 0 \le x \le 1$

и граничными условиями

$u(0,\ t) = a,\ u(1,\ t) = b.$

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по *x* ($i = 0, 1, ... 10$) и провести вычисления для 12 слоев по *t* ($j = 0, 1, ... 12$). Вычисления выполнить с шагом *h* по *x*, равным 0.1 и шагом t по *t*, равным 0.005. Отобразить графически решение задачи на 0-ом, 4-ом, 8-ом и 12-ом слоях и построить интегральную поверхность распределения температуры в стержне с помощью команды **Graphics Ю Create Surface Plot**.

Варианты задания 2

№ варианта	*f(x)*	*a*	*b*	№ варианта	*f(x)*	*a*	*b*
1	*x* (*x* - 1)	0	0	**9**	(x^2 + 0.5) cos(2 p *x*)	0.5	1.5
2	$x^3 + x^2 - x$	0	1	**10**	sin(p *x*) cos *x*	0	0
3	x^2 (1 - *x*)	0	0	**11**	*x* sin(2 (*x* - 1))	0	0

4	$1 - x^4$	1	0	**12**	$\ln(0.5 + x)(x - 1)$	0.7	0
5	$x \sin(2 p x)$	0	- 0.3	**13**	$x \sin(4(x - 1)) - x$	0	-1
6	$(x - 1) \sin^2 x$	0	0	**14**	$x \cos(2 p x)$	0	1
7	$4 x^2 (x - 1)$	0	0.5	**15**	$x e^{-x} (x^4 - 2)$	0	- 0.4
8	$10 x^3 (x - 1)$	0.5	0				

Задание 3. Найти стационарное распределение температуры в квадратной пластине со стороной 1, описываемое уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с краевыми условиями вида

$u(0, y) = f_1(y)$, $(0 \le y \le 1)$, $u(1, y) = f_2(y)$, $(0 \le y \le 1)$,

$u(x, 0) = f_3(x)$, $(0 \le x \le 1)$, $u(x, 1) = f_4(x)$, $(0 \le x \le 1)$.

Решать задачу с помощью функции *relax*.

Для решения задачи построить сетку из 11 узлов по x ($i = 0, 1, ... 10$) и из 11 узлов по y ($j = 0, 1, ... 10$). Отобразить графически с помощью команды **Graphics Ю Create Contour Plot** стационарное распределение температуры в пластине.

Варианты задания 3

№ варианта	$f_1(y)$	$f_2(y)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	y^2	$\cos y + (2 - \cos 1)\, y$	x^3	$1 + x$
2	$e^y - e\, y^2$	y	$1 - x^3$	x^2
3	$1 - y^2$	y	$\sin x + 1 - x^3(1 + \sin 1)$	x
4	0	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x
5	$e^y + y^2 (1 - e) - 1$	y	0	x
6	y^2	$\cos y + (3 - \cos 1)\, y$	x^3	$1 + 2x$
7	0	y	$\sin x - x^3 \sin 1$	x^2
8	$2ey - (1+2e)\, y^2\ 1$	$- y$	$1 - x^3$	$x - 2$
9	$- 10y^2 - 8y + 6$	$- 10y^2 - 30y + 22$	$9x^2 + 7x + 6$	$9x^2 - 15x - 12$
10	$- 7y^2 - 5y + 3$	$- 7y^2 - 21y + 13$	$6x^2 + 4x + 3$	$6x^2 - 12x - 9$
11	1	$y + 1$	1	$1 + x$
12	1	e^y	1	e^x
13	$- y^2 - 5y$	$4 + 5y - y^2$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x + 4$
14	$3 - 7y$	$7 - 6y$	$4x + 3$	$5x - 4$
15	0	$\sin y$	0	$\sin x$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 15

Тема: Решение задачи динамического программирования

Цель работы: Решить простейшие задачи методом динамического программирования.

Краткая теория

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный, к задачам, в которых процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие задачи называются многошаговыми.

Характерные особенности задач динамического программирования:

Неоднозначность решения.

