Подписан: Шебзухова Татьяна Александровна
Дата: 2021-08-27 14:04:55
Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского федерального университета
Дата подписания: 12.09.2023 16:45:37
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «ФИЗИКА»
для студентов направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Передача и распределение электрической энергии в системах электроснабжения

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

Введение

Дисциплина «Физика» относится к базовой части дисциплин Блока 1 (Б1.О.17) ОП ВО подготовки бакалавров по направлению 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника. Дисциплина изучается во 2 и 3 семестрах.

Изучение физики является важной составной частью высшего образования в качественной подготовке бакалавров инженерного направления. Дисциплина «Физика» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса физики и математики или соответствующих дисциплин среднего профессионального образования.

Задачи освоения дисциплины: изучение законов окружающего мира в их взаимосвязи; овладение фундаментальными принципами и методами решения научно-технических задач; формирование навыков по применению положений фундаментальной физики к грамотному научному анализу ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться при создании новых технологий; освоение основных физических теорий, позволяющих описать явления в природе, и пределов применимости этих теорий для решения современных и перспективных технологических задач. Данные методические указания способствуютрешению этих задач.

В совокупности с другими дисциплинами базовой части ФГОС ВО дисциплина «Физика» направлена на формирование следующей компетенции бакалавра по направлению 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»:

общепрофессиональной (ОПК-2, ИД-5$_{ОПК-2}$, ИД-6$_{ОПК-2}$,)

обладает способностью применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач.

В результате освоения содержания дисциплины «Физика» студент должен знать:

– основные физические явления и законы механики, электротехники, теплотехники, оптики и ядерной физики и их математическое описание;

– основные методы решения практических задач исследования и моделирования физических явлений и процессов в своей предметной области;

– связи между различными физическими понятиями и объектами;

– методы анализа физических явлений и процессов в электротехнических устройствах и системах.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Физика» составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины «Физика».

Содержание Стр.

Введение..... 2
Раздел 1. Механика..... 4
Практическое занятие 1. Кинематика материальной точки..... 4
Практическое занятие 2. Динамика материальной точки..... 13
Практическое занятие 3. Работа и энергия. Кинематика и динамика вращательного движения..... 18
Практическое занятие 4. Механические колебания и волны..... 33
Раздел 2. Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамика..... 43
Практическое занятие 5. Основы молекулярно-кинетической теории. Статистическая физика..... 43
Практическое занятие 6. Основы термодинамики..... 50
Раздел 3. Электричество 60
Практическое занятие 7. Электростатика 60
Практическое занятие 8. Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в диэлектриках..... 73
Практическое занятие 9. Законы постоянного тока..... 77
Раздел 4. Магнетизм. Электромагнитные колебания и волны..... 90
Практическое занятие 10. Понятие о магнитном поле. Закон Био – Савара – Лапласа..... 90
Практическое занятие 11. Действие магнитного поля на движущийся заряд..... 102
Практическое занятие 12. Электромагнитные колебания в колебательном контуре..... 110
Практическое занятие 13. Переменный электрический ток..... 118
Раздел 5. Оптика. Квантовая природа излучения..... 126
Практическое занятие 14. Геометрическая оптика. Линзы..... 126
Практическое занятие 15. Волновая оптика. Интерференция и дифракция света. Дисперсия и поляризация света..... 134
Практическое занятие 16. Квантовая природа злучения..... 155
Раздел 6. Элементы квантовой механики и ядерной физики..... 167
Практическое занятие 17. Теория атома водорода по Бору. Элементы квантовой механики..... 167
Практическое занятие 18. Основы физики атомного ядра..... 180
Справочные материалы по физике..... 190
Справочные материалы по математике..... 219
Рекомендуемая литература..... 222

Раздел 1. Механика

Практическое занятие 1.

Тема занятия. **Кинематика материальной точки**

Цель занятия. Изучить закономерности движения материальной точки.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Материальная точка. Траектория. Перемещение и путь. Скорость и ускорение, как производные от радиус-вектора по времени. Тангенциальное и нормальное ускорения. Кинематика вращательного движения материальной точки. Угловая скорость и угловое ускорение, как производные от угла поворота по времени. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Кинематика прямолинейного и вращательного движения материальной точки широко применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Поступательное движение

Средняя (путевая) скорость:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt. Путь Δs не может убывать и принимать отрицательные значения, т.е. $\Delta s \geq 0$.

Мгновенная скорость (проекция на ось x):

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$$

Среднее ускорение:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}$$

Мгновенное (линейное) ускорение (проекция на ось x):

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Основные уравнения кинематики поступательного движения: скорость и путь равнопеременного поступательного движения:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at,$$

$$s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}.$$

где υ_0 – начальная скорость (в момент времени $t = 0$); для равнозамедленного движения $a < 0$, для равноускоренного $a > 0$).

При движении тела по вертикальному направлению в поле силы тяжести Земли $a = g$.

Движение материальной точки по окружности

Угловая скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при движении точки по окружности:

$$\upsilon = \omega R, \quad a_t = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R,$$

где υ – модуль линейной скорости; a_t и a_n – модули тангенциального и нормального ускорений; ω – модуль угловой скорости; ε – модуль углового ускорения; R – радиус окружности.

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Основные уравнения кинематики вращательного движения: угловая скорость и угловой путь

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}.$$

Для равнопеременного вращательного движения $(\varepsilon = const)$, $\varepsilon > 0$ – ускоренное вращение, $\varepsilon < 0$ – замедленное вращение.

Связь частоты вращения *n* и угловой скорости:

$$\omega = 2\pi n.$$

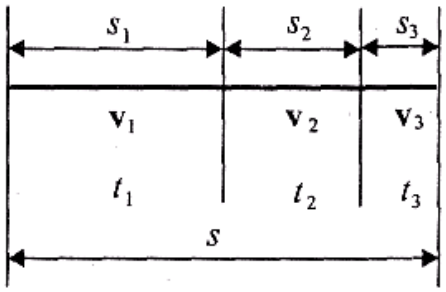
Связь углового перемещения и числа оборотов *N*:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью υ_1 = 16 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью υ_2 = 12 км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью υ_3 = 5 км/ч. Определите среднюю скорость движения студента на всем пути.

Решение:



Длина первой части пути $s_1=v_1t_1$, второй части пути $s_2=v_2t_2$, третьей части, $s_3=v_3t_3$.

По условию, $s_1=s_2+s_3$, а время $t_2=t_3$. Средняя скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3},$$

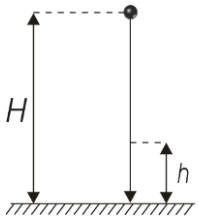
так как s_1- половина пути, то весь путь равен $2s_1$, время $t_1=s_1/v_1$, оставшееся время t_2+t_3 = , тогда

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{\upsilon_1}+\frac{2s_1}{\upsilon_2+\upsilon_3}} = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2+\upsilon_3)}{2\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3}.$$

Задача 2. Последние 2 метра пути вертикально падающее тело прошло за 0,3 с. С какой высоты падало тело?

Дано:
h = 2м
t_2 = 0,3с

H = ?



Высоту H падения тела (без начальной скорости) можно определить по формуле $H=\frac{gt^2}{2}$. Здесь t – полное время падения. Очевидно $t = t_1+ t_2$, где t_1 – время прохождения первого участка; t_2 – время прохождения последних 2-х метров пути.

Запишем уравнение движения для двух последних метров пути, считая движение равноускоренным:

$$h=\upsilon_1 t_2+\frac{gt_2^2}{2},$$

где υ_1 – скорость, с которой тело «входит» в этот участок пути.

Следовательно, $$\upsilon_1=\frac{h-\frac{gt_2^2}{2}}{t_2}=\frac{h}{t_2}-\frac{gt_2}{2}\ . \qquad (1)$$

Первый участок пути тело проходит без начальной скорости, т.е. $\upsilon_0 = 0$, а так как $g=\frac{\upsilon_1-\upsilon_0}{t_1}$, то $t_1=\frac{\upsilon_1}{g}$. Учитывая (1), получим $t_1=\frac{h}{gt_2}-\frac{t_2}{2}$.

Таким образом, общее время движения тела $t = t_1+ t_2$ равно

$$t=\frac{h}{gt_2}-\frac{t_2}{2}+t_2=\frac{h}{gt_2}+\frac{t_2}{2} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в формулу для H, окончательно, получим

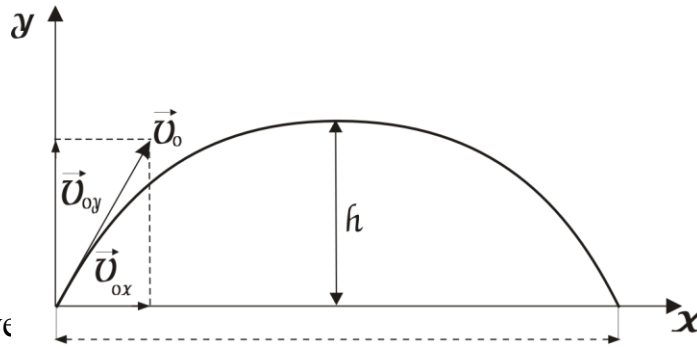
$$H = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{gt_2} + \frac{t_2}{2}\right)^2 = \frac{10}{2}\cdot\left(\frac{2}{10\cdot 0{,}3} + \frac{0{,}3}{2}\right)^2 \approx 3{,}33\ \text{м}.$$

Задача 3. Тело брошено с начальной скоростью υ_0 = 20 м/с под углом α = 30˚ к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, дальность полета, а так же тангенциальное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории в начальный момент времени.

Дано:
υ_0=20 *м/с*
α=30˚

---

h = *?*
S = *?*
a_τ = *?*
a_n = *?*
R = *?*



Воспользуемся законом независимости движений: движение тела представим как два независимых движения вдоль осей координат *X* и *Y*.
Из треугольника скоростей найдем начальные скорости

$$\upsilon_{ox} = \upsilon_o \cdot \cos\alpha \ , \quad \upsilon_{oy} = \upsilon_o \cdot \sin\alpha \ . \qquad (1)$$

Вдоль оси X движение равномерное (при отсутствии сопротивления движению, других сил, действующих вдоль оси X, нет). Поэтому υ_x не изменяется, то есть $\upsilon_x = \upsilon_{ox}$.

