МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «Дополнительные главы математики»
направления подготовки
13.03.02 - Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск
2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора профессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки **13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» проводятся в компьютерном классе с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ темы	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
	1 семестр		
1	Вероятности и случайные процессы. Решение задач на непосредственное вычисление вероятности события.	1,5	1,5
2	Закон распределения дискретной случайной величины.	1,5	1,5
	Итого за 1 семестр	3	3
	2 семестр		
4	Расчет погрешностей непосредственных измерений	1,5	1,5
5	Числовые характеристики выборки, свойства числовых характеристик.	1,5	1,5
	Итого за 2 семестр	3	3
	3 семестр		
8	Статистическая проверка гипотез. Параметрические критерии	1,5	1,5
9	Корреляционная зависимость. Коэффициент корреляции.	1,5	1,5
	Итого за 3 семестр	3	3
	4 семестр		
13	Дизъюнктивные и конъюнктивные совершенные нормальные формы.	1,5	1,5
16	Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути в нагруженном ориентированном графе.	1,5	1,5
	Итого за 4 семестр	3	3
	ИТОГО:	**12**	12

4. Содержание практических работ

Практическая работа 1. Вероятности и случайные процессы. Решение задач на непосредственное вычисление вероятности события.

Цель: формирование понятий классической, геометрической, статистической вероятности события и способах их вычисления.

Теоретическая часть:

Вероятность - одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим. Далее укажем слабые стороны этого определения и приведем другие определения, позволяющие преодолеть недостатки классического определения.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т. е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события А. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом (элементарным событием)*. Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т.д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 - появился белый шар; ω_2, ω_3 - появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 - появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию А (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие А наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих А; в нашем примере А наблюдается, если наступит ω_2, или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В этом смысле событие А подразделяется на несколько элементарных событий (ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием А и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию А элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события А и обозначают через Р (А). В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию А. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна Р (А) = 5 / 6. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события А определяется формулой

$P(A) = m / n$,

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих А; n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

С в о й с т в о 1. *Вероятность достоверного события равна единице*.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае m = n, следовательно,

$P(A) = m / n = n / n = 1$.

С в о й с т в о 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае m = 0, следовательно,

$P(A) = m / n = 0 / n = 0$.

С в о й с т в о 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < m / n < 1$, следовательно,

$0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$0 <= P(A) < 1$.

Задачи и упражнения:

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных "в одну линию" кубиков можно будет прочесть слово "спорт".

5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных "в одну линию" карточках можно будет прочесть слово "трос".

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

7. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

8. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

9. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

10. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги — по одному рублю и две книги — по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

11. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

12. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Практическая работа 2. Закон распределения дискретной случайной величины.

Цель: формирование представления о способах построения закона распределения случайной величины.

Теоретическая часть:

Наряду со случайными событиями, одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины – величины, численное значение которой принимает различные значения в зависимости от результата стохастического эксперимента или опыта. Примерами случайных величин могут являться: число дорожно-транспортных происшествий за сутки; количество студентов, опоздавших на занятия; число дактилокарт, поступивших в течение дня на экспертизу. Приведенные примеры характеризуют случайные величины, имеющие количественные параметры, т.е. изолированные значения с определенными вероятностями. Такие случайные величины называют дискретными.

Но если оценить количественно как дискретную величину число ДТП, то величина интервала времени между последовательными моментами наличия ДТП может принимать любое значение в некотором временном интервале – есть непрерывное множество возможных значений рассматриваемой величины. Такие величины называют непрерывными.

Законом распределения дискретной случайной величины называют число ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Для примера, если взять монету и в течение некоторого времени подбрасывать ее, например 20 раз, то в этом случае могут быть ситуации, что все 20 раз монета будет обращена к вам гербом, или всего 19, 18 и т. д. раз, вплоть до того, что может выпасть 20 раз и решка. Можно вычислить вероятность того, что случайная величина выпадения герба примет значения от нуля до двадцати. Но, как нам известно, вероятность появления герба или решки одна и та же и равна 1/2. Тогда вероятности появления герба б, 7, 8 раз и соответственно решек — 14, 13, 12 раз будут равны появлению герба — 14, 13, 12 раз и соответственно б, 7, 8 раз — решки. Таким образом, для дискретной случайной величины существует определенный закон распределения, который может быть задан графически, аналитически и таблично. В последнем случае это распределение задается таблично, где в одном столбце записаны все возможные значения случайной величины, а в другом - соответствующие им вероятности.

Число выпадений герба	Вероятность	Число выпадений решки
0	0,000	20
1	0,000	19
2	0,000	18
3	0,001	17
4	0,005	16
5	0,015	15
6	0,037	14
…	…	…

Задачи и упражнения:

Составить закон распределения вероятностей случайной величины X, если:

1) вероятность работы каждого из четырех автомобилей автопарка ОВД города Урюпина без поломок в течение определенного времени равна 0,9, случайная величина X – число автомобилей, работавших безотказно;

2) вероятность рождения мальчика равна 0,5; случайная величина X – число мальчиков в семьях, имеющих четырех детей;
3) вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4; случайная величина X – число покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя;
4) вероятность выпадения герба при бросании равна 0,5; случайная величина X – число выпадений герба, если монета брошена 5 раз;
5) в лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышей (количество и размер выигрышей приведены в таблице); случайная величина X – размер выигрыша в лотерее, приходящегося на один билет;

Размер выигрыша, $	20	5	1
Количество выигрышей	1	4	10

6) среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билет с выигрышем, наудачу покупают два билета; случайная величина X – число выигрышных билетов среди купленных;
7) баскетболист делает три штрафных броска, вероятность попадания мяча в корзину при каждом броске равна 0,7; случайная величина X – число попаданий мяча в корзину;
8) в партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект, покупают три куртки; случайная величина X – число дефектных курток среди купленных;
9) вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3; аудитору на заключение представлено три баланса предприятия; случайная величина X – число положительных заключений на проверяемые балансы;
10) из 20 заключенных, находящихся в следственном изоляторе, четверо – моложе 25 лет; произвольно выбирают 2 заключенных; случайная величина X – число заключенных моложе 25 лет среди выбранных.

Практическая работа 3. Расчет погрешностей непосредственных измерений.

Цель: формирование представлений о значении и методах вычисления погрешностей измерений.

Теоретическая часть:

Работа химиков, физиков и представителей других профессий часто связана с выполнением количественных измерений различных величин. При этом возникает вопрос анализа достоверности получаемых значений, обработки результатов непосредственных измерений и оценки погрешностей расчетов, в которых используются значения непосредственно измеряемых характеристик (последний процесс также называется обработкой результатов косвенных измерений).

A -измеряемая величина, $\overline{A}$ -среднее значение измеряемой величины, $\Delta\overline{A}$ - абсолютная погрешность среднего значения измеряемой величины, $\varepsilon = \dfrac{\Delta\overline{A}}{\overline{A}} \cdot 100\%$ - относительная погрешность среднего значения измеряемой величины.

Предположим, что были проведены n измерений одной и той же величины A в одних и тех же условиях. В этом случае можно рассчитать среднее значение этой величины в проведенных измерениях:

$$\overline{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n} \qquad (1)$$

Как вычислить погрешность $\overline{A}$? По следующей формуле:

$$\Delta\overline{A} = t_{\gamma,n-1}\frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_i - \overline{A}\right)^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

В этой формуле используется коэффициент Стьюдента $t_{\gamma,n-1}$. Его значения при разных доверительных вероятностях и значениях n приведены в таблице.