Возможность деления вычислительного процесса на этапы.

Общий критерий – сумма частных критериев на этапах.

Динамическое программирование позволяет осуществлять оптимальное планирование многошаговых процессов, зависящих от времени. Процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения. Планируя многошаговый процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно. На каждом этапе оптимизируется управление только этого этапа, причем управление выбирается с учётом последствий, т.е. оптимальное управление для данного этапа должно учитывать весь последующий ход процесса, для чего необходимо знать все управления на последующих этапах. Поскольку процесс заканчивается на последнем этапе, оптимальное решение не должно учитывать последующего управления. Таким образом, процесс вычисления протекает в обратном направлении, от конца к началу.

Постановка задачи динамического программирования.

Пусть S_0, S_k, S_n - состояния системы на начальном, *k-ом* и конечном этапе, u_0, u_k, u_n - управления системой на начальном, *k-ом* и конечном этапах. Управление u_k переводит систему из состояния S_{k-1} в состояние S_k. Показатель эффективности на *k-ом* этапе обозначим через $W_k(S_{k-1})$.

Так как оптимизацию показателя эффективности начинаем с последнего этапа, то, зная максимум показателя эффективности на *n*-ом шаге

$$W_n^{¿}(S_{n-1}) = \max_{u_n}\left(W_n(S_{n-1}, u_n)\right)$$

найдем максимум показателя эффективности на *(n-1)*- ом шаге

$$W_{n-1}^{¿}(S_{n-2}) = \max_{u_{n-1}}\left(W_{n-1}(S_{n-2}, u_{n-1}) + W_n^{¿}(S_{n-1})\right),$$

где $W_{n-1}(S_{n-2}, u_{n-1})$ называется "сиюминутной" выгодой на *(n-1)*- ом шаге.

Основное функциональное уравнение динамического программирования (уравнение Беллмана) имеет вид:

$$W_k^{¿}(S_{k-1}) = \max_{u_k}\left(W_k(S_{k-1}, u_k) + W_{k+1}^{¿}(S_k)\right)$$

Принцип оптимальности Беллмана можно сформулировать следующим образом: каковы бы не были начальное состояние и начальное решение, последующее решение должно быть оптимальным по отношению к состоянию, полученному в результате начального решения. Иными словами, принцип оптимальности утверждает, что если в данный момент выбрано не наилучшее решение, то последствия этого нельзя исправить в будущем.

Задача определения кратчайших расстояний по заданной сети

Пусть дано конечное число точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, соединенных всевозможными отрезками линий, называемых звеньями или связями. Тогда совокупность точек и их связей называют сетью. Сеть называется достаточно связанной, если существует путь, состоящий из звеньев и соединяющий любые две точки сети. Пусть каждому звену поставлено в соответствие действительное неотрицательное число l_{ij} - его длина. Необходимо определить кратчайшее расстояние по сети от каждой точки до всех остальных и соответствующие пути, по которым, они проходят. Пронумеруем точки сети в любом порядке и укажем длину каждого звена. Две точки называются соседними, если они непосредственно соединены связью. Положим, $l_{ij}=l_{ji}$.

Для решения задачи используем метод динамического программирования и отыскиваем кратчайшее расстояние не от фиксированной точки
до всех остальных, а от всех остальных до фиксированной через соседние точки. Связь, через которую проходит кратчайшее расстояние, после каждого шага отмечаем стрелкой. Для удобства точки сети обозначим кружками с номерами точек.

Алгоритм решения:

Фиксируем конечную точку P_{ii}, до которой необходимо рассчитать кратчайшее расстояние от всех остальных, и рядом с этой точкой записываем нуль, т.к. расстояние P_i от точки до ней самой равно 0.Это число, отличное от нуля, для других точек, назовём характеристикой точки.

Определим соседние точки по формуле $c_{ij}=0+l_{ij}$ и на связях, соединяющих эти точки, поставим стрелки, направленные в точку P_i. После этого точку P_i отметим символом v, обозначающим, что операции над ней закончены.