Вдоль оси Y движение – равноускоренное за счет силы тяготения. При подъеме на высоту h скорость υ_y изменяется со временем по закону: $\upsilon_y = \upsilon_{oy} - gt$. Считая, что в максимальной точке подъема $\upsilon_y = 0$, найдем время подъема t_1: $\upsilon_{oy} = gt_1$. Учитывая (1), получим

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} \qquad (2)$$

Из уравнения движения вдоль оси y найдем высоту подъема

$$h = \upsilon_{oy}\cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 5\ \text{м}.$$

Из уравнения равномерного движения вдоль оси X, найдем дальность полета S:

$$S = \upsilon_{ox}\cdot t = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha \cdot t,$$

где t- общее время движения, из соображений симметрии, равное удвоенному времени подъема, т.е. t=2 t_1. Тогда

$$S = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha \cdot 2t_1 = 2\upsilon_0 \cos\alpha \cdot \upsilon_0 \frac{\sin\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 34{,}6\ \text{м}.$$

Тангенциальное ускорение, по определению, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, а так как скорость $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$, и $\upsilon_x = \upsilon_{ox}$, а $\upsilon_y = \upsilon_{oy} - gt$, значит $\upsilon = \sqrt{\upsilon_{ox}^2 + \left(\upsilon_{oy} - gt\right)^2}$.

Следовательно $$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\sqrt{\upsilon_{ox}^2 + \left(\upsilon_{oy} - gt\right)^2}}{dt} = \frac{\left(\upsilon_{oy} - gt\right)\cdot g}{\sqrt{\left(\upsilon_{oy} - gt\right)^2 + \upsilon_{ox}^2}}$$

В начальный момент времени t=0,

$$a_\tau = \frac{\upsilon_{oy}\cdot g}{\sqrt{\upsilon_{ox}^2 + \upsilon_{oy}^2}} = \frac{\upsilon_{oy}\cdot g}{\upsilon_0} = \frac{\upsilon_0 \cdot \sin\alpha \cdot g}{\upsilon_0} = g\cdot\sin\alpha = 5\ \text{м/с}^2.$$

Полное ускорение движения тела, очевидно, равно ускорению свободного падения g. Поэтому $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g$.

Откуда $a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = 8{,}66\ \text{м/с}^2$.

По определению, $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$. Следовательно $R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = 46{,}2$ м.

Задача 4. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$, $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где A_1 = 4 м/с, B_1 = 8 м/с^2, C_1 = −16 м/с^3, A_2 = 2 м/с, B_2 = −4 м/с^2, C_2 = 1 м/с^3. В какой момент времени t ускорение этих точек будут одинаковы? Найти скорости υ_1 и υ_2 точек в этот момент времени.

Дано:

$x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$

$x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$

A_1=4 м/с.

A_2=2 м/с.

B_1 = 8 м/с^2.

B_2= - 4 м/с^2.

C_1=-16 м/с^3

C_2=1 м/с^3

$a_1 = a_2$

t =? υ_1=? υ_2=?

Для одномерного движения ускорение есть вторая производная от координаты, то есть $a = d^2x/dt^2$ или первая производная от скорости то есть $a = d\upsilon/dt$. Поэтому надо, вначале определить скорости точек:

$$\upsilon_1 = \frac{dx_1}{dt} = (A_1t + B_1t^2 + C_1t^3)' = A_1 + 2B_1t + 3C_1t^2 \qquad (1)$$

$$\upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = (A_2t + B_2t^2 + C_2t^3)' = A_2 + 2B_2t + 3C_2t^2 \qquad (2)$$

Теперь найдем ускорения.

$$a_1 = \frac{d\upsilon_1}{dt} = (A_1 + 2B_1t + 3C_1t^2)' = 2B_1 + 6C_1t \qquad (3)$$

$$a_2 = \frac{d\upsilon_2}{dt} = (A_2 + 2B_2t + 3C_2t^2)' = 2B_2 + 6C_2t \qquad (4)$$

Приравняв (3) и (4), найдем t:

$$t = \frac{B_1 - B_2}{3(C_2 - C_1)} = \frac{8-(-4)}{3(1-(-16))} = 0{,}235\ \text{с}.$$

Теперь подставим это значение t в (1) и (2):

$$\upsilon_1 = 4 + 2\cdot 8\cdot 0{,}235 + 3\cdot(-16)\cdot(0{,}235)^2 = 5{,}1\ \text{м/с},$$

$$\upsilon_2 = 2 + 2\cdot(-4)\cdot 0{,}235 + 3\cdot 1\cdot(0{,}235)^2 = 0{,}286\ \text{м/с}.$$

Задача 5. Материальная точка движется на плоскости согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right); & x, y \text{ – в метрах,} \\ y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right); & t \text{ – в секундах.} \end{cases}$$

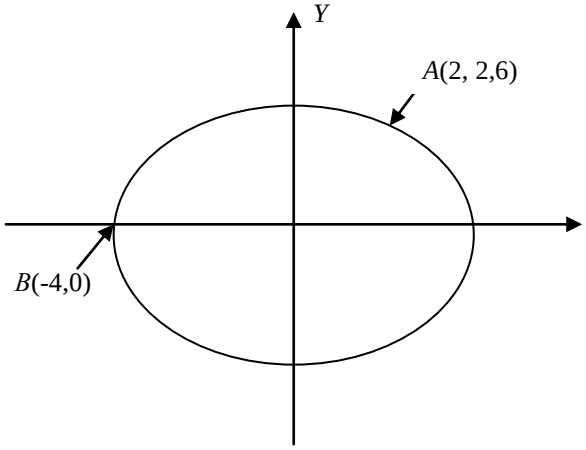
Найти: 1) уравнение траектории;
2) координаты точки;
3) полную скорость;
4) полное ускорение;
5) тангенциальное и нормальное ускорение;
6) радиус кривизны траектории в моменты времени t_1=2 с и t_2=6 с.

Решение:

1. Для нахождения уравнения траектории (зависимости одной координаты от другой) исключим из уравнений переменную величину t:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{y}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4^2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{y^2}{3^2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Это уравнение эллипса с полуосями a = 4 м; b = 3 м.



В момент t_1= 2с

$$x_1 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) \Rightarrow x_1 = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2 \text{ м}$$

$$y_1 = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right) \Rightarrow y_1 = 3\sin\frac{\pi}{3} = 2{,}6 \text{ м}$$

В момент t_2 = 6 с: $x_2 = 4\cos(\pi) = -4$ м, $y_2 = 3\sin(\pi) = 0$ м.

Таким образом, в момент времени $t_1 = 0$ координаты точки: A (x,y) = (2, 2, 6); в момент времени t_2 = 6 с координаты точки: B (x,y) =(−4, 0).

2. Для нахождения полной скорости найдем υ_x и υ_y в моменты t_1 = 2с и t_2 = 6с:

$$\upsilon_x = x' = \frac{dx}{dt} = \left(4\cos\frac{\pi}{6}\cdot t\right)' = -\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) = \frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$$

$$\upsilon_y = y' = \left(3\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)' = \frac{3\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right) = \frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$$

$$\upsilon_{x1}=-\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right)=-\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1{,}81\ \text{м/с}.$$

$$\upsilon_{y1}=\frac{1}{2}\pi\cos\left(60^{\circ}\right)=0{,}785\ \text{м/с}.$$

$$\upsilon_{\text{полн. }1}=\sqrt{\left(-1{,}8\right)^2+\left(0.785\right)^2}=1{,}98\ \text{м/с}.$$

Аналогично находим, что

$$\upsilon_{x2}=-\frac{4\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)=0\ \text{м/с},\qquad \upsilon_{y2}=\frac{1}{2}\pi\cos\left(\pi\right)=-1{,}57\ \text{м/с}.$$

$$\upsilon_{\text{полн.2}}=1{,}57\ \text{м/с}.$$

3. Для нахождения полного ускорения $a_{полн}$ найдем a_x и a_y в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 6$ с:

$$a_{\text{x}}=\upsilon_x'=-\frac{4}{6^2}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right),\ a_y=\upsilon_y'=-\frac{3}{6^2}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$$

$$a_{\text{x1}}=-\frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right)=-\frac{1}{9}\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-0{,}55\ \text{м/с}^2.$$

$$a_{\text{y1}}=-\frac{1}{12}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right)=-\frac{1}{12}\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-0{,}71\ \text{м/с}^2.$$

$$a_{\text{полн.1}}=\sqrt{a_X^2+a_Y^2}=0{,}9\ \text{м/с}^2.$$

$$a_{\text{x2}}=-\frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)=-\frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\pi\right)=1{,}1\ \text{м/с}^2.$$

$$a_{\text{y2}}=-\frac{1}{12}\pi^2\sin\left(\pi\right)=0\ \text{м/с}^2.$$

$$a_{\text{полн.2}}=1{,}1\ \text{м/с}^2.$$

4. Найдем нормальное (центростремительное) ускорение: $a_{\text{n}}=\dfrac{\upsilon^2}{R}$,

тангенциальное ускорение $a_{\text{x}}=\dfrac{d\upsilon}{dt}$.

Найдем $\upsilon_{\text{полн.}}$

$$\upsilon_{\text{полн}}=\sqrt{\upsilon_{\text{x}}^2+\upsilon_{\text{y}}^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{\tau}=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\pi^2\left(\frac{8}{9}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)\right)}{12\pi\sqrt{\frac{4}{9}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)+\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)}};$$

$$a_{\ \tau 1}=0{,}22\ \text{м/с}^2.$$

Следовательно $a_{\text{n1}}=\sqrt{a_{\text{полн}}^2-a_{\tau 1}^2}=\sqrt{0{,}9^2-0{,}22^2}=0{,}87\ \text{м/с}^2.$

Т ак как $\upsilon_{\text{полн1}} = 1{,}98$ м/с, то радиус кривизны в точке A равен

$$R_{\text{A}} = \frac{\upsilon_1^2}{a_{\text{n1}}} = \frac{1{,}98^2}{0{,}81} 4{,}84 \text{ м}.$$

Аналогично: $$a_{\tau 2} = \frac{25\pi \cos(\pi)\sin\pi}{12 \cdot 18\sqrt{\frac{4}{9}\sin^2(\pi) + \frac{1}{4}\cos^2(\pi)}} = 0.$$

Следовательно $a_{\text{n2}} = a_2 = 1{,}1 \text{м/с}^2 \Rightarrow R_{\text{B}} = \frac{1{,}57^2}{1{,}1} = 2{,}24$ м.

