

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухов Татьяна Александровна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
федерального университета

Дата подписания: 12.09.2023 16:45:21

Уникальный программный ключ:

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ И
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»
для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и
электротехника Передача и распределение электрической энергии в системах
электроснабжения

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» рассмотрены и утверждены на заседании кафедры физики, электротехники и электроэнергетики (протокол №___ от «___» _____ 2019 г.).

Зав. кафедрой физики, электротехники и электроэнергетики _____ Пермяков А.В.

Содержание

	Стр.
Практическое занятие 1. Граф электрической цепи и некоторые его подграфы	5
Практическое занятие 2. Метод контурных токов	16
Практическое занятие 3. Потенциальная диаграмма	21
Практическое занятие 4. Энергетический баланс в электрической цепи	25
Практическое занятие 5. Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Формы представления	30
Практическое занятие 6. Расчет цепей переменного тока при последовательном соединении элементов. Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом	45
Практическое занятие 7. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка	58
Практическое занятие 8. Моделирование задач электроэнергетики методами теории массового обслуживания	62
Практическое занятие 9. Использование метода линейного программирования для решения задач электроэнергетики	71

1. ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов.

Целью освоения дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» является формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и вариативных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ темы	Наименование тем практических занятий	Объем часов	Форма проведения
2 семестр			
1.	Граф электрической цепи и некоторые его подграфы	1,5	
3.	Метод контурных токов	1,5	
5.	Потенциальная диаграмма	1,5	
7.	Энергетический баланс в электрической цепи	1,5	
8.	Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Формы представления.	1,5	
9.	Расчет цепей переменного тока при последовательном соединении элементов. Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом	1,5	
10.	Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических	1,5	

	цепях второго порядка		
13.	Моделирование задач электроэнергетики методами теории массового обслуживания	1,5	
15.	Использование метода линейного программирования для решения задач электроэнергетики	1,5	
	Итого	13,5	

3.ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1. Граф электрической цепи и некоторые его подграфы.

Цель: Изучить основы теории графов и ее применение к электрическим цепям. Получить навыки построения графов электрической цепи.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

При разработке методов анализа электрических цепей можно определить некоторые их свойства, рассматривая только структуры цепи. Теория графов является для этого удобным средством.

Теоретическая часть:

Общие сведения

В теории электрических цепей используются понятия и методы топологии – математической дисциплины, изучающей наиболее общие свойства геометрических фигур. Именно конфигурация цепи (порядок соединения между

собой устройств цепи, ее геометрический образ) содержит полезную информацию о некоторых общих свойствах цепи безотносительно к содержанию ее устройств.

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называют графом электрической цепи. Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называют ветвью графа. Граничные (концевые) точки ветви графа называют узлами графа. Узел – место соединения трех и более ветвей.

Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называют ориентированным.

Ветвью называется участок цепи, обтекаемый одним и тем же током.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь. Поэтому целесообразно каждую ветвь схемы электрической цепи изобразить отрезком линии. Если каждую ветвь схем на рисунке 1.1 заменить отрезком линии, получается геометрическая фигура, показанная на рисунке 1.2.

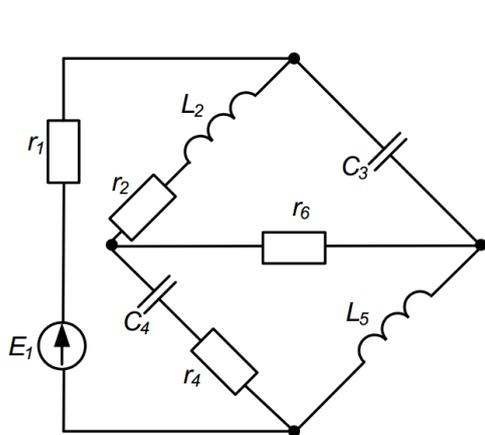


Рисунок 1.1 – Схема электрической цепи

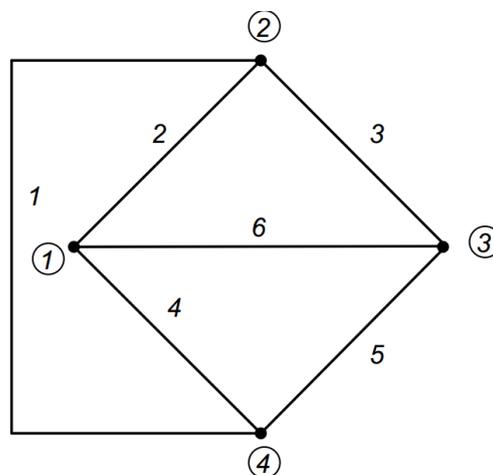


Рисунок 1.2 – Граф электрической цепи

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называется графом электрической цепи. При этом следует помнить, что ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь соединенных различным образом.

Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называется ветвью графа. Граничные точки ветви графа называют узлами графа. Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называется ориентированным.

Подграфом графа называется часть графа, т.е. это может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в графе.

В теории электрических цепей важное значение имеют следующие подграфы:

Путь – это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются на этом пути только один раз. Например, в схеме на рисунке 1.3 ветви 2-6-5; 4-5; 3-6-4; 1 образуют пути между одной и той же парой узлов 1 и 3. Таким образом, путь – это совокупность ветвей, проходимых непрерывно.

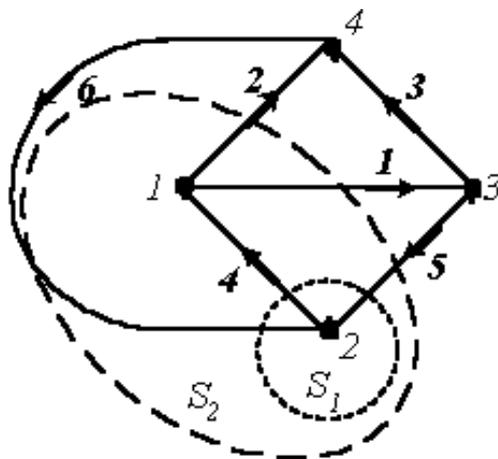


Рисунок 1.3 – Граф электрической цепи

Контур – это замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, для графа (рисунок 1.3) можно определить контуры, образованные ветвями 2-4-6; 3-5-6; 2-3-5-4. Если между любой парой узлов графа существует связь, то граф называют связным.

Дерево – это связный подграф, содержащий все узлы графа, но ни одного контура. Примерами деревьев для графа (рисунок 1.3) могут служить фигуры на рисунке 1.4:

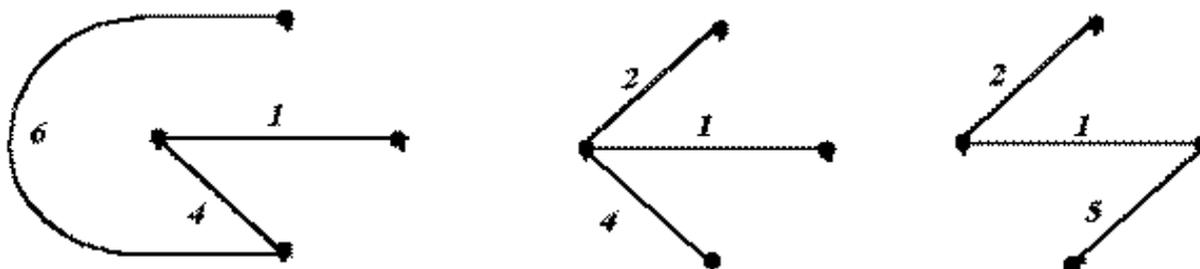


Рисунок 1.4 – Деревья графа

Ветви связи (дополнения дерева) – это ветви графа, дополняющие дерево до исходного графа.

Если граф содержит m узлов и n ветвей, то число ветвей любого дерева, а числа ветвей связи графа $c = n - (m - 1) = n - m + 1$.

Сечение графа – множество ветвей, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, пересекающей соответствующие ветви. Примерами таких поверхностей являются S_1 и S_2 для графа (рисунок 1.3). При этом получаем соответственно сечения, образованные ветвями 6-4-5 и 6-2-1-5.

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и сечений:

- главный контур – контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи;
- главное сечение – сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева.

Топологические матрицы

Задать вычислительной машине топологию цепи рисунком затруднительно, так как не существует эффективных программ распознавания образа. Поэтому топологию цепи вводят в ЭВМ в виде матриц, которые называют топологическими матрицами. Выделяют три таких матрицы: узловую матрицу, контурную матрицу и матрицу сечений.

1. Узловая матрица (матрица соединений) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы.

Для графа на рисунке 1.3 имеем число узлов $m=4$ и число ветвей $n=6$. Тогда запишем матрицу A_H , принимая, что элемент матрицы a_{ij} (i – номер строки; j – номер столбца) равен $(+1)$, если ветвь j соединена с узлом i и ориентирована от него, (-1) , если ориентирована к нему, и 0 , если ветвь j не соединена с узлом i .

Сориентировав ветви графа на рисунке 1.3, получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Данная матрица A_H записана для всех четырех узлов и называется неопределенной. Сумма элементов столбцов матрицы A_H всегда равна нулю, так как каждый столбец содержит один элемент $+1$ и один элемент -1 , остальные нули.

Обычно при расчетах один (любой) узел заземляют. Тогда приходим к узловой матрице A (редуцированной матрице), которая может быть получена из матрицы A_H путем вычеркивания любой ее строки.

Например, при вычеркивании строки «4» получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Число строк матрицы A равно числу независимых уравнений для узлов $\partial = m - 1$, т.е. числу уравнений, записываемых для электрической схемы по первому закону Кирхгофа. Итак, введя понятие узловой матрицы A , перейдем к первому закону Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа

Обычно первый закон Кирхгофа записывается для узлов схемы, но, строго говоря, он справедлив не только для узлов, но и для любой замкнутой поверхности, т.е. справедливо соотношение

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0 \quad (1.1)$$

где $\bar{\delta}$ - вектор плотности тока; $d\bar{S}$ - нормаль к участку dS замкнутой поверхности S .

Первый закон Кирхгофа справедлив и для любого сечения.

В частности, для сечения S_2 графа на рисунке 1.3, считая, что нумерация и направления токов в ветвях соответствуют нумерации и выбранной ориентации ветвей графа, можно записать

$$I_1 + I_2 - I_5 - I_6 = 0.$$

Поскольку в частном случае ветви сечения сходятся в узле, то первый закон Кирхгофа справедлив и для него. Пока будем применять первый закон Кирхгофа для узлов, что математически можно записать, как:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1.2)$$

т.е. алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узел, равна нулю.

При этом при расчетах уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m-1)$ узлов, так как при записи уравнений для всех m узлов одно (любое) из них будет линейно зависимым от других, т.е. не дает дополнительной информации.

Введем столбцовую матрицу токов ветвей

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Тогда первый закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид:

$$AI=O \quad (1.3)$$

– где O - нулевая матрица-столбец.

Как видим, в качестве узловой взята матрица A , а не A_H , т.к. с учетом вышесказанного уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m-1)$ узлов.

В качестве примера запишем для схемы на рисунке 1.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда для первого узла получаем

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = I_1 + I_2 - I_4 = 0,$$

что и должно иметь место.

Контурная матрица (матрица контуров) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки контурной матрицы B соответствуют контурам, а столбцы – ветвям схемы.

Элемент b_{ij} матрицы B равен 1 , если ветвь j входит в контур i и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура, -1 , если не совпадает с направлением обхода контура, и 0 , если ветвь j не входит в контур i .

Матрицу B , записанную для главных контуров, называют матрицей главных контуров. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура. Выделив в нашем примере (см. рисунок 1.5) дерево, образуемое ветвями 2-1-4, запишем коэффициенты для матрицы B .

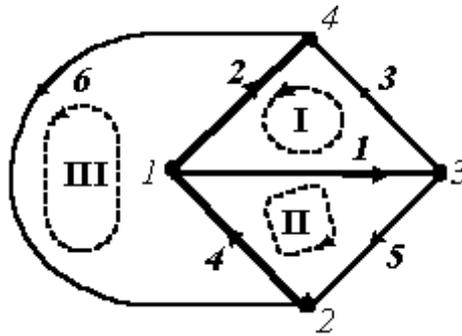


Рисунок 1.5 – Граф электрической цепи

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перейдем теперь ко второму закону Кирхгофа.

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимается разность потенциалов между крайними точками этого участка, т.е.

$$U_{ke} = \varphi_k - \varphi_e = -(\varphi_e - \varphi_k) = -U_{ek} \quad (1.4)$$

Просуммируем напряжения на ветвях некоторого контура:

$$\begin{aligned} &U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \\ &+ \\ &U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 \\ &+ \\ &\dots\dots\dots \\ &+ \\ &U_{kI} = \varphi_k - \varphi_I \end{aligned}$$

$$= 0$$

Поскольку при обходе контура потенциал каждой i -ой точки встречается два раза, причем один раз с «+», а второй – с «-», то в целом сумма равна нулю.

Таким образом, второй закон Кирхгофа математически записывается, как:

$$\sum_k U_k = 0, \quad (1.5)$$

и имеет следующую формулировку: алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей (элементов) контура равна нулю. При этом при расчете цепей с использованием законов Кирхгофа записывается $s = (n - m + 1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа, т.е. уравнений, записываемых для контуров, каждый из которых отличается от других хотя бы одной ветвью. Значение топологического понятия «дерева»: дерево позволяет образовать независимые контуры и сечения и, следовательно, формировать независимые уравнения по законам Кирхгофа. Таким образом, с учетом $(m-1)$ уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, получаем систему из $(m - 1) + (n - m + 1) = n$ уравнений, что равно числу ветвей схемы и, следовательно, токи в них находятся однозначно.

Введем столбцовую матрицу напряжений ветвей

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Тогда второй закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид

$$BU = 0. \quad (1.6)$$

В качестве примера для схемы рисунка 1.5 имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = [0],$$

откуда, например, для первого контура получаем

$$1 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 + 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 + 0 \cdot U_5 + 0 \cdot U_6 = U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

что и должно иметь место.

Если ввести столбцовую матрицу узловых потенциалов

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{m-1} \end{bmatrix}$$

причем потенциал последнего узла $\varphi_m = 0$, то матрица напряжений ветвей и узловых потенциалов связаны соотношением

$$U = A^T \varphi \quad (1.7)$$

где A^T - транспонированная узловая матрица.

Для определения матрицы B по известной матрице $A = A_D A_C$, где A_D - подматрица, соответствующая ветвям некоторого дерева, A_C - подматрица, соответствующая ветвям связи, может быть использовано соотношение $B = (-A_C^T A_D^{-1T} I)$.

Матрица сечений – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для сечений. Ее строки соответствуют сечениям, а столбцы – ветвям графа.

Матрица Q , составленная для главных сечений, называется матрицей главных сечений. Число строк матрицы Q равно числу независимых сечений.

Элемент q_{ij} матрицы Q равен 1 , если ветвь входит в i -е сечение и ориентирована согласно направлению сечения (за положительное направление сечения принимают направление ветви дерева, входящей в него), -1 , если

ориентирована противоположно направлению сечения, и 0, если ветвь j не входит в i -е сечение.

В качестве примера составим матрицу Q главных сечений для графа на рисунке 1.5.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

В заключение отметим, что для топологических матриц A , B и Q , составленных для одного и того же графа, выполняются соотношения

$$AB^T = 0; \quad (1.8)$$

$$QB^T = 0, \quad (1.9)$$

которые, в частности, можно использовать для проверки правильности составления этих матриц. Здесь 0 – нулевая матрица порядка ∂ .

Приведенные уравнения позволяют сделать важное заключение: зная одну из топологических матриц, по ее структуре можно восстановить остальные.