Переходим к любой соседней точке, для которой характеристика уже найдена. Пусть это будет точка P_j. Определяем соседние с ней точки и подсчитываем характеристики этих точек по формуле $c_{ji}=c_{ij}+l_{ji}$.

При определении c_{ji} для соседних P_j может оказаться, что для некоторых из них характеристики c_{ij} уже известны. В этом случае новую характеристику c_{ji} сравниваем со старой характеристикой c_{ij}.

Если $c_{ji} \geq c_{ij}$, то старую характеристику оставляем без изменений.

Если $c_{ji} < c_{ij}$, то старую характеристику заменяем на новую, соответственно происходит или не происходит изменение направления.

Точку p_j отмечаем символом v, если соседняя точка, у которой изменилась характеристика, не была ранее отмечена v. Если же точка ранее была отмечена символом v, то пересчитываем характеристики соседних с ней точек.

Переходим к пункту 3.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не будут отмечены символом v все точки сети. Ответ выписываем в виде таблицы, где указаны кратчайшее расстояние от всех точек до конечной и пункты, через которые они проходят.

Порядок выполнения заданий

Задача 1. Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено $S_0 = 1000$ единиц средств. Каждый квартал предприятие А получает х средств, предприятие В - у средств. При этом от выделенных средств предприятие А получает 5х единиц и остаток средств 0,3х единиц, а предприятие В - доход 4у единиц и остаток выделенных средств 0,5у единиц. Необходимо распределить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

Решение. Период времени 1 год разделим на 4 квартала (4 этапа).

Введем обозначения: через x_i, y_i обозначим вклад в развитие предприятий А и В в 1-ом квартале, W_i - доход за i-ый квартал, S_i - остаток средств на конец i-ого квартала, i – 1,2,3,4.

№	Состояние	Вклад		Доход	Остаток
		А	В		
1	$S_0 - S_1$	x_1	y_1	W_1	S_1
2	$S_1 - S_2$	x_2	y_2	W_2	S_2
3	$S_2 - S_3$	x_3	y_3	W_3	S_3
4	$S_3 - S_4$	x_4	y_4	W_4	S_4

С учетом введенных обозначений составим подробную таблицу по этапам.

Предприятие	1 квартал			2 квартал			3 квартал			4 квартал	
	вклад	доход	остаток	вклад	доход	остаток	вклад	доход	остаток	вклад	доход
A	x_1	$5x_1$	$0,3x_1$	x_2	$5x_2$	$0,3x_2$	x_3	$5x_3$	$0,3x_3$	x_4	$5x_4$
B	y_1	$4y_1$	$0,5y_1$	y_2	$4y_2$	$0,5y_2$	y_3	$4y_3$	$0,5y_3$	y_4	$4y_4$
	$S_0=x_1+y_1$	$W_1=5x_1+4y_1$	$S_1=0,3x_1+0,5y_1$	$S_1=x_2+y_2$	$W_2=5x_2+4y_2$	$S_2=0,3x_2+0,5y_2$	$S_2=x_3+y_3$	$W_3=5x_3+4y_3$	$S_3=0,3x_3+0,5y_3$	$S_3=x_4+y_4$	$W_4=5x_4+4y_4$

Отыскание оптимального управления начнем с 4 квартала.

$$W_4^{¿}=\max W_4=\max\left(5x_4+4y_4\right)=\left\{\begin{matrix} x_4+y_4=S_3, \\ x_4=S_3-y_4,\, S_3=const \end{matrix}\right\}=\max\left(5\left(S_3-y_4\right)+4y_4\right)=$$

$$¿\max_{0\le y_4\le S_3}\left(5S_3-y_4\right)=\left(5S_3-y_4\right)\Big|_{y_4=0}=5S_3.$$

3 квартал.