Вопросы и задания

1. Механическое движение. Система отсчета.
2. Материальная точка. Траектория. Перемещение и путь.
3. Скорость и ускорение, как производные от радиус-вектора по времени.
4. Тангенциальное и нормальное ускорения.
5. Кинематика вращательного движения материальной точки.
6. Угловая скорость и угловое ускорение, как производные от угла поворота по времени.
7. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$, $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $A_1 = 4$ м/с; $B_1 = 8$ м/с^2; $C_1 = -16$ м/с^3; $A_2 = 2$ м/с; $B_2 = -4$ м/с^2; $C_2 = 1$ м/с^3. Найти момент времени t, когда ускорения этих точек будут одинаковы. Найти скорости υ_1 и υ_2 точек в этот момент времени.
2. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где $A = 6$ м/с; $B = 1/8$ м/с^3. Найти среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.
3. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с; $B = -0{,}5$м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 0$с до $t_2 = 3$с.
4. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 10$м/с. Высота балкона над поверхностью земли $h = 12$м. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ с момента бросания до момента падения на землю.
5. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 5$ м/с. ерез $t = 2$с мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.
6. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте $h = 8{,}6$м два раза с интервалом $\Delta t = 3$с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость брошенного тела.

7. Вертикально вверх с начальной скоростью υ_0=20м/с брошен камень. Через τ=1с после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте h встретятся камни?

8. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью υ_0=20 м/с. Через какое время камень будет находиться на высоте h =15м? Найти скорость υ камня на этой высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять g =10 м/с^2.

9. Камень падает с высоты h =1200м. Какой путь s пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

10. С какой высоты H упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время t = 0,1с?

11. Тело брошено под некоторым углом α к горизонту. Найти величину этого угла, если горизонтальная дальность s полета тела в четыре раза больше максимальной высоты H траектории.

12. Снаряд, выпущенный из орудия под углом α = 30° к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h: спустя время t =10 с и t =50 с после выстрела. Определить начальную скорость υ_0 и высоту h.

13. Пуля пущена с начальной скоростью υ_0=200 м/с под углом α = 60° к горизонту. Определить максимальную высоту H подъема, дальность s полета и радиус R кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

14. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью υ_0=30 м/с. Определить скорость υ, тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в конце второй секунды после начала движения.

15. Тело брошено под углом α =30° к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

16. Диск радиусом r = 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

17. Диск радиусом r = 20 см вращается согласно уравнению $\varphi = A+Bt+Ct^3$, где A = 3 рад; B = -1 рад/с; C = 0, 1рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени t =10 с.

18. Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток времени Δt = 10с достиг частоты вращения n = 300 мин$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и число N оборотов, которое он сделал за это время.

19. Велосипедное колесо вращается с частотой n =5 с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени Δt = 1 мин. Определить угловое ускорение ε и число N оборотов, которое сделает колесо за это время.

20. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав N = 50 полных оборотов, оно изменило частоту вращения от n_1 =4 с$^{-1}$ до n_2 =6 с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε колеса.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 2.

Тема занятия. **Динамика материальной точки.**

Цель занятия. Изучить законы динамики материальной точки.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Взаимодействие тел. Сила, масса. Импульс (количество движения). Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Законы динамики материальной точки широко применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Динамика поступательного движения

Импульс абсолютно твердого тела массой m, движущегося со скоростью υ:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}\,.$$

Второй закон динамики (Ньютона):

$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt\,,$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости $F = -kx$;

где k – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость); x – абсолютная деформация;

б) сила тяжести: $F = mg$;

в) сила трения (скольжения): $F = \mu N$,

где μ – коэффициент трения; N – сила нормального давления.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы остается постоянным

$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const$.

Для двух тел при абсолютно упругом ударе:

$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$,

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ - скорости тел перед соударением, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости тел в момент после соударения.

Для абсолютно неупругого удара двух тел:

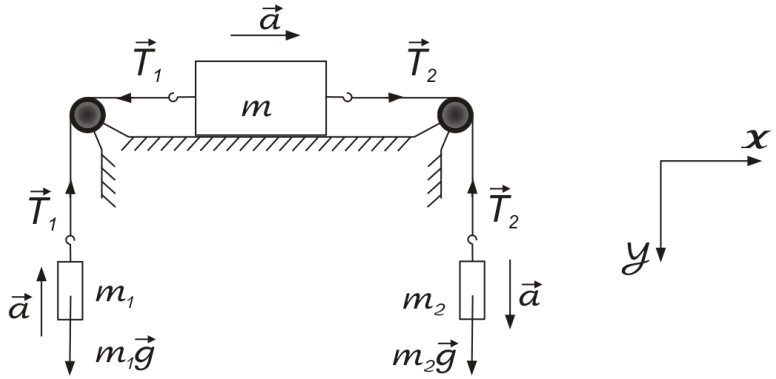
$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$.

Примеры решения задач

Задача 1. На гладком столе лежит брусок массой 3 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири массами m_1 = 2 кг и m_2= 3 кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок и силу T натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь. Шнуры считать нерастяжимыми.

Дано:
m=3кг
m_1 =2 кг
m_2= 3 кг.

a - ?
T_1 - ?
T_2 - ?



Распишем силы, действующие на тела. Выберем систему координат, как указано на рисунке (на груз m, лежащий на столе вообще-то действуют еще две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Но так как трением в задаче пренебрегается, то действие этих сил из рассмотрения мы исключаем).

Запишем второй закон Ньютона для каждого участвующего в движении тела:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \\ m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \end{cases}$$

(Поскольку шнуры считаются нерастяжимыми, то все тела движутся с одинаковым ускорением a).

Выбираем направление ускорения, как указано на рисунке (по направлению часовой стрелки). Спроецируем систему уравнений на выбранные оси координат:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ ma = T_2 - T_1 \end{cases} \quad (1)$$

Из второго уравнения (1) вычитаем первое:

$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g - (T_2 - T_1)$

$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g - ma$

$(m_2 + m_1 + m)a = (m_2 - m_1)g$, тогда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m} g \quad (2)$$

Подставляем численные значения:

$$a = \frac{3-2}{3+2+3}10 = \frac{10}{8} = 1{,}25 \text{ м/с}^2.$$

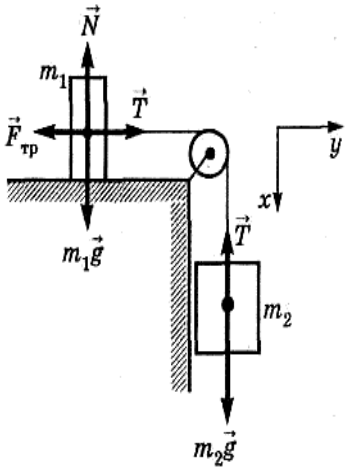
$T_1 = m_1 g + m_1 a = m_1(g + a) = 2(10 + 1{,}25) = 22{,}5$ Н,

$T_2 = m_2(g - a) = 3(10 - 1{,}25) = 26{,}2$ Н.

Задача 2. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых (m_1 = 400 г) движется по поверхности стола, а другой (m_2 = 600 г) — вдоль вертикали вниз. Коэффициент f трения груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определить: 1) ускорение a, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения T нити.

Решение.

Выбрав оси координат (рис), запишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эти оси:



$$m_2 a = m_2 g - T$$

Учитывая, что

, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 a = T - f m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T, \end{cases}$$

откуда искомое ускорение:

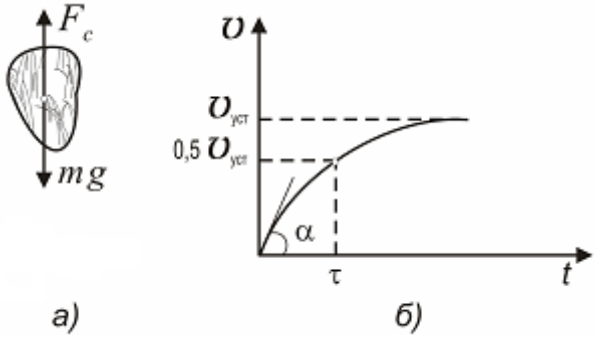
$$a = \frac{(m_2 - f m_1)g}{m_1 + m_2}$$

Силу натяжения нити найдем из второго уравнения системы:

$$T = m_2(g - a)$$

Вычисляя, получаем: 1) a = 5,49 м/с^2; 2) T = 2,59 Н.

Задача 3. При падении тела с большой высоты его скорость $\upsilon_{уст}$ при установившемся движении достигает 80 м/с. Определить время τ, в течение которого, начиная от момента начала падения, скорость становится равной $\upsilon_{уст}/2$. Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости тела.



а) б)

Решение.

На падающее тело действуют две силы (рис. а): сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха $F_с$.

Сила сопротивления воздуха по условиям задачи пропорциональна скорости тела и противоположна ей по направлению:

$$\vec{F}_с = -k\vec{\upsilon}, \qquad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы тела и от свойств окружающей среды.

Напишем уравнение движения тела в соответствии со вторым законом Ньютона в векторной форме: $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_с$. Заменив $\vec{F}_с$ согласно (1), получим:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{\upsilon}. \qquad (2)$$

Спроецируем все векторные величины на вертикально вниз направленную ось и напишем уравнение (2) для проекций:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \frac{dt}{m}.$$

Выполним интегрирование, учитывая, что при изменении времени от нуля до τ (искомое время) скорость возрастает от нуля до $\dfrac{1}{2}\upsilon_{уст}$ (рис. 1, б):

$$\int_0^{\frac{1}{2}\upsilon_{уст}} \frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}; \quad -\frac{1}{k}\left|\ln(mg - k\upsilon)\right|_0^{\frac{1}{2}\upsilon_{уст}} = \frac{\tau}{m}.$$

Из полученного выражения найдем искомое время:

$$\tau = \frac{m}{k} \ln \frac{mg}{mg - \frac{1}{2} k \upsilon_{\text{уст}}} \qquad (3)$$

Входящий сюда коэффициент пропорциональности k определим из следующих соображений. При установившемся движении (скорость постоянна) алгебраическая сумма проекций на вертикальную ось действующих на тело сил равна нулю, т. е. $mg - k\upsilon_{\text{уст}} = 0$, откуда $k = \frac{mg}{\upsilon_{\text{уст}}}$.

Подставим найденное значение k в формулу (3):

$$\tau = \frac{m\upsilon_{\text{уст}}}{mg} \ln \frac{mg}{mg - \frac{1}{2} \frac{mg}{\upsilon_{\text{уст}}} \upsilon_{\text{уст}}}$$

После сокращений и упрощений получим: $\tau = \frac{\upsilon_{\text{уст}}}{g} \ln 2$

Подставив численные значения, получим τ = 5,66 с. Проверка размерности результата в данном случае не обязательна, так как она очевидна.