Пример. Проводили измерения длины L металлического бруска. Было сделано 10 измерений и получены следующие значения: 10 мм, 11 мм, 12 мм, 13 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм. Требуется найти среднее значение $\overline{L}$ измеряемой величины (длины бруска) и его погрешность $\Delta\overline{L}$.

Решение:

С использованием формулы (1) находим:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_i}{10} = \frac{10+11+12+13+10+10+11+10+10+11}{10} = 10{,}8 \text{ мм}$$

Теперь с использованием формулы (2) найдем абсолютную погрешность $\Delta\overline{L}$ среднего значения $\overline{L}$ при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и числе степеней свободы $f = n-1 = 10-1 = 9$ (используем значение $t_{0.95,9}$ =2,262, взятое из таблицы):

$$\Delta\overline{L} = t_{0.95,9} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(L_i - \overline{L})^2}{9}}}{\sqrt{10}} = 2{,}26 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{(10-10{,}8)^2 + (11-10{,}8)^2 + (12-10{,}8)^2 + (13-10{,}8)^2 + (10-10{,}8)^2 + (10-10{,}8)^2 + (11-10{,}8)^2 + (10-10{,}8)^2 + (11-10{,}8)^2}{9}}}{\sqrt{10}} = 0{,}7$$

Запишем результат:

L =10,8±0,7$_{0.95}$ мм

Задачи и упражнения:

1. Студент измеряет период колебаний T маятника три раза и получает результаты: 1,6; 1,8; 1,7 с. Чему равны среднее арифметическое значение $\overline{T}$ и среднее квадратическое отклонение $S(\overline{T})$ результата измерений?

2. Определите доверительную случайную погрешность $\varepsilon(x)$, если $S(\overline{x}) = 0{,}03$ мм; $n = 5$; $P = 0{,}95$.

3. Вычислите среднее квадратическое отклонение результата измерения, если доверительная случайная погрешность $\varepsilon = 15$ с, число наблюдений равно 7, доверительная вероятность $P = 0{,}95$.

Практическая работа 4. Числовые характеристики выборки, свойства числовых характеристик.

Цель: формирование основных понятий математической статистики.

Теоретическая часть:

Одной из основных характеристик ряда распределения является средняя арифметическая. Существует две формулы для расчёта средней арифметической: простая и взвешенная. Простую среднюю арифметическую используют, когда данные наблюдений не сведены в вариационный ряд или все частоты равны единице (одинаковы).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

где x_i – i-е значение признака; n – объём ряда (число наблюдений).

Если частоты отличны друг от друга, расчёт производится по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i},$$

где x_i – i-е значение признака; m_i – частота i-го значения признака; k – число его значений (вариантов).

При расчёте средней арифметической в качестве весов могут выступать и частости, тогда формула расчёта средней арифметической взвешенной примет следующий вид.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i,$$

где w_i – частость i-го значения признака;

Колеблемость изучаемого признака можно охарактеризовать с помощью различных показателей вариации. К числу основных показателей вариации относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Математическое ожидание – это числовая характеристика случайной величины, со средним арифметическим её наблюдаемых значений, которое является статистической характеристикой вариационного ряда и рассчитывается по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

где p_i – вероятность i-го значения признака.

Дисперсию можно рассчитать по простой и взвешенной формулам имеющим вид

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2}{n}; \qquad D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2 m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i};$$

Среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X).}$$

Коэффициент вариации определяется формулой

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Задачи и упражнения:

1) При обследовании 50 членов семей рабочих и служащих установлено следующее количество членов семьи: 5; 3; 2; 1; 4; 6; 3; 7; 9; 1; 3; 2; 5; 6; 8; 2; 5; 2; 3; 6; 8; 3; 4; 4; 5; 6; 5; 4; 7; 5; 6; 4; 8; 7; 4; 5; 7; 8; 6; 5; 7; 5; 6; 6; 7; 3; 4; 6; 5; 4. Составьте вариационный ряд распределения частот. Постройте полигон распределения частот, кумуляту. Определите среднее число членов семьи Охарактеризуйте колеблемость размера семьи с помощью показателей вариации

Объясните полученные результаты, сделайте выводы.

2) Имеются данные о еженедельном количестве проданных компьютеров одной из фирм: 398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499. 580, 606, 344, 455,505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582. Составьте вариационный ряд. Найдите среднее количество проданных компьютеров. Рассчитайте показатели вариации

3) Администрацию магазина интересует частота покупок калькуляторов. Менеджер в течении января регистрировал данные о покупке МК и собрал следующие данные: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8. Постройте вариационный ряд, определите его числовые характеристики. Какие рекомендации вы дали бы администрации универсама?

4) Число пассажиров одного из рейсов за 30 дней составило: 128, 121, 134, 118, 123, 109, 120, 116, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132, 136, 134, 129. Составьте вариационный ряд. Найдите среднее число пассажиров в рейсе? Рассчитайте показатели вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

5) Имеются данные о годовой мощности предприятий в 2003 году

Предприятия с годовой мощностью, тыс.т	Количество предприятий
До 500	27
500 – 1000	11
1000 – 2000	8

2000 – 3000	8
Свыше 3000	2

Постройте гистограмму, кумуляту. Рассчитайте среднюю мощность предприятий. Найдите дисперсию. среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

б) По данным выборочного обследования получено следующее распределение по среднедушевому доходу

Среднедушевой доход семьи в месяц, у.е.	до 25	25 – 50	50 – 75	75 – 100	100 – 125	125 – 150	150 и выше
Количество обследованных семей	46	236	250	176	102	78	12

Постройте гистограмму, кумуляту. Рассчитайте среднюю мощность предприятий. Найдите дисперсию. среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

Практическая работа 5. Статистическая проверка гипотез. Параметрические критерии.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. Обозначим эту величину в целях общности через K.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

После выбора определённого критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

В области статистики и биометрии в частности применяют два вида статистических критериев: ***параметрические,*** построенные на основании параметров данной совокупности (например, $\bar{x}$ и s^2_x) и представляющие функции этих параметров, и ***непараметрические,*** представляющие собой функции, зависящие непосредственно от вариант данной совокупности с их частотами. Первые служат для проверки гипотез о параметрах совокупностей, распределяемых по нормальному закону, вторые — для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Применение параметрических критериев связано с необходимостью вычисления выборочных характеристик —

средней величины и показателей вариации, тогда как при использовании непараметрических критериев такая необходимость отпадает.

t-критерий Стьюдента (t-распределение). Английский математик В. Госсет (печатавшийся под псевдонимом Стьюдент), в 1908 г. нашел закон распределения величины $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, в которой генеральный параметр σ заменен на его выборочную характеристику s_x, т. е. нашел *закон распределения значений*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Открытый Стьюдентом и теоретически обоснованный Р. Фишером *закон t-распределения* служит основой так называемой теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в нормально распределяющейся совокупности в зависимости от объема выборки. t-распределение зависит только от числа степеней свободы $k = n—1$, причем с увеличением объема выборки n t-распределение быстро приближается к нормальному с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и уже при $n>30$ не отличается от него. Это видно из таблицы ниже, в которой приведены табулированные значения t-распределения и нормального распределения для разных значений t.