$$W_{3-4}^{¿}=\max\left(W_3+W_4^{¿}\right)=\max\left(5x_3+4y_3+5S_3\right)=\left\{\begin{matrix} x_3+y_3=S_2, \quad x_3=S_2-y_3, \quad S_3=0,3x_3+ \\ +0,5y_3=0,3S_2-0,3y_3+0,5y_3=0,3S_2+0,2y_3, \\ S_2=const \end{matrix}\right\}=$$

$$¿\max_{0\le y_3\le S_2}\left(5S_2-5y_3+4y_3+1,5S_2+y_3\right)=\max_{0\le y_3\le S_2}\left(6,5S_2\right)=6,5S_2.$$

Так как максимум дохода за 3-4 кварталы постоянен при любом распределении средств, то пусть $x_3=\frac{S_2}{2},\quad y_3=\frac{S_2}{2}$.

2 квартал.

$$W_{2-4}^{¿}=\max\left(W_2+W_{3-4}^{¿}\right)=\max\left(5x_2+4y_2+6,5S_2\right)=\left\{\begin{matrix} x_2+y_2=S_1, \quad x_2=S_1-y_2, \quad S_2=0,3x_2+ \\ +0,5y_2=0,3S_1-0,3y_2+0,5y_2=0,3S_1+0,2y_2, \\ S_1=const \end{matrix}\right\}=$$

$$¿\max_{0\le y_2\le S_1}\left(5S_1-5y_2+4y_2+1,95S_1+1,3y_2\right)=\max_{0\le y_2\le S_1}\left(6,95S_1+0,3y_2\right)=\left(6,95S_1+0,3y_2\right)\Big|_{y_2=S_1}=7,25S_1$$

1 квартал.

$$W_{1-4}^{¿}=\max(W_1+W_{2-4}^{¿})=\max(5x_1+4y_1+7{,}25S_1)=\left\{\begin{array}{l} x_1+y_1=S_0, \quad x_1=S_0-y_1, \quad S_1=0{,}3x_1+ \\ +0{,}5y_1=0{,}3S_0-0{,}3y_1+0{,}5y_1=0{,}3S_0+0{,}2y_1, \\ S_0=const \end{array}\right\}=$$

$$¿\max_{0\le y_1\le S_0}(5S_0-5y_1+4y_1+2{,}175S_0+1{,}45y_1)=\max_{0\le y_1\le S_0}(7{,}175S_0+0{,}45y_1)=$$

$$(7{,}175S_0+0{,}45y_1)\big|_{y_1=S_0}=7{,}625S_0$$

По условию задачи $S_0=1000$ единиц, $W_{1-4}^{¿}=7625$ единиц, при этом будем иметь следующие распределение средств по кварталам:

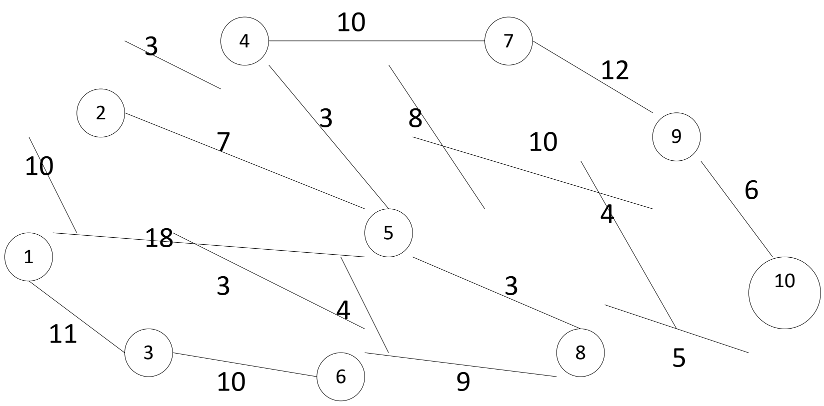
Квартал	Распределяемые средства	Вклады	
		A	B
1	$S_0=1000$	$x_1^{¿}=0$	$y_1^{¿}=1000$
2	$S_1=0{,}3x_1^{¿}+0{,}5y_1^{¿}=500$	$x_2^{¿}=0$	$y_2^{¿}=500$
3	$S_2=0{,}3x_2^{¿}+0{,}5y_2^{¿}=250$	$x_3^{¿}=125$	$y_3^{¿}=125$
4	$S_3=0{,}3x_3^{¿}+0{,}5y_3^{¿}=100$	$x_4^{¿}=100$	$y_4^{¿}=0$

Задания для самостоятельной работы

1 вариант.