Вопросы и задания:

1. Сформулируйте основные топологические понятия для электрических цепей.
2. Что такое узловая матрица?
3. Что такое контурная матрица?
4. Что такое матрица сечений?
5. Токи ветвей некоторой планарной цепи удовлетворяют следующей полной системе независимых уравнений:

$$I_1 + I_5 - I_8 = 0; I_2 + I_6 - I_5 = 0; -I_3 + I_7 - I_6 = 0; -I_4 + I_8 - I_7 = 0.$$

Восстановив граф цепи, составить матрицы главных контуров и сечений, приняв, что ветвям дерева присвоены первые номера.

Ответ:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Составить матрицу главных контуров для графа на рисунке 1.3, приняв, что дерево образовано ветвями 2, 1 и 5.

Ответ:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Решить задачу 5, используя соотношения (1.8) и (1.9).

Практическое занятие 2. Метод контурных токов.

Цель: Изучить основные правила расчета электрических цепей постоянного тока с использованием метода контурных токов.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Метод контурных токов позволяет выполнить расчет любой сложной электрической цепи, при этом, по сравнению с законами Кирхгофа, число уравнений может быть сокращено в два раза.

Теоретическая часть:

Метод контурных токов состоит в том, что в качестве неизвестных в системе уравнений цепи используются так называемые контурные токи. Контурные токи являются фиктивными.

Согласно методу предполагается, что в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток.

Независимыми называются контуры, которые имеют хотя бы одну новую ветвь, не входящую в другие контуры.

Число независимых контуров схемы равно числу уравнений, которые нужно составить по второму закону Кирхгофа:

$$n = N_B - (N_Y - 1) - N_T, \quad (2.1)$$

где N_B – число ветвей схемы; N_Y – число узлов; N_T – число источников тока.

В схеме, представленной на рисунке 2.1, число независимых контуров $n = 3$. Предположение о контурных токах приводит к тому, что число неизвестных, и, соответственно, число уравнений, необходимых для определения этих неизвестных уменьшается по сравнению с полной системой уравнений Кирхгофа и равно числу независимых контуров. Этот метод является фактически записью второго закона Кирхгофа через контурные токи.

Пусть имеем схему, содержащую n независимых контуров. Согласно методу контурных токов в каждом k -м независимом контуре протекает контурный ток I_{kk} . В общем случае система уравнений для расчета контурных токов имеет вид:

$$\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + \dots + I_{nn}R_{1n} &= E_{11}; \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + \dots + I_{nn}R_{2n} &= E_{22}; \\ \hline I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + I_{33}R_{n3} + \dots + I_{nn}R_{nn} &= E_{nn}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

где R_{kk} – полное (собственное) сопротивление k -го контура, равное сумме всех сопротивлений, входящих в этот контур;

R_{ik} – сопротивления смежных контуров;

$E_{kk} = \sum_{k=1}^p E_k$ – алгебраическая сумма ЭДС, входящих в k -ый контур.

Полное (собственное) сопротивление R_{kk} всегда положительное. Если контурные токи в общей (смежной) ветви протекают согласно (сонаправлены), то сопротивления смежных контуров R_{ik} принимается положительным и, если контурные токи направлены встречно, то R_{ik} принимается отрицательным. Со знаком «плюс» берутся ЭДС, направление которых совпадает с контурным током I_{kk} , а со знаком «минус» направление которых не совпадают с I_{kk} .

Контурные токи определяются после решения системы уравнений. Истинный ток (искомый ток) в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этой ветви. Со знаком «плюс» берутся контурные токи, совпадающие с истинным током; со знаком «минус» – несовпадающие с искомым током.

Метод контурных токов целесообразно применять, когда схема содержит много узлов, но мало независимых контуров.

Пример. Используя метод контурных токов определить токи в ветвях электрической цепи

Таблица 2.1 – Данные для расчёта

Сопротивления, Ом						Источники, В, А		
R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	E ₁	E ₂	I _{к2}
130	40	60	80	110	45	12	13	0,3

Уравнения составляют только по II правилу Кирхгофа для, так называемых, фиктивных (контурных) токов, предполагая, что ток одинаковый для всех участков выбранного контура. Направление контурных токов принимается такое же, как направление обхода (рисунок 2.1).

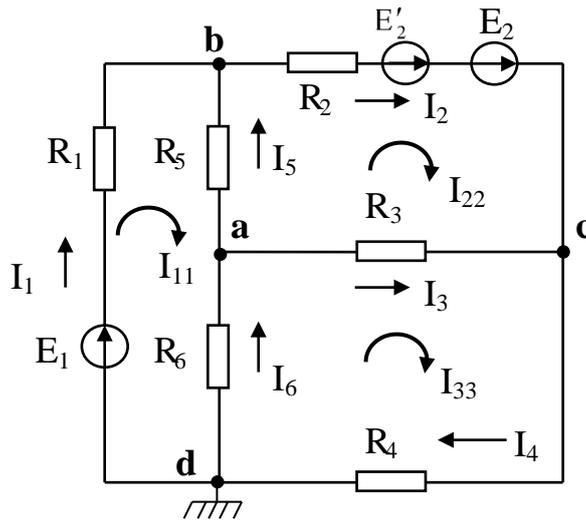


Рисунок 2.1 – Расчётная схема для определения контурных токов

I_{11}, I_{22}, I_{33} – контурные токи

$$\begin{aligned}
 I_{11}(R_1 + R_5 + R_6) - I_{22}R_5 - I_{33}R_6 &= E_1; \\
 I_{22}(R_2 + R_3 + R_5) - I_{11}R_5 - I_{33}R_3 &= E'_2 + E_2; \\
 I_{33}(R_3 + R_4 + R_6) - I_{11}R_6 - I_{22}R_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

После подстановок значений параметров:

$$\begin{cases}
 I_{11}285 - I_{22}110 - I_{33}45 = 12; \\
 I_{22}210 - I_{11}10 - I_{33}60 = 25; \\
 I_{33}185 - I_{11}45 - I_{22}60 = 0.
 \end{cases} \tag{2.4}$$

Решение системы из составленных уравнений позволяет определить величину контурных токов: $I_{11} = 0,147\text{A}$; $I_{22} = 0,227\text{A}$; $I_{33} = 0,109\text{A}$.

Для определения фактических токов в ветвях составим уравнения, учитывая, что истинный ток (искомый ток) в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этой ветви. Со знаком «плюс» берутся контурные токи, совпадающие с истинным током; со знаком «минус» – несовпадающие с искомым током:

$$I_1 = I_{11} = 0,147\text{A};$$

$$I_2 = I_{22} = 0,227\text{A};$$

$$I_3 = I_{33} - I_{22} = 0,109 - 0,227 = -0,118\text{A};$$

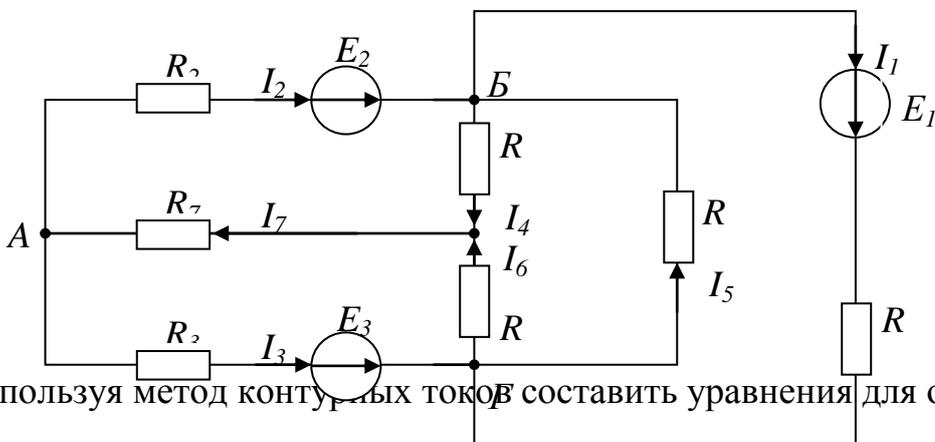
$$I_4 = I_{33} = 0,109\text{A};$$

$$I_5 = I_{22} - I_{11} = 0,227 - 0,147 = 0,080\text{A};$$

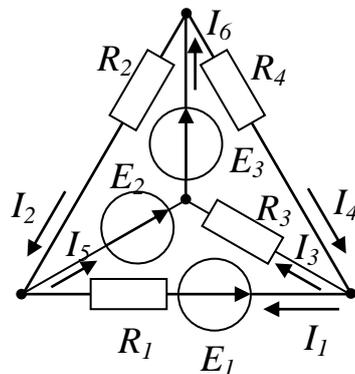
$$I_6 = I_{33} - I_{11} = 0,109 - 0,147 = -0,038\text{A}.$$

Вопросы и задания:

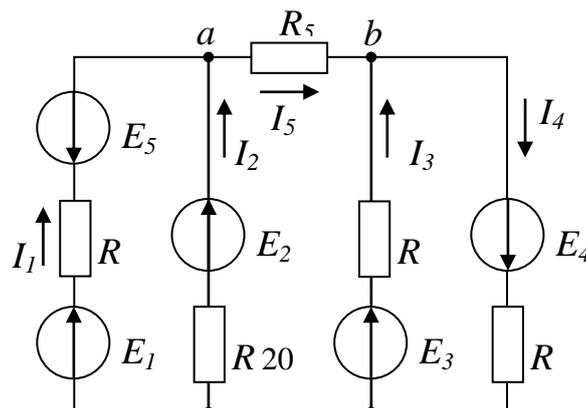
1. Сформулируйте метод контурных токов
2. Как определяются фактические токи электрической цепи?
3. Для заданной схемы определить токи, используя метод контурных токов



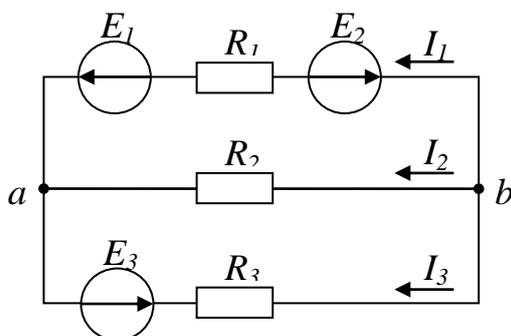
4. Используя метод контурных токов составить уравнения для определения токов в ветвях



5. Используя метод контурных токов составить уравнения для определения токов в ветвях



6. Используя метод контурных токов составить уравнения для определения токов в ветвях



Практическое занятие 3. Потенциальная диаграмма.

Цель: Освоить методику построения потенциальной диаграммы и научиться определять по ней напряжения между двумя заданными точками исследуемой цепи.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Потенциальная диаграмма применяется при анализе цепей постоянного тока. Потенциальная диаграмма отображает потенциалы отдельных точек электрической цепи относительно некоторой фиксированной (опорной, базисной)

точки, потенциал которой принимается равным нулю. Такая диаграмма представляет практический интерес, так как дает наглядное представление о распределении напряжений между отдельными точками контура, позволяет судить о наивысших потенциалах.

Теоретическая часть:

Потенциальная диаграмма позволяет определить потенциалы во всех точках и узлах схемы. Используется при диагностике возможных неисправностей в работе схемы. Потенциальные диаграммы строятся для выделенных контуров в функции от сопротивления цепи от произвольно выбранного узла. При построении диаграммы принимаем потенциал выбранного узла равным нулю $\varphi_i = 0$. Расчет потенциалов остальных точек производим согласно выбранному направлению обхода контура (по часовой стрелке).

Значения токов принимаются в соответствии с рассчитанными в предшествующих пунктах задания, со своими знаками направлений.

Построение диаграммы осуществляется в масштабах напряжений $m_u = \frac{В}{мм}$ и сопротивлений $m_r = \frac{Ом}{мм}$. На диаграмме по оси абсцисс откладываются значения сопротивлений участков в последовательности расположения их в контуре; по оси ординат – потенциалы соответствующих точек.

Рассмотрим построение потенциальной диаграммы на примере схемы на рисунке 3.1.

Построим потенциальную диаграмму для контура 1– 2 – 3 – 4 – 1.

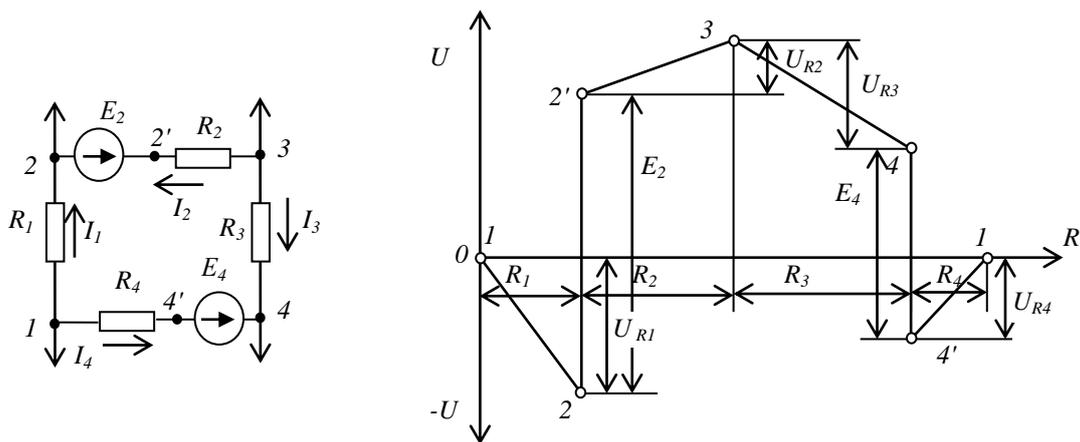


Рисунок 3.1 – Построение потенциальной диаграммы для контура 1,2,3,4,1

Для выбора масштаба по оси абсцисс просуммируем сопротивления вдоль рассматриваемого контура, после чего определим падения напряжения на сопротивлениях контура: $U_{R1} = I_1 R_1$; $U_{R2} = I_2 R_2$, $U_{R3} = I_3 R_3$, $U_{R4} = I_4 R_4$.

Потенциал точки 1 принят за нуль.

Пример. Построить потенциальную диаграмму контура «abcdea». Исходные данные: $I_1=2\text{A}$; $I_5=3\text{A}$; $I_4=1\text{A}$, значения ЭДС: $E_1=5\text{В}$; $E_5=8\text{В}$; $E_4=3\text{В}$ и значения сопротивлений: $R_1=20\text{Ом}$; $R_2=30\text{Ом}$; $R_5=10\text{Ом}$; $R_3=50\text{Ом}$; $R_4=30\text{Ом}$.

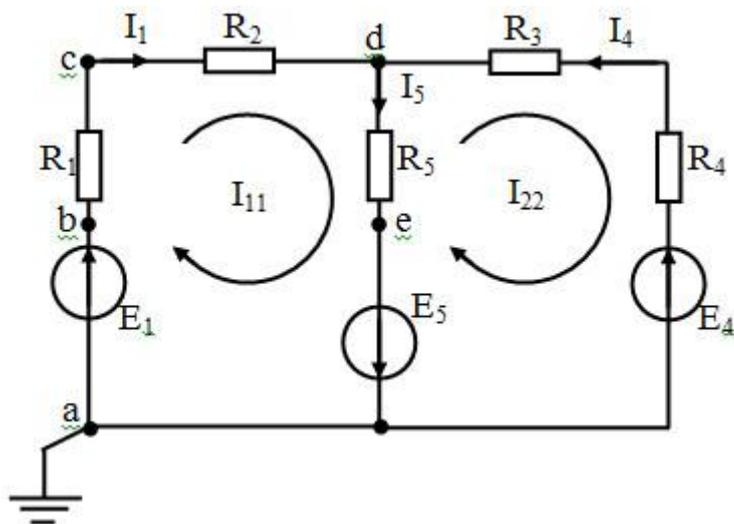


Рисунок 3.2 – Исходная схема электрической цепи

Заземлим точку «а», приняв ее потенциал $\varphi_a=0$. Найдем потенциалы остальных точек контура:

$$\varphi_b = \varphi_a + E_1 = 0 + 5 = 5\text{В};$$

$$\varphi_c = \varphi_b - I_1 R_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 1\text{В};$$

$$\varphi_d = \varphi_c - I_1 R_2 = 1 - 2 \cdot 3 = -5\text{В};$$

$$\varphi_e = \varphi_d - I_5 R_5 = -5 - 3 \cdot 1 = -8\text{В};$$

$$\varphi_a = \varphi_e - E_5 = -8 + 8 = 0\text{В}.$$

По полученным данным строим потенциальную диаграмму (рисунок 3.3).

