МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «Математика»
для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Передача и распределение электрической энергии в системах электроснабжения

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» рассмотрены и утверждены на заседании кафедры физики, электротехники и электроэнергетики (протокол №___ от «____» ______ 2019 г.).

Зав. кафедрой физики, электротехники и электроэнергетики ___________ Пермяков А.В.

Содержание

1.ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Математика» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов.

Целью освоения дисциплины «Математика» является формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и вариативных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ темы	Наименование тем практических занятий	Обьем часов	Форма проведения
	1 семестр		
1	Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.	1,5	Решение разноуровневых задач
2	Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. Численное решение систем уравнений.	1,5	Решение разноуровневых изадач
3	Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.	1,5	Решение разноуровневых изадач
4	Размерность и базис векторного пространства. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.	1,5	
5	Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.	1,5	Решение разноуровневых задач
6	Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.	1,5	Решение разноуровневых задач
7	Уравнения поверхностей второго порядка.	1,5	
8	Основные элементарные функции. Построение и	1,5	

	преобразование графика функции.		
9	Способы задания последовательности. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Ограниченные и неограниченные последовательности. Вычисление предела последовательности. Число е. Вычисление предела функции.	1,5	Решение разноуровневых задач
	Итого за 1 семестр	13,5	
	2 семестр		
10	Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.	3	Решение разноуровневых изадач
11	Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Численное дифференцирование.	3	Решение разноуровневых изадач
12	Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.	1,5	
13	Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.	1,5	Решение разноуровневых изадач
14	Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций.	1,5	Решение разноуровневых изадач
15	Вычисление определенного интеграла. Интегрирование подстановкой. Интегрирование по частям.	1,5	Решение разноуровневых изадач
16	Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление дуги плоской кривой. Вычисление объема тела. Площадь поверхности вращения. Численное интегрирование.	1,5	
17	Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.	1,5	
18	Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.	1,5	
19	Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.	1,5	
21	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные	1,5	Решение разноуровневых

	уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.		изадач
22	Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	1,5	
24	Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.	1,5	
25	Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.	1,5	
26	Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость. Степенные ряды. Сходимость степенного ряда. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.	1,5	
27	Векторная функция. Кривая линия на плоскости. Кривая в пространстве и сопровождающий трёхгранник Френе. Поверхность и её свойства. Кривая на поверхности.	1,5	
	Итого за 2 семестр	27	
	Итого	40,5	

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Раздел 1. Алгебра

Тема 1. Матрицы и определители.

Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Матрицы. Действия над матрицами.

Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы.

Определители. Свойства определителей. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца).

Обратная матрица.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

<u>Сложение матриц.</u>

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью $B - A$ матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица O, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A.

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha\, a_{ij} \|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j – го столбца матрицы A.

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ -1\cdot(-2) + 3\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы А.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим, что не квадратная матрица не имеет определителя.

Число $a_{11}\ a_{22}$ - $a_{21}\ a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически формула дл я вычисления определителя третьего порядка выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}; \qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}; \qquad \Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}; \qquad \Delta=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot 9=13-6-34-27=-54$$

Рассмотренный определитель можно вычислить другим способом. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. имеем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24 - 30 + 36 + 12 - 36 - 60 = -54$$

Обратная матрица и ее нахождение.

Пусть задано некоторое число a и пусть существует такое число m, что am = 1. Число m в этом случае называется обратным для a. Если, теперь, рассмотрим квадратную матрицу n–го порядка, то единичная матрица E будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу E.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица X (того же порядка n) называется обратной для A, если AX = XA = E.

Квадратная матрица n-го порядка называется особенной (вырожденной), если ее определитель равен нулю. Если же Δ (A) $\neq 0$, то A называется несобственной (невырожденной) матрицей.

Для нахождения обратной матрицы, рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ и пусть $$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Обратной матрицей A^{-1} будет матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Aij есть алгебраическое дополнение элемента aij определителя $\Delta = \Delta$ (A).

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Проверка: A A-1 = E

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Задачи:

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

а) A+B;

б) A–B.

Задача 2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) A+B;

б) B–D;

в) A+B–C;

г) A^T+B;

д) D^T+F;

е) F^T+A.

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

а) A–2B;

б) 3A+2B;

в) 2A–4B.

Задача 4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix},\quad D = (-1, 2, 3),\quad X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) 2A+B;

б) 2B–D;

в) A+2B–3C;

г) $3A^T$+B;

д) D^T+2X;

е) 2X–D.

Задача 5. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите $A\cdot B$, $B\cdot A$ и $A\cdot B - B\cdot A$.

Задача 6. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) $A\cdot B$ и $B\cdot A$;

б) $D\cdot C$ и $C\cdot D$;

в) $A\cdot F$ и $F\cdot A$;

г) $D\cdot F$ и $F\cdot D$;

д) $F\cdot A$;

е) $F^T\cdot A$.

Задача 7. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислите следующие выражения:
а) detA;
б) detB
в) det(A·B).
Проверьте, что det(A·B)= detA·detB.
Задача 2. Даны квадратные матрицы 3– го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислите следующие выражения:
а) detA;
б) detB
в) det(A·B).
Проверьте, что det(A·B)= detA·detB.

Задача 8. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Задача 9.Задана квадратная матрица 3– го порядка, найти обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вопросы:

1. Какие матрицы можно складывать и по какому правилу?
2. Какими свойствами обладает операция сложения матриц? Есть ли отличия от свойств сложения чисел?
3. Пусть заданы матрицы A размера $m_1 \times n_1$ и B размера $m_2 \times n_2$. Какому условию должны удовлетворять числа $m_{1,2}$ и $n_{1,2}$, чтобы была определена операция сложения матриц A + B?
4. Как умножить матрицу на число?
5. Какими свойствами обладают операция умножения матрицы на число? Есть ли отличия от свойств умножения чисел?
6. Пусть заданы матрицы A размера $m_1\times n_1$ и B размера $m_2\times n_2$. Какому условию должны удовлетворять числа $m_{1,\,2}$ и $n_{1,\,2}$, чтобы было определено произведение матриц A·B?
7. то называется определителем квадратной матрицы?
8. Дайте определение минора и алгебраического дополнения элемента a_{ik}.
9. Чему равен определитель матрицы 1–го порядка? Как вычислить определитель, разлагая его по первой строке? Напишите соответствующую формулу для определителя 2–го, 3–го и 4–го порядков. .Как вычислить определитель, разлагая его по произвольной строке (столбцу)? Сформулируйте соответствующую теорему и напишите формулы разложения определителя по i–ой строке (k–му столбцу).
10. Напишите разложение определителя по первой строке через дополнительные миноры, а не алгебраические дополнения.
11. Сформулируйте свойства определителей и докажите их для определителей 3–го порядка.
12. Для квадратных матриц A и B 3–го порядка докажите формулу $\det(A{\cdot}B) = (\det A) \cdot (\det B)$.
13. Какая матрица называется обратной?
14. Каковы условия существования обратной матрицы?
15. Может ли матрица иметь две обратных?

Тема 2. Система линейных алгебраических уравнений.

Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. Численное решение систем уравнений.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Численное решение систем уравнений.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Здесь a_{ik} ($i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$) — коэффициенты системы, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные и $b_1, \ldots, b_n$ – свободные члены.

Совокупность n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ называется решением системы, если при подстановке их в каждое уравнение вместо неизвестных все уравнения обращаются в тождества.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система решений не имеет, то она называется несовместной.

Квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей (или просто матрицей) системы.

Матрица порядка n×(n+1)

$$A_{\text{расш}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами:

$x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k–ого столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 10 \end{cases}$$

Решение: Найдем основной и дополнительные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 8 - 36 - 1 + 8 = -21 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 - 9 + 20 - 90 - 5 + 12 = -42$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 60 + 20 + 36 - 10 + 20 = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -30+10+24+60-3-40 = 21$$

По формулам Крамера имеем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-42}{-21} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-21} = 0; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{21}{-21} = -1.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = в_m \end{cases}$$

Будем производить над системой следующие элементарные преобразования:

1. Вычеркивание уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами двух уравнений.

Пусть теперь $a_{11} \neq 0$.(Если $a_{11} = 0$,то мы поменяем местами первое уравнение с тем уравнением, где коэффициент при x_1 отличен от нуля). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на ($-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$), затем прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на ($-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$) и т.д. к последнему уравнению прибавим первое, умноженное на ($-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$). При этом получим систему

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mr}x_r + \cdots + c_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Далее, применив те же рассуждения к полученной системе, исключим из уравнений, начиная с третьего x_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы придем к одному из двух случаев:

1. Либо после определенного шага получиться система, содержащая уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда наша система не имеет решений, т.е. несовместна.
2. либо система не содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда рано или поздно мы придем к системе

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = a_r \end{cases}$$

Возможны два случая:

a) $r = n$. Тогда последнее уравнение последней системы имеет вид: $c_{nn}x_n = a_n$, откуда $x_n = \dfrac{a_n}{c_{nn}}$.

Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т.д. из первого уравнения системы находим x_1.

b) $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.

Замечание. С практической точки зрения процесс решения системы можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей расширенной матрицей системы.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножив первую строку на $-\frac{3}{2}$, затем умножив первую строку на $-\frac{5}{2}$, наконец, умножив первую строку на -1, сложим первую строку последовательно со второй, с третьей и с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

В последней матрице мы умножили вторую и третью строку на 2. Далее 1 и 2 строки оставляем без изменения. Сперва умножим вторую строку на $-\frac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\frac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу мы получили умножив третью строку на $\frac{1}{2}$ и сложив с четвертой строкой. Последняя четвертая строка означает, что мы имеем уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$$

следовательно, по сказанному выше система несовместна.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1\\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4\end{pmatrix}$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Вторую матрицу мы получим сложив сперва вторую строчку с третьей, затем сложив вторую строчку с четвертой. Нулевые строчки выбрасываем. Остается система уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+5x_4 = 1\\ \quad x_2-10x_3+17x_4=-2\end{cases}\qquad(*)$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными, обозначая их: $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$

Из второго уравнения системы $(*)$ найдем x_2

$$x_2=10\alpha-17\beta-2$$

Подставив x_2 в первое уравнение, получим:

$x_1+2(10\alpha-17\beta-2)-3\alpha+5\beta=1$ или

$x_1+20\alpha-34\beta-4-3\alpha+5\beta=1$ или

$x_1=-17\alpha+29\beta+5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases}x_1=-17\alpha+29\beta+5\\ x_2=10\alpha-17\beta-2\end{cases}\qquad \alpha\in(R)$$

Задачи:

Используя а) формулы Крамера, б) метод обратной матрицы найти решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18\\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24\\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13\\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6\end{cases}$

Вопросы:

Вопросы:

1. Сформулируйте правило Крамера.
2. Какие варианты решения системы уравнений возможны в случае, когда определитель матрицы системы равен нулю?
3. Можно ли применить правило Крамера для однородной системы уравнений?
4. Сколько решений имеет однородная система n линейных уравнений с n неизвестными в случае, когда определитель ее матрицы не равен нулю?
5. Какое решение однородной системы с определителем, отличным от нуля, получается по правилу Крамера и почему?
6. Как решается система линейных уравнений методом Гаусса?

7. .Как преобразуется матрица системы при применении метода Гаусса?

8. Являются ли системы уравнений, соответствующие матрицам, получающимся в результате элементарных преобразований строк расширенной матрицы, эквивалентными? Обоснуйте ответ.

Тема 3. Элементы векторной алгебры. Векторные пространства.
Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Векторы на плоскости и в пространстве.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства, геометрический смысл.

n-мерный вектор и векторное пространство, его размерность и базис.

Евклидово пространство.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

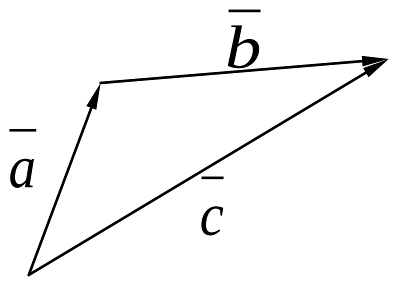
Направленный отрезок будем называть вектором и обозначать $\overline{AB},\quad \overline{CD}$ *или* $\overline{a}, \overline{в}, ...$

Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают и обозначают $\overline{o}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Два вектора называются равными, если выполнены следующие три условия: 1) длины векторов равны, 2) векторы параллельны (коллинеарны), 3) векторы направлены в одну и ту же сторону.

1. Сложение векторов

Суммой $\overline{a}+\overline{в}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (правило треугольника) и записывают $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$.



Сложение векторов обладает следующими основными свойствами:

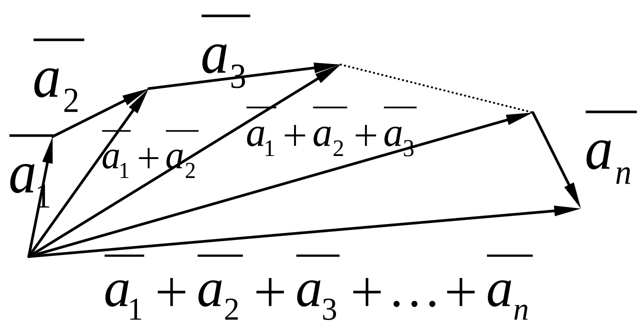
1. Коммутативность: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

2. Ассоциативность: для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ выполняется равенство $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$

3. Прибавление нулевого вектора к любому вектору $\overline{a}$ не меняет последнего: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}.$

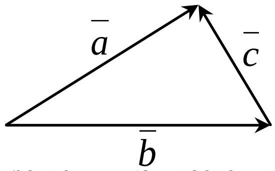
4. Сумма вектора $\overline{a}$ и противоположного вектора $\overline{a}^1$ равна нулевому вектору, т. е. $\overline{a}+\overline{a}^1=0$

Из второго свойства следует, что если даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$, расположенные так, что конец предыдущего вектора является началом последующего, то сумма $\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}$, будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}_1$ в конец вектора $\overline{a}_n$.

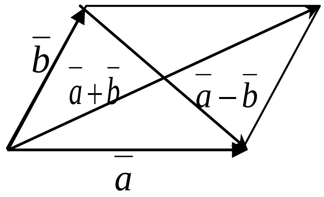


2. Вычитание векторов

Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, что $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$ и обозначает $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$. Чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно их отнести к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора – вычитаемого в конечную точку вектора – уменьшаемого.



<u>Замечание.</u> Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) правилом параллелограмма: если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\bar{a} + \bar{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а вторая диагональ, идущая из конца вектора $\bar{b}$ в конец вектора $\bar{a}$ есть разность $\bar{a} - \bar{b}$.



3. <u>Произведение вектора на число</u>

Произведением α $\bar{a}$ (или $\bar{a}$ α) вектора $\bar{a}$ на вещестренное число α называется вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, (причем вектор $\bar{b}$ имеет длину, равную $|\alpha|\,|\bar{a}|$) и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$ в случае $\alpha > 0$ и противоположное направление в случае $\alpha < 0$.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\bar{a}$ на число α вектор $\bar{a}$ растягивается (сжимается) в α раз.

При этом, если $\alpha > 1$, то $\bar{a}$ растягивается, если $0 < \alpha < 1$, то вектор $\bar{a}$ сжимается и вектор α $\bar{a}$ сохраняет то же направление, что и вектор $\bar{a}$.

Если же $\alpha < 0$, то вектор $\bar{a}$ растягивается при $|\alpha| > 1$ и сжимается при $|\alpha| < 1$ и при этом происходит изменение направления на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов).
2. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел).
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Так как по определению вектор есть направленный отрезок, а проекции направленного отрезка на оси координат находят как разности одноименных координат конца и начала направленного отрезка, то точно также находят проекции вектора на координатные оси. Эти проекции и называются координатами вектора.

Например, пусть даны точки A(3, -2, 5) и B(-1, 2, 3). Тогда координатами вектора $\overline{AB}$ будут: -1-3=-4; 2-(-2)=4, 3-5=-2 и обозначают $\overline{AB}$ ={-4, 4, -2}.

В дальнейшем, координаты (проекции на оси) мы будем обозначать $\bar{a} = \{x, y, z\}$.

Отметим, что действия над векторами можно произвести в координатах.

Пусть даны векторы в координатах: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

Тогда: $\bar{a} + \bar{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$, $\bar{a} - \bar{b} = \{x_1 - x_2,\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$, $\alpha\bar{a} = \{\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1\}$.

<u>Скалярное произведение векторов</u>

Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Скалярными произведениями двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\vartheta, \quad \text{где } \vartheta - \text{угол между векторами}$$

Можно дать другое определение скалярного произведения двух векторов. Из теории проекций известно, что

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\vartheta \quad \text{и } np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\vartheta.$$

Т.о. скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на первый вектор.

$$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{b}|\,np_{\bar{b}}\bar{a} \quad или \quad (\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}|\,np_{\bar{a}}\bar{b}.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими основными свойствами:

1. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обращается в нуль в том случае, когда по крайней мере один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны.

2. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно произведению длин этих векторов, если данные векторы параллельны, т. е. $\varphi = 0$.

$$\left(\bar{a}\,\bar{b}\right) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$$

Отсюда следует, что скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату длины этого вектора, т. е. $\left(\bar{a} \cdot \bar{a}\right) = |\bar{a}|^2$

3. Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством умножения: $\left(\bar{a}\,\bar{b}\right) = \left(\bar{b}\,\bar{a}\right)$.