Задача 1. Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество x средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход 2x и уменьшается до 0,6x. Количество y средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход 3y и уменьшается до 0,2y. Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве $S_0=850$ единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

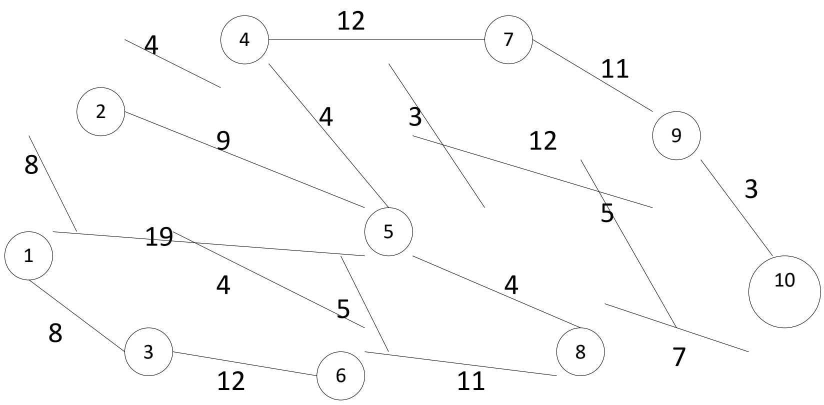
Задача 2. По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.



2 вариант.

Задача 1. Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено $S_0=900$ единиц средств. Каждый квартал предприятие А получает x средств, предприятие В - y средств. При этом от выделенных средств предприятие А получает 4x единиц и остаток средств 0,3x единиц, а предприятие В - доход 5y единиц и остаток выделенных средств 0,1y единиц. Необходимо распределить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

Задача 2. По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.



Контрольные вопросы

1. Что называется динамическим программированием?
2. Какие характерные особенности задач динамического программирования вы знаете?
3. Что называется управлением?
4. В чем состоит метод динамического программирования?
5. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана?

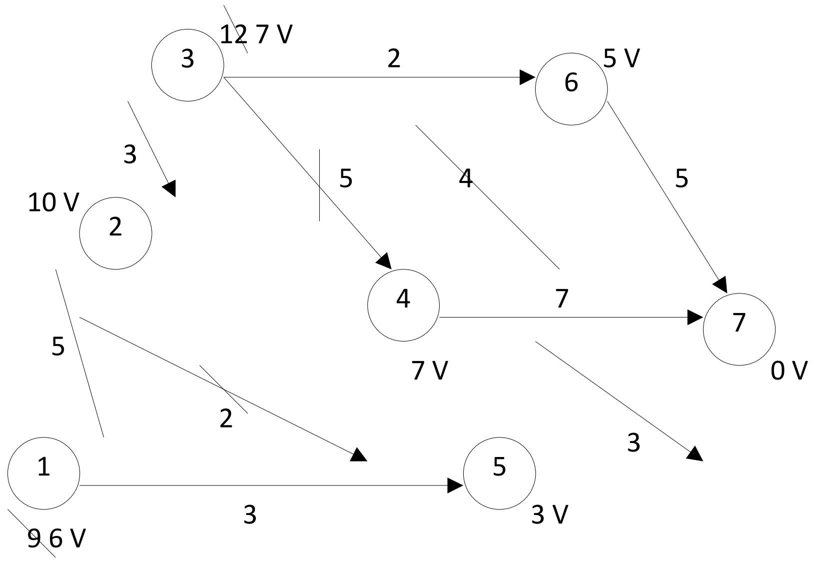
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 16

Тема: Простые задачи динамического программирования

Цель работы: Решить простейшие задачи методом динамического программирования.