Распределение	Нормированное отклонение t						
	0,5	**1.0**	**1.5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**
Нормальное	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
Стьюдента при n = 3	0,333	0,577	0,728	0,816	0,870	0,905	0,927
n = 20	0,377	0,670	0,850	0,940	0,978	0,993	0,998
n = 30	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995

Оценка разности средних. Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами μ_1 и μ_2. Разность μ_1- μ_2 этих параметров обозначим через D, то есть μ_1- μ_2=D, а дисперсию этой разности σ^2_D. Значения генеральных параметров неизвестны, однако по выборкам мы можем найти величины выборочных средних и разность между ними $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, которую обозначим d, то есть $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = d.$

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mu_1=\mu_2$, то есть $D=0$. Критерием для проверки H_0-гипотезы служит отношение

$$t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{s_d}$$

где t — переменная величина, следующая t-распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 — 2$, а s_D - ошибка указанной разности, а n_1 и n_2 - объемы первой и второй выборок соответственно.

Так как, согласно H_0-гипотезе, $\mu_1=\mu_2$, то t-критерий выражается в виде отношения разности выборочных средних к своей ошибке, т. е.

$$t = \frac{d}{s_d}.$$

H_0-гипотезу отвергают, если фактически установленная величина t-критерия (обозначаемая $t_ф$) превзойдет или окажется равной критическому значению t_{kp} этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 — 2$, т. е. при условии $t_ф \geq t_{kp}$.

Ошибку разности средних s_d определяют по формуле:

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x_1})^2 + \sum (x_j - \overline{x_2})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Пример. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводили на двух группах животных: опытной и контрольной. Были исследованы кролики в возрасте от полутора до двух месяцев, массой тела 500—600 г. Опыт продолжался полтора месяца. Животных обеих групп содержали на одном и том же кормовом рационе. Однако опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0,06 г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела:

Привесы, г		Отклонения от средней арифметической		Квадраты отклонений	
опыт	контроль	опыт $(x_i - \overline{x_1})$	контроль $(x_j - \overline{x_2})$	опыт $(x_i - \overline{x_1})^2$	контроль $(x_j - \overline{x_2})^2$
580	504	58	22	3364	484
692	560	54	34	2916	1156
700	420	62	106	3844	11236
621	600	17	74	289	5476
640	580	2	54	4	2916
561	530	77	4	5929	16
680	490	42	36	1764	1296
630	580	8	54	64	2916
	470		56	ч	3136
$\Sigma = 5104$	$\Sigma = 4734$	--	--	$\Sigma = 18\ 174$	$\Sigma = 28\ 632$
$\overline{x_1} = 638$	$\overline{x_2} = 526$	--	--	$\Sigma = 46806$	

Средние арифметические привесов:

в опыте $\overline{x_1}$ = 5104/8= 638 г,

в контроле $\overline{x_2}$ =4734/9 = 526 г. Разница $\overline{x_1} - \overline{x_2} = d$ = 112 г. Чтобы установить, достоверна или случайна эта разница, нужно определить ошибку разности средних:

$$s_D = \sqrt{\frac{46806}{8+9-2} \cdot \left(\frac{8+9}{8 \cdot 9} \right)} = \sqrt{736{,}8} = 27{,}14.$$

Отсюда $t_ф$ = 112/27,14= 4,1.

По таблице для уровня значимости α = 0,01 и числа степеней свободы k = 9+8—2= 15 находим t_{kp} = 2,95. Так как $t_ф > t_{kp}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости (P<0,01). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась в высшей степени достоверной.

Задачи и упражнения:

1) 7 студентов из 10 сдавали практические работы так, как будто они были списаны друг у друга. На уровне значимости 0,05 определите, случайно ли это, или студенты действительно списывали.

2) На уровне значимости α = 0,025 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности , если известны эмпирические и теоретические частоты

$m_{(эмп)i}$	5	10	20	25	14	3
$m_{(теор)i}$	6	[illegible]	28	18	8	3

3) Техническая норма предусматривает в среднем 40 с на выполнение определённой технологической операции на конвейере. От работающих на этой операции поступили жалобы, что они в

действительности затрачивают на неё больше времени. Для проверки жалобы произведены измерения времени выполнения этой операции у 16 работниц, занятых на ней и получено среднее время 42 с . Можно ли по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0,01$ отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, если: а) исправленное выборочное отклонение s – 3,5с; б) выборочное среднее отклонение – 3,5 с?

4) Экономический анализ производительности труда предприятий позволил выдвинуть гипотезу о наличии 2 типов предприятий с различной средней величиной показателя производительности труда. Выборочное обследование 42 предприятий 1-й группы дало следующие результаты: средняя производительность труда 119 деталей. Выборочное обследование 35 предприятий 2-й группы показало, что средняя производительность труда составляет 107 деталей. Генеральные дисперсии соответственно равны 126,91 (дет.^{2}) и 136,1 (дет.^{2}). Считая, что выборки извлечены из нормально распределённых генеральных совокупностей X и Y ,на уровне значимости 0.05, проверьте, случайно ли полученное различие средних показателей производительности труда или же имеются 2 типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

5) Предполагается, что применение новых компьютерных технологий сократит время решения задач. Хронометраж времени решения 9 задач без компьютерных технологий дал следующие результаты: среднее время решения 57 минут, исправленная выборочная дисперсия $s_x^2 = 186,2$ (мин^2). Среднее время решения 15 задач с применением компьютерных технологий 52 минуты, а исправленная выборочная дисперсия $s_y^2 = 166,4$ (мин^2). На уровне значимости $\alpha = 0,01$ ответьте позволило ли применение компьютерных технологий сократить время решения задач.

6) Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Среди случайно отобранных 200 изделий проверяемой партии оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,02$ принять партию

7) Для завода изготавливают однотипные детали. Для оценки их качества сделаны выборки из продукции этих заводов и получены следующие результаты

Выборки	Завод №1	Завод №2
Объём выборки	n_1	n_2
Число бракованных деталей	m_1	m_2

На уровне значимости $\alpha = 0,025$ определите, имеется ли существенное различие в качестве изготавливаемых деталей?

8) Компания, производящая средства для похудения, утверждает, что приём таблеток в сочетании со специальной диетой позволяет сбросить в среднем в неделю 400гр веса. Случайным образом отобраны 25 человек, использующих эту терапию, и обнаружено, что в среднем еженедельная потеря в весе составила 430гр со средним квадратическим отклонением 110гр. Проверьте гипотезу о том, что средняя потеря в весе составляет 400гр. Уровень значимости $\alpha = 0,05$

9) Компания утверждает, что новый вид зубной пасты лучше предохраняет зубы, чем зубные пасты других фирм. Для проверки в случайном порядке выбраны 400 детей, пользовавшихся новой пастой и 300 детей, которые пользовались зубными пастами других фирм. После окончания эксперимента было выяснено, что у 30 детей, использующих новую пасту, и 25 детей из другой группы появились новые признаки кариеса. Имеются ли у компании достаточные основания для утверждения о том, что новый сорт зубной пасты эффективнее. Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$

10) Инженер по контролю качества проверяет среднее время горения нового вида электроламп. Для проверки в порядке случайной выборки было отобрано 100 ламп, среднее время горения которых составило 1075 часов. Среднее квадратическое отклонение времени горения составляет 100 часов. Используя уровень значимости $\alpha = 0.05$, проверьте гипотезу о том, что среднее время горения ламп – более 1000 часов.

11) Компания, выпускающая в продажу новый сорт кофе, провела проверку вкусов покупателей по случайной выборке из 400 человек и выяснила, что 220 из них предпочли новый сорт всем остальным. Проверьте на уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу о том, что по крайней мере 52% потребителей предпочтут новый сорт кофе.

Практическая работа 6. Корреляционная зависимость. Коэффициент корреляции.

Цель: [illegible] об элементах корреляционного анализа.

Теоретическая часть

Зависимость между значениями одной случайной величины и условным математическим ожиданием другой случайной величины носит название статистической.