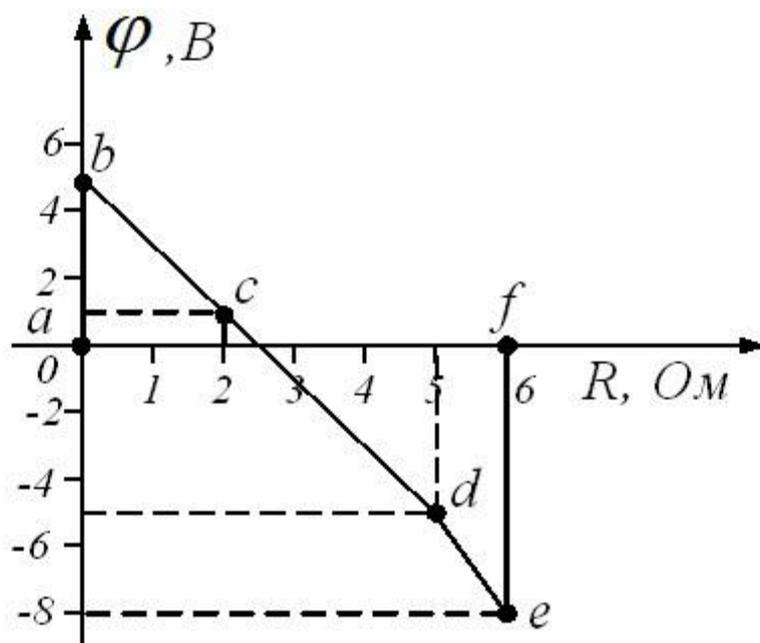
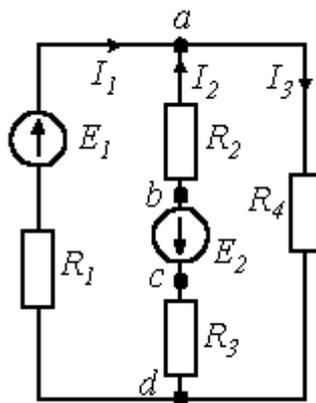


Рисунок 3.3 – Потенциальная диаграмма

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что такое потенциал точки?
2. Как измерить величину Э.Д.С.?
3. Что такое напряжение?
4. Объясните, почему построение потенциальной диаграммы было завершено именно в этой точке 1 на оси абсцисс (рисунок 3.1)?
5. Построить потенциальные диаграммы для левого и внешнего контуров цепи.



Практическое занятие 4. Энергетический баланс в электрической цепи.

Цель: Получить навыки составления уравнения энергетического баланса электрической цепи. Научиться использовать уравнения энергетического баланса для проверки выполненных расчетов и анализа электрических цепей.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Баланс мощностей используется для проверки расчетов токов и анализа работы электрических цепей.

Теоретическая часть:

На основе закона сохранения энергии мгновенная мощность всех источников энергии в электрической цепи равна алгебраической сумме мгновенных мощностей всех приемников. Баланс мощностей справедлив для цепей любой конфигурации:

$$\sum e_n i_n = \sum u_{np} i_{np}, \quad (4.1)$$

где e_n, u_{np} – мгновенные значения ЭДС и напряжений; i_n, i_{np} – токи источников и приемников.

Для цепей постоянного тока:

$$\sum_{K=1}^m E_K I_K = \sum_{K=1}^n I_K^2 R_K, \quad (4.2)$$

где m – число источников; n – число потребителей (сопротивлений) в цепи.

Произведение $E_K I_K$ входит в уравнение баланса со знаком плюс если направление ЭДС совпадает с направлением тока, при встречном направлении – со знаком минус.

Баланс мощности является проверочным при расчетах токов всеми перечисленными выше методами.

Пример. Составить уравнение энергетического баланса.

В таблице 4.1 приведены исходные данные для расчёта параметров разветвлённой цепи на рисунке 4.1.

Таблица 4.1 – Данные для расчёта

Сопротивления, Ом						Источники, В, А		
R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	R ₅	R ₆	E ₁	E ₂	I _{к2}
130	40	60	80	110	45	12	13	0,3

Для преобразование заданной схемы в расчетную необходимо произвести замену источника тока на источник напряжения. На рисунке 4.2 приведён принцип замены.

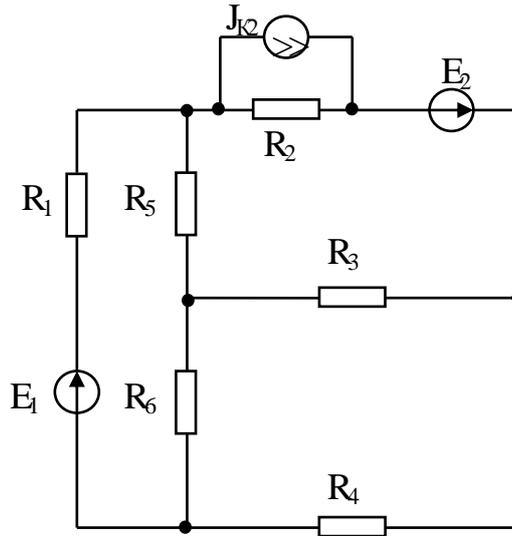


Рисунок 4.1 – Электрическая цепь

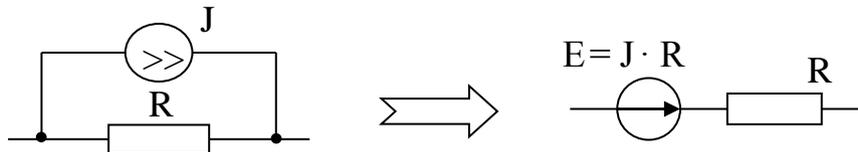


Рисунок 4.2 – Принцип замены источника тока на источник напряжения

Подставив значения из таблицы 1.3, получим:

$$E'_2 = R_2 \cdot I_{K2} = 40 \cdot 0,3 = 12 \text{ В}.$$

На рисунке 4.3 приведена расчётная схема после замены источника тока J_{K2} на источник напряжения E'_2 .

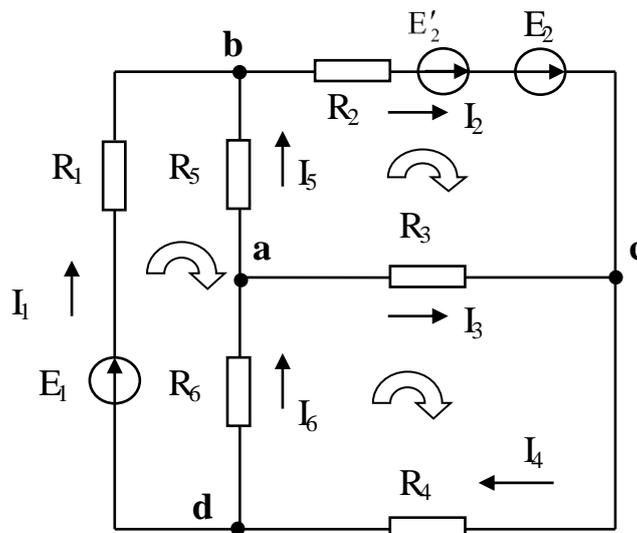


Рисунок 4.3 - Расчётная схема электрической цепи

Для проверки результатов вычислений токов проверим баланс мощностей по зависимости:

$$\sum_{i=1}^k E_i \cdot I_i = \sum_{j=1}^m I_j^2 \cdot R_j.$$

При составлении уравнения баланса мощностей необходимо поменять направления токов в ветвях с отрицательными значениями, учитывать, что в тех ветвях цепи, где направление тока совпадает с направлением ЭДС, их произведение будет положительным, т.е. мощность генерируется. В ветвях, где направления ЭДС и тока противоположны, источник ЭДС следует рассматривать как потребитель энергии (например - аккумулятор), и в уравнение баланса он входит со знаком минус. Все сопротивления, независимо от направления протекающего через них тока, являются потребителями энергии:

$$E'_2 \cdot I_2 + E_2 \cdot I_2 + E_1 \cdot I_1 = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 \quad (4.3)$$

После подстановки значений параметров:

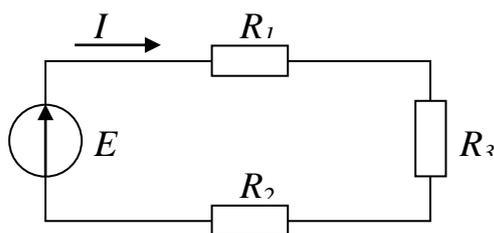
$$12 \cdot 0,227 + 13 \cdot 0,227 + 12 \cdot 0,147 = 0,021 \cdot 130 + 0,051 \cdot 40 + 0,013 \cdot 60 + 0,011 \cdot 80 + 0,0064 \cdot 110 + 0,0014 \cdot 45.$$

$$7,439 \approx 7,197.$$

Разница составляет менее 4%, следовательно, расчёты выполнены правильно.

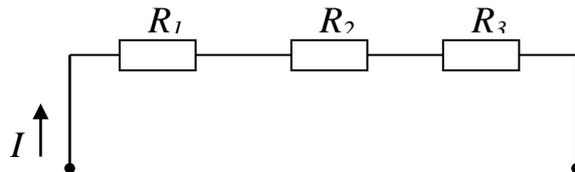
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Запишите уравнение энергетического баланса.
2. В цепи известны сопротивления $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, ЭДС источника $E=120$ В и мощность $P=120$ Вт всей цепи. Мощность P_2 второго резистора будет равна...



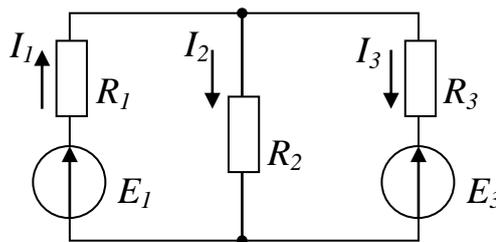
- а) 30 Вт б) 125 Вт в) 25 Вт г) 80 Вт

3. В цепи известны сопротивления $R_1=10\text{ Ом}$, $R_2=20\text{ Ом}$, напряжение $U=100\text{ В}$ и мощность $P=200\text{ Вт}$ всей цепи. Мощность P_2 второго резистора будет равна...



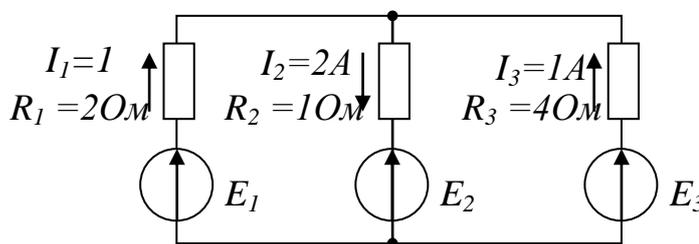
- а) 30 Вт б) 25 Вт в) 80 Вт г) 125 Вт

4. Уравнение баланса мощностей представлено выражением...



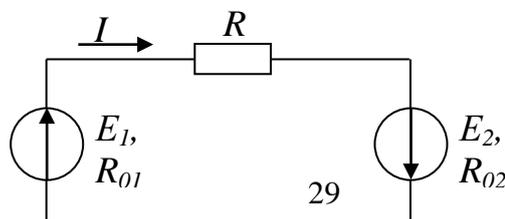
- а) $E_1 I_1 - E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$ б) $E_1 I_1 + E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$
 в) $E_1 I_1 - E_3 I_3 = R_1 I_1^2 - R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$ г) $-E_1 I_1 + E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$

5. Если сопротивления и токи в ветвях известны и указаны на рисунке, то потребляемая мощность составляет...



- а) 8 Вт б) 10 Вт в) 2 Вт г) 20 Вт

6. Уравнение баланса мощностей имеет вид...



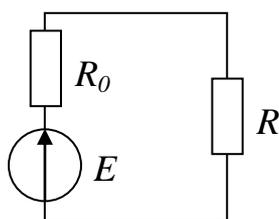
а) $E_1 I - E_2 I = I^2 R_{01} + I^2 R_{02} + I^2 R$

б) $-E_1 I + E_2 I = I^2 R_{01} + I^2 R_{02} + I^2 R$

в) $E_1 I + E_2 I = I^2 R$

г) $E_1 I + E_2 I = I^2 R_{01} + I^2 R_{02} + I^2 R$

7. Выражение для мощности P_0 , выделяющейся на внутреннем сопротивлении источника R_0 , имеет вид...



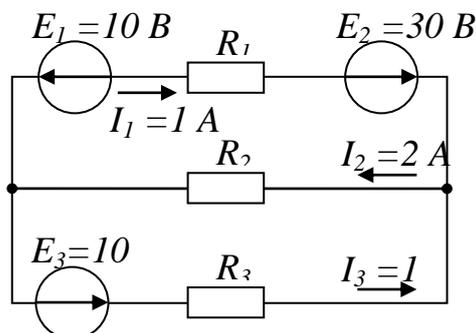
а) $P_0 = E^2 R_0 / (R - R_0)^2$

б) $P_0 = E^2 R / (R + R_0)^2$

в) $P_0 = E^2 / R_0$

г) $P_0 = E^2 R_0 / (R + R_0)^2$

8. При известных значениях ЭДС и токов в ветвях вырабатываемая источниками мощность составит...



а) 20 Вт

б) 30 Вт

в) 10 Вт

г) 40 Вт

Практическое занятие 5. Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Формы представления.

Цель: Изучить комплексные числа и научиться использовать их для расчета и анализа цепей переменного тока.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Для анализа разветвленных цепей необходим аналитический метод, позволяющий упростить расчет и использовать методы, разработанные для цепей постоянного тока. Таким методом является метод комплексных амплитуд или символический метод.

Теоретическая часть:

Упорядоченная пара двух действительных чисел (x, y) называется *комплексным числом* $z = (x, y)$. Множество комплексных чисел обозначается C .

Числа вида $(x, 0)$ – это действительные числа, числа вида $(0, y)$, где $y \neq 0$ есть чисто мнимые числа, число $(0,1)$ мнимая единица и обозначается $i = (0,1)$, тогда $(0, y) = y(0,1) = iy$, число $(0,0)$ есть действительное число нуль.

Число $x = \operatorname{Re} z$ называется *действительной* (вещественной) частью комплексного числа $z = (x, y)$, а число $y = \operatorname{Im} z$ *мнимой* частью комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Соотношение больше-меньше для комплексных чисел не вводится.

Комплексное число $z = (x, y) = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) , либо вектором, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (рисунок 5.1).

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется ее расстоянием ρ от полюса O : $|OM| = \rho$ ($\vec{\rho}$ полярный радиус – вектор точки) и

углом φ , образованным отрезком OM полярной осью Ox (φ полярный угол точки). Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

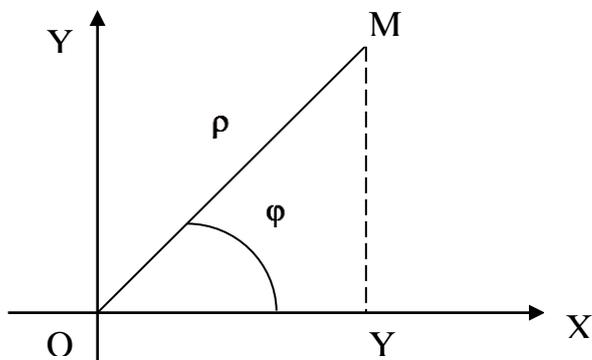


Рисунок 5.1 – Изображение комплексного числа

Действия над комплексными числами

Пусть даны $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \quad z_2 \neq 0.$$

$z = x + iy$ – алгебраическая форма записи комплексного числа, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Комплексные числа $z = (x, y) = x + iy$ и $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются знаком, называются *взаимно сопряженными* или *комплексно сопряженными*.