4. Скалярное произведение обладает распределительным свойством относительно суммы векторов: $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\bar{a}\,\bar{c}\right) + \left(\bar{b}\,\bar{c}\right)$.

Пусть даны два вектора в координатах: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который обладает следующими свойствами:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$, то есть вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, где лежат вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) Длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ к второму вектору $\bar{b}$ вокруг вектора $\bar{c}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$.

Векторное произведение обозначают символом $\bar{c} = \left[\bar{a}\bar{b}\right]$ или $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

а) Основные свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулевому вектору в том и только в том случае, когда эти векторы параллельны.

Из этого свойства следует, что векторное произведение любого вектора на самого себя, т.е. $\left[\bar{a}\bar{a}\right] = 0$.

2. Векторное произведение двух векторов антикоммутативно, а именно:
$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = -\left[\bar{b}\bar{a}\right]$$

3. Векторное произведение обладает свойствами сочетательности относительно числового множителя: $\alpha\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \left[\alpha\bar{a} \cdot \bar{b}\right]$ или $\left[\bar{a} \cdot \alpha\bar{b}\right]$.

4. Векторное произведение векторов обладает распределительным свойством относительно векторов.

Векторное произведение векторов в координатах

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в координатах $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \bar{c}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Пример. Пусть даны векторы $\bar{a} = \{2, -1, 4\}$ и $\bar{b} = \{3, 1, 0\}$

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2l_3 + 12l_2 + 3ll_3 - 4l_1 = -4l_1 + 12l_2 + 5l_3.$$

т.е. $\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \bar{c} = \{-4, 12, 5\}$.

Смешанное произведение векторов.

Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Если из трех векторов любые два вектора умножить векторно, а затем полученный вектор $\bar{d}$ = [$\bar{a}\,\bar{b}$] умножить на третий вектор $\bar{c}$ скалярно, то в результате мы получим число, которое и называется смешанным произведением трех векторов и обозначают: либо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, либо ([$\bar{a}\,\bar{b}$]$\bar{c}$).

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Смешанное произведение векторов в координатах.

Пусть даны три вектора в координатах $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}.\bar{c}=\{x_3,y_3,z_3\}.$ Тогда смешанное произведение этих векторов можно вычислить по формуле:

$$([\bar{a}\bar{b}]\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Многие задачи геометрии, физики, механики решаются методами векторной алгебры.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\bar{F}$ = {3, -5, -2} когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (2, 5, -3) в положение B (3, -1, -2).

Решение. Найдем координаты вектора $\bar{S}$ = $\overline{AB}$

$\bar{S}$ = {3-2; -1-5; -2+3} = {1; -6; 1}

Тогда величина искомой работа равна скалярному произведению ($\bar{F}\cdot\bar{S}$), т.е.

W = ($\bar{F}\,\bar{S}$) = 3·1 + (-5)·(-6) - 2·1 = 31.

Пример. Найти угол, образованный векторами: $\bar{a}$ ={3,0,-4} и $\bar{b}$ ={-1,1,-2}.

Решение. $\cos\varphi=\dfrac{3\cdot(-1)+0\cdot1+(-4)\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+0+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{5\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}.$

Пример. Даны координаты вершин треугольника A(1,2,0), B(3,0,-3) и C(5,2,6). Найти площадь этого треугольника.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ = {3-1, 0-2, -3-0} = {2, -2, -3}

$\overline{AC}$ = {5-1, 2-0, 6-0} = {4, 0, 6}

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: [$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$] = $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ =

$$-12e_1-12e_2+8e_3-12e_2=-12e_1-24e_2+8e_3$$

Итак, [$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$] = $\bar{d}$ = {-12, -24, 8}.

Найдем модуль векторного произведения

$$|\,[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\,|=|\,\bar{d}\,|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28.$$

Искомая площадь треугольника: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot28=14$ кв. ед.

Пример. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках O(1,1,2), A(2,3,-1), B(2,-2,4), C(-1,1,3).

Решение. Тетраэдр построен на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$ Найдем координаты этих векторов: $\overline{OA}=\{1,2,-3\}$, $\overline{OB}=\{1,-3,2\}$, $\overline{OC}=\{-2,0,1\}$. Тогда искомый объем:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right]\cdot\overline{OC}\right)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-3-8+18-2\right|=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$$

$V=\dfrac{5}{6}$ куб. ед.

Пример. Вычислить модуль вектора $\overline{a}$ = {6,3,-2}.

Решение. Если дан вектор $\overline{a}$ = {x, y, z}, то $|\overline{a}|$ = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Следовательно, имеем

$|\overline{a}|$ = $\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$.

Пример. Вычислить направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ = {12,-15,-16}.

Решение. $|\overline{a}|$ = $\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}=\sqrt{625}=25$.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overline{a}|}=\frac{12}{25};\ \cos\beta=\frac{y}{|\overline{a}|}=\frac{-15}{25}=-\frac{3}{5};\ \cos\gamma=\frac{z}{|\overline{a}|}=\frac{-16}{25}.$$

Пример. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол φ = 60^0, причем $|\overline{a}|$ = 5 и $|\overline{b}|$ = 8. Определить $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Решение. Рассмотрим скалярное произведение $(\overline{a}+\overline{b})$ и $(\overline{a}+\overline{b})$ т.е.

$(\overline{a}+\overline{b})^2=(\overline{a}\,\overline{a})+2(\overline{a}\,\overline{b})+(\overline{b}\,\overline{b})=|\overline{a}|^2+2|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos60^0+|\overline{b}|^2=25+2\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}+64=129$,

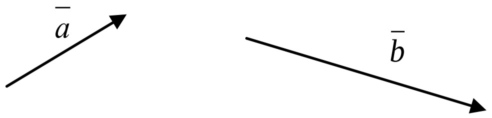
следовательно $|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{129}$.

Аналогично, рассмотрим $(\overline{a}-\overline{b})^2$

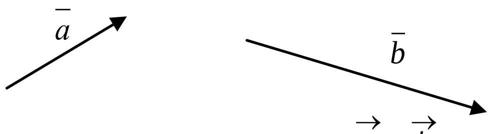
$(\overline{a}-\overline{b})^2=|\overline{a}|^2-2(\overline{a}\,\overline{b})+|\overline{b}|^2=25-2\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}+64=49.$ $\qquad |\overline{a}-\overline{b}|=\sqrt{49}=7$.

Задачи:

Задача 1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *постройте векторы* $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$ и $-\vec{a}-\vec{b}$



Задача 2. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постройте векторы $3\vec{a}$, $-1/2\vec{b}$ и $2\vec{a}+1/3\vec{b}$.



Задача 3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны. Какой геометрический смысл имеет это условие?

Задача 4. Определите координаты начала вектора $\vec{a}$ = {3;1;–2}, если его конец совпадает с точкой M(1;–1;2).

Задача 5. Пусть в некотором базисе $\vec{a}$ = {2;–1;3} и $\vec{b}$ = {1;–2;–4}. Найдите координаты вектора $\vec{a}+2\vec{b}$ в этом базисе.

Задача 6. Определить, при каких значениях α и β векторы $\overline{a}$ ={-2, 3, β} и $\overline{b}$ ={α, -6, 2} коллинеарны.

Задача 7. Даны три вектора $\overline{p}$ = {3,-2,1}, $\overline{q}$ = {-1,1,-2}, $\overline{r}$ = {2,1,-3}. Найти разложение вектора $\overline{c}$ = {11,-6,5} по базису $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

Задача 8. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\overline{a}|$ = $\sqrt{3}$, $|\overline{b}|$ = 1, вычислить угол α между векторами $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-\overline{b}$.

Задача 9. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = {5,2,5} на ось вектора $\overline{b}$ = {2,-1,2}.

Задача 10. Даны вершины тетраэдра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задача 11. Найти орт вектора $\bar{a} = 3e_1 + 4e_2 - 12e_3$.

Задача 12. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\bar{a} = \{1,-3,1\}$ и $\bar{b} = \{2,-1,3\}$.

Задача 13. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$ и $C(7;4;-2)$. Убедиться, что этот треугольник равнобедренный. Сделать чертеж.

Задача 14. Зная одну из вершин треугольника $A(2;-5;3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB} = \{4;1;2\}$ и $\overline{BC} = \{3;-2;5\}$. Найти остальные вершины и координаты вектора $\overline{CA}$.

Вопросы:

1. Что называется скалярным произведением двух векторов? Физический смысл скалярного произведения векторов.
2. Основные свойства скалярного произведения векторов.
3. Как определяется скалярное произведение двух векторов в координатах?
4. Как найти угол между двумя данными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
5. Что называется векторным произведением двух векторов?
6. Геометрический и физический смысл векторного произведения двух векторов.
7. Как можно найти площадь треугольника, в трехмерном пространстве, если известны вершины данного треугольника?
8. Как найти векторное произведение двух векторов в координатах?
9. Как найти орт вектора $\bar{a} = \{x, y, z\}$?
10. Основные свойства векторного произведения векторов
11. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл.
12. Основные свойства смешанного произведения векторов.
13. Смешанное произведение трех векторов в координатах.

Тема 4. Элементы матричного анализа.

Размерность и базис векторного пространства. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Линейные операторы. Действия над линейными операторами.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Квадратичные формы.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий из некоторого пространства L в то же пространство L.

Любой ненулевой вектор x, удовлетворяющий уравнению:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, при этом число λ называется собственным значением линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору x.

Если задан базис линейного пространства L и в этом базисе линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу A, то приведенное выше уравнение можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}.$$

При этом вектор x называется собственным вектором матрицы A, а число λ называется собственным значением матрицы A, соответствующим собственному вектору x.

Теорема.

Множество собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ совпадает со множеством корней характеристического уравнения этого оператора вне зависимости от того, в каком базисе задана матрица оператора $\hat{A}$. Уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

называется характеристическим уравнением матрицы A.

В развернутом виде характеристическое уравнение запишется следующим образом:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы A порядка n необходимо:

1. Составить характеристическое уравнение и найти все его различные действительные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, которые и будут собственными значениями матрицы.
2. Для каждого собственного значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x} = 0,$$

оно и будет задавать собственные векторы, которым соответствует собственное значение λ_i.

Пример.

Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \det\begin{vmatrix} 0-\lambda\cdot 1 & 1-\lambda\cdot 0 & 2-\lambda\cdot 0 \\ 4-\lambda\cdot 0 & 0-\lambda\cdot 1 & 1-\lambda\cdot 0 \\ 3-\lambda\cdot 0 & -1-\lambda\cdot 0 & 1-\lambda\cdot 1 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^2(1-\lambda) + 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot(-\lambda)\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot(1-\lambda) - (-\lambda)\cdot 1\cdot(-1) =$$

$$= \lambda^2 - \lambda^3 + 3 - 8 + 6\lambda - 4 + 4\lambda - \lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9,$$

то характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0.$$

Один из корней этого уравнения находится методом подбора. Проверим, является ли число $\lambda = 1$ корнем этого уравнения:

$$-1^3 + 1^2 + 9\cdot 1 - 9 = 0 \text{ —}$$

верно. Вынесем в левой части уравнения множитель $(\lambda - 1)$ за скобку:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = -\lambda^2(\lambda - 1) + 9(\lambda - 1) = (9 - \lambda^2)(\lambda - 1) = (3 + \lambda)(3 - \lambda)(\lambda - 1) = -(\lambda + 3)(\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Характеристическое уравнение, таким образом, принимает вид $-(\lambda + 3)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$, откуда $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$.

Соответствующая однородная система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для собственного значения $\lambda_1 = -3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -3$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

где c_1 — произвольное действительное число, не равное нулю.

Система линейных уравнений для определения собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ -3\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 1$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -c_2 \\ -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_2 \neq 0.$$

Аналогичным образом определяется множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 7c_3 \\ 11c_3 \\ 5c_3 \end{pmatrix}, \quad c_3 \neq 0.$$

Задачи:

1. Найти собственные значения и собственные векторы, привести к диагональному виду матрицу линейного оператора:

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 7. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.Определите, является ли международная торговля двух стран А и Б сбалансированной, если вектор национальных доходов x и структурная матрица А этих стран

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12\,000\,000\,000 \\ 7\,000\,000\,000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Вопросы:

1. Что такое собственное значение матрицы?
2. Что такое собственный вектор матрицы?
3. Что такое характеристический многочлен матрицы?
4. Сколько различных собственных значений может иметь матрица?
5. Сколько различных собственных векторов могут соответствовать одному собственному значению матрицы?
6. Как найти все собственные значения матрицы?

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости.

Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Общее уравнение прямой и его исследование; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.

Нормальное уравнение прямой.

Уравнение пучка прямых.

Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Пересечение двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

<u>Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве.</u>

Декартовы координаты на прямой вводятся следующим образом: Выберем на прямой определенное направление и некоторую точку O (начало координат), далее укажем единицу масштаба. Рассмотрим произвольную точку M на оси l. Деакртовой координатой x точки M будем называть величину направленного отрезка OM.

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2, равно величине отрезка M_1M_2, взятая по абсолютной величине, т.е. $\rho(M_1M_2) = |x_2 - x_1|$.

Две взаимно перпендикулярные прямые образуют декартову прямоугольную систему координат на плоскости. Горизонтальную прямую называют осью Ox или осью абсцисс, вертикальную прямую называют осью Oy или осью ординат. Координатные оси разбивают плоскость на четыре квадранта. Декартовые координаты x и y точки M называют соответственно величины направленных отрезков $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

Три взаимно перпендикулярные оси в трехмерном пространстве с общим началом O и единой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в трехмерном пространстве. Указанные оси соответственно называют: осью Ox или осью абсцисс; осью Oy или осью ординат; осью Oz или осью аппликат.

Пусть $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ проекции произвольной точки M пространства на оси Ox, Oy и Oz. Декартовыми прямоугольными координатами x, y, z точки M называют соответственно величины направленных отрезков $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ и обозначают $M(x, y, z)$.

<u>Простейшие задачи аналитической геометрии.</u>

1. <u>Расстояние между двумя точками на плоскости и в трехмерном пространстве.</u>

а) Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Расстояние между этими двумя точками: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, откуда $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

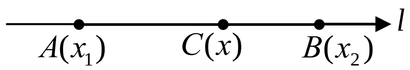
Если рассмотреть две точки, данные в трехмерном пространстве: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними можно получить по формуле аналогичной формуле, т.е. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. <u>Деление отрезка в данном отношении.</u>

Пусть на некоторой оси l заданы две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ и пусть точка $C(x)$, лежащая на той оси l делит отрезок AB внутренним или внешним образом в отношении $\lambda = \dfrac{Вел.AC}{Вел.CB}$. Требуется выразить координату x точки C через координаты точек A и B, а также через λ.

Пусть сперва точка $C(x)$ делит отрезок AB внутренним образом

Тогда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.



Пусть, теперь, в прямоугольной системе координат на плоскости даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и точка $C(x, y)$ делит отрезок AB внутренним или внешним образом в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$. Требуется выразить точки $C(x, y)$ через координаты точек A и B, а также через λ. Для этого проектируем точки A, B, C на оси координат. Тогда, очевидно, что имеют место формулы: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ и $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

3. <u>Площадь треугольника.</u>

Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости заданы вершины треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Выразим площадь треугольника через координаты его вершин:

$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$. Формулу можно записать в виде определителя третьего порядка:

$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1–й степени и, обратно, каждое уравнение 1–й степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: y=kx+b, где k – угловой коэффициент прямой, b – начальная ордината.

Пример: Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1)$ и образующей с прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45°.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o, y_o)$ имеет вид:

$y - y_0 = k_1(x - x_0)$, т.е. $y - 1 = k_1(x + 2)$

В равенстве необходимо определить угловой коэффициент k_1. Для этого воспользуемся условием, что искомая прямая образует с данной прямой $3x-y+2=0$ угол в 45°. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 3$. Тогда имеем:

$$tg45° = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_2},$$

откуда $1 + 3k_1 = 3 - k_1$, или $k_1 = \frac{1}{2}$. Подставив $k_1 = \frac{1}{2}$, получим: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $x - 2y + 4 = 0$ – искомое уравнение прямой.

Общее уравнение прямой: Ax+By+C=0, где A, B, C – произвольные числа. Очевидно, A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Замечание. Прямая линия в отрезках отсекает от координатного угла прямоугольный треугольник, площадь которого определяется формулой $S_\Delta = \frac{1}{2}|a||b|$.

Пример. Дана прямая 5x-3y-30=0. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатных осей.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках, разделив все члены данного уравнения на 30: $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} = 1$. Из уравнения видно, что a=6;b=-10. Следовательно, $S_\Delta = \frac{1}{2}|6||-10| = 30$ кв.ед.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$, где θ - угол, который образует прямая с положительным направлением оси OX.

Пример. Дано уравнение прямой 5x – 12y + 26 = 0. Привести к нормальному виду.

Решение. Для перехода от общего уравнения прямой к нормальному необходимо обе части общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку C. В данном уравнении A=5, B= -12, C=26. Так как C>0, то нормирующий множитель берем со знаком минус, т.е. $M = -\frac{1}{\pm\sqrt{25 + 144}} = -\frac{1}{13}$. Умножив на $M = -\frac{1}{13}$ данное уравнение, получим: $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ - нормальное уравнение прямой: $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $P = 2$.