Чтобы изучить статистическую зависимость, нужно знать условное математическое ожидание случайной величины. Для его оценки необходимо знать аналитический вид двумерного распределения (X,Y). Однако, суждение об аналитическом виде двумерного распределения, сделанного по отдельной ограниченной по объёму выборке, может привести к серьёзным ошибкам. Поэтому идут на упрощение и переходят от условного математического ожидания случайной величины к условному среднему значению, т.е. принимают, что $M(Y)_x = \bar{Y}_x$

Зависимость между значениями одной случайной величины и условным средним значением другой случайной величины носит название **корреляционной** (от англ. correlation - согласование, связь, взаимосвязь, соотношение, взаимозависимость); термин впервые введен Гальтоном в 1888г.

Парный коэффициент корреляции Пирсона (1896 г.) изменяется в пределах от -1 до +1. Значение 0,00 интерпретируется как отсутствие корреляции. Корреляция определяет степень, с которой значения двух переменных пропорциональны друг другу.

Определяют две черты зависимости между переменными: величину зависимости и надежность зависимости.

Надежность зависимости – менее наглядные понятия, чем величина зависимости, однако чрезвычайно важна. Оно непосредственно связано с репрезентативностью той определенной выборки, на основе которой строятся выводы. Другими словами надежность говорит, насколько вероятно, что зависимость подобная найденной, будет вновь обнаружена (подтвердится) на данных другой выборки, извлеченной из той же самой популяции. Если исследование удовлетворяет некоторым специальным критериям, то надежность найденных зависимостей между переменными выборки можно количественно оценить и представить с помощью стандартной статистической меры (называемой p-уровень, или статистический уровень значимости).

Статистическая значимость результата представляет собой оцененную меру уверенности в его правильности. Уровень значимости или p-уровень, - это показатель, находящийся в убывающей зависимости от надежности результата. Более высокий p-уровень соответствует более низкому уровню доверия к найденной в выборке зависимости между переменными. Именно p-уровень представляет собой вероятность ошибки, связанной с распространением наблюдаемого результата на всю популяцию. Чем слабее зависимость между переменными, тем большего объема требуется выборка, чтобы значимо ее обнаружить. Другими словами, если зависимость между переменными почти отсутствует, объем выборки, необходимый для ее значимого обнаружения, почти равен объему всей популяции, которой предполагается бесконечным.

Рабочие формулы коэффициентов корреляции применяют с учетом того, с какой выборкой (большей или малой) мы имеем дело.

Например, <u>для малых выборок</u> удобнее всего пользоваться следующей формулой:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{q_x \cdot q_y}} \quad (1),$$ где

$q_x = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}$ и $q_y = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$, где x-варианты первого признака;

y-варианты второго признака; n-число наблюдений в выборке.

Задачи и упражнения:

Определить зависимость содержания витамина С в продукте в зависимости от длительности его обработки при определенной температуре по результатам n=6 измерений (экспериментов). Какое количество витамина С (в долях к первоначальному) будет содержаться в продукте при обработке его в течение t^*_1 и t^*_2 часов. Построить график полученной зависимости и изобразить на координатной плоскости результаты измерений.

1.

x_i	0,11	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	t^*_1	t^*_2
y_i	0,97	0,94	0,9	0,86	0,83	0,78	0,25	0,74

2.

x_i	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	t^*_1	t^*_2

y$_i$	0,97	0,94	0,9	0,86	0,83	0,78	0,25	0,74

3.

x$_i$	0,14	0,24	0,34	0,44	0,54	0,64	$\mathbf{t^*_1}$	$\mathbf{t^*_2}$
y$_i$	0,97	0,94	0,9	0,86	0,83	0,78	0,25	0,74

Практическая работа *7*. Дизъюнктивные и конъюнктивные совершенные нормальные формы.

Цель. Приобрести навыки построения СКНФ (СДНФ) с помощью различных алгоритмов.

Теоретическая часть.

Множество всех булевых в базисе $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ образуют **булеву алгебру.** Если x - логическая переменная, $a = \sigma \in \{0,1\}$ то выражение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x & если \quad \sigma = 1 \\ \overline{x} & если \quad \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^{\sigma} = \begin{cases} 1 & если \quad x = \sigma \\ 0 & если \quad x \neq \sigma \end{cases},$$

называется литерой. Литеры x и $\neg x$ называются контрарными. **Конъюнктом** называется конъюнкция литер. **Дизъюнктом** называется дизъюнкция литер. **Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется дизъюнкция конечного числа конъюнктов. **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Пусть функция f записан в базисе $S1$. Данная функция приводится к нормальном форме следующим путем:

1. используем законы де Моргана, чтобы преобразовать формулу к виду, в котором знаки отрицания относятся только к отдельным переменным;

2. применяем правило снятия двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$;

3. далее следует использовать законы дистрибутивности, причем первый закон дистрибутивности для приведения к ДНФ, и второй закон дистрибутивности для приведения к КНФ.

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама либо ее отрицание), то эта форма называется **совершенной нормальной формой (СДНФ или СКНФ).**

<u>Пример:</u> По данной таблице истинности построить СДНФ.

Решение рассмотрим на примере функции $f(x, y, z)$, заданной таблично:

x	y	z	Конституенты 1	Конституенты 0	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$	$x \vee y \vee z$	0
0	0	1	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$	$x \vee y \vee \overline{z}$	1
0	1	0	$\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$	$x \vee \overline{y} \vee z$	1
0	1	1	$\overline{x} \cdot y \cdot z$	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	0
1	0	0	$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$	$\overline{x} \vee y \vee z$	0
1	0	1	$x \cdot \overline{y} \cdot z$	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$	1
1	1	0	$x \cdot y \cdot \overline{z}$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$	1
1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	1

Кон[illegible]вные конъюнкции), включенные в таблицу, соответствуют конкретному набору ну[illegible]мают переменные x, y, z. Строятся конституенты_1 по следующему правилу: переменная входит в произведение сама, если на данном наборе она принимает значение 1, в противном случае в произведение входит ее отрицание.

Правило для построения СДНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 1, а затем взять дизъюнкцию соответствующих конституент **1**. Так для нашего примера, имеем

$$f(x,y,z)=\bar x\cdot\bar y\cdot z\vee\bar x\cdot y\cdot\bar z\vee x\cdot\bar y\cdot z\vee x\cdot y\cdot\bar z\vee x\cdot y\cdot z.$$

Пример: По данной таблице истинности построить СКНФ.

Решение: **Конституенты_0** для набора нулей и единиц (которые принимают переменные x, y, z) строится следующим образом: переменная входит в дизъюнкцию сама, если на данном наборе она принимает значение 0, в противном случае в дизъюнкцию входит её отрицание.

Правило для построения СКНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 0, а затем взять конъюнкцию соответствующих конституент_0. В результате получится искомая СКНФ. Так для нашего примера, имеем

$f(x,y,z)=(x\vee y\vee z)\cdot(x\vee\bar y\vee\bar z)\cdot(\bar x\vee y\vee z).$

Описанный способ нахождения СДНФ (СКНФ) по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

1.Для нахождении СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ.

2. Если в некоторый конъюнкт K не входит скажем переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $K\wedge(y\vee\bar y)$ и, применяя 1-й закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ. Если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $(y\vee\bar y)$.

3. Если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.

Замечание: Для построения СКНФ дизъюнкт не содержащий скажем переменную y заменяем на эквивалентную формулу $D\vee y\cdot\bar y$ и, применяем 2-й закон дистрибутивности.