Задача 2. Дана сеть, состоящая из 7 точек, и известны расстояния между точками. Необходимо определить кратчайшее расстояние от любой точки до точки 7.

Решение.



Рассмотрим точку 7. Рядом с кружком ставим 0 характеристику этой точки.

Соседними с точкой 7 являются точки 6,5,4. Подсчитаем характеристики этих точек и укажем направления. Точку 7 отмечаем символом V , т.к. операции на ней закончены.

Рассмотрим точку 4. Соседними с ней будут точки 6,3,1,7, Находим характеристики каждой из них. Характеристики точек 1 и 3 – соответственно 9 и 12. Характеристики точек 6,7 остались без изменения, так как 7+4=11>5, 7+7=14>0. Точку 4 отметим символом V. Рассмотрим точку 6. Соседними являются точки 3,4,7. Для точки 3 новая характеристика 5+2=7>1*2,* поэтому изменяем старую характеристику 12 на 7, и указываем новое направление. Для точек 4,7 старые характеристики остаются без изменений, т.к. 5+4=9>7, 5+5=10>0. Точку 6 отмечаем знаком V. Рассмотрим точку 5. Соседняя с ней точка 1. Новая характеристика 3+3=6<9, поэтому изменяем характеристику и направление. Точку 5 отмечаем символом V. Точка 1, характеристика которой изменилась, является соседней с точкой 4. Точка 4 отмечена символом V, поэтому пересчитываем характеристику этой точки и проверяем соседние с ней: 7+5=12>7; 7+4=11>5; 7+7=14>0. Характеристики точек 3,6,7 остаются без изменений.

Рассмотрим точку 3. Соседними являются точки 2,4,6. Характеристика 2: 7+3=10, записываем эту характеристику и указываем направление. Характеристики 6,4 остались без изменения. Точку 3 отмечаем символом V.

Рассмотрим точку 2. Соседними являются точки 1 и 3. Характеристики точек не изменяются, т.к. 10+5=15>б, 10+3=13>7. Точку 2 отмечаем символом V.

Рассмотрим точку 1. Соседними являются точки 2,4,5. Характеристики точек не изменились, т.к. 6+5=11>10, 6+2=8>4, 6+3=9>3. Операции над всеми точками закончены. Ответ запишем в виде таблицы.

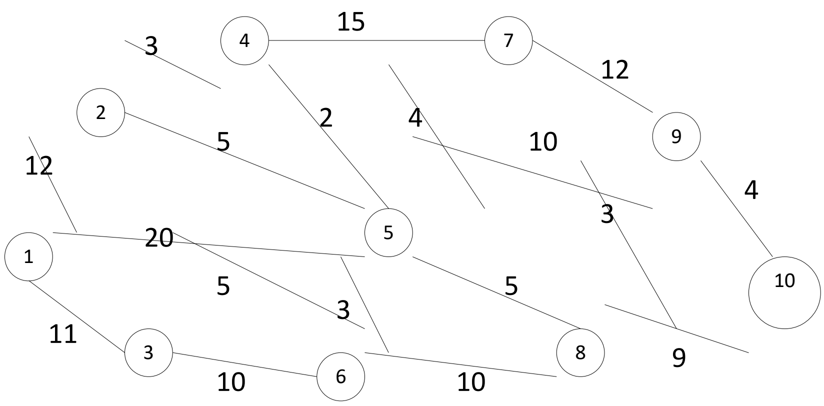
Номера точек, между которыми рассчитывается	Кратчайшее расстояние	Маршрут, по которому проходит кратчайшее
1-7	6	1-5-7

2-7	10	2-3-6-7
3-7	7	3-6-7
4-7	7	4-7
5-7	3	5-7
6-7	5	6-7
7-7	0	

3 вариант.