Вопросы и задания

1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.
2. Взаимодействие тел. Сила, масса.
3. Импульс (количество движения).
4. Закон сохранения импульса.
5. Второй закон Ньютона.
6. Третий закон Ньютона.
7. Изолированная система материальных тел.

Задачи для самостоятельного решения

1. Самолет летит в горизонтальном направлении с ускорением a = 20 м/с^2. Какова перегрузка пассажира самолета? (Перегрузкой называется отношение силы F, действующей на пассажира, к силе тяжести P).

2. Автоцистерна с керосином движется с ускорением a =0,7 м/с^2. Под каким углом φ к плоскости горизонта расположен уровень керосина в цистерне?

3. Бак в тендере паровоза имеет длину l=4 м. Какова разность Δl уровней воды у переднего и заднего концов бака при движении поезда с ускорением a = 0,5 м/с^3?

4. Катер массой m=2m трогается с места и в течение времени τ =10 с развивает при движении по спокойной воде скорость υ = 4 м/с. Определить силу тяги F мотора, считая ее постоянной. Принять силу сопротивления F_c движению пропорциональной скорости; коэффициент сопротивления k =100 кг/с.

5. Начальная скорость υ_0 пули равна 800 м/с. При движении в воздухе за время t = 0,8с ее скорость уменьшилась до υ =200. Масса m пули равна 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления k. Действием силы тяжести пренебречь.
6. Материальная точка массой m = 2 кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x=A+Bt+Ct^2+ Dt^3$, где C =1 м/с^2, D = - 0,2 м/с^3. Найти значения этой силы в моменты времени t_1=2 с и t_2 = 5 с. В какой момент времени сила равна нулю?
7. Наклонная плоскость, образующая угол α = 25°с плоскостью горизонта, имеет длину l = 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время t = 2с. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость.
8. На гладком столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1=1 кг и m_2 = 2кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок, и силу T натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.
9. Два бруска массами m_1=1 кг и m_2 = 4кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением a будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F = 10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила T натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить к первому бруску? Ко второму бруску? Трением пренебречь.
10. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перевешен шнур, к концам которого привязали грузы массами m_1 = 1,5 кг и m_2 = 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные.

— Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 с. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html
2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 3.

Тема занятия. **Работа и энергия. Кинематика и динамика вращательного движения.**

Цель занятия. Изучить законы сохранения энергии. Кинематику и динамику вращательного движения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Работа. Работа переменной силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Связь между силой и потенциальной энергией. Энергия упруго деформированного тела. Кинетическая энергия и её связь с работой приложенных сил. Полная механическая энергия системы тел. Закон сохранения механической энергии. Диссипация энергии. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Закон сохранения энергии, а также законы динамики вращательного движения широко применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы остается постоянным

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const.$$

Для двух тел при абсолютно упругом ударе:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ - скорости тел перед соударением, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости тел в момент после соударения.

Для абсолютно неупругого удара двух тел:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Кинетическая энергия T тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{(2m)}.$$

Потенциальная энергия $П$:

а) упругодеформированной пружины:

$$П = \frac{kx^2}{2},$$

где k – жесткость пружины; x – абсолютная деформация;

б) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести:

$$П = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения; h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h << R$, где R – радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии: если в системе действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы не меняется

$$E = T + П = const\,.$$

Закон сохранения энергии при абсолютно упругом столкновении двух тел, движущихся в горизонтальной плоскости:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}\,.$$

Закон сохранения энергии при абсолютно неупругом столкновении двух тел, движущихся в горизонтальной плоскости:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} + Q,$$

где Q – энергия нагревания тел и их остаточной деформации.

Скорости двух тел после абсолютно упругого столкновения:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{(m_1 + m_2)},$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{(m_1 + m_2)}.$$

Работа, совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии:

$$A = \Delta T = T_2 - T_1.$$

*Динамика вращательного движен*ия

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}\,,$$

где $\vec{M}$ – результирующий вектор моментов внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения; $\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения; J – момент инерции системы относительно оси.

Моменты инерции некоторых тел массой m относительно оси вращения, проходящей через центр масс:

а) материальной точки: $J = mr^2$,

где r – расстояние от материальной точки до оси;

б) стержня длиной ℓ относительно оси перпендикулярной стержню:

$$J = \frac{1}{12}m\ell^2;$$

в) обруча или тонкостенного цилиндра радиуса R относительно оси, совпадающей с осью цилиндра:

$$J = mR^2\,.$$

г) однородного (сплошного) диска (цилиндра) радиуса R относительно оси, совпадающей с осью диска:

$$J = \frac{1}{2}mR^2;$$

д) пустотелого цилиндра радиусами R_1 и R_2 с осью вращения, совпадающей с осью цилиндра:

$$J = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2);$$

е) шара с осью вращения, проходящей через его центр:

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Теорема Штейнера: момент инерции J_0 тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_c этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы m на квадрат расстояния a между этими осями

$$J_0 = J_c + ma^2,$$

Момент импульса материальной точки массой m, имеющей скорость υ и находящуюся на расстоянии r от оси вращения:

$$L = m\upsilon r.$$

Момент импульса L тела, вращающегося относительно неподвижной оси с угловой скоростью ω:

$$L = J\,\omega.$$

Закон сохранения момента импульса систем тел, вращающихся вокруг неподвижной оси:

$$\sum_{i=1}^{n} J_i \vec{\omega}_i = const.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{L^2}{(2J)}.$$

Кинетическая энергия катящегося тела:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

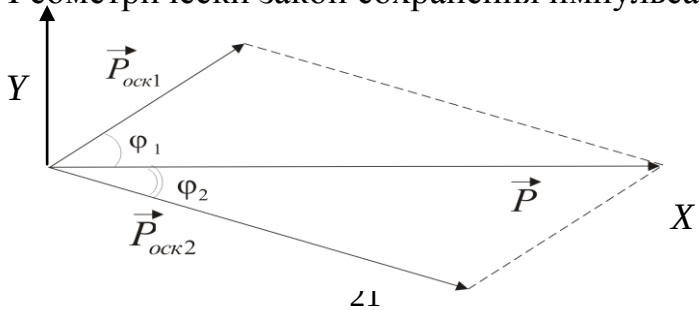
Примеры решения задач

Задача 1. Снаряд массой m = 5кг обладал скоростью υ= 300 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой m = 2 кг, получила скорость υ_1 = 500 м/с и полетела вперед под углом 60˚ к горизонту. Найти скорость υ_2 после разрыва второй, большей части, и под каким углом к горизонту она полетела.

Дано:
m = 5кг
υ = 300 м/с
υ_1 = 500 м/с
m_1=2 кг
φ_1 = 60°

υ_2 – ?

В верхней части траектории, снаряд двигался горизонтально. Геометрически закон сохранения импульса имеет вид



φ_2 – ?

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{ОСК1}} + \vec{P}_{\text{ОСК2}} \qquad \text{или} \qquad m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 . \qquad (1)$$

Используя теорему косинусов, найдем $\left|\vec{P}_{\text{ОСК2}}\right|$

$$\left(P_{\text{ОСК2}}\right)^2 = P^2 + \left(P_{\text{ОСК1}}\right)^2 - 2P \cdot P_{\text{ОСК1}} \cdot \cos\varphi_1 . \qquad (2)$$

Так как $P_{\text{оск2}} = (m - m_1)\upsilon_2$ получим, что

$$\upsilon_2 = \frac{P_{\text{ОСК2}}}{m - m_1} = \frac{\sqrt{1500^2 + 1000^2 - 2 \cdot 1500 \cdot 1000 \cdot \cos 60^\circ}}{(5-2)} = 441\ \text{м/с}.$$

Спроецируем вектора $\vec{P}_{\text{ОСК1}}$ и $\vec{P}_{\text{ОСК2}}$ на направление $\vec{P}$. По теореме о проекции суммы векторов, получим

$P = P_{\text{ОСК.1}\vec{\text{P}}} + P_{\text{ОСК.2}\vec{\text{P}}}$, но $P_{\text{ОСК.1}\vec{\text{P}}} = \left|\vec{P}_{\text{ОСК.1}}\right| \cdot \cos\varphi_1$, а

$P_{\text{ОСК.2}\vec{\text{P}}} = \left|\vec{P}_{\text{ОСК.2}}\right| \cdot \cos\left(-\varphi_2\right)$, т.к. угол φ_2 лежит ниже оси $\vec{P}$,

откуда

$$\cos\left(-\varphi_2\right) = \frac{P - \left(\vec{P}_{\text{ОСК.1}}\right) \cdot \cos\varphi_1}{\left|\vec{P}_{\text{ОСК.2}}\right|} = \frac{1500 - 1000 \cdot \cos 60^\circ}{1322{,}9} = 0{,}756,$$

значит $\quad -\varphi_2 = \arccos\left(0{,}756\right) = 40{,}8^\circ$, а $\varphi_2 = -40{,}8^\circ$

Эту задачу можно решить и другим способом.

Выберем оси координат, как на рисунке. Записав уравнение (1) в проекциях на оси координат и, учитывая, что $\upsilon_x = \upsilon$ и $\upsilon_y = 0$,

получим

$$m\upsilon = m_1\upsilon_1 \cos\varphi_1 + m_2\upsilon_2 \cos\varphi_2 , \qquad (3)$$

$$0 = m_1\upsilon_1 \sin\varphi_1 - m_2\upsilon_2 \sin\varphi_2 .$$

Или

$$m_2\upsilon_2 \cos\varphi_2 = m\upsilon - m_1\upsilon_1 \cos\varphi_1 , \qquad (4)$$

$$m_2\upsilon_2 \sin\varphi_2 = m_1\upsilon_1 \sin\varphi_1 .$$

Возводя в квадрат оба равенства, и сложив их, после тривиальных преобразований получим формулу (2) для вычисления импульса и скорости второго осколка. Из второго уравнения системы (4) получаем выражение

$$\sin\varphi_2 = -\frac{m_1\upsilon_1 \sin\varphi_1}{m_2\upsilon_2},$$

из которого вычисляем угол φ_2.

Задача 2. На пружине жесткостью $k = 510^3$ Н/м подвешен блок в форме диска массой 5 кг и радиусом 0,2 м. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг. Найти: 1) ускорение грузов и угловое ускорение блока; 2) силы натяжения шнура; 3) силу упругости пружины и удлинение пружины; 4) кинетическую энергию системы через 2 с; 5) изменение потенциальной энергии блока и грузов за 2 с; 6) найти ускорение центра масс грузов.