Нетрудно видеть, что $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\arg z = -\arg \bar{z}$ (кроме чисел $z = x < 0$; для них $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$).

Деление комплексных чисел в алгебраической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Действительная часть $x = \operatorname{Re} z$ и мнимая часть $y = \operatorname{Im} z$ комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i \frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Пример 1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Решение. Докажем это равенство, используя определение

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Пример 2. Найти произведение и частное чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + i$.

Решение.

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(-4 + i) = -8 + 2i + 12i - 3i^2 = -8 + 14i + 3 = -5 + 14i,$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 - 3i}{-4 + i} = \frac{(2 - 3i)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-8 - 2i + 12i + 3i^2}{(-4)^2 - i^2} = \frac{-8 + 10i - 3}{4 + 1} = \\ &= \frac{-11 + 10i}{5} = -\frac{11}{5} + \frac{10i}{5} = -\frac{11}{5} + 2i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{-4 + i}{2 - 3i} = \frac{(-4 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{-8 - 12i + 2i + 3i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{-8 - 10i - 3}{4 + 9} = \\ &= \frac{-11 - 10i}{13} = -\frac{11}{13} - \frac{10i}{13}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить значение выражения $\frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(3 - 4i)(4 - 5i)}$.

Решение. Используя правила раскрытия скобок и выполнения действий над комплексными числами, получим

$$\begin{aligned} \frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(3 - 4i)(4 - 5i)} &= \frac{2 - 3i - 4i + 6i^2}{12 - 15i - 16i + 20i^2} = \frac{2 - 7i + 6i^2}{12 - 31i + 20i^2} = \frac{-4 - 7i}{-8 - 31i} = -\frac{4 + 7i}{8 + 31i} = \\ &= -\frac{(4 + 7i)(8 - 31i)}{(8 + 31i)(8 - 31i)} = \frac{32 - 124i + 56i - 217i^2}{64 - 961i^2} = \frac{249 - 68i}{1025} = \frac{249}{1025} - \frac{68i}{1025}. \end{aligned}$$

Комплексное число $z = (x, y) = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) , либо вектором, начало которого находится в точке $O(0, 0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (рисунок 5.2).

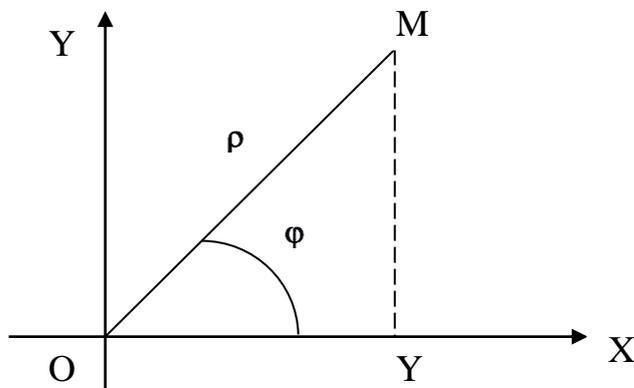


Рисунок 5.2 – Изображение комплексного числа

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется ее расстоянием ρ от полюса O : $|OM| = \rho$ ($\vec{\rho}$ полярный радиус – вектор точки) и углом φ , образованным отрезком OM полярной осью Ox (φ полярный угол точки). Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместит с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки $M(x, y)$ и ее полярные координаты ρ и φ связаны формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$;

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Тогда комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Эта формула дает тригонометрическую форму комплексного числа. При этом, $|z| = \rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем комплексного числа*, а угол

$\varphi = \text{Arg}z$ – аргументом комплексного числа. Угол $\varphi = \text{Arg}z$ определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π :

$$\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где $\arg(z)$ есть главное значение $\text{Arg}(z)$, определяемое условием $-\pi < \arg z \leq \pi$, причём:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{а} \text{ñ} \text{ë} \text{è}, x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{а} \text{ñ} \text{ë} \text{è}, x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{а} \text{ñ} \text{ë} \text{è}, x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{а} \text{ñ} \text{ë} \text{è}, x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{а} \text{ñ} \text{ë} \text{è}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Имеют место следующие соотношения

$$\text{tg}(\text{Arg}(z)) = \frac{y}{x}, \quad \sin(\text{Arg}(z)) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos(\text{Arg}(z)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2) + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_2(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

То есть,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2.$$

Это правило распространяется на любое число сомножителей. Если $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, то получим формулу Муавра

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

То есть, $|z^n| = |z|^n$, $Argz^n = nArgz + 2\pi k$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Свойства модуля комплексных чисел

1. $|\bar{z}| = |z|$,
2. $z\bar{z} = |z|^2$,
3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$,
4. $|z^n| = |z|^n$,
5. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$,
6. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
7. $|z_2 + z_1| \leq |z_2| + |z_1|$,
8. $||z_2| - |z_1|| \leq |z_2 - z_1|$.

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

То есть

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Извлечения из комплексного числа корня n -ой степени

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Эта формула дает ровно n различных корней при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Доказано, что на комплексные степени положительных чисел распространяются все правила действий со степенями и

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Если $x = 0$, то имеет место *формула Эйлера*:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Используя формулу Эйлера, получим еще одну форму записи комплексного числа – показательную.

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i \operatorname{Arg} z} = |z|e^{i \arg z}.$$

Операции над числами в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)},$$

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} = |z|^n e^{in \arg z},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Показательная функция комплексного переменного z $f(z) = e^z$ является периодической с периодом $2\pi ki$, так как

$$f(z + 2\pi ki) = e^{z + 2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = e^z,$$

т.е. $f(z + 2\pi ki) = f(z)$.

Если $z = 0$, то $e^{2\pi i} = 1$ и $e^{2\pi ki} = 1$.

Пример 1. Комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ представить в тригонометрической форме.

Решение. Здесь $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$. По формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

получаем

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$$

По формулам

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

получаем

$$\cos \varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, то $\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$, т.е.

$$\varphi = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in Z$$

где Z – множество целых чисел $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Поскольку φ принадлежит II четверти, то $\varphi = \operatorname{Arg} z = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, а главное значение аргумента $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Поэтому число z в тригонометрической форме имеет вид

$$z = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$$

Можно использовать и другие значения $\operatorname{Arg} z$:

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пример 2. Представить числа $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Так как $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, но $y > 0$, $x < 0$, то есть $\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$, то $z_1 = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$, а $r_2 = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, но $y < 0$, $x > 0$, то есть $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$, то $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Пример 3. Найти $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, предварительно записав комплексные числа в

тригонометрической форме, если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ и $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Учитывая что, $-\pi < \varphi \leq \pi$, найдем модуль и аргумент каждого комплексного числа:

$$\text{для } z_1 : r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \varphi_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{для } z_2 : r_2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \text{ и } \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{для } z_3 : r_3 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ и } \varphi_3 = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда заданные числа в тригонометрической форме имеют вид

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), z_3 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_2 \cdot z_3 &= 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \cdot 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) = \\ &= 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2 z_3} &= \frac{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})). \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3}.$

При $k = 0, 1, 2$ получаются корни

$$\alpha_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\alpha_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

При $k=3$ $\alpha_3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, что совпадает с α_0 . Все последующие корни будут повторяться, так что различных корней будет только три.

Пример 5. Найти $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^5$.

Решение. 1) Запишем число $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ в тригонометрической форме.

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8};$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

откуда $\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поскольку угол φ лежит в четверти IV, то $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Можно взять

главное значение аргумента $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Итак, $z = \sqrt{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$.

2) По формуле Муавра $z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi)$ найдем z^5 :

$$\begin{aligned} z^5 &= (\sqrt{8})^5 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \right) = 128\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 128\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

(так как $-\frac{5\pi}{3} \notin [-\pi; \pi)$, то $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$).

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[5]{z}$, при $z = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа z :

$$r = \sqrt{(64\sqrt{2})^2(1^2 + (\sqrt{3})^2)} = 2 \cdot 64\sqrt{2} = 128\sqrt{2} = 2^{\frac{15}{2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{64\sqrt{2}}{128\sqrt{2}} = \frac{1}{2}; \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$, то угол φ лежит в четверти I. Поэтому $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

В формуле $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$ можно взять любое значение аргумента, в частности $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Подставляя найденные значения r и φ в формулу, получим

$$\sqrt[5]{64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i)} = \sqrt[5]{128\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \right).$$

Подставляя значения $k = 0, 1, 2, 3, 4$, найдем пять различных значений $\sqrt[5]{z}$ (учитывая, что $\sqrt[5]{128\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2^{15/2}} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$):

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\sqrt{2} = \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right), \quad w_1 = 2\sqrt{2} = \left(\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right), \\ w_2 &= 2\sqrt{2} = \left(\cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right), \quad w_3 = 2\sqrt{2} = \left(\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right), \\ w_4 &= 2\sqrt{2} = \left(\cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}i. \end{aligned}$$

Остальные значения k новых точек w_k уже не дадут. Заметим, что, извлекая корень 5-й степени из числа $z = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i)$, мы решали задачу, обратную той, которая разбиралась в примере 8, и корень $w_4 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ оказался равным тому

числу, которое возводилось в 5-ю степень. Но кроме w_4 , будет еще 4 различных значений $\sqrt[5]{z}$; соответствующие точки w_0, \dots, w_4 расположены в вершинах правильного пятиугольника с центром в начале координат и удалены от начала координат на расстояние $2\sqrt{2}$.

Пример 7. Решить уравнение $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Решение. $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$;

$$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

По формуле $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i;$$

$$z_1 = -1 + i; \quad z_2 = -1 - i.$$

Пример 8. $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

Пример 9. Решить уравнение $\omega^5 + 32i = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\omega^5 = -32i$, или $\omega = \sqrt[5]{-32i}$. Число $z = -32i$ запишем в тригонометрической форме. Модуль числа равен $|z| = 32$ и так как действительная часть этого числа равна нулю, то $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, то есть

$$Z = 32 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Значит, решение уравнения имеет вид

$$\omega = 32^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{\left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)} = 2 \left(\cos \frac{-90 + 360k}{5} + i \sin \frac{-90 + 360k}{5} \right).$$

Запишем все найденные корни уравнения:

при $k=0$ $\omega_0 = 2(\cos(-18^\circ) + i \sin(-18^\circ))$,

$k=1$ $\omega_1 = 2(\cos 54^\circ + i \sin 54^\circ)$,

$k=2$ $\omega_2 = 2(\cos 126^\circ + i \sin 126^\circ)$,

$$k=3 \quad \omega_3 = 2(\cos 198^\circ + i \sin 198^\circ),$$

$$k=4 \quad \omega_4 = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ).$$

Изобразив все найденные корни уравнения на комплексной плоскости, получим вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 2, то есть

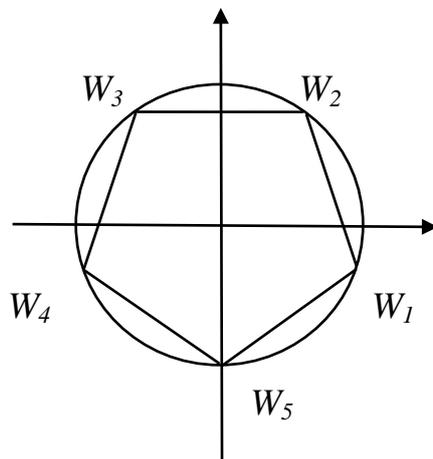


Рисунок 5.3 – Корни уравнения на комплексной плоскости

Вопросы и задания:

1. Что называется комплексным числом?
2. Какие формы записи комплексных чисел вы знаете?
3. Найти действительную и мнимую части числа

а) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3,$

б) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$

4. Найти модуль и аргумент комплексного числа

а) $1 + i^{123},$

б) $-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7},$

в) $(1+i)^8 \cdot (1-i\sqrt{3})^{-6}.$

5. Выполните арифметические действия над комплексными числами.

Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

$$1.1. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}.$$

$$1.2. \sqrt[3]{\frac{(2 - 2i)^4 + 72 + 4i}{(1 - 2i)^2 + 5i}}.$$

$$1.3. \sqrt[6]{\frac{(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2}{48 \cdot (1 + i)^{10}}}.$$

$$1.4. \sqrt[2]{\frac{(2 - i)^2 - 3}{(-1 + i)^8}}.$$

$$1.5. \sqrt[3]{\frac{(1 - 2i)^3 + (1 + 2i)^3}{44 \cdot (1 + i)}}.$$

$$1.6. \sqrt[3]{\frac{33 \cdot (2 + 2i)^5}{(1 + 3i)^2 \cdot 14}}.$$

$$1.7. \sqrt[4]{-128 + i128\sqrt{3}}.$$

$$1.8. \sqrt[4]{\frac{1 + i\sqrt{3}}{32}}.$$

$$1.9. \sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}.$$

$$1.10. \sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{32}}.$$

$$1.11. \sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}}.$$

$$1.12. \sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}.$$

$$1.13. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}.$$

$$1.14. \sqrt[4]{\frac{(-1 + \sqrt{3}i)}{2}}.$$

$$1.15. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}.$$

$$1.16. \sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}}.$$

$$1.17. \sqrt[3]{-8i}.$$

$$1.18. \sqrt[3]{\frac{(1 - 2i)^3 + (1 + 2i)^3}{44 \cdot (1 + i)}}.$$

$$1.19. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}.$$

$$1.20. \sqrt[3]{\frac{(2 - 2i)^4 + 72 + 4i}{(1 - 2i)^2 + 5i}}.$$

$$1.21. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}.$$

$$1.22. \sqrt[6]{\frac{(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2}{48 \cdot (1 + i)^{10}}}.$$

$$1.23. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}$$

$$1.24. \sqrt[3]{\frac{(2 - 2i)^4 + 72 + 4i}{(1 - 2i)^2 + 5i}}$$

$$1.25. \sqrt[4]{\frac{(-1 + \sqrt{3}i)}{2}}$$

$$1.26. \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}$$

$$1.27. \sqrt[6]{\frac{(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2}{48 \cdot (1 + i)^{10}}}$$

$$1.28. \sqrt[2]{\frac{(2 - i)^2 - 3}{(-1 + i)^8}}$$

6. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости:

$$а) \sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}},$$

$$б) \sqrt[3]{\frac{(2 - 2i)^4 + 72 + 4i}{(1 - 2i)^2 + 5i}},$$

$$в) \sqrt[6]{\frac{(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2}{48 \cdot (1 + i)^{10}}}.$$

Практическое занятие 6. Расчет цепей переменного тока при последовательном соединении элементов. Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом.

Цель: Научится проводить расчет цепи переменного тока при последовательном соединении активных и реактивных элементов

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального

исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Навыки расчета цепей переменного тока при последовательном соединении активных и реактивных элементов помогут проводить моделирование и анализ работы данных цепей

Теоретическая часть:

Катушка индуктивности в цепи синусоидального тока

Если катушку индуктивности включить в цепь синусоидального тока, изменяющегося по закону:

$$i = I_m \sin \omega t , \quad (6.1)$$

где I_m – амплитуда тока;

ω – частота, 1/с;

t – время, с,

то ток в соответствии со вторым законом Кирхгофа и законом Ома в любой момент времени будет равен:

$$i = \frac{u + e_L}{r} \quad (6.2)$$

где u – напряжение на зажимах катушки;

r – активное сопротивление катушки;

$e_L = -L \frac{di}{dt}$ – э.д.с. самоиндукции, равная взятому со знаком «минус»

произведению индуктивности L на скорость изменения тока. Знак «минус» отражает то обстоятельство, что индуцируемая э.д.с. препятствует изменению тока.