Пример**:** Построить СКНФ для функции F при помощи эквивалентных преобразований

$$F_1=x\,|\,(y\oplus z)=\bar x\vee\overline{(y\oplus z)}=\bar x\vee\overline{(\bar yz\vee y\bar z)}=\bar x\vee\overline{\bar yz}\cdot\overline{y\bar z}=\bar x\vee(\bar{\bar y}\vee\bar z)\cdot(\bar y\vee\bar{\bar z})=\bar x\vee(y\vee\bar z)\cdot(\bar y\vee z)=$$
$$=(\bar x\vee y\vee\bar z)\cdot(\bar x\vee\bar y\vee\bar z)-СКНФ$$

Пример**:** С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

$F=\overline{((x\downarrow y)\to\bar z)}\leftrightarrow y.$

Решение: Приведем функцию F к базису $S_1=\{\neg,\wedge,\vee\}$

$$F=\overline{(\bar x\cdot\bar y\to)}\leftrightarrow y=\overline{(\bar{\bar x}\cdot\bar{\bar y}\vee\bar z)}\leftrightarrow y=\overline{(x\vee y\vee\bar z)}\leftrightarrow y=\overline{(x\vee y\vee\bar z\vee\bar y)(\overline{x\vee y\vee\bar z}\vee y)}=$$
$$=\overline{\bar{\bar x}\cdot\bar{\bar y}\cdot z\vee y}=\overline{\bar{\bar x}\cdot\bar{\bar y}\cdot z}\cdot\bar y=(x\vee y\vee\bar z)\bar y-КНФ$$

Для приведения F к ДНФ, применим первый закон дистрибутивности.

$F=x\bar y\vee y\bar y\vee\bar z\cdot\bar y=x\bar y\vee\bar z\cdot\bar y=x\bar y\vee\bar z\cdot\bar y-ДНФ$

Приведем функцию F к СДНФ:

$F=x\bar y\vee\bar z\bar y=x\bar y(z\vee\bar z)\vee\bar z\bar y(x\vee\bar x)=x\bar yz\vee x\bar y\bar z\vee(\underline{\underline{\bar z\bar yx}}\vee\bar z\bar y\bar x)=x\bar yz\vee x\bar y\bar z\vee\bar x\bar y\bar z.$

Приведем функцию F к СКНФ:

$$F=(x\vee y\vee\bar z)\bar y=(x\vee y\vee\bar z)(\bar y\vee x\bar x)=(x\vee y\vee\bar z)(\bar y\vee x)(\bar y\vee\bar x)=(x\vee y\vee\bar z)(\bar y\vee x\vee z\bar z)\cdot$$
$$(\bar y\vee\bar x\vee z\bar z)=(x\vee y\vee\bar z)(\bar y\vee x\vee z)(\bar y\vee x\vee\bar z)(\bar y\vee\bar x\vee z)(\overline{y\vee\bar x}\vee\bar z).$$

Пример: Привести функцию к ДНФ, используя 1-ый закон дистрибутивности.

$$x\cdot\bar y\cdot\overline{x\cdot y\cdot\bar z}\cdot(y\vee z)=x\cdot\bar y\cdot(\bar x\vee\bar y\vee\bar{\bar z})\cdot(y\vee z)=(x\cdot\bar y\cdot\bar x\vee x\cdot\bar y\cdot\bar y\vee x\cdot\bar y\cdot z)\cdot(y\vee z)=-это КНФ$$
$$=(0\vee x\cdot\bar y\vee x\cdot\bar y\cdot z)\cdot(y\vee z)=(x\cdot\bar y\vee x\cdot\bar y\cdot z)\cdot(y\vee z)=-это\ другая\quad КНФ$$
$$=x\cdot\bar y\cdot y\vee x\cdot\bar y\cdot z\cdot y\vee x\cdot\bar y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot z\cdot z=0\vee0\vee x\cdot\bar y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot z=x\cdot\bar y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot z-это\quad ДНФ$$

Пример: Привести функцию к КНФ, используя второй закон дистрибутивности.

$$x\vee y\cdot x\cdot [illegible] = x\vee y\cdot(\bar x\vee\bar y)\cdot z=x\vee y\cdot z\cdot(\bar x\vee\bar y)=(x\vee y\cdot z)\cdot(x\vee\bar x\vee\bar y)=$$
$$=(x\vee y)\cdot(x\vee z)\cdot(1\vee y)=(x\vee y)\cdot(x\vee z)-\quad это\quad КНФ$$

Пример: По данной таблице истинности построить СДНФ:

x	y	z	основные конъюнкции	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	0
0	0	1	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z$	1
0	1	0	$\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}$	1
0	1	1	$\bar{x}\cdot y\cdot z$	0
1	0	0	$x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$	0
1	0	1	$x\cdot\bar{y}\cdot z$	1
1	1	0	$x\cdot y\cdot\bar{z}$	1
1	1	1	$x\cdot y\cdot z$	1

Построим СКНФ для нашего примера на основании замечания.

1. Строим СДНФ для отрицания $\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot y\cdot z\vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$.

2. Используем законы де Моргана, получаем

$$f = \bar{\bar{f}} = \overline{\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot y\cdot z\vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}} = \overline{\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}}\wedge\overline{\bar{x}\cdot y\cdot z}\wedge\overline{x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}} = (x\vee y\vee z)\cdot(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\vee \vee y\vee z).$$

Задачи и упражнения:

1. Что называется КНФ (ДНФ)?
2. Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ.
3. Какие из следующих функций записаны в нормальной форме, а какие нет?

1. $x\vee y\to z$; 2. $(x\cdot y\vee\bar{x})\cdot(z\vee x)$; 3. $(x\vee z\vee\bar{x})\cdot x\cdot y\cdot(\bar{z}\vee x)$;

4. $x\cdot y\vee\bar{x}\cdot y\cdot(x\vee y)$; 5. $x\cdot y\cdot z\cdot\bar{x}\cdot x\vee z\cdot\overline{y\vee x}$; 6. $(x\vee y\vee y\vee z)\cdot\bar{z}\cdot(z\vee x)$;

7. $x\cdot y\vee\bar{x}\cdot z\vee y\cdot z\cdot\bar{x}\vee z$; 8. $(x\vee y\vee z)(y\vee xy\vee\bar{z})$; 9. $\overline{xyz}\vee\bar{x}y\vee x\overline{yz}$;

10. $\overline{xyz\vee x\bar{\bar{y}}}z\vee xy\bar{z}$; 11. $(yz\vee xy\vee z)(x\vee y\vee\bar{x}z)$; 12. $\overline{xyz}\vee\overline{\bar{x}y}\vee\overline{xy\bar{z}}$;

13. $\overline{xy\vee z}\vee xy\vee\overline{\bar{z}\vee xy}$; 14. $(x\vee y\vee z\vee t)(x\vee y)t$; 15. $x\vee y\vee\bar{z}\vee(x\vee yz)$;

16. $\bar{x}yz\vee x\overline{yz}\vee yz(\bar{x}\vee z)$; 17. $x\vee y\vee\bar{z}\vee xy\vee\bar{y}z$; 18. $\overline{xyz}\vee(x\vee y)(\bar{y}\vee z)$;

19. $(x\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee y)$; 20. $xyz\vee xy\vee\overline{zt}\vee x\bar{y}\overline{zt}$; 21. $(x\vee y\vee z)\cdot x\cdot(z\vee x)$.

5. Привести следующие формулы к ДНФ и КНФ и по возможности упростить.