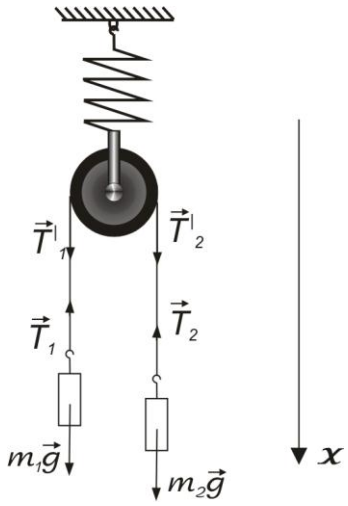
Дано:

m_0 = 5 кг
m_1 = 2 кг
m_2 = 3 кг
$k = 5 \cdot 10^3$ Н/м
r = 0,2 м
t = 2 с
a - ? ε - ?

Укажем все силы, действующие на каждое тело (см. рис.). Напишем уравнение второго закона Ньютона в векторной форме для каждого тела, при этом блок совершает вращательное движение. Учтем, также что $I = m_0 r^2/2$ и $a = \varepsilon \cdot r$ (проскальзывания нет) и линейное ускорение крайних точек блока равно ускорению точек шнура. Заметим, что по третьему закону Ньютона $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$.

Для проекций сил на ось X получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 \cdot r - T_1 \cdot r = \dfrac{1}{2} m_0 r^2 \cdot \dfrac{a}{r} \\ T_1 + T_2 + m_0 g - F = 0. \end{cases} \quad (1)$$



Складывая первые три уравнения, получим

$$m_2 g - m_1 g = a\left(\frac{1}{2} m_0 + m_2 + m_1\right) \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2} m_0 + m_2 + m_1} g \Rightarrow \; a = \frac{10 \cdot (3-2)}{7{,}5} = \frac{4}{3} \text{ м/с}^2 = 1{,}33 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{1{,}33}{0{,}2} = 6{,}66 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Из первого уравнения найдем: $T_2 = T_2' = m_2(g - a) = 26{,}0$ Н.

Из второго уравнения найдем: $T_1 = T_1' = m_1(g + a) = 22{,}7$ Н.

Из четвертого уравнения найдем F:

$$F = T_1 + T_2 + m_0 g = 98{,}7 \text{ Н}.$$

Удлинение пружины найдем из формулы закона Гука:

$$F = -k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{98{,}7}{510^3} = 0{,}0197 \text{ м} = 1{,}97 \text{ см}.$$

Это удлинение пружины при движущихся грузах. Если застопорить блок, то $F_1 = (m_1 + m_2 + m_0) \cdot g = 100\,H$, что вызовет удлинение пружины точно 2 см. С началом движения пружина сократится на $\approx 0{,}3$ мм. Из системы уравнений (1) можно получить формулу для разности силы натяжения $\Delta F = F_1 - F$:

$$\Delta F = \frac{(m_2 - m_1)^2}{\frac{1}{2}m_0 + m_2 + m_1} g,$$

используя которую можно оценить изменение растяжения пружины

$$\Delta x' = \Delta F / k = 0{,}27 \text{ мм}.$$

Чтобы найти кинетическую энергию всей системы, найдем кинетическую энергию поступательного движения грузов $K_{гр}$ и кинетическую энергию вращательного движения блока $K_{бл}$:

$$K_{гр} = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2};$$

Так как $\upsilon = at \Rightarrow$ $K_{гр} = K_{гр} = \frac{(m_1 + m_2)a^2t^2}{2} = \frac{5 \cdot 1{,}33^2 \cdot 4}{2} \approx 17{,}7$ Дж.

$K_{бл} = \frac{I\omega^2}{2}$ так как $\omega = \upsilon / r$, и $I = m_0 r^2 / 2$, то $K_{бл} = \frac{m_0 r^2 \upsilon^2}{4 \cdot r^2} = 9$ Дж.

Таким образом полная кинетическая энергия $K = K_{гр} + K_{бл} = 26{,}7$ Дж.

Задача 3. Два свинцовых шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на нитях длиной $l = 70$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

Решение.

Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью υ, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon, \qquad (1)$$

где υ_1 и υ_2 — скорости шаров до удара. Скорость υ_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2},$$

откуда:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

(учли, что $h_1 = l(1 - \cos\alpha)$).

Из выражений (1) и (2) при условии, что $\upsilon_2 = 0$, получим:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}, \qquad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

откуда искомая высота:

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}$$

(учли формулу (3)).

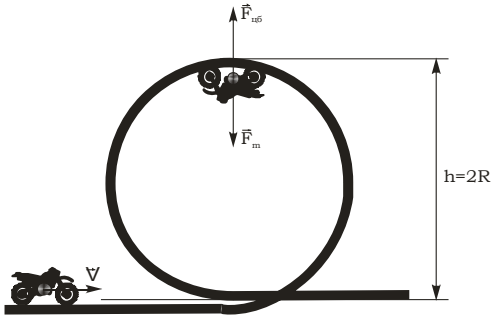
Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} \upsilon^2, \qquad (4)$$

или, подставив (2) в (4), находим:

$$\Delta T = 2gl \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя, получаем: 1) h = 5,6 см; 2) ΔT = 4,12 Дж.



Задача 4. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость υ он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли» радиусом R = 4 м. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

R = 4 м

υ = ?

Запишем уравнение движения мотоциклиста в верхней точке «мертвой петли»:

$$mg + N = ma.$$

Так как при минимальной скорости

N=0, то $a = \upsilon^2/R$, и следовательно

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R} = mg, \quad \text{и} \quad \upsilon_1 = \sqrt{gR} \quad (1),$$

где υ_1 – скорость мотоцикла в верхней точке «мертвой петли».

По закону сохранения энергии, полная энергия мотоциклиста на горизонтальной дороге, равная его кинетической энергии $\frac{m\upsilon^2}{2}$, будет равна полной энергии в верхней точке «мертвой петли», то есть сумме потенциальной энергии mgh и кинетической $\frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Таким образом имеем $\frac{m\upsilon^2}{2} = mgh + \frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Из последнего равенства получим $\upsilon^2 = 2gh + \upsilon_1^2$. Так как h = $2R$, то $\upsilon_1^2 = \upsilon^2 - 4gR$. Подставляем полученное выражение в (1) найдем, что

$$\upsilon^2 = 4gR + gR = 5gR, \quad \text{и} \quad \upsilon = \sqrt{5gR} = 0,141 \text{ м/с} = 14,1 \text{ см/с}.$$

Задача 5. Груз массой m = 80 кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением a = 1 м/с^2. Длина наклонной плоскости l = 3м, угол α ее наклона к

горизонту равен 30°, а коэффициент трения f = 0,15. Определить: 1) работу, совершаемую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

Решение.

Уравнение движения груза в векторной форме: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{тр} + \vec{N}$.

В проекциях на оси x и y (рис. 16) это уравнение примет вид

$ma = F - F_1 - F_{тр}$, $0 = N - F_2$, где $F_1 = mg\sin\alpha$, $F_2 = mg\cos\alpha$, $F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$..

Поэтому

$$F = m(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Работа, совершаемая подъемным устройством,

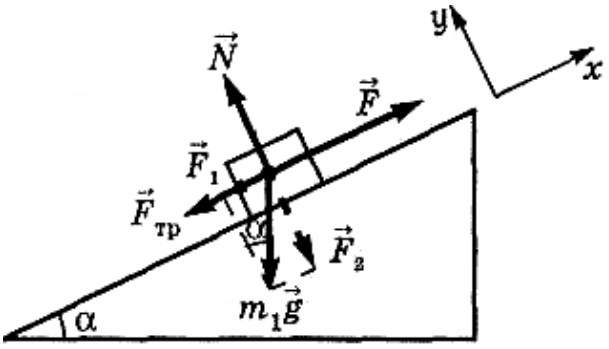
$$A = Fl = ml(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Средняя мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$\langle P\rangle = \frac{A}{t},$$

где $t = \sqrt{2l/a}$ – время подъема груза.

Следовательно, $\langle P\rangle = A\sqrt{\frac{a}{2l}}$.



Максимальная мощность, развиваемая подъемным устройством: $P_{max} = F\upsilon_{max} = Fat$. Подставляя значения, получаем $P_{max} = m\sqrt{2al}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha)$.

Вычисляя, находим: 1) A = 1,72 кДж; 2) $\langle P\rangle$ = 702 Вт; 3) P_{max} = 1,41 кВт.

Задача 6. Шарик массой m = 300 г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс p_1, полученный стеной, если в этот момент перед ударом шарик имел скорость 10м/с, направленную под углом $\alpha = 30^\circ$ к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

Решение:

По условию задачи удар абсолютно упругий, следовательно, скорость шарика по абсолютному значению до и после удара одинаковы, т.е. $\upsilon = \upsilon_0$.

Применим закон сохранения импульса(в проекциях на оси координат):

$$y:\ p_{1y} = 0 = m(\upsilon_{0y} - \upsilon_y) = m(\upsilon_{0y} - \upsilon_{0y}) = 0$$

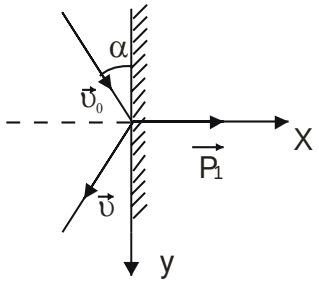
$$x:\ p_{1x} = p_1 = m(\upsilon_{0x} - (-\upsilon_{0x})) = 2m\upsilon_{0x},$$

где $\upsilon_{0x} = \upsilon_0\sin\alpha$

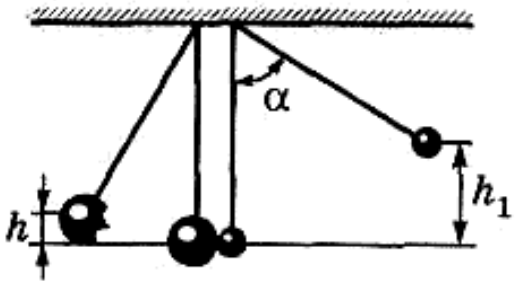
$$p_1 = 2m\upsilon_0\sin\alpha$$

тогда

$$P_1 = 2 \cdot 0{,}3кг \cdot 10м/с \cdot \sin 30^0 = 15\frac{кг \cdot м}{с}.$$



Задача 7. Два свинцовых шара массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг подвешены на нитях длиной l = 70см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол α = 60° и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить высоту h, на которую поднимутся шары после удара и энергию ΔT израсходованную на деформацию шаров при ударе.