Выражение (6.2) можно записать иначе:

$$u = ir - e_L = ir + L \frac{di}{dt} \quad (6.3)$$

Обозначим $ir = u_r$ – падение напряжения на активном сопротивлении

$L \frac{di}{dt} = u_L$ – падение напряжения на индуктивности.

В выражение (6.3) подставим значение тока из (6.1)

$$\begin{aligned} u &= I_m r \sin \omega t + L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = I_m r \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t = \\ &= I_m r \sin \omega t + I_m \omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из последнего выражения следует, что

$$u_r = I_m r \sin \omega t = U_{rm} \sin \omega t \quad (6.5)$$

по фазе совпадает с током, а падение напряжения на индуктивности

$$u_L = I_m \omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_{Lm} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.6)$$

по фазе опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$.

Произведение индуктивности L на частоту ω имеет размерность сопротивления, и его называют индуктивным сопротивлением:

$$x_L = \omega L \quad (6.7)$$

При переходе к комплексной форме выражение (4) запишется:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + j\dot{U}_L = \dot{I}r + j\dot{I}x_L = \dot{I}(r + jx_L) = \dot{I}ze^{j\varphi} = \dot{I}Z \quad (6.8)$$

В последнем выражении

$$Z = r + jx_L = \sqrt{r^2 + x_L^2} e^{i \arctg(x_L/r)} = ze^{i\varphi} \quad (6.9)$$

– комплекс сопротивления катушки.

Z – полное сопротивление катушки, его можно найти как отношение действующих значений напряжения на зажимах катушки и протекающего по катушке тока:

$$z = \frac{U}{I} \quad (6.10)$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

В соответствии с выражением (6.8) векторная диаграмма токов и напряжений будет иметь вид, представленный на рисунке 6.1.

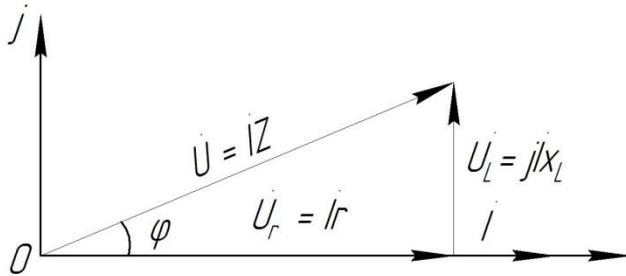


Рисунок 6.1- Векторная диаграмма

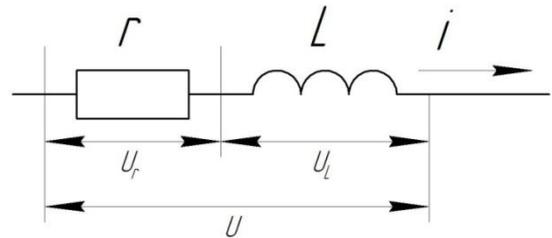


Рисунок 6.2 – Схема соединения

На рисунке 6.2 представлена схема замещения катушки индуктивности. Вектор падения напряжения на активном сопротивлении совпадает по направлению с вектором тока. Вектор падения напряжения на индуктивности опережает вектор тока на 90° . Сумма этих двух векторов дает вектор напряжения на зажимах катушки. Длина последнего, как следует из векторной диаграммы:

$$U = \sqrt{U_r^2 + U_L^2} = I \cdot \sqrt{r^2 + x_L^2} = I \cdot z,$$

а начальная фаза

$$\varphi = \arctg \frac{U_L}{U_r} = \arctg \frac{x_L}{r} \quad (\text{см. формулу 6.8 и 6.9})$$

Если на векторной диаграмме каждый из векторов треугольника напряжений умножить на ток, то получится треугольник мощностей:

$$\left. \begin{aligned} &\text{- активная мощность } P = U_r I = I^2 r = UI \cos \varphi, \text{ Вт,} \\ &\text{- реактивная мощность } Q = U_L I = I^2 x_L = UI \sin \varphi, \text{ ВАр,} \\ &\text{- полная мощность } S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ ВА.} \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{r}{z}. \quad (6.12)$$

Конденсатор в цепи синусоидального тока

Напряжение на конденсаторе u_c в любой момент времени равно заряду на его обкладках q , деленному на емкость C :

$$u_c = \frac{q}{C} \quad (6.13)$$

Поскольку ток есть количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника (в данном случае – поступающего на конденсатор) в единицу времени, то при переменном токе

$$i = \frac{dq}{dt}, \text{ откуда } q = \int idt.$$

Подставив заряд, выраженный через ток, в выражение (6.13), получим

$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{I_m}{C} \int \sin \omega t dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t + U_0,$$

где U_0 – постоянный заряд на конденсаторе, который при включении конденсатора на переменное напряжение отсутствует.

Последнее выражение перепишем, заменив косинус синусом:

$$u_c = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m x_c \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.14)$$

Величина $\frac{1}{\omega C}$ имеет размерность сопротивления, ее называют емкостным сопротивлением конденсатора и обозначают x_c .

Произведение $I_m x_c$ есть ни что иное, как амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$I_m x_c = U_{cm}.$$

Как видно из (11.14) напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$. В комплексной форме это выражение запишется:

$$\dot{U}_c = -jx_c \dot{I}, \quad (6.15)$$

соответствующая векторной диаграмма представлена на рисунке 6.3., а.

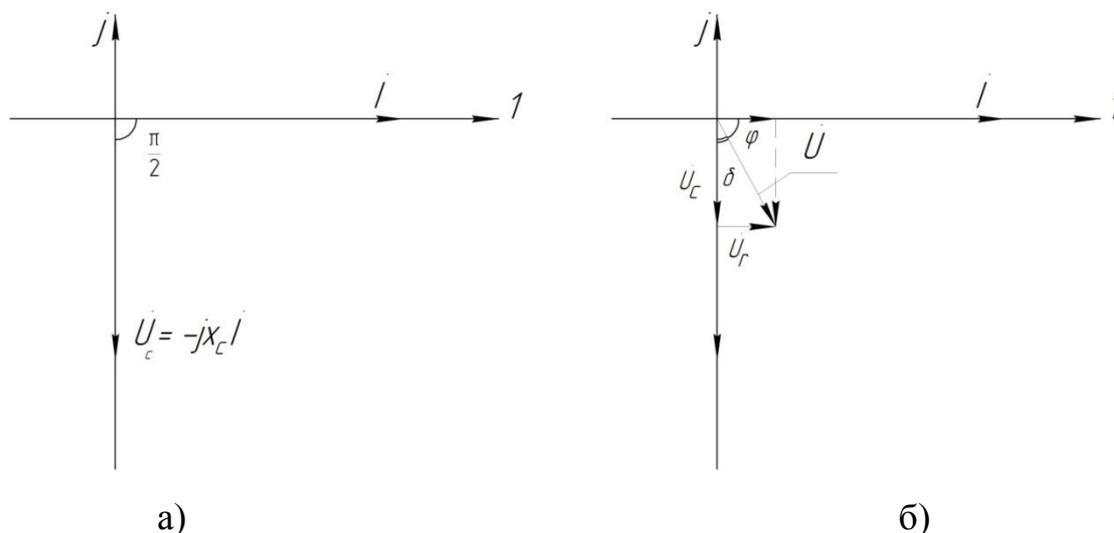


Рисунок 6.3 – Векторная диаграмма

При рассмотрении процесса протекания тока через конденсатор не было учтено то обстоятельство, что диэлектрик между обкладками конденсатора не является идеальным, то есть его активное сопротивление, хотя и очень велико, но имеет конечное значение. В соответствии с этим схема замещения реального конденсатора может быть представлена так, как изображено на рисунке 6.4, а или 6.4., б.

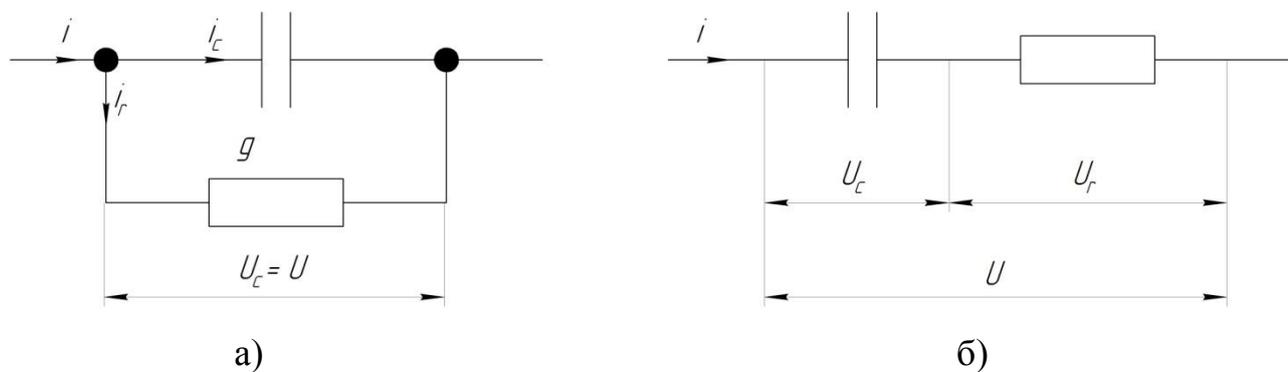


Рисунок 6.4 – Схема замещения реального конденсатора

Для схемы *a* в соответствии с (6.15) и с законами Ома и Кирхгофа справедливо выражение:

$$\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_c = \dot{U}g + jUb_c = \dot{U}(g + jb_c) = \dot{U}Y \quad (6.16)$$

где g – проводимость диэлектрика;

$b_c = \omega C$ – проводимость идеального конденсатора;

$$Y = g + jb_c = \sqrt{g^2 + b_c^2} e^{j \arctg(b_c/g)} = ye^{j\varphi} - \text{комплекс проводимости}$$

реального конденсатора.

Для схемы *b* справедливо выражение

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_c = \dot{I}r - j\dot{I}x_c = \dot{I}Z \quad (6.17)$$

Из (6.15) и (6.16) следует

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = \frac{1}{Y} \text{ или } Z = r - jx_c = \frac{1}{g + jb_c} = \frac{g - jb_c}{g^2 + b_c^2} = \frac{g}{y^2} - j \frac{b_c}{y^2} \quad (6.18)$$

Ввиду того, что два комплексных числа равны друг другу, если равны их вещественные части и равны коэффициенты мнимых частей, из (6.18) следует:

$$r = \frac{g}{y^2}, \quad x_c = \frac{b_c}{y^2}. \quad (6.19)$$

Аналогично получают обратные выражения проводимостей конденсатора через сопротивления:

$$g = \frac{r}{z^2}, \quad b_c = \frac{x_c}{z^2}. \quad (6.20)$$

Следует отметить, что значение r малы по сравнению с x_c , и его часто не учитывают, считая конденсаторы идеальными.

Векторная диаграмма напряжений для реального конденсатора представлена на рис. 6.3,б. Угол δ называют углом диэлектрических потерь.

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{U_r}{U_c} = \operatorname{arctg} \frac{r}{x_c} \quad (6.21)$$

Для качественных диэлектриков этот угол изменяется десятками минут и даже минутами.

Умножив на векторной диаграмме рисунка 6.3, б векторы напряжения на ток, получим треугольник мощностей:

$$S = UI, P = U_r I, Q = U_c I, \tilde{S} = P - jQ \quad (6.22)$$

Последовательное включение активного сопротивления, индуктивности и емкости в цепь синусоидального тока

Рассмотрим прохождение синусоидального тока по цепи, состоящей из последовательно включенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора (рисунок 6.5). Следует иметь в виду, что на данной схеме замещения сопротивление r учитывает и активное сопротивление катушки индуктивности и активные потери в диэлектрике конденсатора.

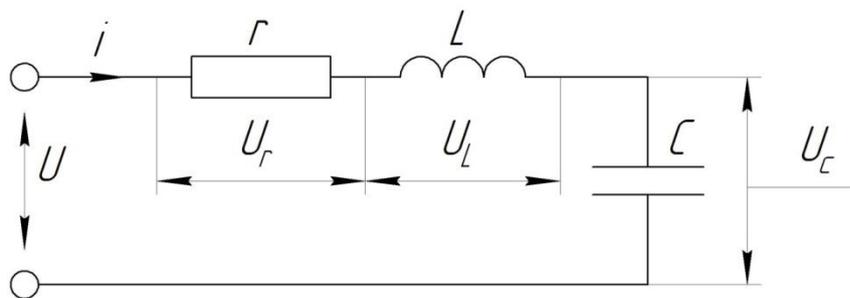


Рисунок 6.5 – Схема последовательного включения резистора, катушки индуктивности и конденсатора

В соответствии с законом Ома и вторым законом Кирхгофа для схемы замещения справедливо выражение:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_c = \dot{I}[r + j(x_L - x_c)] = \dot{I}Z \quad (6.23)$$

Соответствующие векторные диаграммы представлены на рисунке 6.6 а,б,в.

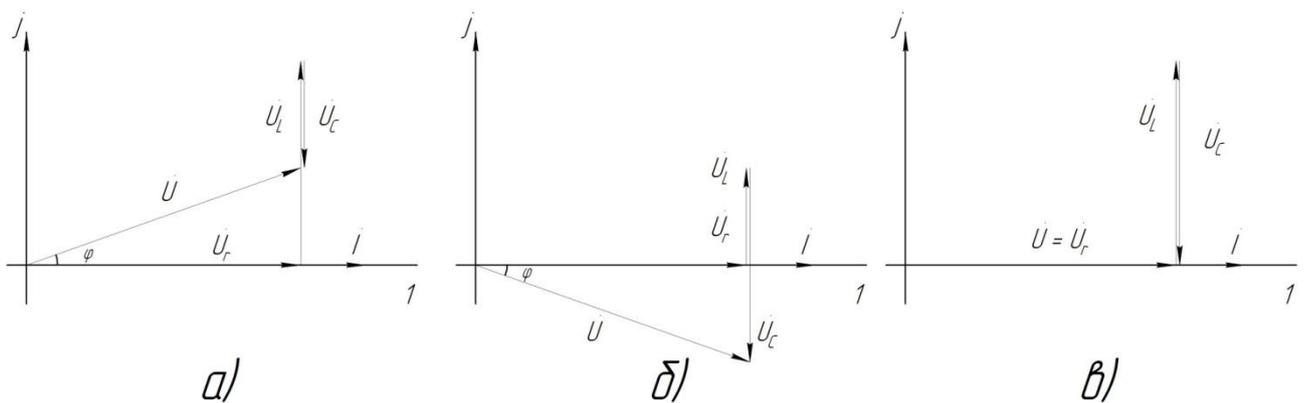


Рисунок 6.6 – Векторные диаграммы

Рисунок 6.6., а соответствует случаю, когда $x_L > x_C$, при этом ток по фазе отстает от напряжения на угол φ . Рисунок 6.6,б соответствует случаю, когда $x_L < x_C$, при этом ток по фазе опережает напряжение. Если $x_L = x_C$, то ток и приложенное к цепи напряжение по фазе совпадают, величина тока в этом случае определяется только величиной напряжения и активным сопротивлением r , и не зависит от величины индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим электрической цепи называют резонансом напряжений. При резонансе напряжений полная мощность равна активной ($\angle\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$), то есть из сети электрическая цепь реактивной мощности не потребляет.

Согласно классическому методу анализа переходных процессов решение неоднородного линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму его частного (принужденная составляющая) и общего решения, получаемого при равенстве нулю правой части (свободная составляющая). Принужденная составляющая определяется путем расчета установившегося режима в послекоммутационной схеме и представляет собой установившееся значение искомого переходного тока (напряжения). Свободная составляющая

искомого тока (напряжения) обусловлена только внутренними источниками энергии электрического и магнитного поля.