Пусть даны две прямые $\left.\begin{matrix} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{matrix}\right\}$.Угол между двумя прямыми на плоскости может быть вычислен по формуле: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1=k_2$. Необходимое и достаточное условием перпендикулярности двух прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно (-1): $k_1k_2=-1$.

Замечание. Если уравнения двух прямых заданы в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угловые коэффициенты этих прямых будут иметь вид: $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$, $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$.

1) Пусть прямые параллельны. Тогда $k_1=k_2$ или $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$, т.е. если в уравнениях двух прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны. Если при этом имеем отношение $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

2) Пусть прямые перпендикулярны. Тогда выполняется равенство $k_1\cdot k_2=-1$ или $\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1$ или $A_1A_2+B_1B_2=0$ - это есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде.

Пример. Даны уравнения двух прямых: $2x-y+3=0$ и $4x-2y+5=0$. Как расположены эти прямые? Здесь $A_1=2$, $B_1=-1$, $C_1=3$, $A_2=4$, $B_2=-2$, $C_2=5$. Здесь выполняются соотношения: $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{3}{5}$, т.е. прямые параллельны.

Пример. Даны уравнения двух прямых $3x-2y+1=0$ и $2x+3y+4=0$. Как расположены эти прямые?

Решение. Выпишем коэффициенты при переменных x и y: $A_1=3$ $B_1=-2$, $C_1=1$, $A_2=2$, $B_2=3$, $C_2=4$. Рассмотрим выполнение условие перпендикулярности. Имеем: $A_1A_2+B_1B_2=3\cdot2-2\cdot3=0$. Условие выполнено. Следовательно, данные прямые перпендикулярны.

Чтобы найти расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой, необходимо: 1)уравнение данной прямой привести к нормальному виду; 2)подставить вместо текущих координат, координаты точки $M_0(x_0,y_0)$.

$|d|=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-P|$

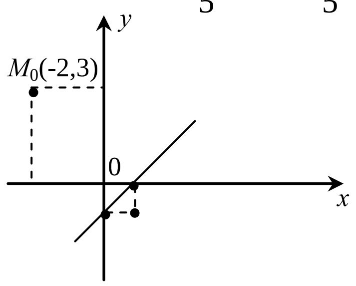
Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3)$ до прямой $3x-4y-2=0$.

Решение. Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель

$$M=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}.$$

Получим нормальное уравнение $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0\cdot$

Тогда отклонение $d=\frac{3}{5}\cdot(-2)-\frac{4}{5}\cdot3-\frac{2}{5}=-\frac{6}{5}-\frac{12}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{20}{5}=-4$



Отрицательное значение для отклонения d, указывает на то, что данная точка $M_0(-2,3)$ лежит от данной прямой с той же стороны, что начало координат. Искомое расстояние $|d|=|-4|=4$.

Задачи

Задача 1. Найти точку, симметричную точке $M(-3,1)$ относительно начала координат.

Задача 2. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-1,3)$, $B(2,-1)$, $C(5,3)$ является равнобедренным.

Задача 3. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1,1)$ и $C(2,6)$. Найти координаты двух других вершин.

Задача 4. Найти координаты центра тяжести системы двух материальных точек $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, в которых сосредоточены массы m_1 и m_2.

Задача 5. Даны вершины однородного проволочного треугольника: A(-1,3), B(2, -1), C (-2, 3). Определить центр тяжести треугольника ABC.

Задача 7. Даны вершины однородной четырехугольной пластинки: A(-1, 1), B(3, -1), C(2, 2), Д(-2, -2). Найти координаты центра тяжести этой пластинки.

Задача 8. Даны вершины треугольника A(2; -5), B(1; -2), C(4;7). Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

Задача 9. Дано общее уравнение прямой $3x-2y+12=0$. Составьте уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Задача 10. Составьте уравнение прямой с угловым коэффициентом k = 2, проходящей через точку M(–1;2).

Задача 11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$ и $M_2(1;–3)$.

Задача 12. Дано общее уравнение прямой $12x – 5y – 60 = 0$. Написать:

1) уравнение с угловым коэффициентом;
2) уравнение в отрезках;
3) нормальное уравнение.

Задача 13. Прямая на плоскости отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв.ед.

Задача 14.Провести через точку пересечения прямых $x–y–3=0$, $2x+3y–11=0$, прямую, параллельную прямой $5x – 4y – 17 = 0$.

Задача 15. Луч света, проходящий через точку $M_1(3;–1)$, отражается от прямой $2x–y-1=0$ и после этого проходит через точку $M_2(5;3)$. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

Задача 16.Найти проекцию точки $M(3;2)$ на прямую $3x – 2y + 1 = 0$.

Задача 17.Даны вершины треугольника: $A(3;1)$, $B(-5; -5)$, $C(-1;4)$. Найти уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.

Задача 18.Даны вершины треугольника: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

Задача 19.Не вычисляя координаты вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через эти вершины параллельно противолежащим сторонам. Стороны треугольника заданы уравнениями: $5x–2y+6=0$; $4x–y+3=0$ и $x+3y–7=0$.

Задача 20.Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.

Задача 21.Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.

Задача 22.Вычислить расстояние d между параллельными прямыми: $3x – 4y – 10 = 0$; $6x – 8y+5=0$.

Вопросы:

1. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости? Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Для каких прямых угловой коэффициент не определяется?
3. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.
4. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках?
5. Запишите нормальное уравнение прямой.
6. Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
7. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в трехмерном пространстве.
8. Постройте точки А (1, -2, 4) и В (2, 0, -5) в прямоугольной системе координат.
9. Как находят расстояние между двумя точками?
10. Напишите формулы деления отрезка в данном отношении.
11. Проекция направленного отрезка на оси координат.
12. Выражение площади прямоугольника через координаты вершин.
13. Полярные координаты точки на плоскости. Связь с прямоугольными координатами.
14. Дайте определение угла между двумя прямыми. Как определяется косинус угла между двумя прямыми на плоскости?
15. Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности прямых, заданных а) общими уравнениями; б) уравнениями с угловым коэффициентом.
16. Как определить расстояние между а) точкой и прямой; б) двумя параллельными прямыми?
17. Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ признаком параллельности прямых?

Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве.

Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Общее уравнение плоскости.

Уравнение плоскости в отрезках.

Нормальное уравнение плоскости.

Расстояние от точки до плоскости.

Угол между двумя плоскостями.

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

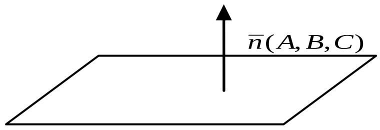
Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Если фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат, то плоскость (P) определяется уравнением первой степени относительно совокупности переменных x, y, z.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D произвольные постоянные, причем хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, вектор $\overline{n}$ = {A, B, C} перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором плоскости.



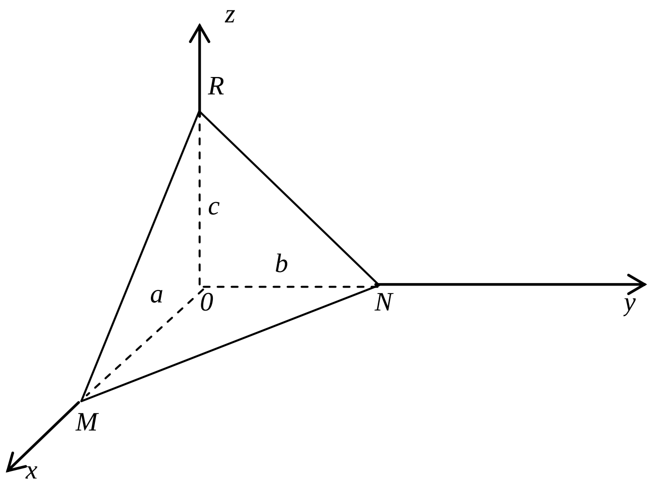
Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Свободный член равен нулю, т. е. $D=0: \quad Ax+By+Cz=0$	плоскость проходит через начало координат
2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:	
$A=0, \quad тогда \quad By+Cz+D=0$	плоскость параллельна оси *Ox*
$B=0, \quad тогда \quad Ax+Cz+D=0$	плоскость параллельна оси *Oy*
$C=0, \quad тогда \quad Ax+By+D=0$	плоскость параллельна оси *Oz*
б) $D=0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:	
$A=0, \quad тогда \quad By+Cz=0$	плоскость проходит через ось *Ox*
$B=0, \quad тогда \quad Ax+Cz=0$	плоскость проходит через ось *Oy*
$C=0, \quad тогда \quad Ax+By=0$	плоскость проходит через ось *Oz*
3. Два коэффициента при текущих координатах равны 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:	
$B=0, \quad C=0, \quad тогда \quad Ax+D=0$	плоскость параллельна плоскости *Oyz* (перпендикулярна оси *Ox*)
$A=0, \quad C=0, \quad тогда \quad By+D=0$	плоскость параллельна плоскости *Oxz* (перпендикулярна оси *Oy*)
$A=0, \quad B=0, \quad тогда \quad Cz+D=0$	плоскость параллельна плоскости *Oxy* (перпендикулярна оси *Oz*)
б) $D=0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:	
$B=0, C=0, тогда\, Ax=0\; или\; x=0$	уравнение плоскости *Oyz*
$A=0, C=0, тогда\, By=0\; или\; y=0$	уравнение плоскости *Oxz*
$A=0, B=0, тогда\, Cz=0\; или\; z=0$	уравнение плоскости *Oxy*

<u>Различные виды уравнений плоскости</u>

1. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость не проходит через начало координат, а отсекает от осей координат соответственно отрезки *a*, *b*, *c*, т. е. плоскость проходит через точки *M(a,0,0)*, *N(0,b,0)* и *R(0,0,c)*.



Уравнение такой плоскости: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

2. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$((\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2})\cdot\overline{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(2,1,3)$, $B(1,0,4)$ и $C(1,1,5)$.
Решение.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1-2 & 0-1 & 4-3 \\ 1-2 & 1-1 & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-2)-1(y-1)-1(z-3)+2(y-1)=$$

$= -2x + 4 - y + 1 - z + 3 + 2y - 2 = -2x + y - z + 6 = 0$ или
$2x - y + z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Пусть даны две плоскости (P_1) и (P_2). Пусть даны их общие уравнения:
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. При этом

$$cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Пример. Вычислить расстояние от точки M(-9,6,6) до плоскости 2x – 6y – 3z +9 =0.

Решение: $d = \dfrac{|2\cdot(-9) - 6\cdot 6 - 3\cdot 6 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{63}{7} = 9.$

Пример. Найти острый угол между плоскостями:

$5x - 3y + 4z - 4 = 0$, (1)
$3x - 4y - 2z + 5 = 0$. (2)

Решение: По формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\right|;\quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$$\cos\varphi = 0{,}4990;\quad \varphi = 60°04'.$$

Задачи.
Задача 1. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.
Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - z + 5 = 0$.
Задача 3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; параллельна оси Ox; параллельна оси Oy; параллельна оси Oz.
Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\bar{a} = \{1; 1; 1\}$ и $\bar{b} = \{1; 1; -1\}$.
Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярно данной плоскости.
Задача 6. Две грани куба лежат на плоскостях: $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x–2y+z+5= 0$. Вычислить объем этого куба.
Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку G(4,2,-5).
Задача 8. Вычислить расстояние от точки М до плоскости α, если: 1) М (-2,7,1), α : $2x-6y+3z+1=0;$
2) М (1,-3,4), α :$2x-6y-3z+27=0$.
Задача 9. Найти величину острого угла между плоскостями:
11x-8y-7z-15=0, 4x-10y+z-2=0; 2) 2x+3y-4z+4=0, 5x-2y+z-3=0.
Задача 10. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки М1 (0,0,2) и М2 (0,1,0) и образующей угол 45 градусов с плоскостью OYZ.

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения плоскости.
2. Как найти расстояние от точки до плоскости?
3. Покажите, что всякое уравнение первой степени относительно совокупности переменных *x, y, z* определяет плоскость в прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве.
4. Как определить величину угла между двумя плоскостями?
5. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
6. Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ признаком параллельности плоскостей? Что можно сказать об этих плоскостях?
7. Как Вы думаете, какое из приведенных ниже уравнений соответствует плоскости, проходящей через точки M(0,-3,2) и N(5,4,-1) параллельно оси *Oy*: *3x+5z-10 = 0, 3y-z-10 = 0, 2x-5y+10 = 0, 3x-5z+10 = 0?*

Тема 7. Поверхности второго порядка.

Уравнения поверхностей второго порядка.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Общее уравнение поверхности второго порядка.

Классификация поверхностей второго порядка.

Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Поверхность второго порядка - геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2+ 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14} x + 2a_{24}y+2a_{34}z +a_{44} = 0$,

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11} , a_{22} , a_{33} , a_{12} , a_{23} , a_{13} отличен от нуля.

Уравнение называется ***общим уравнением поверхности второго порядка***.

Очевидно, поверхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется, если от данной декартовой прямоугольной системы координат перейти к другой декартовой системе координат.

Классификация центральных поверхностей

Пусть S — центральная поверхность второго порядка. Перенесем начало координат в центр этой поверхности, а затем произведем стандартное упрощение уравнения этой поверхности. В результате указанных операций уравнение поверхности примет вид

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$

Возможны следующие случаи :

$$a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$$

1. Коэффициенты a_{11} ,a_{22} , a_{33} одного знака, а коэффициент a_{44} отличен от нуля. В этом случае поверхность S называется эллипсоидом.

Если коэффициенты a_{11} ,a_{22} , a_{33} , a_{44} одного знака, то левая часть ни при каких значениях x, y, z не обращается в нуль, т. е. уравнению поверхности S не удовлетворяют координаты никакой точки. В этом случае поверхность S называется мнимым эллипсоидом.

Если знак коэффициентов a_{11} ,a_{22} , a_{33} противоположен знаку коэффициента a_{44} , то поверхность S называется вещественным эллипсоидом.

Обычно уравнение эллипсоида записывают в канонической форме. Очевидно, числа

$$-\frac{a_{44}}{a_{11}},-\frac{a_{44}}{a_{22}},-\frac{a_{44}}{a_{33}}$$

положительны. Обозначим эти числа соответственно a^2, b^2, c^2. После несложных преобразований уравнение эллипсоида можно записать в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уравнение называется каноническим уравнением эллипсоида. Если эллипсоид задан своим каноническим уравнением, то оси Ox, Oy и Oz. называются его главными осями.

2. Из четырех коэффициентов a_{11} ,a_{22} , a_{33} , a_{44} два одного знака, а два других—противоположного. В этом случае поверхность S называется однополостным гиперболоидом.

Обычно уравнение однополостного гиперболоида записывают в канонической форме. Пусть, ради определенности, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$, $a_{44} < 0$. Тогда числа

$$-\frac{a_{44}}{a_{11}},-\frac{a_{44}}{a_{22}},\frac{a_{44}}{a_{33}}$$

положительны. Обозначим эти числа соответственно a^2, b^2, c^2. После несложных преобразований уравнение однополостного гиперболоида можно записать в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уравнение называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида. Если однополостный гиперболоид задан своим каноническим уравнением, то оси Ox, Oy и Oz называются его главными осями.

3. Знак одного из первых трех коэффициентов a_{11} ,a_{22} , a_{33} , a_{44} противоположен знаку остальных коэффициентов. В этом случае поверхность S называется двуполостным гиперболоидом.

Запишем уравнение двуполостного гиперболоида в канонической форме. Пусть, ради определенности, $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} > 0$, $a_{44} < 0$. Тогда :

$$\frac{a_{44}}{a_{11}}>0,\frac{a_{44}}{a_{22}}>0,-\frac{a_{44}}{a_{33}}>0$$

Обозначим эти числа соответственно через a^2, b^2, c^2. Посли несложных преобразований уравнение двуполостного гиперболоида можно записать в следующей форме:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Уравнение называется каноническим уравнением двуполостного гиперболоида. Если двуполостный гиперболоид задан своим каноническим уравнением, то оси Ox, Oy и Oz называются его главными осями.

4. Коэффициент a_{44} равен нулю. В этом случае поверхность S называется конусом второго порядка.

Если коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{33} одного знака, то левая часть обращается в нуль ($a_{44} = 0$) лишь для x=y=z=0, т. е. уравнению поверхности S удовлетворяют координаты только одной точки. В этом случае поверхность S называется мнимым конусом второго порядка. Если коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{33} имеют разные знаки, то поверхность S является вещественным конусом второго порядка.

Обычно уравнение вещественного конуса второго порядка записывают в канонической форме. Пусть, ради определенности,

$a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} < 0$. Обозначим

$$\frac{1}{a_{11}},\frac{1}{a_{22}},-\frac{1}{a_{33}}$$

соответственно через a^2, b^2, c^2. Тогда уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Уравнение называется каноническим уравнением вещественного конуса второго порядка.

Задачи:

Задача 1. Составьте каноническое уравнение трехосного эллипсоида с центром в точке (1,0,1) и вершинами, совпадающими с точками (1,0,2), (1,-2,1), (3,0,1).

Задача 2. Написать уравнение эллипсоида с вершинами (0;0;6) и (0;0;2), зная, что плоскость Oxy пересекает его по окружности радиуса 3.

Задача 3. Какую поверхность определяет уравнение: $16y^2-9z^2+32y+54z-209=0$?