Решение.

Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью υ, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon, \qquad (1)$$

где υ_1 и υ_2 — скорости шаров до удара. Скорость υ_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2},$$

откуда:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (2)$$

(учли, что $h_1 = l(1-\cos\alpha)$).

Из выражений (1) и (2) при условии, что υ_2 = 0, получим:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}, \qquad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

откуда искомая высота:

$$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l\sin^2\frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}$$

(учли формулу (3)).

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2}\upsilon^2, \qquad (4)$$

или, подставив (2) в (4), находим:

$$\Delta T = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя, получаем: 1) h = 5,6 см; 2) ΔT = 4,12 Дж.

Задача 8. Шар массой m = 5 кг и радиусом R = 5 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид

$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где A = 2 рад, B = 16 рад/с^2, C = −2 рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар и определить момент сил M в момент времени t = 2с.

Дано:

m = 5 кг	Так как момент инерции шара постоянный, основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:
$R = 5 \cdot 10^{-2}$ м	$$M = I \cdot \varepsilon, \quad (1)$$
$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$	где I – момент инерции, ε – угловое ускорение тела,
A = 2 рад	M – момент сил, действующих на него.
B = 16 рад/с^2	Для шара момент инерции $I = \frac{2}{5} mR^2$. (2)
C = −2 рад/с^3 .	
t = 2 с	
$M(t)$ = ? $M(2)$ = ?	

По определению угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота вращающегося тел по времени

$$\varepsilon = \ddot{\varphi}(t) = \left(A + Bt^2 + Ct^3\right)'' = \left(2Bt + 3Ct^2\right)' = 2B + 6Ct\,. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и используя численные значения A, B и C найдем закон изменения момента сил, действующих на шар.

$$M(t) = \frac{2}{5} mR^2 \cdot \left(2B + 6Ct\right) = \left(0{,}16 - 0{,}06t\right) \text{Н·м}.$$

Для момента времени t=2 с, M (2) = 0,0 4 Н·м.

Задача 9. Диск радиусом R = 0,5 м и массой m = 50 кг раскручен до частоты вращения n_1 = 10 с$^{-1}$ и предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через 60с. Найти момент сил трения.

Дано:	Согласно основному уравнению динамики вращательного движения
R = 0,5 м	$$dL_x / dt = M_x \quad (1)$$
m= 50 кг	где dL_x – изменение проекции на ось X момента импульса диска,
n_1 = 10 с$^{-1}$	вращающегося относительно оси X, совпадающей с геометрической
t = 60 с	осью диска, за интервал времени dt. M_x – проекция на ось X момента
M = ?	внешних сил (в данном случае сил трения), действующих на диск.

Считаем, что момент сил трения со временем не изменяется, тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$\Delta L_x = M_x \Delta t \quad (2)$$

Изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_x = I_x \cdot \Delta\omega, \quad (3)$$

где $I = mR^2/2$ момент инерции диска относительно оси X.

Из (2) и (3), имеем:

$$M_x \Delta t = mR^2 / 2 \cdot \Delta\omega\,. \quad (4)$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$.

Тогда из (4) получим

$$M_{\text{х}} = \frac{\pi m R^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}.$$

Так как $\Delta t = t$, а $n_2 = 0$ (диск остановился) то, подставив данные, получим, что

$$M = \ M_{\text{х}} = 65{,}4 \text{ Н·м}.$$

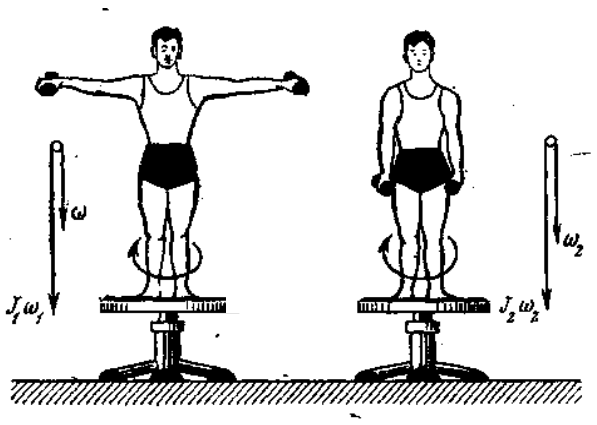
Проверим размерность полученного результата:

$$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{с}^{-1}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \text{ м} = \text{Н} \times \text{м}.$$

Задача 10. Человек массой 60 кг стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения n_1= 0,2 1/с. В вытянутых в сторону руках человек держит по гантели массой 6 кг каждая. Расстояние между гантелями 1,6 м. Определить: частоту вращения n_2 скамьи с человеком, после того, как он опустит руки, и расстояние между гантелями станет равным 0,4 м. При расчете моментов инерции человека принять за цилиндр радиусом 10 см, а скамью считать диском радиусом 0,4 м и массой 10 кг. Найти изменение энергии вращающейся системы. Трением пренебречь.

Дано:
m_1= 60 кг
r_1= 0,1 м
m_2= 10 кг
r_2= 0,4 м
n_1= 0,2 с$^{-1}$
l_1= 0,4 м
l_2= 1,6 м
m_3= 6 кг

n_2 - ?
ΔW - ?



Человек вместе со скамьей составляет замкнутую систему, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Для такой системы справедлив закон сохранения момента импульса:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \qquad (1)$$

где моменты импульса $I_1 \omega_1$ и $I_2 \omega_2$ в начальный и в любой другой момент времени.

Здесь I – момент инерции, ω – угловая скорость. I_1 состоит из моментов инерции скамьи $I_{\text{ск}} = m_2 r_2^2/2$, человека – $I_{\text{ч}} = m_1 r_1^2/2$ (скамья и человек считаются сплошными цилиндрами) и двух гантелей $I_{\text{г}} = 2m_3(l_2/2)^2$.

Поэтому
$$I_1 = \left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 2m_3 \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 \right)$$

Угловая скорость $\omega_1 = 2\pi n_1$. Аналогично, для второго положения гантелей имеем

$$I_2 = \left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 2 m_3 \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 \right); \text{ и } \omega_2 = 2\pi n_2$$

Подставив эти выражения в(1) получим:

$$\left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 2 m_3 \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 \right) \cdot 2\pi n_1 = \left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 2 m_3 \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 \right) \cdot 2\pi n_2 .$$

$$n_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}16 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0{,}01 + 12 \cdot 0{,}64 \right) \cdot 0{,}2}{\left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}16 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0{,}01 + 12 \cdot 0{,}04 \right)} = \frac{1{,}756}{1{,}58} = 1{,}1 \frac{\text{об}}{\text{с}}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела вычисляется по формуле $W=I\omega^2/2$.

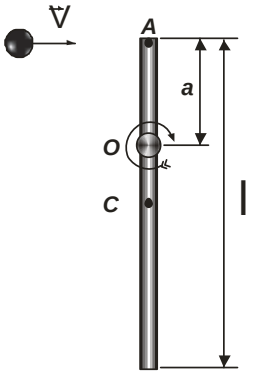
$$W_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{8{,}78 \cdot 1{,}58}{2} = 6{,}9 \text{ Дж}; \quad W_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{1{,}58 \cdot 48{,}7}{2} = 38{,}5 \text{ Дж};$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 31{,}6 \text{ Дж}.$$

Задача 11. Однородный тонкий стержень массой m_1 = 0,2 кг и длиной l = 1м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси Z, проходящей через точку O (см рис.) В точку A на стержне попадает пластилиновый шарик, массой m_2 = 10 г, летящий горизонтально со скоростью υ = 10 м/с и прилипает к стержню. Определить угловую скорость стержня ω в начальный момент времени, если $a=AO=l/3$.

Дано:
$m_1 = 0{,}2$ кг
$l = 1$ м
$m_2 = 10$ г $= 0{,}01$ кг
$\upsilon = 10$ м/с
$a = l/3$

ω = ?



Считая систему тел из шарика и стержня замкнутой, применим закон сохранения момента импульса: $L_0 = L$ (1)

В начальный момент удара угловая скорость стержня ω_0=0, поэтому его момент импульса L_{01} = 0. При этом летящий шарик попадает в точку A, следовательно относительно точки O (оси вращения) обладает моментом импульса $L_{02} = m_2 \upsilon a$, где a – расстояние от точки попадания до точки O. Таким образом $L_0 = 0 + m_2 \upsilon a$.

Прилипший к стержню шарик будем считать материальной точкой, вращающейся с угловой скоростью стержня ω и, его момент импульса равен $L_2 = m_2 a^2 \omega$. $I\omega$ – момент импульса стержня, где I – его момент инерции относительно оси вращения. Тогда момента импульса системы стержень—шарик будет равен $L_2 = I\omega + m_2 a^2 \omega$. Подставляя приведенные выше выражения в (1), получим

$$m_2 \upsilon a = I\omega + m_2 a^2 \omega.$$

Следовательно, $$\omega = \frac{m_2 \upsilon a}{I + m_2 a^2}. \qquad (2)$$

Чтобы найти I относительно точки O, воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_0 + m_1 (OC)^2,$$

где $I_0 = m_1 l^2/12$ – момент инерции стержня относительно точки C (центра масс). Расстояние $OC = l/2 - l/3 = l/6$, тогда

$$I = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1 \frac{l^2}{36} = \frac{m_1 l^2}{9}.$$

С учетом (2) получим $$\omega = \frac{m_2 \upsilon \frac{l}{3}}{\frac{m_1 l^2}{9} + \frac{m_2 l^2}{9}} = \frac{3 m_2 \upsilon}{(m_1 + m_2) l} = \frac{3 \cdot 0{,}01 \cdot 10}{(0{,}01 + 0{,}2) \cdot 1} = 1{,}43 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Вопросы и задания.

1. Работа. Работа переменной силы.
2. Мощность.
3. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия.
4. Связь между силой и потенциальной энергией.
5. Энергия упруго деформированного тела.
6. Кинетическая энергия и её связь с работой приложенных сил.
7. Полная механическая энергия системы тел.
8. Закон сохранения механической энергии.
9. Диссипация энергии.
10. Понятие абсолютно твердого тела.
11. Поступательное и вращательное движения тела.
12. Число степеней свободы.
13. Центр инерции (масс) твердого тела.
14. Момент силы. Момент инерции.
15. Основной закон динамики вращательного движения.
16. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.
17. Работа по вращению тела.
18. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Задачи для самостоятельного решения

1. Снаряд массой m = 10 кг обладал скоростью υ =200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой m_1=3 кг получила скорость u_1 = 400м/с в прежнем направлении. Найти скорость u_2 второй, большей части после разрыва.