При анализе переходного процесса в электрической цепи **классическим методом** можно рекомендовать следующий порядок расчета искомой величины:

1. Подготовить схему электрической цепи к расчету: выбрать направления токов в ветвях схемы при переходном процессе.

2. Определить независимые начальные условия – ток в индуктивности $i_L(0-)$ и напряжение на емкости $u_C(0-)$ из расчета цепи до коммутации. На основании законов коммутации ток на индуктивности и напряжение на емкости не могут измениться скачком:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0), \quad u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0). \quad (6.24)$$

3. Представить искомую величину, например ток, в виде суммы двух составляющих: свободной и установившейся (принужденной) $i = i_{св} + i_y$.

4. Определить установившуюся составляющую искомой величины после коммутации, когда переходной процесс закончился.

5. Определить общий вид закона изменения свободной составляющей:

5.1 Составить характеристическое уравнение для заданной схемы. Для этого в цепи после коммутации необходимо разорвать ветвь с искомой величиной (или какую-либо другую ветвь, которая не содержит источника тока). Найти комплексное входное сопротивление цепи $Z(j\omega)$ относительно точек разрыва. Заменить $j\omega$ на p , приравнять входное сопротивление к нулю, получив, таким образом, характеристическое уравнение $Z(p) = 0$.

5.2 Определить корни характеристического уравнения.

5.3 Определить общий вид свободной составляющей в зависимости от вида корней характеристического уравнения, например, для тока:

– если корень характеристического уравнения один, вещественный, то

$$i_{св} = A \cdot e^{pt};$$

– если корней два, различных, вещественных, то $i_{св} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$;

– если корней два, одинаковых, вещественных, то $i_{c\delta} = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 t \cdot e^{pt}$;

– если корней два, комплексных, сопряженных ($p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_{c\delta}$), то $i_{c\delta} = B \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega_{c\delta} t + \beta)$.

6. Согласно п.3 записать общий вид искомого полного тока (напряжения).

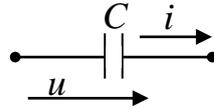
7. Определить постоянные интегрирования, используя законы коммутации и систему дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для момента времени $t=0+$. При этом учитывать п.2 и соотношения $i_c(0+) = C \frac{du_c(0+)}{dt}$,

$$u_L(0+) = L \frac{di_L(0+)}{dt}.$$

Вопросы и задания:

1. Как отличаются по фазе напряжение и ток в цепях с активным сопротивлением, с индуктивностью и с емкостью?
2. Что понимают под активным сопротивлением? Как определить его опытным путем в цепи переменного тока?
3. Как вычислить угловую частоту ω через круговую частоту f ?
4. Что понимают под полным сопротивлением цепи переменного тока?
5. Как вычислить индуктивное сопротивление катушки опытным путем? Как оно зависит от индуктивности и частоты?
6. Как определить емкость конденсатора, включенного в цепь синусоидального тока, опытным путем?
7. Что понимают под полной, активной и реактивной мощностями? Каково между ними соотношение?
8. Что называют коэффициентом мощности в цепи синусоидального тока?
9. Что такое угол диэлектрических потерь?
10. Как вычислить активную и реактивную проводимости конденсатора через сопротивление его схемы замещения?
11. Как строятся векторные диаграммы тока и напряжения при последовательном соединении активных и реактивных элементов?

18. При напряжении $u(t)=100\sin(314t)$ В начальная фаза тока $i(t)$ в ёмкостном элементе C составит...



- а) $\pi/2$ рад б) $-\pi/4$ рад в) 0 рад г) $3\pi/4$ рад

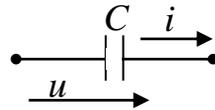
19. Если частота f увеличится в 2 раза, то ёмкостное сопротивление X_C ...

- а) не изменится б) увеличится в 2 раза
в) уменьшится в 4 раза г) уменьшится в 2 раза

20. Представленной векторной диаграмме соответствует...

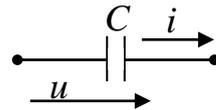
- а) последовательное соединение резистивного R и индуктивного L элемента
б) ёмкостной элемент C
в) индуктивный элемент L
г) резистивный элемент R

21. Ёмкостное сопротивление X_C при величине $C=100$ мкФ и частоте $f=50$ Гц равно...



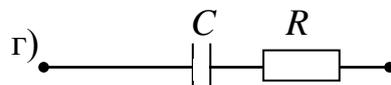
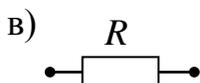
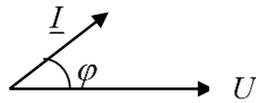
- а) 31,84 Ом б) 31400 Ом в) 314 Ом г) 100 Ом

22. Начальная фаза напряжения $u(t)$ в ёмкостном элементе C при токе $i(t)=0,1\sin(314t)$ А равна...



- а) $\pi/4$ рад б) $\pi/2$ рад в) 0 рад г) $-\pi/2$ рад

23. Векторной диаграмме соответствует схема...



24. В индуктивном элементе L ...

- а) напряжение $u_L(t)$ совпадает с током $i_L(t)$ по фазе
- б) напряжение $u_L(t)$ и ток $i_L(t)$ находятся в противофазе
- в) напряжение $u_L(t)$ отстаёт от тока $i_L(t)$ по фазе на $\pi/2 \text{ рад}$
- г) напряжение $u_L(t)$ опережает ток $i_L(t)$ по фазе на $\pi/2 \text{ рад}$

25. В активном элементе R ...

- а) напряжение $u(t)$ совпадает с током $i(t)$ по фазе
- б) напряжение $u(t)$ и ток $i(t)$ находятся в противофазе
- в) напряжение $u(t)$ отстаёт от тока $i(t)$ по фазе на $\pi/2 \text{ рад}$
- г) напряжение $u(t)$ опережает ток $i(t)$ по фазе на $\pi/2 \text{ рад}$

26. В емкостном элементе C ...

- а) напряжение $u_c(t)$ совпадает с током $i_c(t)$ по фазе
- б) напряжение $u_c(t)$ и ток $i_c(t)$ находятся в противофазе
- в) напряжение $u_c(t)$ отстаёт от тока $i_c(t)$ по фазе на $\pi/2 \text{ рад}$
- г) напряжение $u_c(t)$ опережает ток $i_c(t)$ по фазе на $\pi/2 \text{ рад}$

Практическое занятие 7. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка.

Цель: Получить навыки расчета переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях первого порядка операторным методом.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального

исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Навыки расчета переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях первого порядка операторным методом позволят проводить анализ электрических цепей первого порядка

Теоретическая часть:

Сущность операторного метода анализа переходных процессов заключается в том, что действительные функции времени, описывающие процессы в электрических цепях и называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями с помощью преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt . \quad (7.1)$$

Преобразование Лапласа приводит к замене операций дифференцирования и интегрирования оригиналов при решении дифференциальных уравнений на алгебраические операции умножения и деления изображений. Решив полученные алгебраические уравнения в операторной форме относительно изображений искомых величин, переходят к оригиналам, получают решения исходных дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс в электрической цепи.

При анализе переходного процесса в электрической цепи операторным методом рекомендуется следующий порядок расчета:

1. Из расчета цепи до коммутации найти токи в индуктивностях $i_L^{(0-)}$ и напряжения на емкостях $u_C^{(0-)}$.
2. По виду исследуемой электрической цепи после коммутации составить операторную схему (рисунок 7.1). По операторной схеме известными методами расчета цепей найти изображение искомой величины.
3. По изображению искомой величины найти оригинал, т. е. искомую функцию времени.

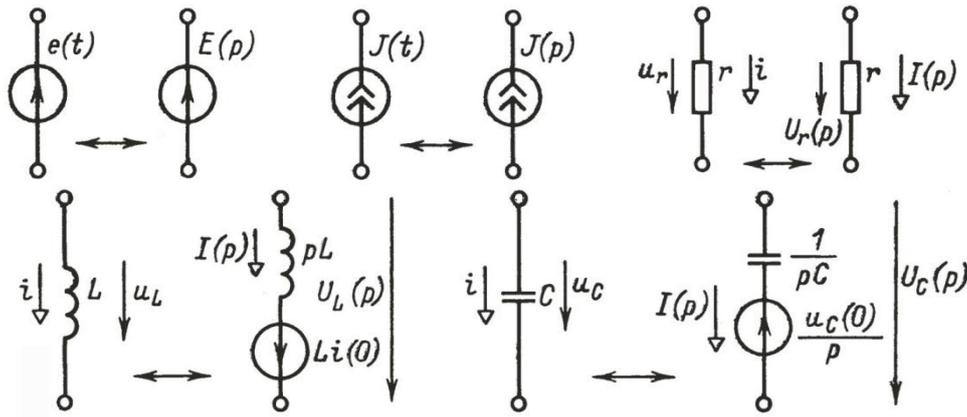


Рисунок 7.1– Операторная схема

Способы перехода от изображения к оригиналу

1. Применение теоремы разложения. Если изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (7.2)$$

где a_k и b_k – действительные числа; p_1, p_2, \dots – действительные и различные корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \stackrel{\bullet}{=} f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.3)$$

Если многочлен $F_2(p)$ имеет один нулевой корень, т.е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \stackrel{\bullet}{=} f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.4)$$

Если многочлен $F_2(p)$ имеет n пар комплексных сопряженных корней, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \stackrel{\bullet}{=} f(t) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right) \quad (7.5)$$

и при одном нулевом корне

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \stackrel{\bullet}{=} f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right). \quad (7.6)$$

Если в цепи действует синусоидальная ЭДС, то задачу рекомендуется решать для свободных составляющих искомых величин. Далее, для полученной

схемы рассчитать изображения искомых величин одним из известных ранее методов (контурных токов, узловых потенциалов и т.д.)

По найденному изображению определить оригинал искомой величины. Для этого воспользоваться либо таблицами соответствия (см. приложение), либо теоремой разложения, представленной выше.

Вопросы и задания:

1. Изложите сущность и этапы расчета операторным методом.
2. Как учитываются начальные условия в операторном методе?
3. Изобразите операторную схему замещения катушки индуктивности.
4. Изобразите операторную схему замещения конденсатора.
5. Как осуществляется переход от изображения к оригиналу?
6. О чём свидетельствует нулевой корень характеристического уравнения?
7. Запишите законы Кирхгофа и Ома в операторной форме
8. Для схемы (рисунок 7.2) дано: $e = 50\sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ)$ В; $r_1 = 20$ Ом; $r = 30$ Ом; $L = 0,5$ Гн. Найти операторным методом ток i после замыкания ключа. ($0,5e^{-60t}$ А).
9. Определить операторным методом ток i в схеме (рисунок 7.3) после замыкания ключа. Дано: $J = 6$ А; $r = 10$ Ом; $L = 0,25$ Гн. ($6e^{-40t}$ А).

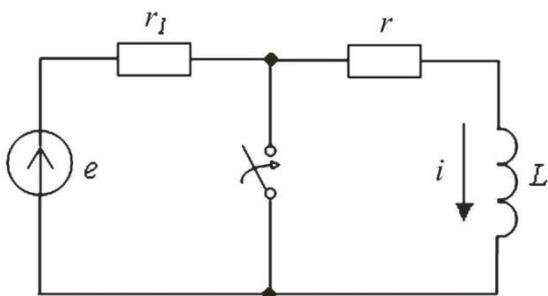


Рисунок – 7.3

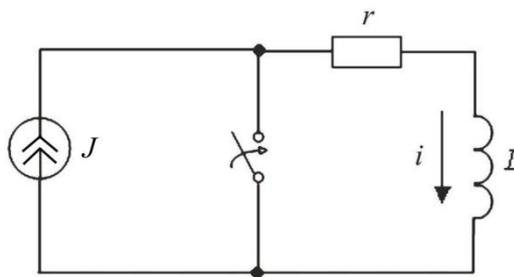
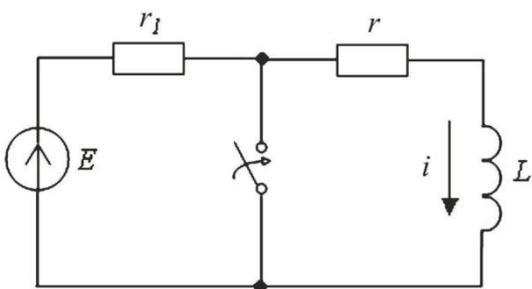


Рисунок – 7.4



10. В схеме рисунок 7.5 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 90$ В; $r_1 = 30$ Ом; $r = 15$ Ом; $L = 0,1$ Гн. Найти и построить зависимость $i(t)$. ($2e^{-150t}$ А).

11. Последовательный контур rLC подключается к источнику постоянной ЭДС E рисунок 17.1. Определить напряжение u_c и ток i , а также их максимальные значения во время переходного процесса, если $E=120$ В; $r=20$ Ом; $L=0,1$ Гн; $C=2,49$ мкФ.

$(120 - 120,1e^{-100t} \sin(2000t + 87,1^\circ))$ В; $0,6e^{-100t} \sin 2000t$ А; 222,5 В; 0,555 А).

Практическое занятие 8. Моделирование задач электроэнергетики методами теории массового обслуживания

Цель: Изучить методы теории массового обслуживания для моделирования задач электроэнергетики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Методы теории массового обслуживания позволяют выполнять моделирование задач электроэнергетики с целью их оптимизации

Теоретическая часть:

Общие сведения

Теорию массового обслуживания следует рассматривать как раздел прикладной математики, изучающей процессы, связанные с удовлетворением массового спроса на выполнение какого-либо вида услуг с учетом случайного характера спроса и обслуживания. Применительно к электроэнергетике это могут быть задачи: формирования резервного фонда электрооборудования, работа ремонтного персонала по ликвидации аварийных ситуаций в электроустановках,

производство переключений и подготовка рабочих мест в электрических сетях оперативным персоналом, оценка надежности восстанавливаемых систем и т. д.

Каждая система массового обслуживания (СМО) может быть представлена в виде определенного числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания (термин взят из телефонных сетей, применительно к которым начала развиваться теория массового обслуживания). В качестве канала могут рассматриваться различного вида приборы и приспособления, вычислительная машина, коллектив людей или отдельный исполнитель, выполняющий определенный вид работ. По числу каналов СМО делится на одноканальные и многоканальные системы.

Функционирование любой СМО заключается в обслуживании поступающего в нее потока заявок или требований. Заявки обычно поступают нерегулярно, образуя случайный поток заявок (требований). На обслуживание заявки также необходимо определенное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к неравномерной загрузке СМО. В какие-то периоды времени скапливается большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО, не получив обслуживания), в другие периоды СМО может работать с недогрузкой или простаивать.

В электроэнергетике довольно часто приходится сталкиваться с системами, в которых заявка, поступившая в систему в любой момент времени, может застать канал занятым обслуживанием. Характерным с этой точки зрения является работа оперативно-ремонтного персонала при возникновении аварийных ситуаций в электрических сетях. Повреждение, как случайное событие, может произойти в любой момент времени, на любой отходящей линии или подстанции, а может произойти одновременно на нескольких фидерах. Поскольку повреждения, возникающие в разных местах, сразу устранить невозможно, то выездная бригада последовательно устраняет одно повреждение за другим.

Исходя из вышеизложенного, в качестве СМО с ожиданием следует рассматривать систему, в которой заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает своего обслуживания. При рассмотрении таких систем помимо ранее рассмотренных показателей эффективности СМО дополнительно следует учитывать такие характеристики как средняя длина очереди, время пребывания заявки в очереди и т. д.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пусть имеется n -канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ , а интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{\text{обсл}}$. Для такой системы возможны следующие состояния с учетом числа заявок (обслуживаемых и ожидающих обслуживания): s_0 – канал свободен, заявок нет; s_1 – занят один канал, остальные свободны; s_2 – заняты два канала, остальные свободны; ...; s_k – заняты k каналов, остальные свободны; ...; s_n – заняты все n каналов (очереди нет); s_{n+1} – заняты все n каналов, в очереди одна заявка; ...; s_{n+m} – заняты все n каналов, в очереди m заявок.