Задача 4. Какую поверхность определяет уравнение: $x^2+2y^2-3z^2+2x+8y+18z-54=0$?

Задача 5. Сделайте чертеж: а) $x^2+y^2=4$; б) $x^2=y^2$; в) $16x^2+25z^2=400$.

Вопросы:

1. Запишите общее уравнение поверхности второго порядка.
2. Расскажите о классификации поверхностей второго порядка.
3. Перечислите цилиндрические поверхности.
4. Перечислите поверхности вращения.

Раздел 3. Математический анализ. Введение в анализ.

Тема 8. Функция.

Основные элементарные функции. Построение и преобразование графика функции.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Понятие множества.

Абсолютная величина действительного числа.

Окрестность точки.

Понятие функции.

Основные свойства функций.

Основные элементарные функции.

Классификация функций.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

В основе математики, как и любой науки, лежат первичные понятия, не определяемые через более простые понятия. К ним относятся: число, точка, множество. Под множеством понимается совокупность (набор) объектов, обладающих некоторым общим свойством. Эти объекты называются элементами или точками множества (множество студентов в данной аудитории, множество звезд на небе, множество букв в алфавите и так далее).

Множества обозначаются прописными буквами: A, B, X, Y, …, а их элементы соответствующими строчными буквами.

Если элементами множества являются числа, то оно называется числовым или точечным, так как всякое действительное число можно изобразить точкой на числовой оси (числовой прямой). Поэтому понятия «число x» и «точка x» можно считать эквивалентными.

Среди числовых множеств различают:

1. интервал (открытый отрезок) (a;b);

2.сегмент (закрытый отрезок) [a;b]:

3. полуинтервалы.

Вещественные функции вещественного аргумента делят на два класса: *элементарные* и *не элементарные*.

Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой $y = f(x)$, где $f(x)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

- степенная функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;
- показательная функция $y = a^{x}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарные функции делят на два класса: *алгебраические* и *трансцендентные*.

Функция называется алгебраической, если ее значение можно получить из аргумента и действительных чисел с помощью конечного числа алгебраических операций (т.е. сложения, вычитания, умножения, деления) и возведения в степень с рациональным показателем. Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.

Алгебраические функции делят на рациональные и иррациональные.

Алгебраическая функция называется рациональной, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корня. Функция не являющаяся рациональной называется иррациональной.

Рациональные функции бывают двух видов:

- целые рациональные (многочлены) $y = P_n(x)$, где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;
- дробные рациональные (рациональные дроби) $y = \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$.

Изучить функцию – это значит охарактеризовать ход ее изменения при изменении независимой переменной. Для характеристики поведения функции используют следующие ее свойства.

1) Четность функции.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если выполняются два условия:

а) область определения функции симметрична относительно начала координат;

б) для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если выполняются два условия:

а) область определения функции симметрична относительно начала координат;

б) для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется функцией общего вида.

Из определения четной и нечетной функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) Периодичность.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется периодической, если существует число $t \neq 0$ такое, а) что для любого $x \in D$ значения $x + t$ и $x - t$ тоже принадлежат D; б) $f(x \pm t) = f(x)$. Число t при этом называют периодом функции.

Если функция $y = f(x)$ периодическая на множестве D и $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$ на D, то для нее существует наименьший положительный период T и любой период этой функции имеет вид kT, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. T называют *основным периодом функции* $f(x)$.

Очевидно, что график периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

3) Монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (неубывающей) на интервале $(a; b)$ если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, что $x_1 < x_2$ значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ удовлетворяют неравенству $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Функция $y = f(x)$ называется убывающей (невозрастающей) на интервале $(a; b)$ если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, что $x_1 < x_2$ значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ удовлетворяют неравенству $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются *монотонными.*

4) Ограниченность.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу, если существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $a \le f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху, если существует $b \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x) \le b$, $\forall x \in D(f)$.

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*.

Если функция $y = f(x)$ ограничена, то существует $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$, $\forall x \in D(f)$. Действительно, если $y = f(x)$ ограничена, то она ограничена сверху и снизу. Значит, существуют $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in D(f)$.

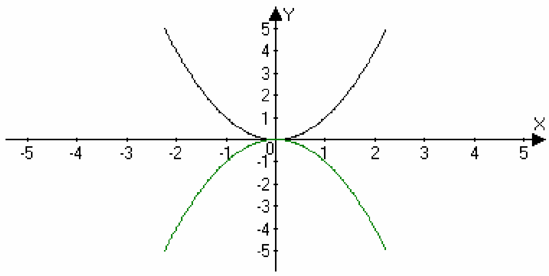
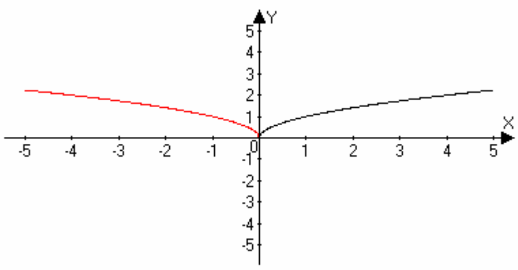
Обозначим через M $\max\{|a|, |b|\}$[1]. Тогда $-M \le a$ и $b \le M$. Следовательно,

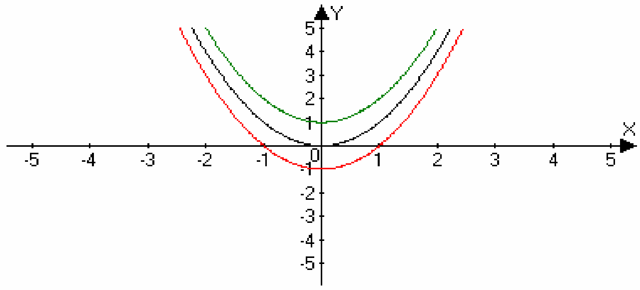
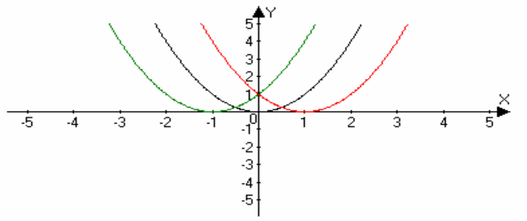
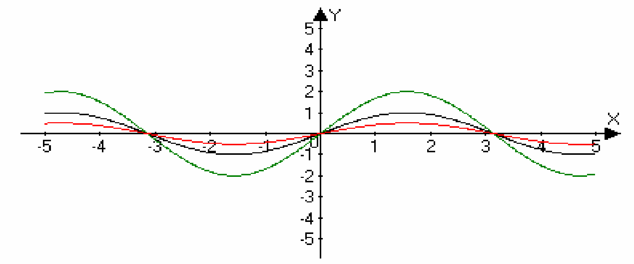
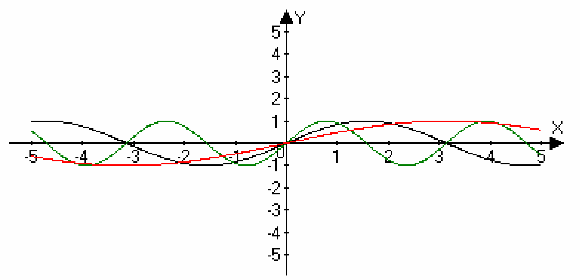
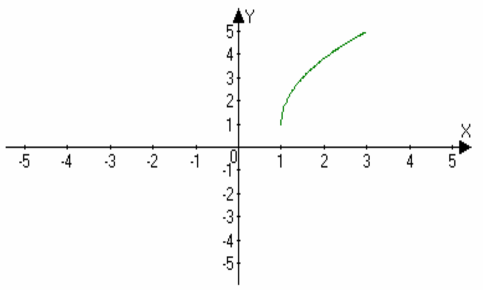
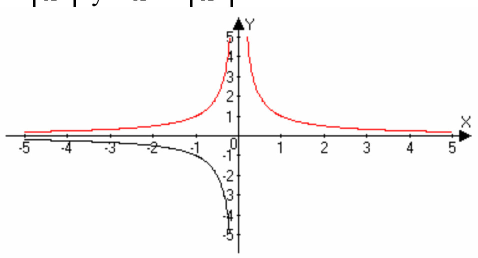
$$-M \le f(x) \le M, \ \forall x \in D(f),$$

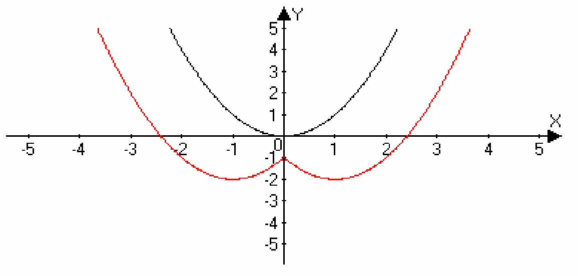
или

$$|f(x)| \le M, \ \forall x \in D(f).$$

Геометрические преобразования графиков функции:

№	Функция	Преобразование	Графики
1	y = −*f*(x)	Сначала строим график функции *f*(x), а затем симметрично отображаем его относительно оси OX.	y = − (x^2) y = x^2 → − (x^2) 
2	y = *f*(−x)	Сначала строим график функции *f*(x), а затем симметрично отображаем его относительно оси OY.	y = √ (−x) y =√(x) → √ (−x) 
3	y = *f*(x) +A A - const	Сначала строим график функции	y = x^2 → x^2 +1 y = x^2 → x^2 -1

		f(x), а затем, если А>0 поднимаем полученный график на А единиц вверх по оси OY. Если A<0, то опускаем вниз.	
4	y = f(x −a)	Сначала строим график функции f(x), а затем, если a>0, то график функции смещаем на а единиц вправо, а если a<0, то на а единиц влево. "−" − → "+" − ←	$y = x^2 \to (x+1)^2$ $y = x^2 \to (x-1)^2$ 
5	y = K f(x) k − const k>0	Сначала строим график функции f(x), а затем, если K>0, то растягиваем полученный график в K раз вдоль оси OY. А если 0< K<1, то сжимаем полученный график в 1 ⁄ K раз вдоль оси OY. ↕↓ ↑	y = sin(x) → **2**sin(x) y = sin(x) → ½ sin(x) 
6 7	y = f(к x) k − const , k>0 y = A f(к x+a) +B A, к, a, B − const	Сначала строим график функции f(x), а затем, если к >1, то сжимаем полученный график в к раз вдоль оси OX. А если 0< к <1, то растягиваем полученный график в 1⁄ к раз вдоль оси OX. к >1 − →← 0< к <1 − ←→ f(x) → f(к x) → f(к(x + a ⁄ к)) →A f(к(x + a ⁄ к)) → A f(к(x + a ⁄ к)) +B	y = sin(x) → sin(**2**x) y = sin(x) → sin (½ x)  y = 2√(2x-2)+1 y =√x →√2x→√2(x -1) → 2√2(x -1) →2√2(x-1)+1 
8	y = │f(x)│	Сначала строим график функции f(x), а затем часть графика, расположенную выше оси OX оставляем без изменения, а часть графика, расположенную ниже оси OX, заменяем	y =│x^3│ y = x^3→│x^3│ 

		симметричным отображением относительно ОХ.	
9	$y = f(\lvert x \rvert)$	Сначала строим график функции $f(x)$, а затем часть графика, расположенную правее оси ОУ, оставляем без изменения, а левую часть графика заменяем симметричным отображением правой относительно ОУ.	$y = (\lvert x \rvert -1)^2 -2$ $y = x^2 \to (x-1)^2 \to (x-1)^2 - 2 \to (\lvert x \rvert -1)^2 -2$ 

Задачи:

Задача 1. Найдите область определения, область значений функции, исследуйте на четность и нечетность:

1. 1. $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$
2. $y = \sqrt{x}$
3. $y = -ctg\ x - x$
4. $y = \dfrac{1}{x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{x^2}$
6. $y = 5\sin x + 3\cos x$
7. $y = 5(tg\ x - x)$
8. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$
9. $y = 2^{x^2}$
10. $y = x\sqrt{x}$

Задача 2. Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} |x-2|, x \geq 0 \\ x^2 + 2, x < 0 \end{cases}.$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, x \geq 2 \\ x^2 - 4, x < 2 \end{cases}.$$

$$y = \frac{-4x-7}{x+2}.$$

Вопросы:

1. Дайте определение числовой функции.
2. Что такое аргумент функции?
3. Что называется областью определения функции?
4. Что такое область значения функции?
5. Что называется графиком функции?
6. Какие преобразования графиков функций вы знаете? Перечислите.
7. Дайте определение чётной функции.
8. Какая функция называется нечётной?
9. Назовите особенность графика чётной функции.
10. Какова особенность графика нечётной функции?
11. Какая функция называется периодической?

Тема 9. Пределы и непрерывность.

Способы задания последовательности. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Ограниченные и неограниченные последовательности. Вычисление предела последовательности. Число е. Вычисление предела функции.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Предел числовой последовательности.
Предел функции.
Бесконечно малые величины.
Бесконечно большие величины.
Основные теоремы о пределах.
Замечательные пределы.
Непрерывность функции.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Если по некоторому закону каждому натуральному n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность: $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

a_n – члены последовательности занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров.

Примеры числовых последовательностей:

1) $a, a + d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots$ - арифметическая прогрессия.
2) $b, bq, \ldots, bq^{n-1}, \ldots$ - геометрическая прогрессия.
3) 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, … - последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$, со все возрастающей точностью.

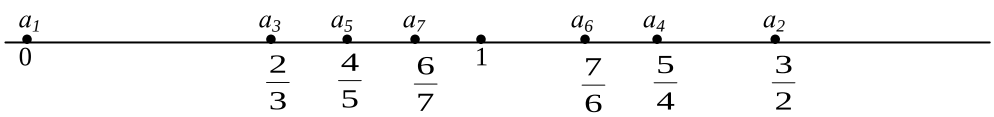
Иногда последовательность задается тем, что указано непосредственно выражением для a_n (пример 1, 2). В других случаях нам может быть неизвестно выражение для общего члена a_n, как в примере 3. Тем не менее: последовательность считается заданной, если мы владеем правилом, по которому может быть вычислен любой член последовательности лишь только известен его номер.

Предел числовой последовательности

Дана последовательность $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$. Выпишем ее члены

n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
$a_1=0$	$a_2=\dfrac{3}{2}$	$a_3=\dfrac{2}{3}$	$a_4=\dfrac{5}{4}$	$a_5=\dfrac{4}{5}$	$a_6=\dfrac{7}{6}$	$a_7=\dfrac{6}{7}$

Изобразим члены этой последовательности на числовой оси:



Можно заметить, что члены последовательности a_n с ростом n как угодно близко приближаются к единице. При этом абсолютная величина разности $|a_n-1|$ становится все меньше и меньше. Действительно:

$|a_1-1| = |0-1| = 1$ $\qquad |a_2-1| = \left|\dfrac{3}{2}-1\right| = \dfrac{1}{2}$ $\qquad |a_3-1| = \left|\dfrac{2}{3}-1\right| = \dfrac{1}{3}$ и т.д.

$|a_n-1| = \left|1+\dfrac{(-1)^n}{n}-1\right| = \dfrac{1}{n}$, т.е. с ростом n $|a_n-1|$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа.

Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N (зависящий от ε) $N = N_\varepsilon$, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ верно неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$.

Иногда говорят, что если А есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, то эта последовательность сходится к А. Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа А. Важно отметить, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз и навсегда: он зависит от выбора числа ε. При уменьшении ε, соответствующий номер N_ε, вообще говоря увеличивается.

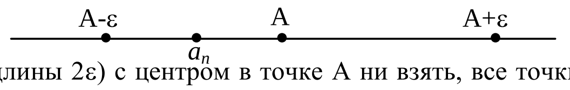
Для геометрической интерпретации понятия предела числовой последовательности распишем неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Изобразим числа А, А + ε, А-ε и значение a_n точками на числовой оси. Получим наглядно геометрическое истолкование предела последовательности:



Какой бы малый отрезок (длины 2ε) с центром в точке А ни взять, все точки a_n начиная с некоторой из них должны попасть внутрь этого отрезка (так, что вне его может остаться лишь конечное число этих точек).

<u>Пример</u>

Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

План решения:

1. По определению число a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\forall\varepsilon > 0$ неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ имеет решение $n > N(\varepsilon)$.

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Если решение имеет вид $n > N(\varepsilon)$, то a — предел числовой последовательности $\{a_n\}$.

Замечание. Если решение неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ нельзя представить в виде $n > N(\varepsilon)$, то число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Пример. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3 - 2} = 2.$$

Решение.

1. По определению число 2 называется пределом числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3 - 2}\right\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{2n^3}{n^3 - 2} - 2\right| < \varepsilon.$$

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$\left|\frac{2n^3}{n^3 - 2} - 2\right| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Неравенство имеет решение $n > N(\varepsilon) = \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$. Следовательно, 2 — предел числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3 - 2}\right\}$.

Ответ. $n > \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$.

Последовательность a_n имеющая своим пределом 0 называется бесконечно малой величиной или, просто, бесконечно малой.

Леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. Сумма любого конечного числа бесконечного малых есть также величина бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если она по абсолютной величине становится и остается большей сколь угодно большего наперед заданного числа E>0, начиная с некоторого места $|x_n| > E \quad (\text{для} \quad n > N_E)$.

Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой и сохраняет определенный знак (+ или -) то в соответствии со знаком, говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел +∞ или -∞ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad x_n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Если $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то ее обратная величина $a_n = \dfrac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой (верно и обратно).

Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.

Теоремы о пределах. Предельный переход в равенствах и неравенствах

1.Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при всех их изменениях равны: $x_n = y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то равны и эти пределы A= B.

2.Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ всегда выполняется неравенство $x_n \geq y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то A ≥ B.

3.Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ всегда выполняются неравенства $x_n \leq y_n \leq z_n$ причем $x_n \to A \quad z_n \to A$ (т.е. к общему пределу A), то и последовательность $\{y_n\}$ имеет тот же предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Арифметические операции над полследовательностями

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$

2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то их произведение также имеют конечный предел $\lim x_n \; y_n = a \cdot b$

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ причем b≠0, то их отношение также имеет конечный предел $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281 \text{ - иррациональное число.}$$

<u>Пример</u>

Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}.$$

Решение. Здесь $(2n+1)^2-(n+1)^2 = 3n^2+2n$ — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2) и n^2+n+1 — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2).

1. Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$(2n+1)^2-(n+1)^2 = n^2\left(3+\frac{2}{n}\right).$$

2. Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$n^2+n+1 = n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+2/n)}{n^2(1+1/n+1/n^2)}.$$

4. Сокращая n^2 и используя теорему о пределе частного, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3+2/n)}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n+1/n^2)} = 3.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = 3.$

Задачи.

Задача 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

1. $a_n = \dfrac{2n-2}{3n-1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$ 2. $a_n = \dfrac{4n-2}{2n+3}, \quad a = 2.$

3. $a_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$ 4. $a_n = \dfrac{5n+2}{3n+1}, \quad a = \dfrac{5}{3}.$

5. $a_n = \dfrac{5n+2}{n+1}, \quad a = 5.$ 6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}, \quad a = 4.$

7. $a_n = \dfrac{3-n^3}{1+n^3}, \quad a = -1.$ 8. $a_n = \dfrac{6n-2}{2n+1}, \quad a = 3.$

9. $a_n = \dfrac{3+8n^2}{1+4n^2}, \quad a = 2.$ 10. $a_n = \dfrac{3n}{n+1}, \quad a = 3.$

Задача 2. Написать последовательности с общими членами:

1) $x_n = \dfrac{2n}{3n-2}$; 2) $x_n = n!$; 3) $x_n = \dfrac{1}{n}$;

4) $x_n = -2^n$; 5) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$; 6) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

7) $x_n = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$; 8) $x_n = \dfrac{\frac{\sin n\pi}{2}}{n}$;

9) $x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{для } n \text{ нечетных;} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{для } n \text{ четных;} \end{cases}$ 10) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Задача 3. Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \ldots;$

2) $\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{5\cdot 6}, \frac{1}{7\cdot 8}, \frac{1}{9\cdot 10}, \ldots;$

3) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \ldots;$

4) $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \ldots;$

5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots;$

6) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots;$

7) $\frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \ldots.$

Задача 4.Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)^2-(1+n)^2}{(1+n)^2-(2-n)^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n+2)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}$.

Задача 5. Вычислить:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n+5}\right)^{n+3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^3}$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3n^2+1}$.

Задача 6. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1});$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n).$

Задача 4.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^3-n+1}{8n^3+n+3}};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

Вопросы:

1. Дайте определение бесконечно малой последовательности. Приведите пример.
2. Сформулируйте леммы о бесконечно малых.
3. Какая последовательность называется бесконечно большой?
4. Охарактеризуйте взаимосвязь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.
5. Какие арифметические операции можно выполнять над последовательностями? Опишите алгоритм выполнения арифметических операций над последовательностями.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
7. Дайте определение предела функции, предела функции слева (справа).
8. Дайте определение функции y=f(x) при $x\to\infty$.
9. Сформулируйте определение бесконечно малой (бесконечно большой) функции.
10. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
11. Охарактеризуйте связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
12. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Раздел 4. Математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Тема 10. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Задачи, приводящие к понятию производной.

Определение производной функции в точке.

Геометрический и механический смысл производной.

Основные правила дифференцирования.

Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u=\varphi(x)$ *имеет в точке* x *производную* u', *то в этой точке*

$$(Cu)'=Cu' \quad (C=const).$$

Пример

$$y=5\cos x, \qquad y'=(5\cos x)'=5(\cos x)'=-5\sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

Пример

$$y=x^5-3x^2+2x-1,$$

$$y'=(x^5)'-(3x^2)'+(2x)'-(1)'=5x^4-6x+2.$$

III. Если функции $u=\varphi(x)$ *и* $v=\psi(x)$ *имеют в точке* x *производные, то справедлива формула*

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Пример

$$y=(x^2-3x)\sin x,$$

$$y'=(x^2-3x)'\sin x+(x^2-3x)(\sin x)'=(2x-3)\sin x+(x^2-3x)\cos x.$$

Пример

$$y=(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$y'=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$$

IV. Если функции $u=\varphi(x)$ *и* $v=\psi(x)$ *имеют в точке* x *производные, причем в этой точке* $v\neq 0$, *то справедлива формула*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Пример

$y=\dfrac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x\neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$$y=\frac{a}{u};\quad y'=-\frac{a}{u^2}\cdot u'\ (a \text{ — постоянная величина});$$

$$y=u^n;\ y'=nu^{n-1}\cdot u'$$

(n — любое действительное число)

$$y=\sqrt{u};\qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u';$$

$$y=a^u;\ y'=a^u\cdot\ln a\cdot u';\ y=e^u;\ y'=e^u u';\ a>0,\ a\neq 1;$$

$$y=\log_a u;\qquad y'=\frac{1}{u}u'\log_a e=\frac{u'}{u\ln a};$$

$$y=\ln u;\qquad y'=\frac{1}{u}u';$$

$$y=\sin u;\qquad y'=\cos u\cdot u';$$

$$y=\cos u;\qquad y'=-\sin u\cdot u';$$

$$y=\operatorname{tg} u;\qquad y'=\frac{1}{\cos^2 u}u';$$

$$y=\operatorname{ctg} u;\qquad y'=-\frac{1}{\sin^2 u}u';$$

$$y=\sec u;\qquad y'=\sec u\operatorname{tg} u\cdot u';$$

$$y=\operatorname{cosec} u;\qquad y'=-\operatorname{cosec} u\cdot\operatorname{ctg} u\cdot u';$$

$$y=\arcsin u;\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u';$$

$$y=\arccos u;\qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u';$$

$$y=\operatorname{arctg} u;\qquad y'=\frac{1}{1+u^2}u';$$

$$y=\operatorname{arcctg} u;\qquad y'=-\frac{1}{1+u^2}u'.$$

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x. С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x. В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x.

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u=\varphi(x)$.

Пример $y=u^3$. Если взять $u=x^2-3x+1$, то получим сложную функцию $y=\left(x^2-3x+1\right)^3$.

Пример $y=\sqrt{u}$, $u=2-x$. Тогда $y=\sqrt{2-x}$.

Пример $y=\dfrac{1}{u+|u|}$, $u=\sin x$. Тогда $y=\dfrac{1}{\sin x+|\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u', то существует и конечная производная от y по x, причем $y'=f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример $y=\left(1+x^2\right)^5$. Положим $y=u^5$, $u=1+x^2$. $y'=5u^4u'=5\left(1+x^2\right)^4\left(1+x^2\right)'=10x\left(1+x^2\right)^4$.

Пример $y=\sin 3x$, т. е. $y=\sin u$, где $u=3x$. $y'=\cos u\,u'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример $y=(1+\sin 2x)^3$,

$y'=3(1+\sin 2x)^2(1+\sin 2x)'=3(1+\sin 2x)^2\cos 2x(2x)'=6(1+\sin 2x)^2\cos 2x$.

Пусть дана функция $y=f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, ε - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения ε. Если функция $y=f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E, для которого $y=f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x=g(y)$, которую называют обратной для функции $y=f(x)$. Она имеет своей областью задания множество ε, а областью изменения E; E и ε поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y=f(x)$ и $x=g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x)\neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Геометрический и механический смысл производной**.**

Скорость v точки M, движущейся по прямой, есть производная от расстояния s по времени t, т. е.

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Угловой коэффициент касательной к непрерывной кривой $y=f(x)$ есть производная от y по x (в соответствующей точке):

$$tg\alpha=y'$$

или

$$tg\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

При этом если существует касательная, то существует и производная, и наоборот. Случаю касательной, не параллельной оси Oy, отвечает конечная производная; случаю касательной, параллельной оси Oy, отвечает бесконечная производная.

Пример Точка движется по прямой по закону $s=t^3$ (путь s измеряется в метрах, время t - в секундах). Найти ее скорость в момент $t=5$.

Решение. Скорость в любой момент t равна: $v=\frac{ds}{dt}=3t^2$.

Поэтому $v\big|_{t=5}=3\cdot 5^2=75\ м/сек$.

Пример Точка, оставаясь на прямой, совершает колебательное движение по закону $s=\sin t$. В какие моменты времени скорость обращается в нуль?

Решение. Скорость в любой момент имеет значение

$$v=\frac{ds}{dt}=\cos t$$

Поэтому $v=0$ при $t=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n=0,1,2,...$

Пример Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=\frac{1}{x}$ в точке $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Угловой коэффициент касательной в любой точке дается формулой

$$k=y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Поэтому для точки $\left(2,\frac{1}{2}\right)k=-\frac{1}{4}$. Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

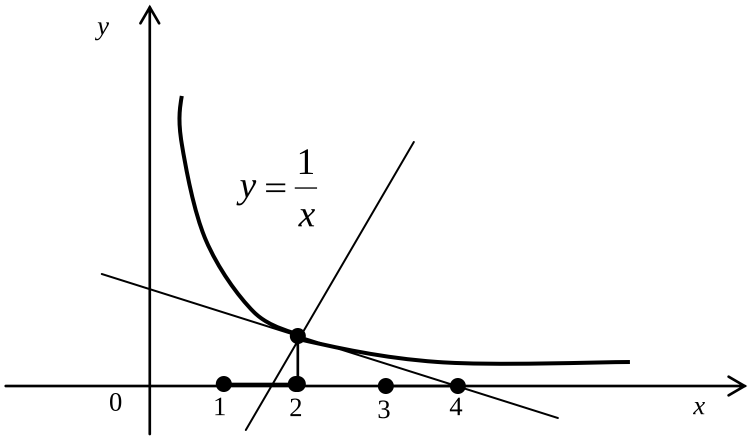
В нашем случае мы получаем

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),$$

или

$$x+4y-4=0.$$

Это и есть уравнение искомой касательной, изображенной на рисунке.



Угловой коэффициент нормали к кривой в точке $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ имеет значение

$$k_{норм}=-\frac{1}{k_{кас}}=4$$

(в силу условия перпендикулярности двух прямых). Следовательно, уравнение нужной нам нормали имеет вид

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2)$$

или

$$8x-2y-15=0.$$

Задачи:

Задача 1. Найти производную функции в точке x=0:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^3+x^2\sin\frac{2}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}\left(x^2\cos\frac{1}{9x}\right)+2x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x\cos\frac{1}{5x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\mathrm{tg}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\mathrm{tg}\left(x\sin\frac{3}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\frac{1}{x}\right)}-1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. $y=2x^3+5x^2-7x-4$
2. $y=\sqrt{x}$
3. $y=-ctg\ x-x$
4. $y=\frac{1}{x^2}$
5. $y=\sqrt[3]{x^2}$
6. $y=5\sin x+3\cos x$
7. $y=5(tg\ x-x)$

8. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$

9. $y=2^{x^2}$

10. $y=x\sqrt{x}$

Задача 3. Найти производные заданных функций:

1. $y=2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 3. $y=\ln^2(1-\cos x)$.

4. $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$. 5. $y=\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+\ln^2 3}$. 6. $y=\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y=\operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$. 9. $y=\ln(1+\sqrt{\operatorname{th} x})$.

10. $y=\ln\sin 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 4. Вычислить производную функции

а) $y=5^x+x\ln x$, в точке $x_0=1$;

б) $y(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{5}x\ \ -4x^3+5$, в точке $x_0=1$;

в) $f(x)=2x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0=4$;

г) $f(x)=4x^3+6x+3$ в точке $x_0=1$.

Задание 5. Вычислить производные:

а)

1) $y=\arcsin 5x$; 2) $y=\arcsin\sqrt{x}\ (x>0)$; 3) $y=\arcsin mx$;

4) $y=\arccos 6x$; 5) $y=\arccos(1-x^2)$; 6) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

б)

1) $y=\operatorname{arctg} 5x$; 2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 3) $y=\operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y=\operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{1+x^2}$.

в)

1) $y=\ln(ax+b)$; 2) $y=\ln^5 x$; 3) $y=\ln\sin x$;

4) $y=\ln\operatorname{arctg} x$; 5) $y=x\ln x$; 6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 8) $y=\ln(\ln x)$.

Задача 6. Точка движется по прямой по закону $S=5t^3-3t^2+4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t – в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1=1$ до $t_2=(1+\Delta t)$, считая $\Delta t=$ 0,5; 0,3; 0,1. Определить также истинную скорость в момент t = 1 сек.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Задача 7. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции *y* в точке:

1. $y=x-x^2,\quad a=1.$ 2. $y=x^2+x+1,\quad a=-1.$

3. $y=x^3+x,\quad a=1.$ 4. $y=\sqrt{x}-2,\quad a=4.$

5. $y=x^2+\sqrt{x^3},\quad a=1.$ 6. $y=\sqrt[3]{x^2}-9,\quad a=-27.$

7. $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}},\quad a=9.$ 8. $y=32\sqrt[4]{x}-x,\quad a=16.$

9. $y=x^2-x-1,\quad a=1.$ 10. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2},\quad a=2.$

Вопросы:

1.Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2.Дайте определение производной функции в точке.
3.Сформулируйте основные правила дифференцирования
4.Какая функция называется сложной?
5.Объясните правила дифференцирования сложной функции.
6.Какая функция называется обратной данной?
7.Каковы правила дифференцирования обратной функции?

8.Каков геометрический смысл производной?
9.Каков механический смысл производной?
10.Запишите уравнение касательной к графику функции в общем виде.
11. Какая функция считается заданной неявно?
12. Запишите формулы дифференцирования функции, заданной неявно.
13. Для дифференцирования каких функций целесообразно применение метода логарифмического дифференцирования?
14. Дайте определение производной порядка n. Как обозначаются производные высших порядков?
15. Опишите особенности дифференцирования функций, заданных параметрически.

Тема 11. Приложения производной.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Численное дифференцирование.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Основные теоремы дифференциального исчисления.
Правило Лопиталя.
Возрастание и убывание функций.
Экстремум функции.
Выпуклость графика функции.
Точки перегиба.
Асимптоты графика функции.
Общая схема исследования функций и построения графиков.
Численное дифференцирование.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Рассмотрим задачу о вычислении предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших. В первом случае говорят, что имеют дело с «неопределенностью типа $\frac{0}{0}$», во втором случае – с «неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$». Конечно, сами по себе символы $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ лишены смысла, и их используют лишь для обозначения типа неопределенности.

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}$ – неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1}{2x^3+3}$ – неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Следующая теорема основывается на теореме Коши и дает полезное общее правило для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, в литературе обычно называющееся *правилом Лопиталя*:

Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если второй предел (конечный или бесконечный) существует. При этом предполагается, что в некоторой окрестности точки а (за исключением, быть может, самой этой точки) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x)\neq 0$ при $x\neq a$.

Правило сохраняет силу и тогда, когда рассматриваются лишь значения $x<a$ или $x>a$, а также в случае $a=\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{\sec^2 x}=5.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos \pi x}{\frac{1}{x}}=-\pi$$

Пример.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{\left(x^2-3\right)\left(2x-3\right)}=4.$$

Может случиться, что отношение производных опять приводит к неопределенности. Но к отношению производных можно снова применить установленное правило (если, конечно, выполнены условия его применимости), т.е. перейти к отношению вторых производных. Если и здесь получается неопределенность, то переходим к третьим производным, и т. д. Коль скоро на каком-то шаге мы получим предел, который сможем вычислить, то найденное его значение и будет искомым пределом отношения функций.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Имеется еще ряд особых случаев вычисления пределов, однако все они легко сводятся к случаям неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, где $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ – случай неопределенности типа $0\cdot\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$, где $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ – случай $\infty-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}$, где либо $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ – случай 0^0, либо $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to 0$ – случай ∞^0, либо $f(x)\to 1$ и $g(x)\to\infty$ – случай 1^∞.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x}=-\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\sin x\right)=0$

Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен *n*-й степени

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n \qquad (1)$$

($c_0, c_1, c_2\ldots c_n$ – постоянные). Продифференцируем эту функцию *n* раз:

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1},$$
$$f''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3x+\ldots+(n-1)nc_nx^{n-2},$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3+\ldots+(n-2)(n-1)nc_nx^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot nc_n.$$

Если во всех этих формулах положить $x=0$, то получим $f(0)=c_0$, $f'(0)=c_1$, $f''(0)=2!c_2$, $f'''(0)=3!c_3,\ldots,$ $f^{(n)}(0)=n!c_n$,

откуда

$$c_0=f(0),\ c_1=\frac{f'(0)}{1!},\ c_2=\frac{f''(0)}{2!},\ c_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставив эти значения в равенство (1), найдем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2)$$

Здесь коэффициенты многочлена выражены через его значение и значения его производных в точке $x=0$.