1. $x\vee yz$; 2. $x\leftrightarrow y$; 3. $x\leftrightarrow yz$;

4. $x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$; 5. $xy\leftrightarrow\overline{xy}$; 6. $x\to(y\to z)$;

7. $\overline{xy}\vee(x\to y)$; 8. $xy\vee yz\vee\bar{z}$; 9. $x\vee\overline{yz}\vee\overline{xyz}$;

10. $\overline{\overline{\overline{x\vee y}}\vee z\cdot x}\vee x\cdot y$; 11. $(x\cdot y\vee z)\cdot(\bar{y}\vee\overline{x\cdot z})$; 12. $(\overline{xy}z\vee x)\cdot\overline{(x\vee y\vee\bar{z}\vee xz)}\vee y$;

13. $x\cdot y\cdot\overline{x\cdot\bar{y}\vee xyz}\vee\bar{z})$; 14. $x\cdot y\to\overline{z\vee y}$; 15. $\overline{\bar{z}\to y}\vee\bar{x}\cdot z)$;

16. $(x\oplus\bar{y})\to(z\oplus x)$; 17. $(x\downarrow y)\oplus z\cdot x$; 18. $(\bar{x}\vee z)\to(y\downarrow\bar{z})$;

19. $(x\mid\bar{y})\to\overline{x\cdot y\vee\bar{z}}$; 20. $\overline{x\vee\bar{y}}\leftrightarrow\overline{x\oplus z}$; 21. $\overline{x\cdot\bar{y}\vee xyz}\vee\bar{z}$.

6. Привести функции к совершенным формам (СДНФ и СКНФ) путем эквивалентных преобразований.

1. $xy\vee xy\bar{z}$ … $)\cdot(\bar{x}\vee y)$; 3. $x\vee y\vee z\bar{x}$;

… 6. $\bar{y}\vee\bar{x}\cdot(yz\vee\bar{z})$;

7. $(x\bar{y}\vee z)\cdot x\cdot(xz\vee y)$; 8. $xz\vee y\to\bar{x}z$; 9. $(\bar{y}\vee z)\oplus x\cdot y\cdot\bar{z}$;

10. $(\bar{x} \downarrow y) \vee y\bar{z} \wedge x$; 11. $\bar{x} \leftrightarrow x \cdot \overline{y \wedge \bar{z}}$; 12. $\overline{x \wedge \bar{y}} \downarrow \bar{z}$;

13. $\bar{x} \vee \bar{y}$; 14. $x\bar{y}(x \to y)$; 15. $(x \to y) \to x \vee \bar{y}$;

16. $x \to yz$; 17. $(x \to y) \to x$; 18. $xy \to (y \to x)$;

19. $x \vee y \to (x \to z)$; 20. $xy \to zt$; 21. $(\bar{y} \vee z) \oplus x \cdot y$.

7. Построить СДНФ и СКНФ для функций заданных вектором значений булевой функции.

1. (0011); 2. (0101); 3. (1110); 4. (1000); 5. (0011 1010);

6. (1100 0101); 7. (1000 1111); 8. (1110 1100); 9. (1000 0011); 10. (1100 0000);

11. (1101 0000 0011 0110); 12. (0000 1111 0101 1100);

13. (1001 0000 0011 0100); 14. (0101 0110 0010 0111);

15. (0001 1100 0011 1110); 16. (1101 1111 0011 0001);

17. (1111 0000 1111 0110); 18. (0101 0110 0101 0110);

19. (1000 0110 1011 1111); 20. (1010 1111 0111 0000).

8. Доказать равносильности путем приведения к СДНФ или СКНФ:

1. $xy = \bar{x} \vee \bar{y}$; 8. $x \to y \equiv \bar{y} \to \bar{x}$; 15. $(x \to y) \to y \equiv x \vee y$;

2. $x(x \vee y) \equiv x$; 9. $xy \vee x\bar{y} \equiv x$; 16. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$;

3. $x \vee x\bar{x}y \equiv x \vee y$; 10. $x \vee xy \equiv x$; 17. $(x \to z)(y \to z) \equiv (x \vee y) \to z$;

4. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$; 11. $x \vee \bar{x}y \equiv x \vee y$; 18. $x(y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

5. $x \to y \equiv \overline{x\bar{y}}$; 12. $x(\bar{x} \vee y) \equiv xy$; 19. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to z)$;

6. $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x$; 13. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$; 20. $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$;

7. $x \leftrightarrow y \equiv y \leftrightarrow x$; 14. $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$.

9. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

1. $x \mid y$; 8. $\bar{z} \to x \leftrightarrow (\bar{x} \mid y)$; 15. $x \downarrow y \to x \vee y \leftrightarrow x \mid y$;

2. $x \oplus y$; 9. $\overline{((x \mid y) \to z) \oplus y}$; 16. $(\bar{x} \vee \bar{y}) \to (\overline{z \oplus x})$;

3. $x \leftrightarrow y$; 10. $\overline{(x \vee \bar{y}) \to (z \oplus \bar{x})}$; 17. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y \mid x)}$;

4. $x \downarrow y$; 11. $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$; 18. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$;

5. $x \to y$; 12. $(z \to x) \oplus (x \mid \bar{y})$; 19. $x \downarrow y \to x \mid y \oplus x$;

6. $x \to yz$; 13. $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$; 20. $(x \vee \bar{y}) \to (\overline{z \leftrightarrow \bar{x}})$.

7. $\overline{xyz}$; 14. $((\overline{x \downarrow y}) \oplus z) \to yx$;

10. Проверьте двумя способами, будут ли эквивалентны следующие функции.
1) составлением таблиц истинности; 2)приведением к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

1. $x \vee y, x \to y$; 11. $x \wedge (y \leftrightarrow z), (x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$;

2. $x \to y, x \leftrightarrow y$; 12. $x \vee (y \mid z), (x \vee y) \mid (x \vee z)$;

3. $x \vee y, x \oplus y$; 13. $x \oplus (y \to z), (x \to y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$;

4. $xy \vee z, x(y \vee z)$; 14. $x \to (y \oplus z), (x \to y) \oplus (x \to z)$;

5. $(x \to y)z, x \to yz$; 15. $x \mid (y \to z), (x \mid y) \to (x \mid z)$;

6. $xy \leftrightarrow x, (x \leftrightarrow y)z$; 16. $x \wedge (y \to z), (x \wedge y) \to (x \wedge z)$;

7. $(\overline{x \vee y}), \bar{x} \wedge \bar{y}$; 17. $x \vee (y \to z), (x \vee y) \to (x \vee z)$;

8. $x \to y, \bar{x} \vee y$; 18. $x \oplus (y \to z), (xy) \leftrightarrow (x \oplus z)$;

9. $x \vee (y$ [illegible] 19. $x \downarrow (y \leftrightarrow z), (x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$;

10. $x \wedge (y \to z), (x \wedge y) \to (x \wedge z)$; 20. $x \wedge (y \oplus z), (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

Практическая работа 8. Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути в нагруженном ориентированном графе.

Цель. Изучить алгоритм нахождения минимального пути в орграфе и возможности его практического применения.

Теоретическая часть.

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров отрицательной длины.

Алгоритм Форда – Беллмана.

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма являются величины $\lambda_j(k)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$ (n – число вершин графа); $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Для фиксированных i и k величина $\lambda_j(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более k дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить $k = 0$. Положить $\lambda_i(0) = \infty$ для всех вершин, кроме x_1; положить $\lambda_1(0) = 0$.

Шаг 3. В цикле по k, $k = 1,\ldots, n - 1$, каждой вершине x_i на k-ом шаге приписать индекс $\lambda_i(k)$ по следующему правилу:

$$\lambda_i(k) = \min_{1 \le j \le n} \{\lambda_j(k-1) + c_{ji}\}$$

для всех вершин, кроме x_1, положить $\lambda_1(k) = 0$.