Граф состояний системы показан на рисунке 8.1.

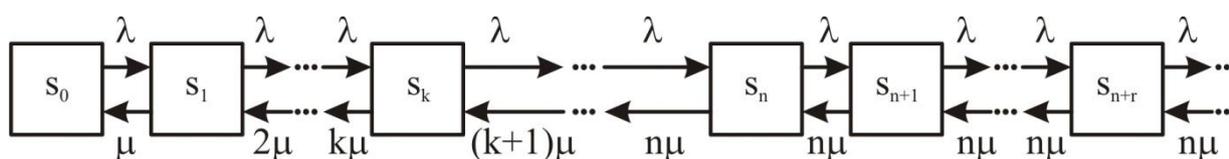


Рисунок 8.1 – Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

Следует обратить внимание на то, что для таких систем имеется отличие, заключающееся в том, что интенсивность потока восстановлений (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок от 0 до n увеличивается от величины μ до величины $n\mu$, так как, соответственно, увеличивается число каналов обслуживания. При

числе заявок больше n интенсивность потока восстановлений остается постоянной, равной $n\mu$.

Для рассматриваемого графа можно написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и для предельных вероятностей, приравняв производные нулю, получить следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1; \\ 0 = \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2; \\ \dots\dots\dots; \\ 0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1}; \quad (1 \leq k \leq n-1) \\ \dots\dots\dots; \\ 0 = \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n+1)\mu p_{n+1}; \\ \dots\dots\dots; \\ 0 = \lambda p_{n+m-1} - [\lambda + (n+m)\mu]p_{n+m} + (n+m+1)\mu p_{n+m+1}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Используя формулы для процесса гибели и размножения, можно получить следующие выражения для предельных вероятностей состояний n -канальной СМО с неограниченной очередью

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}. \quad (8.2)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (8.3)$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \dots \quad (8.4)$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0. \quad (8.5)$$

Показатели эффективности многоканальной СМО с неограниченной очередью рассчитываются по следующим формулам:

среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho; \quad (8.6)$$

среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}; \quad (8.7)$$

среднее число заявок в системе

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho; \quad (8.8)$$

среднее время пребывания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} \bar{r}; \quad (8.9)$$

среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} \bar{z}. \quad (8.10)$$

Поскольку в рассматриваемой системе с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему будет обслужена, то вероятность отказа $p_{\text{отк}} = 0$, относительная пропускная способность $Q = 1$, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок $A = \lambda$.

Для определения оптимального числа ремонтных бригад по устранению повреждений в электрических сетях помимо показателей эффективности системы массового обслуживания необходимо ввести критерий оптимизации. Существует несколько подходов к выбору такого показателя. Можно воспользоваться достаточно простым и удобным аналитическим выражением экономического критерия, предложенным в работах Н. Ш. Кремера. Относительную величину затрат можно определить по формуле $C_{\text{отн}} = \frac{1}{\lambda} n + 3\bar{t}_{\text{оч}}$.

Рассмотрим конкретный пример по определению показателей таких СМО.

Пример. В условиях повышенной гололедно-ветровой нагрузки в регионе происходит массовое отключение фидеров воздушных линий электропередачи. Поток аварийных отключений в районе электрических сетей достиг 11 штук за смену (8 ч). Средняя продолжительность устранения повреждения 2 ч. Необходимо определить: 1 – количество ремонтных бригад, при котором очередь не будет расти до бесконечности и характеристики СМО; 2 – оптимальное число ремонтных бригад и характеристики СМО в этом случае; 3 – провести сравнение.

Решение: 1. По условию задачи имеем:

$$\lambda = \frac{11}{8} = 1,38 \text{ 1/ч}; \mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ 1/ч}; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1,38}{0,5} = 2,76.$$

Известно, что очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\frac{\rho}{n} < 1$, то есть при $n > \rho = 2,76$. Следовательно, минимальное количество ремонтных бригад следует принять равным 3.

2. Определим вероятности состояний СМО при $n = 3$.

Вероятность того, что в систему не поступят заявки об отключениях

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{2,76}{1} + \frac{2,76^2}{1 \cdot 2} + \frac{2,76^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1,5^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 - 2,76)} \right)^{-1} = 0,02.$$

Таким образом, в среднем в двух процентах от общего объема сетей не будут выполняться ремонтные работы.

Вероятность того, что в СМО будет очередь

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{2,76^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 - 2,76)} = 0,81.$$

3. Рассчитаем показатели эффективности СМО:

среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{2,76^4 \cdot 0,02}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(1 - \frac{2,76}{3}\right)^2} = 10,07;$$

среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} \bar{r} = \frac{1}{1,38} \cdot 10,07 = 7,30 \text{ ч};$$

среднее число отключенных фидеров

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho = 10,07 + 2,76 = 12,83;$$

среднее время нахождения потребителей в отключенном состоянии

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} \bar{z} = \frac{1}{1,38} \cdot 12,83 = 9,30 \text{ ч}.$$

Для определения оптимального числа ремонтных бригад по устранению повреждений в электрических сетях помимо показателей эффективности системы массового обслуживания необходимо ввести критерий оптимизации. Относительную величину затрат определим по формуле

$$C_{\text{отн}} = \frac{1}{\lambda} n + 3 \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{1,38} \cdot 3 + 3 \cdot 7,30 = 24,07.$$

Анализ полученных характеристик эффективности системы массового обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке ремонтных подразделений при наличии трех бригад.

4. Для определения оптимального числа ремонтных бригад были вычислены показатели эффективности системы массового обслуживания при различном количестве ремонтных подразделений. Результаты расчетов сведены в таблицу 8.1.

Таблица 8.1 – Показатели эффективности системы массового обслуживания

Характеристика СМО	Число ремонтных бригад				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя ремонтной бригады	0,02	0,05	0,06	0,06	0,06
Число заявок в очереди на ремонт	10,07	0,87	0,22	0,02	0,02
Время ожидания в очереди, ч	7,30	0,63	0,16	0,01	0,01
Относительная величина затрат, ед.	24,07	4,79	4,10	4,38	5,10

Как следует из количественных данных, приведенных в таблице 8.1, минимальные затраты можно получить при $n_{\text{опт}} = 5$. Проведенными дополнительными расчетами других показателей эффективности системы массового обслуживания для $n = 5$ установлено, что $p_{\text{оч}} = 0,03$; $\bar{t}_{\text{сист}} = 2,16$ ч.

5. Выполненные исследования позволили установить, что при числе ремонтных бригад $n = 5$ по сравнению с $n = 3$ существенно уменьшилась вероятность возникновения очереди $p_{\text{оч}}$, длина очереди \bar{r} и среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$. При этом обеспечивается минимум относительной величины затрат на выполнение ремонтных работ.

Многофазные системы массового обслуживания

Специфика ремонтно-эксплуатационного обслуживания электрических сетей предопределяет использование многофазных СМО, когда обслуживание поступившей заявки осуществляется в несколько этапов. Характерная ситуация возникает в электрических сетях при возникновении аварийной ситуации. Проведение ремонтных работ обычно осуществляется в два этапа – отключение поврежденного участка и подготовка рабочего места выполняется оперативно-выездной бригадой, а непосредственно восстановительные работы проводит ремонтное подразделение. При этом в зависимости от сложности повреждения последний вид работ может проводить одна или несколько бригад. Специфичным

может быть также отсутствие очереди по причине малой интенсивности потока отключений электрических сетей.

Рассмотрим простейшую СМО без очереди с подготовкой каналов. На n – канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания заявок распределено по показательному закону с параметром μ . До начала обслуживания канал должен быть подготовлен. Время подготовки $t_{\text{подг}}$ имеет показательное распределение с параметром φ и не зависит от того, как давно канал прекратил работу.

При поступлении заявки вначале выполняется операция подготовки, а затем она поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми, на обслуживание не принимается.

В рассматриваемом случае обслуживание заявки состоит из двух фаз: подготовки со временем подготовки $t_{\text{подг}}$ и самого обслуживания в течение времени $t_{\text{обсл}}$. В результате общее среднее обслуживание $\tilde{t}_{\text{обсл}} = \bar{t}_{\text{подг}} + \bar{t}_{\text{обсл}}$.

Случайная величина $\tilde{t}_{\text{обсл}}$ обычно распределена по обобщенному закону Эрланга второго порядка с параметрами μ и φ .

Известно, что формулы Эрланга справедливы не только для показательного, но и для любого другого распределения времени обслуживания. Для решения практических задач нам необходимо найти величину $\tilde{\mu}$.

$$t_{\text{обсл}} = 1/\mu + 1/\varphi = \frac{\mu + \varphi}{\mu\varphi}. \quad (8.11)$$

Следовательно,

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu\varphi}{\mu + \varphi}. \quad (8.12)$$

Определив $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu}$ и подставив его в формулы Эрланга, получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{1!} + \dots + \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} + \dots + \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} \right)^{-1}; \quad (8.13)$$

$$p_k = \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k < n); \quad (8.14)$$

$$p_{\text{отк}} = \tilde{p}_n = \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0. \quad (8.15)$$

Показатели эффективности СМО определяются по известным формулам

$$Q = 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \quad A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right). \quad (8.16)$$

Для определения среднего числа занятых каналов нужно разделить A на $\tilde{\mu}$

$$k = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}} \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right) = \tilde{\rho} \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right). \quad (8.17)$$

Вопросы и задания:

1. Моделирование задач электроэнергетики методами теории массового обслуживания
2. Многоканальная СМО с неограниченной очередью
3. Многофазные системы массового обслуживания

Практическое занятие 9. Использование метода линейного программирования для решения задач электроэнергетики.

Цель: Приобрести навыки использования метода линейного программирования для решения задач электроэнергетики

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы семинара, формируемые компетенции или их части:

В результате освоения темы семинара будет сформирована компетенция ОПК-2 – способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

Актуальность темы занятия:

Использование метода линейного программирования для решения задач электроэнергетики позволяют выполнять оптимизацию и прогнозировать состояние энергетических систем.

Теоретическая часть:

Формулировка задачи линейного программирования

Возникновение и начало применения методов математического программирования для решения производственных задач относится к 1938 году, когда по заданию Ленинградского фанерного треста профессор Ленинградского государственного университета Л. В. Канторович решил ряд задач, связанных с организацией и планированием производства специальным математическим методом, названным им тогда методом разрешающих множеств. В США методы математического программирования появились впервые лишь в 1947 году, когда Данциг разработал численный метод решения задач линейного программирования, названный симплекс-методом.

Линейное программирование – математический метод отыскания максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений виде линейных неравенств или уравнений.

Максимизируемая (минимизируемая) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующей поставленной цели. Она получила название целевой функции. Ограничения характеризуют имеющиеся возможности решения задач.

Применение методов математического программирования и ЭВМ дает возможность решать сложные производственно-экономические задачи. Однако на каждом шагу встречаются небольшие варианты задач, которые можно и целесообразно решать вручную.

Сущность решения задачи линейного программирования заключается в том, чтобы найти условия, обращающие целевую функцию в максимум или минимум.

количественные значения изделий определенного вида, материала соответствующей марки, оборудования той или иной группы и т. д.

Коэффициенты при неизвестных целевой функции (9.5) c_1, c_2, \dots, c_n – заданные постоянные величины. Они также зависят от решаемой задачи и могут представлять собой себестоимость, цену или прибыль от того или иного изделия, цену материалов или оборудования, трудозатраты на выполнение мероприятий и др.

Коэффициентами при неизвестных в линейных уравнения (9.4) являются числа a_{ij} , где i – номер уравнения или строки, в котором находится данный коэффициент, j – номер неизвестной, при которой стоит этот коэффициент или номер столбца.

Коэффициенты a_{ij} являются заданными постоянными числами и выражают те или иные затраты времени на изготовление оборудования, объем материалов на изготовление изделия и т. д.

Свободные члены в линейных уравнениях (9.4) b_i обозначаю, например, величину тех или иных ресурсов, которыми располагают предприятия, или могут располагать. Ими могут быть оборудование или время его работы, запасы материалов, численность персонала, продолжительность работы, трудозатраты и др. Искомые переменные величины x_j не могут быть отрицательными.

Каждое из решений системы (9.4) принято называть возможным или допустимым планом.

Все множество решений или допустимых планов называется областью определения целевой функции. Она может оказаться пустой, если условия (9.4) и (9.5) несовместны.

Из множества решений, удовлетворяющих условиям (9.4) необходимо найти такое, при котором целевая функция (9.5) принимала бы максимальное или минимальное значение. Нахождение экстремума целевой функции при условиях,

что переменные удовлетворяют линейным ограничениям и составляет предмет линейного программирования.

При решении задач методами линейного программирования могут быть три случая:

- условия задачи (9.4) и (9.5) противоречивы, то есть не существует набора чисел x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих всем условиям задачи;
- условия (9.4) и (9.5) не противоречивы, но целевая функция не ограничена;
- система условий (9.4) и (9.5) совместна и экстремум целевой функции существует, то есть значение максимума или минимума целевой функции (9.5) конечно.

Для большинства правильно поставленных задач будет иметь место третий случай.

Оптимизация транспортных расходов при проведении капитального ремонта электрической сети (транспортная задача линейного программирования)

В общем виде постановку транспортной задачи можно сделать следующим образом. На нескольких станциях отправления сосредоточен груз, который необходимо доставить на известное число пунктов приема. Объем отправляемого груза с каждого пункта и принимаемого груза задан. При закрытой транспортной задаче сумма объемов, подлежащих отправке, и сумма объемов принимаемого груза должны быть равны. Заданы также транспортные расходы, связанные с перевозкой единицы груза из любой точки отправления в любой пункт назначения. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общие транспортные расходы были бы наименьшими. При этом был бы точно удовлетворен спрос в каждом пункте назначения, был бы вывезен весь груз со станций отправления.

Математическая формулировка транспортной задачи в общем виде такова.

Среди неотрицательных решений системы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & (j = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & (i = 1, 2, \dots, m). \end{cases} \quad (9.6)$$

выбрать такое, при котором функция

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min, \quad (9.7)$$

где i – номер станции отправления;

j – номер пункта назначения;

x_{ij} – количество груза, предназначенного для отправки из i -ой станции в j -ый пункт приема;

a_i – объем груза, сосредоточенного на станции отправления i ;

b_j – объем груза, который необходимо доставить в j -ый пункт приема;

c_{ij} – транспортные расходы, связанные с перевозкой одной единицы груза с i -ой станции отправления на j -ый пункт приема;

$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ – означает, что суммирование элементов $c_{ij} x_{ij}$ производится

сначала по индексу j при любом фиксированном значении i , затем по индексу i .

Приведенная математическая формулировка свидетельствует о том, что транспортная задача является задачей линейного программирования, так как ее решение сводится к нахождению минимума линейной функции от неотрицательных переменных, удовлетворяющих системе линейных уравнений.

В принципе, транспортная задача может быть решена универсальным симплекс-методом. Однако наличие специфических ограничений в математической постановке задачи привели к созданию специального метода решения транспортной задачи. Этот метод впервые был предложен советскими математиками Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в 1949 году. Он является упрощенным вариантом симплекс-метода и приспособлен именно для решения транспортных задач.

Рассмотрим важное положение, которым приходится руководствоваться в процессе выполнения расчетов при решении транспортных задач. Систему ограничений транспортной задачи можно разрешить относительно $m + n - 1$ неизвестных, то есть оптимальное решение транспортной задачи следует искать среди $m + n - 1$ неизвестных x_{ij} , удовлетворяющих системе ограничений.

Алгоритм решения транспортной задачи включает несколько этапов. На первом этапе определяется какое-либо первоначальное допустимое решение. На втором этапе это решение проверяется на оптимальность. Если результат положительный, то задача решена. В противном случае осуществляется переход к новому улучшенному допустимому решению и т. д., пока не будет найден оптимальный вариант.