Оказывается справедливой и более общая формула. Пусть *a* – какое-нибудь число. Положим $x-a=t$, t – новая переменная. Тогда

$$f(x)=f(t+a)=c_0+c_1(t+a)+c_2(t+a)^2+c_3(t+a)^3+\ldots+c_n(t+a)^n;$$

это – многочлен степени *n* относительно *t*. Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим

$$f(x)=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+\ldots+C_nt^n$$

($C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ – новые коэффициенты) или, вернувшись к переменной *x*,

$$f(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\ldots+C_n(x-a)^n. \quad (3)$$

Таким образом, *каково бы ни было a, многочлен степени n всегда можно записать в виде* (3). Эта формула носит название *формулы Тейлора* для многочлена и содержит формулу (2) как частный случай (при $a=0$); формулу (2) называют часто *формулой Маклорена*.

Формула Тейлора для любой n раз дифференцируемой функции:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

Формула Тейлора имеет важные применения во многих вопросах математического анализа и его приложений. В частности, во многих случаях она позволяет функцию сложной природы с большой степенью точности заменить многочленом, т.е. функцией более простой, дает простой способ приближенного вычисления значений функции.

Исследование функции и построение графика

Точки, в которых функция имеет экстремумы, следует искать среди тех внутренних точек ее области задания, где либо $f'(x)=0$, *либо* $f'(x)=\infty$, *либо* $f'(x)$ *не существует*. Все эти случаи реализуются, например, для функций $y=x^2$, $y=x^{2/3}$, $y=|x|$, каждая из которых имеет минимум при $x=0$.

Точки указанного вида условимся называть критическими точками. Не в каждой критической точке обязательно будет экстремум. Действительно, точка x = 0 будет критической для каждой из функций $y=x^3$ ($y'=3x^2$, $y'=0$ при x=0), $y=\sqrt[3]{x}$ ($y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y'=\infty$ при x=0),

Следующие теоремы позволяют определить, имеется в данной критической точке экстремум или нет, и если имеется, то максимум или минимум.

Теорема 1. *Пусть* x_0 *—критическая точка и функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке. Если в некоторой окрестности точки* x_0*:*

1) $f'(x)>0$ *при* $x<x_0$ *и* $f'(x)<0$ *при* $x>x_0$, *т. е. при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с плюса на минус, или*

2) $f'(x)<0$ *при* $x<x_0$ *и* $f'(x)>0$ *при* $x<x_0$, *т. е. при переходе через* x_0 *производная меняет знак с минуса на плюс, или*

3) производная не меняет знака при переходе через x_0, *то в случае 1) имеет место максимум, в случае 2)—минимум, в случае 3) экстремума нет.*

<u>Пример</u>. $f(x)=x^3-3x+1$. Функция всюду дифференцируема. Следовательно, все критические точки находятся из уравнения

$$f'(x)=3x^2-3=0.$$

Отсюда

$$x^2-1=0,\ x_1=-1,\ x_2=1$$

— две критические точки.

1) $x_1=-1$. При $x<-1$ имеем: $f'(x)=3x^2-3>0$; при $x>-1$ (но $x<1$): $f'(x)<0$. Следовательно, в точке $x_1=-1$ имеет место *максимум*.

2) $x_2=1$. При $x<1$ (но $x>-1$): $f'(x)=3x^2-3<0$; при $x>1$ имеем: $f'(x)>0$. Следовательно, в точке $x_2=1$ имеет место *минимум*.

Теорема 1 позволяет высказать следующие практически полезные соображения.

Пусть речь идет об отыскании экстремумов функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке и имеющей в нем *конечное* множество критических точек.

Найдя все критические точки, расположим их в порядке возрастания абсцисс:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b \qquad (1)$$

(a и b — концы рассматриваемого промежутка). В каждом из интервалов

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \qquad (2)$$

существует конечная $f''(x) \neq 0$ (поскольку все точки, где $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или где $f'(x)$ не существует, вошли в число точек x_1, x_2, ... , x_n). Предполагая $f'(x)$ непрерывной в каждом из частичных интервалов (2) — на практике это обычно так и бывает, — нетрудно прийти к выводу, что $f'(x)$ *сохраняет знак* внутри каждого такого интервала (если бы $f'(x)$ *меняла* знак внутри какого-нибудь из интервалов (2), то по свойству непрерывных функций она обращалась бы в нуль в некоторой *внутренней* точке этого интервала, что невозможно). Чтобы найти этот знак, достаточно, например, установить его для какой-нибудь *конкретной* точки соответствующего интервала.

В результате интервалам (2) будет соответствовать некоторая последовательность знаков плюс и минус, характер чередования которых в силу теоремы 1 позволяет судить о наличии максимума (смена плюса на минус), минимума (смена минуса на плюс) или об отсутствии экстремума (сохранение знака) в соответствующих точках.

Пример. $f(x) = (x+1)^2(x-1)^3$. Функция задана и непрерывна во всем бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$. Ее производная

$$f'(x) = 2(x+1)(x-1)^3 + 3(x+1)^2(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^2(5x+1) = 5(x+1)(x-1)^2\left(x + \frac{1}{5}\right) \quad (3)$$

всюду существует и конечна. Следовательно, критическими точками будут *лишь* те, для которых

$$f'(x) = 0,$$

т. е.

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{5},\ x_3 = 1.$$

Промежуток задания функции тем самым разбивается на интервалы

$$(-\infty, -1),\ \left(-1, -\frac{1}{5}\right),\ \left(-\frac{1}{5}, 1\right),\ (1, +\infty).$$

Соответствующая последовательность знаков производной имеет вид

+ , –, +, + .

Следовательно, в точке $x_1 = -1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(-1) = 0$; в точке $x_2 = -\frac{1}{5}$ - минимум, причем $f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{16}{25} \cdot \frac{216}{125} = -\frac{3456}{3125}$, в точке $x_3 = 1$ экстремума нет.

Теорема 2. *Пусть в критической точке x функция* $f(x)$ *n раз дифференцируема* (*n* > 1), *причем* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *но* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Если n четное, то имеет место экстремум, а именно: при* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *—максимум, при* $f^{(n)}(x_0) > 0$*—минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет.*

Отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна в некотором промежутке. Если этот промежуток не является отрезком, то, как мы знаем, среди значений $f(x)$ может и не быть наибольшего или наименьшего. Однако можно указать простой признак, когда такие значения заведомо существуют.

Теорема 3. *Если в данном промежутке имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.*

Если наибольшее или наименьшее значение достигается во *внутренней* точке отрезка, то оно *необходимо* будет одним из максимумов или минимумов и, следовательно, будет достигаться в одной из критических точек. Но оно может достигаться и в конце отрезка. Отсюда следует, что для отыскания наибольшего или наименьшего значений $f(x)$ достаточно сравнить между собой ее значения во всех критических точках и в точках a и b;

наибольшее из всех этих чисел будет *наибольшим значением* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$; *наименьшее* из этих чисел даст *наименьшее значение* $f(x)$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ имеет областью существования отрезок [−1,1]. Ее наибольшее и наименьшее значения, очевидно, достигаются в тех же точках, что и для функции $g(x)=(1-x^2)(1+2x^2)$ (рассматриваемой на упомянутом отрезке). Из уравнения

$$g'(x)=-2x(1+2x^2)+(1-x^2)\cdot 4x=2x(1-4x^2)=0$$

находим $x_1=0$, $x_2=-0{,}5$, $x_3=0{,}5$. В этих точках $g(x)$ имеет значения:

$$g(0)=1,\ g(-0{,}5)=g(0{,}5)=1{,}125.$$

Если сопоставим эти значения со значениями в концах $g(-1)=g(1)=0$, то увидим, что наибольшим значением для $g(x)$ на отрезке [−1, 1] будет 1,125 (при $x=\pm0{,}5$), наименьшим будет 0 (при $x=\pm 1$). Для функции $f(x)$ наибольшим значением будет тогда $\sqrt{1{,}125}$ (при $x=\pm0{,}5$), наименьшим — по-прежнему 0 (при $x=\pm 1$).

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$ и в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, не параллельную оси *Oy*.

Если в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над этой касательной, то говорят, что кривая в точке x_0 выпукла вниз. *Аналогично, если в некоторой окрестности* x_0 *кривая лежит* под *касательной, то говорят, что она в точке* x_0 выпукла вверх. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 кривая лежит по одну сторону упомянутой касательной, а справа от x_0 — по другую сторону, то говорят, что x_0 есть *точка перегиба* кривой.

Теорема 4. *Если в точке* x_0 *существует конечная производная* $f''(x_0)$, *причем* $f''(x_0)>0$, *то в точке* x_0 *кривая выпукла вниз, если же* $f''(x_0)<0$, *то кривая выпукла вверх.*

Теорема 5. *Пусть* $f''(x)$ *существует и конечна в некоторой окрестности точки* x_0. *Если* $f''(x)$ *меняет знак при переходе x через точку* x_0, *то* x_0*—точка перегиба. Если же* $f''(x)$ *в окрестности* x_0 *сохраняет знак, то в точке* x_0 *перегиба нет.*

Пример. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y=x^3-3x^2+1$. Вычисляем: $y'=3x^2-6x$, $y''=6x-6$. Уравнение $y''=6x-6=0$ дает $x=1$. При $x<1$, очевидно, $y''<0$ (кривая выпукла вверх), если же $x>1$, то $y''>0$ (кривая выпукла вниз). Точка $x=1$ является точкой перегиба.

Отыскание асимптот

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$. Может случиться, что при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$ кривая неограниченно приближается к некоторой фиксированной прямой $y=kx+b$, называемой *асимптотой* для данной кривой. Точнее говоря, *прямая* $y=kx+b$ *называется асимптотой для кривой* $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0$.

Из высказанного определения следует, что кривая $y=f(x)$ имеет *горизонтальную* асимптоту $y=b$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (или соответственно при $x\to-\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y=kx+b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$. (При $k=0$ получаем опять горизонтальную асимптоту.)

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^2+3x+5}{x+1}$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+5}{x+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x+5}{x+1}-x\right]=2$$

Следовательно, имеется асимптота (и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$): $y=x+2$.

Пример. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке [-2;1].

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке [-2;1], как многочлен. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки, для чего продифференцируем функцию.

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$$

Тогда $f'(x)=0$, если $x=0$ или $x=-1$ или $x=1$.

Получили две критические точки $x=0$ и $x=-1$ принадлежащие данному промежутку [-2;1]. Точка $x=1$ не является внутренней и поэтому не критическая.

Вычислим значения функции на концах промежутка и в критических точках и выберем из них наибольшее и наименьшее.

$$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2+3=16-8+3=11$$

$$f(1)=1-2+3=2$$

$$f(0)=3$$

$$f(-1)=1-2+3=2$$

Следовательно, $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=2$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=11$.

Задачи:

Задача 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Задача 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^{x}$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Задача 3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$ и $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Задача 4. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)$.

Задача 5. Разложить многочлен по степеням $x-x_0$, если:

а) $P(x)=x^3+4x^2-6x-8, \quad x_0=-1;$

б) $P(x)=x^5-3x^4+7x+2, \quad x_0=2.$

Задача 6. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x_0=1$.

Задача 7. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=2^x$ в точке $x_0=\log_2 3$.

Задача 8. Найти значения x, при которых функция $f(x)=4x+\frac{9}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 9. Найти значения x, при которых функция $f(x)=3x^2+\frac{48}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 10. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=x^3+1{,}5x^2+2$.

Задача 11. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Задача 12. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}-x$.

Задача 13. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\frac{-3x^2-5x-4}{x+1}$.

Задача 14. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\frac{x^2+3x-12}{x+5}$.

Задача 15. Найти все критические точки функции $f(x)=2x^2-6|x+1|+5$.

Задача 16. Найти все критические точки х функции $f(x)=x^2-5|x|+6$.

Вопросы:

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
2. Неопределенности какого вида можно «раскрывать» при помощи правила Лопиталя?
3. Записать формулу Тейлора для многочлена. Привести пример практического приложения формулы.
4. Запишите формулу Маклорена. Объясните взаимосвязь формул Тейлора и Маклорена для многочлена.
5. Запишите формулу Тейлора для любой дифференцируемой n раз функции.
6. 1.Сформулируйте условия монотонности функции.
7. Какие точки называются стационарными; критическими; точками экстремума?
8. Сформулируйте необходимые условие экстремума.
9. Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
10. Что такое точка перегиба?
11. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
12. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба.
13. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот Вы знаете?
14. Как определить наличие вертикальной асимптоты?
15. В каком случае прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции?

Тема 12. Дифференциал функции.

Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Понятие дифференциала функции.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Дифференциалы высших порядков.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Приращение функции $y = f(x)$, имеющей в точке *x* конечную производную, представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где α - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ в правой части формулы пропорционально величине Δx (коэффициентом пропорциональности служит число $f'(x)$). Если $f'(x) \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

а это означает, что за исключением случая, когда $f'(x) = 0$, упомянутое слагаемое $f'(x)\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой *того же* порядка, что и Δx.

Полагаем $dy = f'(x)\Delta x$ и назовем эту величину дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке *x*. Для дифференциала употребляется также обозначение $df(x)$. Дифференциалом независимой переменной *x* называют ее приращение, т. е. *полагают* $dx = \Delta x$.

Следовательно, можем писать $dy = f'(x)dx$.

Таким образом, *дифференциалом функции в точке x называется произведение производной в этой точке на дифференциал независимой переменной* (*т. е. на приращение независимой переменной*).

Например, для функции $y = x^2$ дифференциал в любой точке *x* дается формулой

$$dy = 2xdx.$$

Обычно структура дифференциала функции значительно проще структуры ее приращения, к поэтому формулой широко пользуются в приближенных вычислениях.

Например, для функции $y = x^3$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3,$$

в то время как

$$dy = 3x^2 \cdot \Delta x.$$

Если взять *x*=2, $\Delta x = 0{,}01$, то

$$\Delta y = 3\cdot 4\cdot 0{,}01 + 3\cdot 2\cdot 0{,}0001 + 0{,}000001 = 0{,}120601,$$

$$dy = 3\cdot 4\cdot 0{,}01 = 0{,}12.$$

Таким образом, абсолютная ошибка

$$|dy - \Delta y| = 0{,}000601,$$

относительная ошибка

$$\left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000601}{0{,}120601} \approx 0{,}05\left(\frac{1}{2}\%\right).$$

Когда хотят вычислить значение $f(x + \Delta x)$, зная $f(x)$, то часто поступают так: *точное* равенство $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$ заменяют приближенным равенством $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ и этим упрощают выкладки.

Так, возвращаясь опять к функции $y = x^3$, получаем $(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + \underbrace{3x^2 \cdot \Delta x}_{dy}$

и, в частности, $(2{,}01)^3 = (2 + 0{,}01)^3 \approx 2^3 + 0{,}12 = 8{,}12$.

Если $y = \sqrt{x}$, то $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x}_{dy}$

и, в частности, $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{2}$ — довольно известная приближенная формула.

Геометрический смысл дифференциала: значение дифференциала функции, отвечающее некоторому приращению независимой переменной, совпадает с соответствующим приращением ординаты касательной к графику функции.

Основные правила вычисления дифференциала функции:

I. $dC=0(C=\text{const})$. II. $d(Cu)=Cdu(C=\text{const})$.

III. $d(u\pm v)=du\pm dv$. IV. $d(uv)=du\cdot v+u\cdot dv$.

V. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$. VI. $d\left(\dfrac{1}{v}\right)=-\dfrac{dv}{v^2}$.

VII. $d(u^{\alpha})=\alpha u^{\alpha-1}du$. VIII. $d(\sqrt{u})=\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$.

IX. $d(a^u)=a^u\ln a\cdot du$ ($a=\text{const}>0$, $a\neq 1$). X. $d(e^u)=e^u du$.

XI. $d(\lg_a u)=\dfrac{du}{u}\lg_a e$. XII. $d(\ln u)=\dfrac{du}{u}$

XIII. $d(\sin u)=\cos u\cdot du$. XIV. $d(\cos u)=-\sin u\cdot du$.

XV. $d(\operatorname{tg}u)=\dfrac{du}{\cos^2 u}$. XVI. $d(\operatorname{ctg}u)=-\dfrac{du}{\sin^2 u}$.

XVII. $d(\arcsin u)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$. XVIII. $d(\arccos u)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

XIX. $d(\operatorname{arctg}u)=\dfrac{du}{1+u^2}$. XX. $d(\operatorname{arcctg}u)=-\dfrac{du}{1+u^2}$.

XXI. $d(\operatorname{sh}u)=\operatorname{ch}u\cdot du$. XXII. $d(\operatorname{ch}u)=\operatorname{sh}u\cdot du$.

XXIII. $d(\operatorname{th}u)=\dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u}$. XXIV. $d(\operatorname{cth}u)=-\dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u}$.

Всюду здесь u и v — произвольные дифференцируемые функции от x.