2. Грузик, привязанный к шнуру длиной l=50см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол φ образует шнур с вертикалью, если частота вращения $n = 1\text{с}^{-1}$.

3. Грузик, привязанный к нити длиной l = 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период T обращения, если нить отклонена на угол φ = 60° от вертикали.
4. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус R кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения μ колес о покрытие дороги равен 0,1 (гололед). При какой скорости v автомобиля начнется его занос?
5. Какую наибольшую скорость υ_{max} может развить велосипедист, проезжая закругление радиусом R=50м, если коэффициент трения скольжения μ между шинами и асфальтом равен 0,3? Каков угол φ отклонения велосипеда от вертикали, когда велосипедист движется по закруглению?
6. Камень скользит с наивысшей точки полусферы, радиуса R. Какой длины дугу опишет камень, прежде чем оторвется от ее поверхности? Трением пренебречь.
7. Ракета массой m=1m, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, поднимается с ускорением a=2g. Скорость υ струи газов, вырывающихся из сопла, равна 1200 м/с. Найти расход Q_m горючего.
8. Шарик массой m = 300 г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс p_1, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость υ_0 = 10 м/с, направленную под углом α=30° к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.
9. Тело массой m=5 кг брошено под углом α=30° к горизонту с начальной скоростью υ_0 = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы F , действующей на тело, за время его полета; 2) изменение Δp импульса тела за время полета.
10. Материальная точка массой m = 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса r = 1,2 м в течение времени t = 10 с. Найти изменение Δp импульса точки.
11. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии T_1. Определить отношение k=M/m масс шаров.
12. Шар массой m = 1,8 кг сталкивается с покоящемся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял 36% своей кинетической энергии T_1. Определить массу большего шара.
13. Шар, массой m_1 = 200 г, движущийся со скоростью υ_1 = 10 м/с, ударяет неподвижный шар массой m_2 = 200 г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости u_1 и u_2 шаров после удара?
14. Молотком, масса которого m_1 = 1 кг, забивают в стену гвоздь массой m_2 = 75 г. Определить КПД η удара молотка при данных условиях.
15. Боек свайного молота массой m_1 = 500 кг падает с некоторой высоты на сваю массой m_2 = 100 г. Найти КПД η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.
16. Молот массой m_1 = 5 кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить КПД η удара молота при данных условиях.

17. Молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в $n = 3$ раза больше другого. Пренебрегая начальной кинетической энергией и импульсом молекулы, определить кинетические энергии T_1 и T_2 атомов, если их суммарная кинетическая энергия $T = 0{,}032$ нДж.

18. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой $m_1 = 5$ кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $\upsilon_2 = 1$ м/с. Масса конькобежца $m_1 = 60$ кг. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири.

19. Ядро атома распадается на два осколка массами $m_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-25}$ кг и $m_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-25}$ кг. Определить кинетическую энергию T_2 второго осколка, если энергия T_1, первого осколка равна 18 нДж.

20. При выстреле из орудия снаряд массой $m_1 = 10$ кг получает кинетическую энергию $T_1 = 1{,}8$ кДж. Определить кинетическую энергию T_2 ствола орудия вследствие отдачи, если масса m_2 ствола орудия равна 600 кг.

21. Через неподвижный блок массой $m = 0{,}2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами m_1=0,3 кг и m_2=0,5 кг. Определить силы T_1 и T_2 натяжения шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

22. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой m_1= 100 г и $m_2 = 110$. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса m блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

23. Вал массой m =100 кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой $n = 8$ с$^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F= 40 Н, под действием которой вал остановился через $t = 10$ с. Определить коэффициент трения μ.

24. На горизонтальную ось насажаны маховик и легкий шкив радиусом R= 5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0{,}4$ кг. Опускаясь равномерно, груз прошел путь $s = 1{,}8$ м за время $t = 3$ с. Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

25. Тонкий однородный стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

26. Шар массой m=10 кг и радиусом R= 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где B=4 рад/с^2; C=-1 рад/с^2. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M_1 в момент времени $t_1 = 2$ с.

27. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m=0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью υ =20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии $r = 0{,}8$ м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 4.

Тема занятия. **Механические колебания и волны**

Цель занятия. Изучить основные закономерности колебательных процессов в механике.

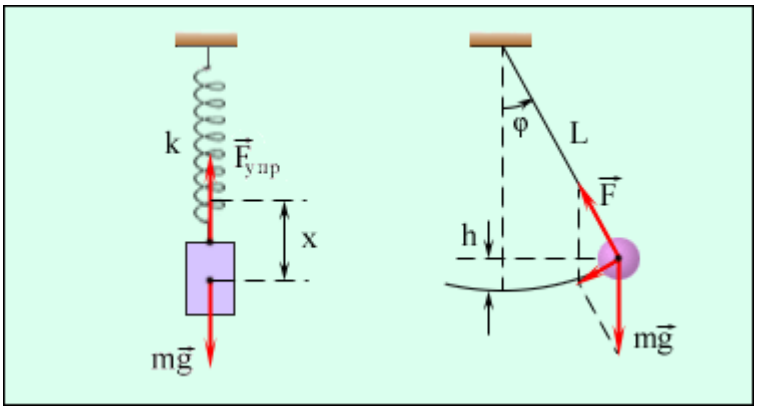
Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Периодические движения. Колебательные процессы. Гармонические колебания. Основные характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, частота, период. Динамика гармонических колебаний. Пружинный, математический и физический маятники. Квазиупругие силы. Кинетическая, потенциальная и полная энергия гармонического колебания. Гармонический осциллятор. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Закономерности колебательных процессов в механике применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Механическими колебаниями называют движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени. Примерами простых колебательных систем могут служить груз на пружине или математический маятник.

Колебания широко распространены в природе и технике. Колебательные процессы лежат в основе таких отраслей техники как электротехника, радиотехника и.т.д).



В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему, различают: свободные, (собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

1. Свободные колебания, совершаются под действием **внутренних сил** системы, после того, как система была выведена из состояния равновесия. (Колебания груза на пружине или колебания маятника являются свободными колебаниями.).
2. Вынужденные - система подвергается воздействию внешней, периодически изменяющийся силы (колебание моста при прохождении солдат, идущих в ногу).
3. Автоколебания - система сама управляет внешним воздействием (маятник часов получает толчки в момент прохождения её через среднее положение).
4. Параметрические колебания - происходит периодическое изменение какого- либо параметра системы за счет внешнего воздействия (например длины нити математического маятника).

Основные характеристики гармонического колебания:

1. *x*- смещение- отклонение от положения равновесия в данный момент времени (может быть >0 и <0)/

2. *A* – амплитуда - максимальное отклонение от положения равновесия.

3. *T*- период - совершения одного полного колебания.

4. *wt*- фаза колебания - характеризует состояние колебательной системы в любой заданный момент времени.

5. *v*- частота - число колебаний в единицу времени.

Если к началу наблюдения фаза имела некоторое начальное значение φ_0, то уравнение запишется:

$\boxed{x = A \cdot \sin(\varphi_0 + wt)}$ - гармоническое колебание с начальной фазой.

Скорость и ускорение гармонического колебания

Скорость - гармонических колебаний есть первая производная смещения по времени.

Известно, что скорость $v = \frac{dS}{dt}$ для гармонического колебания скорость определяется следующим образом $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cdot \sin wt)}{dt} = A \cdot w \cdot \cos wt$;

$\boxed{v = A \cdot w \cdot \cos wt}$ -скорость гармонического колебания.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A \cdot w \cdot \cos wt)}{dt} = -A \cdot w^2 \cdot \sin wt$$

$\boxed{a = -A \cdot w^2 \cdot \sin wt}$- ускорение при гармоническом колебании.

Колебательное движение выполняется под действием силы, которая может быть определена по второму закону Ньютона: $F = m \cdot a$, но ускорение при гармонических колебаниях определяется по формуле $a = -A \cdot w^2 \cdot \sin wt$, подставим значение ускорения во второй закон Ньютона, то

$F = -m \cdot A \cdot w^2 \cdot \sin wt$, но $A \cdot \sin wt = x$, то

$\boxed{F = -m \cdot x \cdot w^2}$- сила действующая на колеблющееся тело.

Она пропорциональна смещению, знак «-» указывает на, то что сила направлена в противоположную сторону относительно смещения. $k = m \cdot v^2$

$\boxed{F = -k \cdot x}$- квазиупругая сила, вызывающая колебательные движения.

Энергия гармонического колебательного движения

Квазиупругая сила является консервативной и поэтому полная механическая энергия системы остаётся постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего максимального значения.

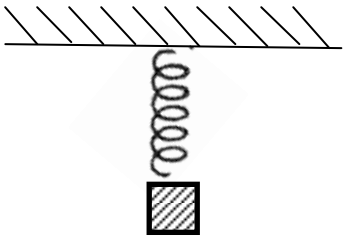
$$E = E_{n.\max} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$, A- амплитуда

При прохождении системы через положение равновесия полная энергия состоит только из кинетической энергии, которая достигает своего максимума.

$$E = E_{кин.\max} = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2} = \frac{m \cdot A^2 \cdot w^2}{2}$$

Пружинный, математический и физический маятники

Пружинный маятник- это груз массой m подвешенный на упругой пружине и совершающий гармонические колебания.



Колебания маятника совершаются под действием угловой силы. $F = -k \cdot x$, k- коэффициент упругости, а в случае с пружиной он называется коэффициентом жёсткости.

Уравнение движения маятника записывается:

$$m \cdot a = -k \cdot x \qquad (3)$$

Ускорение- это вторая производная смещения по времени:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x \text{, т.к } a = x''$$

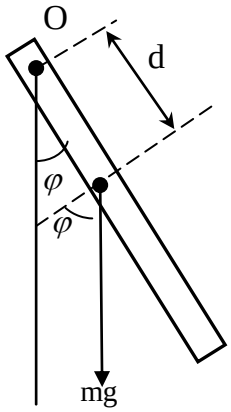
Разделим обе части уравнения на m, то получим

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \qquad (4)$$

Сравним между собой уравнения (2) и (4), очевидно, что $w^2 = \frac{k}{m}$, а $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $w = \frac{2\pi}{T}$; $T = \frac{2\pi}{w}$ - период колебания, подставим в формулу периода колебания значение w, через k и m, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ - период колебания пружинного маятника.