Методику решения транспортной задачи удобно рассмотреть на конкретном примере с введением по ходу решения необходимых количественных данных.

Пример. Планом проведения капитального ремонта высоковольтной линии электропередачи предусматривается замена деревянных опор на железобетонные опоры. Заказ на изготовление опор размещен на трех заводах железобетонных изделий A_1, A_2, A_3 в следующих количествах: $a_1 = 20, a_2 = 80, a_3 = 120$ штук. По трассе ЛЭП намечено 4 пункта, куда будут поставляться опоры. В пункт B_1 должно быть доставлено $b_1 = 60$, в пункт $B_2 - b_2 = 100$, в пункт $B_3 - b_3 = 20$ и в пункт $B_4 - b_4 = 40$ опор. При этом количество опор, изготавливаемых на заводах железобетонных изделий равно сумме потребностей в пунктах приема

$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 220$ шт. Транспортные расходы в у. е., связанные с перевозкой

каждой опоры из любого завода железобетонных изделий указан в таблице

Завод железобетонных изделий	Пункт назначения			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$c_{11} = 3$	$c_{12} = 6$	$c_{13} = 5$	$c_{14} = 1$

A_2	$c_{21} = 1$	$c_{22} = 4$	$c_{23} = 3$	$c_{24} = 2$
A_3	$c_{31} = 4$	$c_{32} = 3$	$c_{33} = 1$	$c_{34} = 2$

Необходимо составить план перевозок опор, при котором общие транспортные расходы будут минимальными.

Решение: 1. Определим какое-либо первоначальное допустимое решение. Для этого составим специальную таблицу следующего вида:

		B_1	B_2	B_3	B_4	
		60	100	20	40	
A_1	20	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	(9.8)
A_2	80	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	
A_3	120	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	

В клетках, в которых записаны стоимости перевозок, оставлены свободные левые нижние углы, куда будем вписывать найденные значения x_{ij} , которые в дальнейшем будем называть поставками.

Для определения x_{ij} воспользуемся методом северо-западного угла. Поставки каждый раз вписываются в верхний левый (северо-западный) угол таблицы. Вначале определим поставку для клетки (A_1, B_1) . Для этого сравним потребность $B_1 = 60$ и запас $A_1 = 20$. Меньшее значение из этих чисел примем за поставку x_{11} и величину c_{11} в этой клетке заключим в рамку.

Так как запас A_1 исчерпан, строку A_1 временно исключим из рассмотрения. Теперь верхней левой клеткой будет (A_2, B_1) . Сравнивая потребность $B_1 = 40$ с запасом $A_2 = 80$, выбираем величину 40, c_{21} заключаем в рамку и столбец B_1 временно исключаем из рассмотрения.

Теперь верхней левой клеткой таблицы будет клетка (A_2, B_2) . Сравнивая цифры 40 и 100, заносим в эту клетку цифру 40 и c_{22} заключаем в рамку. Так как запас A_2 полностью исчерпан, то строку A_2 временно исключаем из рассмотрения.

В результате получим таблицу, состоящую из одной строки A_3 , в клетки которой и вписываем оставшиеся поставки: $x_{32} = 60$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 40$, а c_{32} , c_{33} и c_{34} заключаем в рамки. В итоге получим таблицу:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	100	20	40
A_1	20	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
		20			
A_2	80	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
		40	40		
A_3	120	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
			60	20	40

(9.9)

В результате проведенных операций нами получен следующий план перевозок: $x_{11} = 20$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 40$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 40$.

При таком плане все опоры с заводов железобетонных изделий A_1 , A_2 , A_3 будут вывезены, а потребности пунктов размещения опор на трассе воздушной линии B_1 , B_2 , B_3 , B_4 будут удовлетворены. Таким образом, нами получено допустимое решение поставленной задачи.

Затраты на перевозку опор в этом случае составят

$$z_1 = 20c_{11} + 40c_{21} + 40c_{22} + 60c_{32} + 20c_{33} + 40c_{34}.$$

Рассматривая полученную таблицу, можно заметить следующую особенность: число клеток, выделенных рамками, на 1 меньше общего числа строк и столбцов таблицы, то есть оно равно $m + n - 1$. Указанная особенность обусловлена ходом заполнения таблицы. Действительно, каждый раз мы записываем поставку в клетку, после чего исключаем строку или столбец. Исключение составило лишь последнее заполнение, когда мы одновременно

вычеркнули сразу и столбец и строку. Так как число строк равно m , столбцов – n , то число заполненных клеток будет равно $m + n - 1$.

В результате построения таблицы нам удалось получить $m + n - 1$ неизвестных, относительно которых разрешима система ограничений.

Назовем эти неизвестные базисными величинами, а полученное решение – базисным. Остальные неизвестные (значения которых не вписаны в таблицу) будем называть свободными неизвестными, а клетки без рамок – свободными клетками.

Оптимальное решение следует искать среди возможных базисных решений.

Используя таблицу, помещенную в условие задачи, найденный план перевозок имеет значение целевой функции

$$z = 3 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 = 540.$$

2. Исследование базисного решения на оптимальность.

Сопоставим каждой станции A_i некоторую величину α_i , а каждому пункту B_j некоторую величину β_j и свяжем эти величины следующим образом $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$.

Величинам α_i и β_j можно придать простой смысл:

α_i – стоимость изготовления одной опоры на заводе железобетонных изделий;

β_j – стоимость опоры в пункте назначения;

c_{ij} – затраты на перевозку опоры из станции отправления i в пункт назначения j .

Значения целевой функции нельзя уменьшить для всех свободных клеток таблицы, если выполняется неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$. Если такое неравенство выполняется, то решение оптимально.

Итак, для исследования базисного решения на оптимальность из системы уравнений $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$, соответствующих базисным клеткам таблицы перевозок, определить величины α_i и β_j и проверить неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для каждой свободной клетки.

В начале определим величины: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и величины $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Поскольку одной из величин: α_1 можно придать любое произвольное значение, примем ее равной нулю. Тогда для клетки (A_1, B_1) из уравнения $\alpha_1 + c_{11} = \beta_1$ определим β_1 : $0 + 3 = \beta_1, \beta_1 = 3$. Запишем значение β_1 под столбцом B_1 . Из равенства $\alpha_2 + c_{21} = \beta_1$ установим значение α_2 : $\alpha_2 + 1 = 3, \alpha_2 = 2$. Запишем значение $\alpha_2 = 2$ справа от таблицы, напротив строки A_2 . Проведя аналогичные вычисления, определим значения: $\beta_2 = 6, \alpha_3 = 3, \beta_3 = 4, \beta_4 = 5$. В результате получим следующую таблицу

		B_1	B_2	B_3	B_4	
		60	100	20	40	
A_1	20	3	6	5	1	$\alpha_1 = 0$
A_2	80	1	4	3	2	$\alpha_2 = 2$
A_3	120	4	3	1	2	$\alpha_3 = 3$
		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 5$	

(9.10)

Проверим, выполняется ли неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для свободных клеток полученной таблицы. Для свободной клетки (A_1, B_2) неравенство выполняется: $0 + 6 \geq 6$, для свободной клетки (A_1, B_3) – также выполняется: $0 + 5 \geq 4$, а для свободной клетки (A_1, B_4) : $0 + 1 < 5$ – не выполняется. Следовательно, имеющийся план перевозок не оптимален. Целевую функцию можно уменьшить, вводя перевозку опор из A_1 в B_4 .

3. Определение нового базисного решения.

В клетку (A_1, B_4) впишем поставку $\Delta > 0$. Если мы в клетку (A_1, B_4) внесли поставку Δ , то ее следует вычесть из x_{11} , что в свою очередь требует добавки ее к x_{22} и так далее, пока мы не вернемся в клетку (A_1, B_4) .

		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	100	20	40
A_1	20	3	6	5	1
		$20 - \Delta$			Δ
A_2	80	1	4	3	2
		$40 + \Delta$	$40 - \Delta$		
A_3	120	4	3	1	2
			$60 + \Delta$	20	40

(9.11)

Обходя клетки таблицы (9.11) в той последовательности, в какой мы компенсируем Δ , получим замкнутую ломаную линию, чередующуюся из горизонтальных и вертикальных звеньев (указаны пунктиром). Одна из вершин этой ломаной линии находится в свободной клетке, остальные – в базисных клетках (не обязательно во всех). Такая ломаная линия называется циклом пересчета, соответствующим свободной клетке. Клетки, в которых величина Δ записана со знаком «+», будем называть положительными вершинами цикла пересчета, а клетки, в которых Δ записана со знаком «-» – отрицательными вершинами цикла пересчета.

Существует определенное правило перераспределения поставок. Начиная со свободной клетки, для которой неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ не выполняется, и двигаясь по циклу пересчета, в вершинах цикла расставляют чередуясь знаки «+» и «-». Просматриваются поставки, записанные в отрицательных вершинах, и среди них выбирается наименьшая. Это число прибавляется ко всем поставкам, записанным в положительных вершинах, и вычитается из всех поставок в отрицательных вершинах. Свободная клетка, для которой строится цикл пересчета, объявляется базисной, а одна из базисных, входящих в цикл пересчета, – свободной, так как поставка в ней будет равна нулю.

В нашем случае минимальной является поставка $\Delta = 20$, ее помещаем в клетку (A_1, B_4) и объявляем базисной, помечая рамкой, а клетку (A_1, B_1) делаем свободной, уничтожая в ней рамку.

В результате получим следующую таблицу

		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	100	20	40
A_1	20	3	6	5	1
A_2	80	1	4	3	2
A_3	120	4	3	1	2
		60	20	80	20

(9.12)

После пересчета мы получим новый план перевозок: $x_{14} = 20$, $x_{21} = 60$, $x_{22} = 20$, $x_{32} = 80$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 20$, $x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0$.

Значение целевой функции при новом базисном плане будет $1 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 460$.

Как видим, величина целевой функции уменьшилась.

Одной из особенностей формирования цикла пересчета является возможность появления в нескольких вершинах нулей. В этой ситуации лишь одна из них объявляется свободной, а остальные остаются базисными с нулевыми поставками. Этим сохраняется равенство числа базисных клеток $m + n - 1$.

4. Исследование полученного базисного решения на оптимальность.

Сначала определим α_i и β_j . Принимая $\alpha_1 = 0$, определим β_4 : $0 + 1 = \beta_4$, откуда $\beta_4 = 1$. Зная β_4 , определим α_3 (клетка (A_3, B_4)): $\alpha_3 + 2 = 1$, следовательно $\alpha_3 = -1$. Аналогичным образом мы получим другие значения α_i и β_j : $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 0$, и $\alpha_2 = 2$. В результате можно составить следующую таблицу

		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
		60	100	20	40	
A ₁	20	3	6	5	1	$\alpha_1 = 0$
A ₂	80	1	4	3	2	$\alpha_2 = -2$
A ₃	120	4	3	1	2	$\alpha_3 = -1$
		80	20	20		
		$\beta_1 = -1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	

(9.13)

5. Проверим, выполняется ли неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для свободных клеток этой таблицы. Для свободных клеток (A₁, B₁), (A₁, B₂), (A₁, B₃), неравенство выполняется, так как для них, соответственно $0 + 3 \geq -1$; $0 + 6 \geq -1$; $0 + 5 \geq 0$ и $-2 + 3 \geq 0$, на для свободной клетки (A₂, B₄) неравенство не выполняется: $-2 + 2 < 1$. Следовательно, базисный план не оптимален и его можно улучшить, увеличив поставку в клетку (A₂, B₄).

6. Построим новый базисный план. Пометим знаком «+» клетку (A₂, B₄) и ходом ладьи построим цикл пересчета. Получим следующую таблицу

		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
		60	100	20	40	
A ₁	20	3	6	5	1	
A ₂	80	1	4	3	2	
A ₃	120	4	3	1	2	
		80+	20-	20-		

(9.14)

Среди поставок, имеющих знак «-», наименьшей является поставка, равная 20. Увеличивая поставки в клетках со знаком «+» на 20 и уменьшая поставки в клетках со знаком «-» на 20 единиц, получим следующую таблицу

		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
		60	100	20	40	
A ₁	20	3	6	5	1	α ₁ = 0
A ₂	80	1	4	3	2	α ₂ = -1
A ₃	120	4	3	1	2	α ₃ = -1
		β ₁ = 0	β ₂ = 2	β ₃ = 0	β ₄ = 1	

(9.15)

Клетка (A₂, B₄) теперь будет базисной с поставкой, равной 20.

В результате пересчета поставок в двух базисных клетках (A₂, B₂) и (A₃, B₄) поставки стали равны нулю. Однако, лишь одну из них, например, (A₂, B₂) мы объявим свободной, а другую (A₃, B₄) оставим базисной с нулевой поставкой. Этим мы сохраним равенство количества базисных клеток числу $m + n - 1$.

7. Проверим на оптимальность полученное новое базисное решение. Приравняв $\alpha_1 = 0$ в таблице (2.36), определим остальные α_i , β_j и запишем их справа и под таблицей.

Проверим выполнение неравенства $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для всех свободных клеток ($0 + 3 \geq 0$; $0 + 6 \geq 2$; $0 + 5 \geq 0$; $-1 + 4 \geq 2$; $-1 + 3 \geq 0$; $-1 + 4 \geq 0$) устанавливаем, что полученное решение является оптимальным.

Осуществив такой план перевозок, суммарные затраты на доставку опор будут наименьшими и составят

$$z_{\min} = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 20 = 440.$$

При решении транспортной задачи может возникнуть ситуация, когда оптимальный план будет не один, а несколько. В этом случае рекомендуется выбирать один из них, пользуясь не только количественными, но и другими соображениями, например, скоростью доставки груза в некоторые пункты, условиями перевозки и т. д.

Вопросы и задания:

1. Планом проведения капитального ремонта высоковольтной линии электропередачи предусматривается замена деревянных опор на железобетонные опоры. Заказ на изготовление опор размещен на трех заводах железобетонных изделий A_1, A_2, A_3 в следующих количествах: $a_1 = 10, a_2 = 50, a_3 = 140$ штук. По трассе ЛЭП намечено 4 пункта, куда будут поставляться опоры. В пункт B_1 должно быть доставлено $b_1 = 50$, в пункт $B_2 - b_2 = 100$, в пункт $B_3 - b_3 = 10$ и в пункт $B_4 - b_4 = 20$ опор. При этом количество опор, изготавливаемых на заводах железобетонных изделий равно сумме потребностей в пунктах приема

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 220 \text{ шт.}$$

Транспортные расходы в у. е., связанные с перевозкой

каждой опоры из любого завода железобетонных изделий указан в таблице

Завод железобетонных изделий	Пункт назначения			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$c_{11} = 4$	$c_{12} = 5$	$c_{13} = 5$	$c_{14} = 1$
A_2	$c_{21} = 2$	$c_{22} = 4$	$c_{23} = 3$	$c_{24} = 2$
A_3	$c_{31} = 4$	$c_{32} = 3$	$c_{33} = 1$	$c_{34} = 2$

Необходимо составить план перевозок опор, при котором общие транспортные расходы будут минимальными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ССЫЛКИ НА ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

Основная литература:

1. Соколенко, Е. В. Теория функций комплексных переменных. Операционное исчисление: учебное пособие / Е. В. Соколенко. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. — 199 с. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/83226.html>.

2. Моделирование в электроэнергетике: учебное пособие / А. Ф. Шаталов, И. Н. Воротников, М. А. Мастепаненко [и др.]. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, АГРУС, 2014. — 140 с. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47317.html>.

Дополнительная литература:

Митрофанов С.В. Моделирование в электроэнергетике [Электронный ресурс]: учебное пособие / Митрофанов С.В., Семенова Л.А.— Электрон. текстовые данные.— Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2015.— 144 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/61379.html>.