Пример.

$$d\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Пример.

$$d(\ln\sin x)=\frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{\cos xdx}{\sin x}=\operatorname{ctg}xdx.$$

Пример.

$$d(\operatorname{sh}e^x)=\operatorname{ch}e^x d(e^x)=\operatorname{ch}e^x\cdot e^x\cdot dx.$$

Задачи

Задача 1. Найти дифференциалы функции:

а) $y=\dfrac{1}{\ln^2 x}$; б) $y=\ln(ax^2+bx+c)$; в) $y=\dfrac{3ctgx}{e^x-1}$; г) $y=e^x tgx$; д) $y=\dfrac{tgx}{\sin x+2}$; е) $y=\ln^3 x$; ж) $y=\arccos(x^2-1)$; з) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$; и) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$; к) $y=\dfrac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$; л) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции в данной точке:

1. $y=x^5$, $x=2,001$.
2. $y=\sqrt{4x-3}$, $x=0,98$.
3. $y=\sqrt{x^3}$, $x=1,02$.
4. $y=x^3$, $x=2,999$.
5. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1,03$.
6. $y=\sqrt{x}$, $x=3,996$.
7. $y=\sqrt{1+\sin x}$, $x=0,02$.
8. $y=\sqrt{2x+\cos x}$, $x=0,01$.
9. $y=\sqrt[3]{2x-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$, $x=1,03$.
10. $y=\sqrt{4x+1}$, $x=1,97$.

Вопросы

1. Что такое дифференциал функции?
2. Каков геометрический смысл дифференциала?
3. Приведите формулу для вычисления дифференциала функции.

4. Как определяются дифференциалы высших порядков?
5. Приведите примеры практического приложения дифференциала.

Раздел 5. Математический анализ. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 13. Неопределенный интеграл.

Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Понятие неопределенного интеграла.
Первообразная.
Свойства неопределенного интеграла.
Таблица основных неопределенных интегралов.
Простейшие свойства неопределенного интеграла.
Непосредственное интегрирование.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Первообразная функция.

Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a,b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:$F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgxdx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$tgx + C$

5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^{\alpha} dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются другие способы интегрирования.

Задачи:

Задача 1.Найти неопределенные интегралы:

1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\, dx;$

2) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)(9x^2 + 10x)\, dx;$ 3) $\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2x\, dx;$

4) $\int (2x^2+7)^3 x\, dx;$ 5) $\int \sqrt[3]{x^3+8}\, x^2\, dx;$ 6) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx.$

Задача 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx;$ 3) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^4}};$ 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx;$ 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx;$ 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}}dx;$ 8) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-3x^2}};$

9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\, dx;$ 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}dx.$

Задача 3. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a};$

2) $\int \frac{2x}{x^2+5}dx;$ 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx;$ 4) $\int \frac{x}{1-x^2}dx;$

5) $\int \frac{dx}{a-x};$ 6) $\int \frac{dx}{x\ln x};$ 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3}dx;$

8) $\int \frac{x}{1+x}dx;$ 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x}dx;$ 10) $\int \frac{x^3}{x+2}dx.$

Вопросы:

1. Что такое первообразная функция?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Запишите по памяти таблицу основных неопределенных интегралов.
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

Тема 14. Методы и способы интегрирования.
Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:
Замена переменной в неопределенном интеграле.
Интегрирование по частям.
Интегрирование элементарных дробей.
Интегрирование рациональных функций.
Интегрирование тригонометрических функций.
Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos xdx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Задачи:

Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x\, dx.$ 2. $\int \arcsin x\, dx.$

3. $\int x^2 \sin x\, dx.$ 4. $\int (x^2+2x+3)\cos x\, dx.$

5. $\int x\ln x\, dx.$ 6. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx.$

7. $\int e^{2x}\cos x\, dx.$ 8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx.$

9. $\int \sin\ln x\, dx.$ 10. $\int x^2 e^x\, dx.$

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$);

2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$).

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Вопросы:

1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?

Тема 15. Определенный интеграл.

Вычисление определенного интеграла. Интегрирование подстановкой. Интегрирование по частям.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

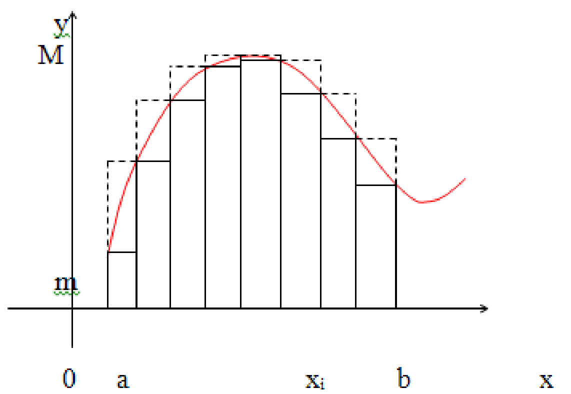
Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
Интегральная сумма.
Определенный интеграл.
Условия существования определенного интеграла.
Свойства определенного интеграла.
Способы вычисления определенного интеграла.
Формула Ньютона-Лейбница.
Замена переменной в определенном интеграле.
Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b] .



Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), a a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. А при х = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t). Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int\limits_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int\limits_0^\pi dx = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int\limits_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Задачи:

Задача 1.Вычислить определенные интегралы.

.1. $\int\limits_{-2}^0 (x^2+5x+6)\cos 2xdx.$

2. $\int\limits_{-2}^0 \left(x^2-4\right)\cos 3xdx.$

3. $\int\limits_{-1}^0 \left(x^2+4x+3\right)\cos xdx.$

4. $\int\limits_{-2}^0 \left(x+2\right)^2\cos 3xdx.$

5. $\int\limits_{-4}^{0}\left(x^2+7x+12\right)\cos x dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(2x^2+4x+7\right)\cos 2x dx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(9x^2+9x+11\right)\cos 3x dx.$

8. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(8x^2+16x+17\right)\cos 4x dx.$

9. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3x^2+5\right)\cos 2x dx.$

10. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(2x^2-15\right)\cos 3x dx.$

11. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3-7x^2\right)\cos 2x dx.$

12. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-8x^2\right)\cos 4x dx.$

13. $\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx.$

14. $\int\limits_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)\sin 2x dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(x^2-3x+2\right)\sin x dx.$

16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2-5x+6\right)\sin 3x dx.$

17. $\int\limits_{-3}^{0}\left(x^2+6x+9\right)\sin 2x dx.$

18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2+17{,}5\right)\sin 2x dx.$

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-5x^2\right)\sin x dx.$

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{3}\left(3x-x^2\right)\sin 2x dx.$

Задача 2.
Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}.$

3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx.$

4. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{x^2+4}.$

5. $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{2\cos x+3\sin x}{\left(2\sin x-3\cos x\right)^3}dx.$

7. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

8. $\int\limits_{1}^{4}\frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx.$

9. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}.$

10. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

11. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

12. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}dx.$

13. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx.$

14. $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx.$

15. $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

16. $\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$

17. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

18. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$

19. $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

20. $\int\limits_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

Вопросы:

1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.
6. Формула Ньютона – Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Тема 16. Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление дуги плоской кривой. Вычисление объема тела. Площадь поверхности вращения. Численное интегрирование.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Физические и геометрические приложения определенного интеграла.

Численное интегрирование.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

1. Моменты и центры масс плоских кривых. Если дуга кривой задана уравнением *y=f(x), a≤x≤b*, и имеет плотность [1]) $\rho = \rho(x)$, то статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей *Ox* и *Oy* равны

$$M_x = \int\limits_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

$$M_y = \int\limits_a^b \rho(x) x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

моменты инерции I_X и I_y относительно тех же осей *Ox* и *Oy* вычисляются по формулам

$$I_x = \int\limits_a^b \rho(x) f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

$$I_y = \int\limits_a^b \rho(x) x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

а координаты центра масс $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — по формулам

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(f'(x))^2dx},$$

$$\bar{y} = \frac{M_y}{l} = \frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2dx},$$

где l— масса дуги, т. е.

$$l = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2dx}.$$

Пример. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей *Ox* и *Oy* дуги цепной линии $y=chx$ при $0\le x\le 1$.

[1]) Всюду в задачах, где плотность не указана, предполагается, что кривая однородна и ρ =1.

Имеем: $y' = shx, \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+sh^2x} = chx.$ Следовательно,

$$M_x = \int_0^1 ch^2xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+ch2x)dx = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}sh2x)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2+sh2),$$

$$M_y = \int_0^1 chxdx = \int_0^1 xd(shx) = xshx)\Big|_0^1 - \int_0^1 shxdx = sh1 - chx\Big|_0^1 = sh1 - ch1 + 1,$$

$$I_x = \int_0^1 ch^3xdx = \int_0^1 (1+sh^2x)chxdx = (shx + \frac{sh^3x}{3})\Big|_0^1 = sh1 + \frac{1}{3}sh^31,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2chxdx = \int_0^1 x^2d(shx) = x^2shx\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xshxdx = sh1 - 2\int_0^1 xd(chx) =$$

$$= sh1 - 2(xchx\Big|_0^1 - \int_0^1 chxdx) = sh1 - 2ch1 + 2sh1 + 3sh1 - 2ch1.$$

Теорема Гульдена*. Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.*

Пример. Найти координаты центра масс полуокружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Вследствие симметрии $\bar{x} = 0$. При вращении полуокружности вокруг оси *Ox* получается сфера, площадь поверхности которой равна $4\pi a^2$, а длина полуокружности равна па. По теореме Гульдена имеем $4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi\bar{y}.$ Отсюда $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$, т.е. центр масс *C* имеет координаты $C(0, \frac{2a}{\pi})$.

2. Физические задачи. Некоторые применения определенного интеграла при решении физических задач иллюстрируются ниже в примере и задачах.

Пример. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Так как путь, пройденный телом со скоростью $\upsilon(t)$ за отрезок времени $[t_1,t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dy,$$

то имеем:

$$S = \int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 = 150\,(\text{м}).$$

Задачи:

Задача 1. Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций:

1. $y = 32 - x^2, \quad y = -4x.$
2. $y = 3\sqrt{x}, \quad y = 3/x, \quad x = 4.$
3. $x = 5 - y^2, \quad x = -4y.$
4. $y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 4.$
5. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$
6. $y = \sqrt{x}, \quad y = 1/x, \quad x = 16.$
7. $x = 27 - y^2, \quad x = -6y.$
8. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad (x \leq 0).$
9. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3/2.$
10. $y = 2/x, \quad y = 5e^x, \quad y = 2, \quad y = 5.$

Задача 2. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}.$
2. $y = \ln\cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$
3. $y = e^x, \quad \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}.$
4. $y = \ln\sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
5. $y = 2\sqrt{x}, \quad 1/3 \leq x \leq 1/8.$
6. $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
7. $y = x^2/2, \quad 0 \leq x \leq 1.$
8. $y = 1 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
9. $y = 1 - \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 3.$
10. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$

Задача 3. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
2. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$
3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$
4. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$

Задача 4. Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

1. $z = 4x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$
2. $z = 9x^2 + 4y^2, \quad z = 6.$
3. $z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$
4. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$
5. $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$
6. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - 3z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$
7. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 2z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$

Задача 5. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX областей, ограниченных графиками заданных функций.

1. $y=-x^2+1, \quad y=0.$ 2. $y=\sin(\pi x/2), \quad y=x.$
3. $y=x^2, \quad y=\sqrt{x}.$ 4. $y=x^2, \quad y=2x.$
5. $y=\cos x, \quad y=\sin x, \quad x=0 \quad (0\le x\le \pi/4).$
6. $y=\sin^2 x, \quad y=0, \quad x=\pi/2 \quad (0\le x\le \pi/2).$
7. $y=e^x, \quad y=1, \quad x=1.$
8. $y=\ln x, \quad y=0, \quad x=e.$
9. $y=\dfrac{2}{x}, \quad y=1, \quad x=1.$
10. $y=\cos^2 x, \quad y=0 \quad (-\pi/2\le x\le \pi/2).$

Вопросы.
1. Запишите известные вам формулы вычисления площадей плоских фигур.
2. Как вычисляется площадь плоской фигуры при помощи определенного интеграла?
3. Что такое криволинейная трапеция?
4. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, заданной параметрически?
5. Что такое криволинейный сектор? Как вычислить площадь криволинейного сектора?
6. Как вычислить длину дуги кривой?
7. Как вычислить объем тела при помощи определенного интеграла?
8. Как найти площадь поверхности вращения?
9. Какие физические (механические) приложения определенного интеграла вы знаете?

Раздел 6. Математический анализ. Функции нескольких переменных

Тема 17. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование.
Частные производные высших порядков.
Дифференцируемость и полный дифференциал функции.
Касательная и нормаль к поверхности.
Производная по направлению. Градиент.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x. Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad f'_x(x,y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t),\ y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t,\ s),\ y = y(t,\ s)$, то:

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds.$$

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y):

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,...,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{x^2} = \left(f'_x\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^3} = \left(f''_{x^2}\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^2 y} = \left(f''_{x^2}\right)'_y, \ldots$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}dx^k dy^{m-k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f,$$

где $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ - оператор дифференцирования.

Задачи:

Задача 1.
Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

1. $z = e^{xy}$. 2. $z = x\ln(x/y)$.

3. $z = \sin(xy)$. 4. $z = e^x \cos y$.

5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. 6. $z = \ln(x^2 + y)$.

7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$. 8. $z = \ln \sqrt[3]{xy}$.

9. $z = x\cos y + y\sin x$. 10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$.

Задача 2.
Найти производные функции z=z(u,v):

z'_x и z'_y, $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

1. $z = u^2 + v^2$, $u = x + y$, $v = x - y$.
2. $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = x/y$.
3. $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \cos y$.
4. $z = u^2 + 2v^3$, $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v)$, $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.
6. $z = \ln(u - v^2)$, $u = x^2 + y^2$, $v = y$.
7. $z = u^3 + v^2$, $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg}(y/x)$.
8. $z = \sqrt{uv}$, $u = \ln(x^2 + y^2)$, $v = xy^2$.
9. $z = e^{uv}$, $u = \ln x$, $v = \ln y$.
10. $z = \ln(u/v)$, $u = \sin(x/y)$, $v = \sqrt{x/y}$.

Задача 3.
Найти производные функций, заданных неявно:

1. $y^x = x^y$. 2. $y = 1 + y^x$.

3. $y = x + \ln y$. 4. $x + y = e^{x-y}$.

5. $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$. 6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

7. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$. 8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.

9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. 10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Вопросы:
1.Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.
2.Что такое полное приращение функции?
3.Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?
4.Поясните геометрический смысл частной производной.
5.Что такое дифференциал функции нескольких переменных?
6.Что такое линеаризация функций?
7.Пояните правила дифференцирования сложных и неявных функций.
8. Как найти частные производные второго, третьего,…, n-го порядка?
9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Тема 18. Исследование функции нескольких переменных.
Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.

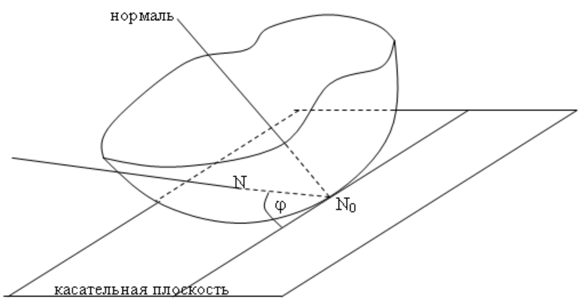
Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:
Экстремум функции нескольких переменных.
Наибольшее и наименьшее значения функции.
Условный экстремум.
Метод множителей Лагранжа.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_{0,}(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1};$$

Градиент функции вычисляется по формуле:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример. Найти градиент функции

$$u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$$

в точке M (2,1,1).

1. Находим частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$f'_x(2,1,1) = 4, \quad f'_y(2,1,1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_z(2,1,1) = -\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)} = \left\{f'_x(2,1,1),\ f'_y(2,1,1),\ f'_z(2,1,1)\right\} = \left\{4,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\right\}.$$

Ответ. $\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}$.

Производная по направлению, определяемому вектором:

$$\bar{l} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}$$

определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial l} = grad\ f \cdot \bar{l}.$$

Задачи:

Задача 1.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M.

1. $z = x^2 + y^2, \quad M(1,-2,5).$
2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, \quad M(4,3,4).$
3. $z = \sin x \cos y, \quad M(\pi/4, \pi/4, 1/2).$
4. $z = e^{x\cos y}, \quad M(1, \pi, 1/e).$
5. $z = y \operatorname{tg} x, \quad M(\pi/4, 1, 1).$
6. $z = \operatorname{arctg}(x/y), \quad M(1, 1, \pi/4).$
7. $x(y+z)(z-xy) = 8, \quad M(2,1,3).$
8. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M(2,2,1).$
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad M(2,2,2\sqrt{2}).$
10. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M(2,2,3).$

Задача 2.

Найти градиент функции в точке.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \quad M(2,1,1).$
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad M(1,5,-2).$
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad M(\pi/2, 3\pi/2, 3).$
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1,1,0).$
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1,1,0).$
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad M(1,3,2).$
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1), \quad M(1,1,2).$
8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1,-1,2).$
9. $u = xy - x/z, \quad M(-4,3,-1).$
10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1,-3,4).$

Задача 3.