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов $\lambda_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. При этом $\lambda_i(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для любой вершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$\lambda_r(n-2) + c_{rs} = \lambda_s(n-1)$, $\quad x_r \in G^{-1}(x_s)$,

где $G^{-1}(x_s)$ - прообраз вершины x_s.

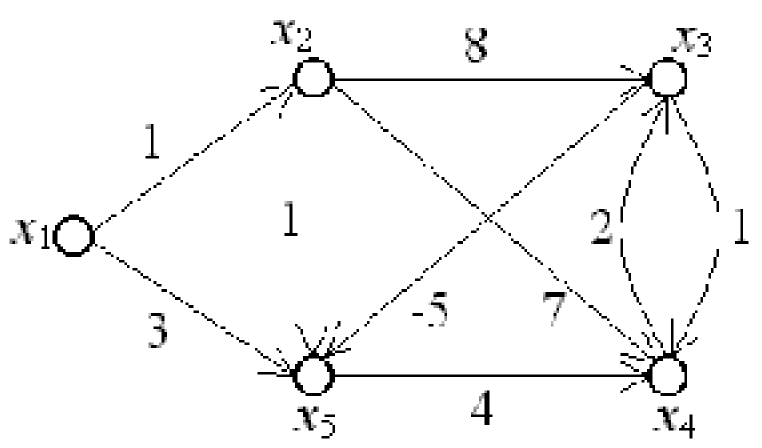
Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$\lambda_q(n-3) + c_{qr} = \lambda_r(n-2)$, $\quad x_q \in G^{-1}(x_r)$,

где $G^{-1}(x_r)$ - прообраз вершины x_r, и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i, найдем минимальный путь.

<u>Пример:</u> С помощью алгоритма Форда – Беллмана найти минимальный путь из вершины x_1 в вершину x_3 в графе, изображенном на рисунке:



Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда – Беллмана для этого примера. Значения индексов $\lambda_i(k)$ будем заносить в таблицу индексов.

Шаг 1. Введем число вершин графа $n = 5$. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k = 0$, $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_2(0) = \lambda_3(0) = \lambda_4(0) = \lambda_5(0) = \infty$. Эти значения занесем в первый столбец таблицы.

Шаг 3.

<u>$k = 1$</u>.

$\lambda_1(1) = 0$.

Для $k = 1$:

$$\lambda_i(1) = \min_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(0) + c_{ji}\}.$$

$\lambda_2(1) = \min\{\lambda_1(0) + c_{12}; \lambda_2(0) + c_{22}; \lambda_3(0) + c_{32}; \lambda_4(0) + c_{42}; \lambda_5(0) + c_{52};\} = \min\{0 + 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 1$.

$\lambda_3(1) = \min\{\lambda_1(0) + c_{13}; \lambda_2(0) + c_{23}; \lambda_3(0) + c_{33}; \lambda_4(0) + c_{43}; \lambda_5(0) + c_{53};\} = \min\{0 + \infty; \infty + 8; \infty + \infty; \infty + 2; \infty + \infty\} = \infty$.

$\lambda_4(1) = \min\{\lambda_1(0) + c_{14};\ \lambda_2(0) + c_{24};\ \lambda_3(0) + c_{34};\ \lambda_4(0) + c_{44};\ \lambda_5(0) + c_{54};\} = \min\{0 + \infty;\ \infty + 7;\ \infty + 1;\ \infty + \infty;\ \infty + 4\} = \infty$.

$\lambda_5(1) = \min\{\lambda_1(0) + c_{15};\ \lambda_2(0) + c_{25};\ \lambda_3(0) + c_{35};\ \lambda_4(0) + c_{45};\ \lambda_5(0) + c_{55};\} = \min\{0 + 3;\ \infty + 1;\ \infty - 5;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty\} = 3$.

Полученные значения $\lambda_i(1)$ занесем во второй столбец таблицы. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $\lambda_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более одной дуги.

<u>k = 2.</u>

$\lambda_1(2) = 0$.

Для k = 2:

$$\lambda_i(2) = \min_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(1) + c_{ji}\}.$$

$\lambda_2(2) = \min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ \infty + \infty;\ \infty + \infty;\ 3 + \infty\} = 1$.

$\lambda_3(2) = \min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ \infty + \infty;\ \infty + 2;\ 3 + \infty\} = 9$.

$\lambda_4(2) = \min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ \infty + 1;\ \infty + \infty;\ 3 + 4\} = 7$.

$\lambda_5(2) = \min\{0 + 3;\ 1 + 1;\ \infty - 5;\ \infty + \infty;\ 3 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\lambda_i(2)$ занесем в третий столбец таблицы. Величины $\lambda_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более двух дуг.

<u>k = 3.</u>

$\lambda_1(3) = 0$.

Для k = 3:

$$\lambda_i(3) = \min_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(2) + c_{ji}\}.$$

$\lambda_2(3) = \min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ 9 + \infty;\ 7 + \infty;\ 2 + \infty\} = 1$.

$\lambda_3(3) = \min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ 9 + \infty;\ 7 + 2;\ 2 + \infty\} = 9$.

$\lambda_4(3) = \min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ 9 + 1;\ 7 + \infty;\ 2 + 4\} = 6$.

$\lambda_5(3) = \min\{0 + 3;\ 1 + 1;\ 9 - 5;\ 7 + \infty;\ 2 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\lambda_i(3)$ занесем в четвертый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более трех дуг.

<u>k = 4.</u>

$\lambda_1(4) = 0$.

Для k = 4:

$$\lambda_i(4) = \min_{1 \le j \le 5} \{\lambda_j(3) + c_{ji}\}.$$

$\lambda_2(4) = \min\{0 + 1;\ 1 + \infty;\ 9 + \infty;\ 6 + \infty;\ 2 + \infty\} = 1$.

$\lambda_3(4) = \min\{0 + \infty;\ 1 + 8;\ 9 + \infty;\ 6 + 2;\ 2 + \infty\} = 8$.

$\lambda_4(4) = \min\{0 + \infty;\ 1 + 7;\ 9 + 1;\ 6 + \infty;\ 2 + 4\} = 6$.

$\lambda_5(4) = \min\{0 + 3;\ 1 + 1;\ 9 - 5;\ 6 + \infty;\ 2 + \infty\} = 2$.

Полученные значения $\lambda_i(4)$ занесем в пятый столбец таблицы. Величины $\lambda_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i-ую, содержащего не более четырех дуг.

I (номер вершины)	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при s =3:

$\lambda_r(3) + c_{r3} = \lambda_3(4)$, $x_r \in G^{-1}(x_3)$,

где $G^{-1}(x_3)$ - прообраз вершины x_3.

$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}$.

Подставим в последнее равенство последовательно r = 2 и r = 4, чтобы определить, для какого r это равенство [illegible]

$\lambda_2(3) + c_{23}$ [illegible] $1 + 8$ [illegible] $\lambda_3(4)$ [illegible] 9.

$\lambda_4(3) + c_{43} = 6 + 2 = \lambda_3(4) = 8$.

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3, является вершина x_4.

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при s =4:

$\lambda_r(2) + c_{r4} - \lambda_4(3)$, $x_r \in G^{-1}(x_4)$,

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4.

$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}$.

Подставим последовательно r = 2, r = 3 и r = 5, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_2(2) + c_{24} = 1 + 7 \neq \lambda_4(3) = 6$,

$\lambda_3(2) + c_{34} = 1 + 1 \neq \lambda_4(3) = 6$,

$\lambda_5(2) + c_{54} - 2 - 4 - \lambda_4(3) = 6$,

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4, является вершина x_5.