Задача 1. Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество х средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход 5х и уменьшается до 0,1х. Количество у средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход 3у и уменьшается до 0,5у. Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве $S_0 = 1100$ единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

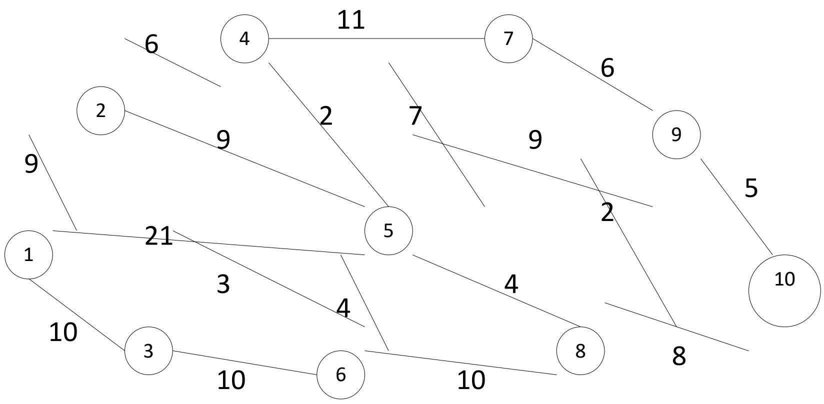
Задача 2. По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.



4 вариант.

Задача 1. Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено $S_0 = 750$ единиц средств. Каждый квартал предприятие А получает х средств, предприятие В - у средств. При этом от выделенных средств предприятие А получает 4х единиц и остаток средств 0,3х единиц, а предприятие В - доход 3у единиц и остаток выделенных средств 0,6у единиц. Необходимо распределить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

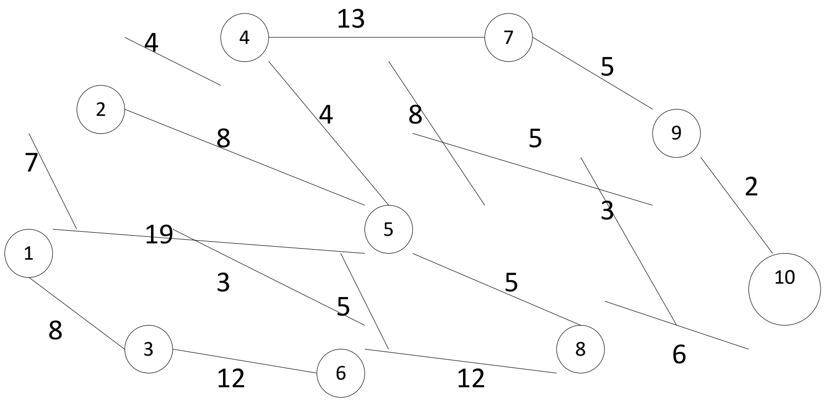
Задача 2. По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.



5 вариант.

Задача 1. Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество х средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход 5х и уменьшается до 0,3х. Количество у средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход 6у и уменьшается до 0,1у. Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве $S_0 = 800$ единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

Задача 2. По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.



Контрольные вопросы

1. Что называется сетью, звеньями?
2. Что такое характеристика точки?
3. Опишите алгоритм решения задачи определения кратчайшего расстояния по заданной сети?

Основная литература:

1. Основы проектирования компонентов автоматизированных систем: учебное пособие/ Т. В. Волкова Оренбург: ОГУ, 2016, 226 с. То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=471129
2. Никонов, О. И. Математическое моделирование и методы принятия решений : учебное пособие для СПО / О. И. Никонов, С. В. Кругликов, М. А. Медведева ; под редакцией А. А. Астафьева. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 99 c. — ISBN 978-5-4488-0482-3, 978-5-7996-2828-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/87825.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
3. Модели оптимизации. Математическое программирование, исследование операций : учебно-методическое пособие / составители Т. А. Бенгина, В. Г. Саркисов, Л. Н. Смирнова. — 2-е изд. — Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2018. — 156 c. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/90633.html. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

Дополнительная литература:

1. Рудаков А. Технология разработки программных продуктов: учебник. Изд.Academia. Среднее профессиональное образование. 2013 г. 208 стр.