Найти производную функции u в точке A по направлению к точке B.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $A(2,1,1)$, $B(0,2,0)$.
2. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$, $A(1,5,-2)$, $B(1,7,-4)$.
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 3\right)$.
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(1,2,-1)$.
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(3,3,-1)$.
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$, $A(1,3,2)$, $B(0,5,0)$.
7. $u = x^2y^2z - \ln(z - 1)$, $A(1,1,2)$, $B(6,-5,2\sqrt{5} + 2)$.
8. $u = \ln(x^2 + y^2)$, $A(1,-1,2)$, $B(2,-2,3)$.
9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2})$, $A(1,-3,4)$, $B(-1,-4,5)$.
10. $u = xy - \frac{x}{z}$, $A(-4,3,-1)$, $B(1,4,-2)$.

Вопросы:
1.Что такое касательная плоскость к поверхности?
2.Что такое нормаль?
3.Как составить уравнение касательной плоскости и нормали?
4. Дайте определение градиента функции.
5. Дайте определение производной по направлению для функции нескольких переменных. Запишите соответствующие формулы.

Тема 19. Двойной интеграл.
Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

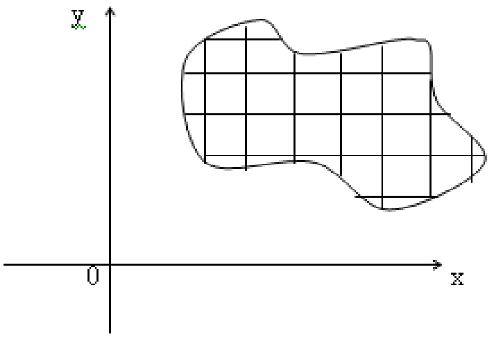
Содержание:
Понятие двойного интеграла.
Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
Основные свойства двойного интеграла.
Вычисление в декартовых координатах.
Вычисление в полярных координатах.
Приложения двойного интеграла.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой f(x,y)=0.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ. С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)dxdy .$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным х и у.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum\sum_{\Delta} f(x, y)\Delta y\Delta x .$$

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

1. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ существует.

2. Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ существует.

<u>Свойства двойного интеграла.</u>

1) $\iint_{\Delta}[f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)]dydx = \iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx + \iint_{\Delta} f_2(x, y)dydx - \iint_{\Delta} f_3(x, y)dydx$.

2) $\iint_{\Delta} kf(x, y)dydx = k\iint_{\Delta} f(x, y)dydx$.

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \iint_{\Delta_1} f(x, y)dydx + \iint_{\Delta_2} f(x, y)dydx .$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = f(x_0, y_0)\cdot S$$

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint_{\Delta} f(x, y)dydx \ge 0$.

6) Если $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx \le \iint_{\Delta} f_2(x, y)dydx$.

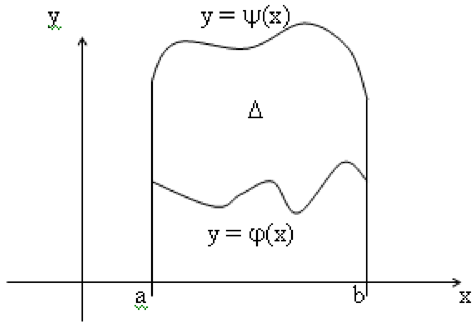
7) $\left|\iint_{\Delta} f(x, y)dydx\right| \le \iint_{\Delta} |f(x, y)|dydx$.

<u>Вычисление двойного интеграла.</u>

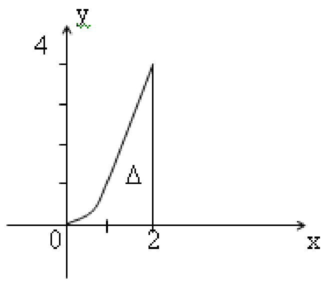
Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и*

φ ≤ ψ, тогда

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$



Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.



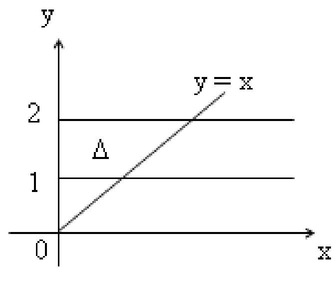
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2}(x-y)dy = \int\limits_0^2 (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int\limits_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^x (x^2+y^2)dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_0^y dy = \int\limits_1^2 \frac{4}{3}y^3 dy = \frac{4}{12}y^4\Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy = \int_0^2 dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx = \int_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6-y^5+y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

Задачи:

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{2^x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_1^{2/x} f(x,y)\,dy.$

2. $\int\limits_{1/4}^1 dy \int\limits_{1/y}^4 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2}^4 f(x,y)\,dy.$

3. $\int\limits_{-6}^{-3} dy \int\limits_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-3}^0 dy \int\limits_0^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x,y)\,dy.$

4. $\int\limits_0^{16} dy \int\limits_{-y/4}^0 f(x,y)\,dx + \int\limits_{16}^{32} dy \int\limits_{-\sqrt{32-y}}^0 f(x,y)\,dx.$

5. $\int\limits_0^{\sqrt{6}} dx \int\limits_0^{\sqrt[4]{6x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{12-x^2}} f(x,y)\,dy.$

6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^2}^0 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x,y)\,dx.$

Задача 2. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями:

1. $\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy, \qquad y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}.$

2. $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy, \qquad y=2-x^2,\ \ y=2x-1.$

3. $\iint\limits_D (y\ln x)\,dx\,dy, \qquad y=\frac{1}{x},\ \ y=\sqrt{x},\ \ x=2.$

4. $\iint\limits_D (\cos 2x+\sin y)\,dx\,dy, \qquad y=\frac{\pi}{4}-x,\ \ y=0,\ \ x=0.$

5. $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad y=x,\ \ y=\frac{\pi}{2},\ \ x=0.$

6. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \qquad y=\frac{1}{x},\ \ y=x,\ \ x=2.$

7. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy, \qquad y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}.$

Вопросы:

1.Дайте определение двойного интеграла.

2. Поясните геометрический смысл двойного интеграла.

3.Перечислите свойства двойного интеграла.

4.Что такое повторный интеграл?

5.Опишите процесс вычисления двойного интеграла в декартовых координатах.

Раздел 7. Математический анализ. Дифференциальные уравнения.

Тема 21. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, их геометрический смысл.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения.

Линейные уравнения.

Уравнения в полных дифференциалах.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.** Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\cos y dy = -2xdx$$

$$\int y\cos y dy = -2\int xdx$$

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$27y = (x + C)^3$ - общий интеграл

$$y = \frac{1}{27}(x+C)^3$$ - общее решение

<u>Линейные уравнения.</u>

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x)\neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

<u>Метод Бернулли.</u>

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1\cdot 2x^2$; $y = 2\cdot x^2$; $y = 2x\cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$. Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Задачи:

Задача 1. Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений:

1. $y\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$ 2. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$

3. $y'\,y = -2x \sec y.$ 4. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$

5. $y\,(1+x^2)\,y' + x\,(1+y^2) = 0.$ 6. $e^x\,dx - (1+e^x)\,y\,dy = 0.$

7. $y' = 2e^x \cos x.$ 8. $y' = y \ln y.$

9. $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}.$ 10. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Задача 2. Найти общее решений дифференциального уравнения:

1. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}.$ 2. $y' = \dfrac{y}{x} - 1.$ 3. $x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}.$

4. $x \cos \dfrac{y}{x}\, dy + \left(x - y \cos \dfrac{y}{x}\right) dx = 0.$ 5. $(x^2 + 2xy)\,dx + xy\,dy = 0.$

6. $xy' \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = x + y \ln\left(\dfrac{y}{x}\right).$ 7. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$

8. $(4y^2 + x^2)\,y' = xy.$ 9. $xy' \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + x = y \sin\left(\dfrac{y}{x}\right).$

10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'.$

Задача 3. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $xy' + y - e^x = 0,$ $y(1) = 0.$
2. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x},$ $y(0) = 0.$
3. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x,$ $y(0) = 0.$
4. $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x,$ $y(0) = 0.$
5. $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x \ln x,$ $y(e) = \dfrac{e^2}{2}.$
6. $y' \sin x - y \cos x = 1,$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$
7. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x,$ $y(0) = 0.$

Вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Что называют общим (частным) решением дифференциального уравнения?
4. В чем сущность задачи Коши?
5. Приведите пример дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6. Опишите ход решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение называют однородным?
8. Какое дифференциальное уравнение называют линейным?
9. Опишите метод Бернулли решения линейных дифференциальных уравнений.

Тема 22 Дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.

Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) высших порядков.

Интегрирование ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$
$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0;\ y_0 = 1;$ $y_0' = -1;\quad y_0'' = 0.$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$
$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$
$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3;\quad -1 = \frac{1}{4} + C_2;\quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$
$$C_1 = -\frac{1}{2};\quad C_2 = -\frac{5}{4};\quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z;\quad y^{(k+1)} = z';\quad ...\quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y'';\quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x};\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x};\qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x};\qquad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x};$$
$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1;\qquad z = C_1x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right)dx = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0.*

<u>Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.</u>

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$

Замена переменной: $p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p;$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0;$$

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}.$

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int\frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C;$

2) $p = 0; \qquad y' = 0; \qquad y = C;$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'',..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где p_0, p_1, ...,p_n – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение "близким" к нему линейным.

Задачи.

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' = 1 - y'^2$. 2. $xy'' + y' = 0$.

3. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$. 4. $x^2y'' + xy' = 1$.

5. $xy''' + y'' = 1 + x$. 6. $y'''^2 + y''^2 = 1$.

7. $y'(1 + y'^2) = y''$. 8. $y'' = -x/y'$.

9. $x\,y'' + y' + x = 0$. 10. $y'''^2 = 4y''$.

Задача 2. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $y''\,y^3 = 1$, $y\,(1/2) = 1$, $y'\,(1/2) = 1$.
2. $y\,y'' + y'^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
4. $y^2 + y'^2 - 2y\,y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
5. $3y'\,y'' = y + y'^3 + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

Задача 3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y = \cos x$. 2. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

3. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$. 4. $y'' + y = 3\sin x$.

5. $y'' + y = 4x\cos x$. 6. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.

7. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$. 8. $y'' - 2y = 2x\,e^x(\cos x - \sin x)$.

9. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$. 10. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.

Вопросы:

1. Какие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка Вы знаете?
2. Какую замену переменной необходимо провести, если в уравнении явно не содержится искомая функция; независимая переменная?
3. Какое уравнение называют линейным с постоянными коэффициентами?
4. Как строится общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Как найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

Тема 24. Системы дифференциальных уравнений.

Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Определение системы дифференциальных уравнений.

Интегрирование нормальных систем.

Системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где х- независимая переменная, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

<u>Теорема.</u> (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\ f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),\ \dots\ f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, ..., y_n$*, то для любой точки* $(x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям* $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему обращают ее в тождество.

<u>Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.</u>

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases}$$

Решения системы обладают следующими свойствами:

1) Если *y, z, u* – решения системы, то *Cy, Cz, Cu* , где *C = const* – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$, $u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx};\quad z = \beta e^{kx};\quad u = \gamma e^{kx},\quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$
$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы:

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$
$$x'' - 7x' + 6x = 0$$
$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$
$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$
$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$
$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A = C_1;\quad \frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$.

Задачи.

Задача 1. Найти общее решений системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + 2\sin t - 3\cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -6x + 4y + 7\sin t - 20\cos t \end{aligned}\right\}.$$

Задача 2. Найти решения систем, удовлетворяющие заданным условиям:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x' &= y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= x + z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x(0) &= 1; \\ y(0) &= 2; \\ z(0) &= 3. \end{aligned}$$

$$2)\ \left.\begin{aligned} x' &= 6x - 72y + 44z \\ y' &= -4x + 40y - 22z \\ z' &= -6x + 57y - 31z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x(0) &= 9; \\ y(0) &= 5; \\ z(0) &= 7. \end{aligned}$$

Вопросы:

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Что называют общим решением системы дифференциальных уравнений?
4. Какая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется линейной однородной?
5. Как составляется характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений?
6. Какими свойствами обладают решения системы дифференциальных уравнений?

Раздел 8. Математический анализ. Ряды.

Тема 25. Числовые ряды.

Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Понятие числового ряда.
Ряд геометрической прогрессии.
Признаки сходимости числовых рядов.
Гармонический ряд.
Знакочередующиеся ряды.
Признак Лейбница.
Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

при этом числа $u_1, u_2, \dots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \dots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

<u>Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.</u>

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \le v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если* $u_n > 0, \quad v_n > 0$ *и существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, *где h – число, отличное от нуля, то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ *с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, *то при ρ < 1 ряд сходится, а при ρ > 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … =* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$$

где $u_n>0,\quad n=1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1>u_2>u_3>\ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n\to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Задачи:

Задача 1. Найти сумму ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+5n+6}$.
2. $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\frac{3}{n^2-5n+6}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{30}{25n^2+5n-6}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2+3n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{90}{4n^2+8n-5}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16}{16n^2-8n-3}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+1)(n+2)}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

Задача 2. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$.   2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2+3}$.   4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3-2}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}$.   6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$.   8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}+1}}$.   10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Задача 3. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$.   2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$.   4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}$.   6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}$.   8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.   10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Задача 4. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}$.   2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5+n^2+1}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+3n^2+2}}$.   4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2-1}{3n^3}$.   6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.   8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{3^n}$.   10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}$.

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называют знакопостоянным?
3. Что такое сумма ряда?
4. Какой ряд называют сходящимся?
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Сформулируйте известные Вам достаточные признаки сходимости рядов.
7. Какой ряд называется знакочередующимся (знакопеременным)?
8. Сформулируйте признак Лейбница.

9. Какой ряд называется абсолютно сходящимся (условно сходящимся)?
10. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.
11. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Тема 26. Степенные ряды. Функциональные ряды.

Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость. Степенные ряды. Сходимость степенного ряда. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:

Понятие функционального ряда.
Область сходимости.
Сходимость степенных рядов.
Свойства степенных рядов.
Ряды Тейлора и Маклорена.
Некоторые приложения степенных рядов.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Если членами ряда будут не числа, а функции от *x*, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной *x* сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной *x*, при которых ряд сходится. Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 и любой точки *x* из рассматриваемого отрезка существует номер N = N(ε, x), такой, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при n>N.

При выбранном значении ε>0 каждой точке отрезка [a,b] соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка [a,b], будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка [a,b], т.е. будет общим для всех точек.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 существует номер N = N(ε), такой, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при n>N для всех точек отрезка [a,b].

Пример. Рассмотрим последовательность $\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin nx}{n}, \ldots$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x)=0$, т.к.

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Частными (частичными) суммами функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,\ldots$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

<u>Теорема.</u> (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

<u>Теорема.</u> (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

т.е. имеет место неравенство:

$$\left|u_n(x)\right| \le M_n .$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $\left|\cos nx\right| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах (-∝, -1) ∪ (1, ∝) расходится.

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x| .$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и –1.

При x = -1: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$ ряд сходится по признаку Лейбница. При x = 1: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ ряд расходится (гармонический ряд).

<u>Теоремы Абеля.</u>

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при $x = x_1$, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$$

Пример. Найти область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

Находим радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n-1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} |n| = |\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Теорема. Если степенной ряд $\sum a_nx^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

Задачи:

Задача 1. Найти область сходимости функциональных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)^{x+3}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2-6x+10)^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^{x^2+4x}+3}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(x^2-5x+9)^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{x^2-2}+1}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2(x^2+3)^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^x}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(x^2-4x+8)^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^{3+3x-x^2}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(x^2-2x+6)^n}$.

Задача 2. Найти область сходимости степенных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x+3)^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2 3^n}(x+2)^n$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^n}(x+4)^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}(x+2)^{2n+1}$.

Задача 3. Найти суммы функциональных рядов и указать области их сходимости к этим суммам:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-16x^4)^n}{n+1}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{n-1}}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{2n}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n(n+1)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)x^n}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n+1}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Вопросы:
1.Дайте определение функционального ряда.
2.Что такое область сходимости функционального ряда?
3.Какой ряд называют равномерно сходящимся на отрезке?
4. Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.
5. Сформулируйте признак равномерной сходимости Вейерштрасса.
6. Что такое степенной ряд?
7.Что такое радиус (интервал) сходимости ряда?

Тема 27. Элементы дифференциальной геометрии.
Векторная функция. Кривая линия на плоскости. Кривая в пространстве и сопровождающий трёхгранник Френе. Поверхность и её свойства. Кривая на поверхности.

Цель: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Содержание:
Векторная функция.
Кривая линия на плоскости.
Кривая в пространстве и сопровождающий трёхгранник Френе.
Поверхность и её свойства. Кривая на поверхности.

Формируемые компетенции: ОПК-2

Актуальность темы обусловлена освоением конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности.

Теоретическая часть
Студенту предлагается составить конспект указанной темы по следующему плану:
1.Векторная функция. Годограф векторной функции.
2.Производная векторной функции. Интеграл от векторной функции.
3.Кривая линия на плоскости. .Параметрическое и неявное уравнения плоской кривой.
4. Кривая в пространстве и сопровождающий трёхгранник Френе.
5.Поверхность и ее свойства.
6.Кривая на поверхности. Первая квадратичная форма. Вторая квадратичная форма.

Перечень основной литературы

Гусак, А. А. Основы высшей математики [Электронный ресурс] : пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Электрон. текстовые данные. — Минск : ТетраСистемс, 2012. — 205 с. — 978-985-536-274-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28166.html

Перечень дополнительной литературы

Березина, Н. А. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Научная книга, 2019. — 158 с. — 978-5-9758-1720-4. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/80978.html.