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при s =5:

$\lambda_r(1) + c_{r5} - \lambda_5(2)$, $x_r \in G^{-1}(x_5)$,

где $G^{-1}(x_5)$ - прообраз вершины x_5.

$G^{-1}(x_5) = \{x_1, x_2\}$.

Подставим последовательно r = 1 и r = 2, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$\lambda_1(1) + c_{15} = 0 + 3 \neq \lambda_5(2) = 2$,

$\lambda_2(1) + c_{25} - 1 - 1 - \lambda_5(2) = 2$,

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5, является вершина x_2.

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при s =2:

$\lambda_r(0) + c_{r2} - \lambda_2(1)$, $x_r \in G^{-1}(x_2)$,

где $G^{-1}(x_2)$ - прообраз вершины x_2.

$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}$.

Подставим r = 1, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$\lambda_1(0) + c_{12} - 0 - 1 - \lambda_2(1) = 1$.

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2, является вершина x_1.

Итак, найден минимальный путь – x_1, x_2, x_5, x_4, x_3, его длина равна 8.

Задачи и упражнения:

Дан список дуг с указанием их длин. Составьте по нему рисунок ориентированного графа. Найдите для этого графа наименьший путь от вершины-входа до вершины с максимальным номером.

1. (0;1) – 3, (0;2) – 9, (1;2) – 5, (2;4) – 1, (1;3) – 8, (2;3) – 2, (3;5) – 4, (4;5) – 6.
2. (0;1) – 4, (0;2) – 5, (1;2) – 8, (2;4) – 3, (1;3) – 11, (2;3) – 5, (3;5) – 3, (4;5) – 6.
3. (0;1) – 3, (0;2) – 9, (1;2) – 12, (2;4) – 1, (1;3) – 2, (2;3) – 3, (3;5) – 10, (4;5) – 5.
4. (0;1) – 6, (0;2) – 2, (2;1) – 3, (2;4) – 6, (1;3) – 1, (2;3) – 5, (3;5) – 8, (4;5) – 7.
5. (0;1) – 6, (0;2) – 5, (1;2) – 1, (2;4) – 6, (1;3) – 7, (2;3) – 6, (3;5) – 8, (4;5) – 7.
6. (0;1) – 3, (0;2) – 2, (2;1) – 1, (2;5) – 3, (1;5) – 4, (5;4) – 8, (5;3) – 5, (3;4) – 3, (4;6) – 2, (3;6) – 4.
7. (0;1) – 10, (0;2) – 5, (2;1) – 4, (2;5) – 8, (1;5) – 3, (5;4) – 4, (5;3) – 2, (3;4) – 1, (4;6) – 5, (3;6) – 7.
8. (0;1) – 3, (0;2) – 2, (2;1) – 2, (2;5) – 12, (1;5) – 8, (5;4) – 2, (5;3) – 6, (3;4) – 1, (4;6) – 8, (3;6) – 3.
9. (0;1) – 2, (0;2) – 7, (2;1) – 1, (2;5) – 6, (1;5) – 12, (5;4) – 10, (5;3) – 5, (3;4) – 4, (4;6) – 2, (3;6) – 7.
10. (0;1) – 4, (0;2) – 2, (2;1) – 1, (2;5) – 7, (1;5) – 5, (5;4) – 4, (5;3) – 1, (3;4) – 4, (4;6) – 3, (3;6) – 7.
11. (0;2) – 2, (0;1) – 7, (2;1) – 4, (2;4) – 9, (1;3) – 3, (3;4) – 1, (4;6) – 2, (3;5) – 8, (6;5) – 4, (6;7) – 10, (5;7) – 5.
12. (0;2) – 10, (0;1) – 5, (2;1) – 1, (2;4) – 4, (1;3) – 3, (3;4) – 5, (4;6) – 3, (3;5) – 10, (6;5) – 10, (6;7) – 5, (5;7) – 1.
13. (0;2) – 4, (0;1) – 6, (2;1) – 4, (2;4) – 6, (1;3) – 3, (3;4) – 2, (4;6) – 4, (3;5) – 7, (6;5) – 3, (6;7) – 8, (5;7) – 5.
14. (0;2) – 3, (0;1) – 1, (2;1) – 4, (2;4) – 2, (1;3) – 6, (3;4) – 4, (4;6) – 3, (3;5) – 6, (6;5) – 4, (6;7) – 12, (5;7) – 7.
15. (0;2) – 8, (0;1) – 12, (2;1) – 3, (2;4) – 6, (1;3) – 5, (3;4) – 4, (4;6) – 10, (3;5) – 4, (6;5) – 6, (6;7) – 10, (5;7) – 6.

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

5.1.1. Перечень основной литературы:

1.Зарипова, Э. Р. Лекции по дискретной математике. Математическая логика: учебное пособие / Э. Р. Зарипова, М. Г. Кокотчикова, Л. А. Севастьянов. — Москва : Российский университет дружбы народов, 2014. — 120 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22190.html

2.Гусак, А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 287 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28244.html

5.1.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. — Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13115.html

2.Казаков В.Г. Планирование экспериментальных исследований и статистическая обработка данных. Основы научных исследований в промышленной теплоэнергетике : учебное пособие / Казаков В.Г., Громова Е.Н.. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2020. — 85 c. — Режим доступа: https://www.iprbookshop.ru/118407.html

5.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Дополнительные главы математики»
2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики»

5.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. http://el.ncfu.ru/ – система управления обучением ФГАОУ ВО СКФУ. Дистанционная поддержка дисциплины «Математика».
2. http://www.mathnet.ru - общероссийский портал Math-Net.Ru

3. https://www.mathedu.ru - электронная библиотека по математике.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

По организации самостоятельной работы
по дисциплине «Дополнительные главы математики»
направления подготовки
13.03.02 - Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск
2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Дополнительные главы математики» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Дополнительные главы математики» направлена на формирование следующих **компетенций:**

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ПК-2: Способен анализировать режимы работы систем электроснабжения объектов	ИД-5$_{ПК-2}$ Применяет инженерно-технические расчеты для решения задач профессиональной деятельности	Способен применять инженерно-технические расчеты для решения задач профессиональной деятельности

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора профессиональных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- р[illegible]ельских умений;
- [illegible]обранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании

курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
2 семестр					
ПК-2	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,54	0,06	0,6
ПК-2	Самостоятельное изучение литературы по темам 3-7	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	91,26	10,14	101,4
		Итого за 2 семестр	**91,8**	**10,2**	**102**
4 семестр					
ПК-2	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,54	0,06	0,6
ПК-2	Самостоятельное изучение литературы по темам 10-17	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	91,26	10,14	101,4
		Итого за 4 семестр	**91,8**	**10,2**	**102**
		Итого	**183,6**	**20,4**	**204**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

В[illegible]иональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему) творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки теории.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

Осуществляется в рамках текущего контроля - решения разноуровненых задач по разделам дисциплины и промежуточного контроля – на зачете.

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

1.Зарипова, Э. Р. Лекции по дискретной математике. Математическая логика: учебное пособие / Э. Р. Зарипова, М. Г. Кокотчикова, Л. А. Севастьянов. — Москва : Российский университет дружбы народов, 2014. — 120 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22190.html

2.Гусак, А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 287 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28244.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. — Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13115.html

2.Казаков В.Г. Планирование экспериментальных исследований и статистическая обработка данных. Основы научных исследований в промышленной теплоэнергетике : учебное пособие / Казаков В.Г., Громова Е.Н.. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2020. — 85 с. — Режим доступа: https://www.iprbookshop.ru/118407.html