<u>Физический маятник</u> - твёрдое тело способное совершать колебания относительно оси, не совпадающей с центром масс.



Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$J \cdot \varepsilon = M \text{, где}$$

$$M = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin\varphi$$

Для малых колебаний можно поучить $J \cdot \varepsilon - M = 0$

$$J \cdot \varphi'' + m \cdot g \cdot d \cdot \varphi = 0 \qquad (3)$$

Разделим уравнение (3) на *J*

Введём обозначение $w_0^2 = \dfrac{m \cdot g \cdot d}{J}$, получим уравнение

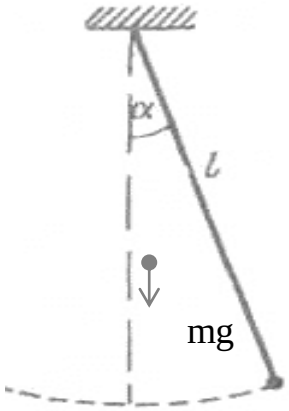
$\varphi'' + w^2 \varphi = 0$, которое аналогично полученному ранее.

Период колебания физического маятника $T = \dfrac{2\pi}{w_0} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{m \cdot g \cdot d}{J}}}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot d}}}$$

<u>Математический маятник</u> - материальная точка подвешенная на невесомой нерастяжимой нити.

Реальный маятник, у которого масса тела во много раз больше массы нити, а размеры тела во много раз меньше длинны нити, можно считать математическим.



Учитывая, что момент силы тяжести $M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\alpha$ и момент инерции точки

$J = m \cdot l^2$, из динамического уравнения вращательного движения получим: $J \cdot \varepsilon = M$.

$$m \cdot l^2 \cdot \alpha'' + m \cdot g \cdot l \cdot \alpha = 0 \qquad (4)$$

Разделим уравнение (4) на ml^2, получим

$$\alpha'' + \frac{m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2} \cdot \alpha = 0$$

$$\alpha'' + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0, \Rightarrow \ \alpha'' + w_0^2 \cdot \alpha = 0 \qquad w_0^2 = \frac{g}{l}$$

Период колебания математического маятника

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Мы приходим к выводу, что во всех случаях колебания описываются одним и тем же уравнением $x'' + w_0^2 \cdot x = 0$, совпадающим с уравнением движения гармонического осциллятора.

Вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания

Вынужденными колебаниями называется незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на неё внешних сил, периодически изменяющихся с течением времени.

Сила, вызывающая вынужденные колебания, называется возмущающий (вынуждающий) силой.

Вынуждающая сила изменяется по закону:

$$F(t) = F_0 \cdot \cos w \cdot t$$

F_0- амплитуда вынуждающей силы, *w*- циклическая частота.

Под действием этой силы в системе устанавливаются гармонические колебания с циклической частотой *w*.

$$\Delta x = A \cdot \cos(w \cdot t + \varphi_1)$$

Где *A*- амплитуда вынужденных колебаний смещения. φ_1 - разность фаз между вынужденными колебаниями Δx и силой *F(t)*.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы и её частоты, зависимость амплитуды колебаний от частоты приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда вынужденного колебания достигает максимального значения. Это явление получило название *резонанса*, а соответствующая частота- *резонансной частоты*.

$\beta \neq 0$, то *A* достигнет максимального значения при частоте $w_{рез} \neq w_0$

$$w = w_{рез} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2} = w_0\sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{w_0^2}}$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $w_{рез}$ – называется *резонансом* , $w_{рез}$ – резонансная циклическая частота.

При наличии трения резонансная циклическая частота $w_{рез}$ несколько $\angle w_{зат} = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$ и меньше w_0.

Форма резонансных кривых зависит от значения β. Чем больше β, тем более пологими становятся кривые.

Примеры резонанса: явление резонанса используется в акустике - для анализа звуков, их усиления и.т.д.

Под действием периодически изменяющихся нагрузок в машинах и различных сооружениях могут возникнуть явления резонанса, которые могут быть опасны для эксплуатации машин.

Автоколебания- Колебательная система, совершающая незатухающие колебания за счёт источника энергии, не обладающего колебательными свойствами- называется *автоколебательной системой*.

Примеры решения задач

Задача 1. Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,2 Гц. Амплитуда колебаний A равна 5 см. Определить: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

Решение

Уравнение гармонического колебания

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Скорость и ускорение колеблющейся точки

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку,

$$F = ma = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$F = F_{\max}$ при $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$, поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{\max} = A\omega_0^2 m = 4\pi^2 \nu^2 Am$$

(учли, что $\omega_0 = 2\pi\nu$).

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2} m\upsilon_{\max}^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Подставив сюда ω_0, найдем искомую полную энергию:

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

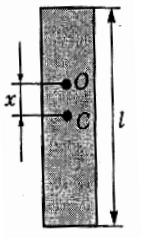
Вычисляя, получаем: 1) $F_{\max}$ = 0,8 мН; 2) E = 19,7 мкДж.

Задача 2. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса O находится от центра масс C на расстоянии 20,2 см.

Решение

Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{J}}, \quad (1)$$



где m — масса маятника; J — момент его инерции.
Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии x,

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \quad (3)$$

Найдем экстремум функции (3):

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{6g(l^2 - 12x^2)}{x^{1/2}(l^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$l^2 - 12x^2 = 0,$$

т. е. искомая длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}x.$$

Вычисляя, получаем $l = 70$ см.

Задача 3. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos \pi t$ и $y = \cos \frac{\pi}{2} t$. Определить уравнение траектории точки.

Решение

По условию задачи,

$$x = \cos \pi t; \quad (1)$$

$$y = \cos \frac{\pi}{2} t. \quad (2)$$

Для определения уравнения траектории точки из уравнений (1) и (2) исключим время, тогда

$$\cos \pi t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - (1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} t) = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 1 = 2y^2 - 1,$$

откуда искомое уравнение траектории точки

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

представляет собой параболу.

Задача 4. Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Решение

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \quad (1)$$

где A_0 — амплитуда колебаний в момент $t = 0$; δ — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания $\Theta = \delta T$ ($T = 1/\nu$ — условный период затухающих колебаний). Тогда $\delta = \Theta\nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\Theta\nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\Theta\nu}\ln\frac{A_0}{A}.$$

Число искомых полных колебаний

$$N = \frac{t}{T} = t\nu.$$

Вычисляя, получаем: 1) t = 6 с; 2) N = 300.

Задача 5. Груз массой m = 50 г, подвешенный на нити длиной l = 20 см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления r = 0,02 кг/с. На груз действует вынуждающая сила $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н. Определить: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

Решение

Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (1)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний системы; $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания. Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Подставив значения ω_0 и δ в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{\text{g}}{\text{l}} - \frac{\text{r}^2}{2\text{m}^2}}.$$

Подставив формулу (1) в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 - 4\delta^2\omega^2}},$$

где F_0 — амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи, F_0 = 0,1 Н), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{r^2}{2m^2}}}.$$

Вычисляя, получаем: 1) $\omega_{\text{рез}}$ = 7 рад/с; 2) $A_{\text{рез}}$ = 71,4 см.

Вопросы и задания.

1. Гармонические колебания.
2. Основные характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, частота, период.
3. Динамика гармонических колебаний.
4. Пружинный, математический и физический маятники. Квазиупругие силы.
5. Кинетическая, потенциальная и полная энергия гармонического колебания.
6. Гармонический осциллятор.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 5 см, если за время t = 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Начертить график этого движения.

2. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 50 мм, периодом T = 4 с и начальной фазой $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при t = 0 и t = 1,5 с. Начертить график этого движения.

3. Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний T = 24 с, начальная фаза $\varphi = 0$.

4. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$ проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

5. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. При смещении точки от положения равновесия x_1 = 2,4 см скорость точки υ_1 = 3 см/с, а при смещении x_2 = 2,8 см ее скорость υ_2 = 2 см/с. Найти амплитуду A и период T этого колебания.

6. Уравнение колебаний материальной точки массой m = 10 г имеет вид $x = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$см. Найти максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки.

7. Уравнение колебания материальной точки массой m = 16 г имеет вид $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$см. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергии точки.

8. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, W =30 мкДж; максимальная сила, действующая на тело, $F_{\max}$ = 1,5 мН. Написать

уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

9. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под влиянием силы $F = 9{,}8$ Н растягивается на $l = 1{,}5$ см, найти период T вертикальных колебаний груза.

10. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin\omega t$ м и $y = 2\cos\omega t$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Раздел 2. Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамика

Практическое занятие 5.

Тема занятия. **Основы молекулярно-кинетической теории. Статистическая физика**

Цель занятия. Изучить основные понятия и законы молекулярно-кинетической теории.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Молекулярно-кинетический и термодинамический методы изучения макроскопических явлений. Параметры состояния. Равновесные состояния и процессы. Изопроцессы и их уравнения. Уравнение Клапейрона-Менделеева. Идеальный газ как молекулярно-кинетическая модель реальных газов. Основное уравнение молекулярно-

кинетической теории газов. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одноатомной молекулы и ее связь с температурой. Число степеней свободы и средняя энергия многоатомной молекулы. Внутренняя энергия и теплоемкости идеального газа. Распределение молекул газа по скоростям. Функция распределения. Распределение Максвелла. Вероятностный характер закона распределения. Наиболее вероятная, средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул. Идеальный газ в поле тяжести. Изменение плотности частиц с высотой. Распределение Больцмана. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные понятия и законы молекулярно-кинетической теории применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Представление о том, что все тела построены из мельчайших частиц – атомов, возникло еще в древности и было высказано греческим философом Демокритом (V в. до н. э.). Однако, в дальнейшем эти представления были забыты и лишь во второй половине XVII в. были разработаны в качестве научной теории, получившей название ***классической молекулярно-кинетической теории.***

Она основана на следующих положениях.

1. Все вещества состоят из очень маленьких частиц – *молекул*.

Каждое вещество состоит из одинаковых молекул. Сколько веществ в природе, столько и видов молекул.

Молекулы состоят из еще более мелких частиц – *атомов*.

Число атомов равно числу химических элементов и их изотопов (109 хим. элементов и более 1500 изотопов известно в наше время).

Молекулы – различные комбинации из атомов (молекулярно-кинетическая теория не рассматривает строение атома).

2. Между молекулами тела одновременно действуют силы взаимного притяжения (сцепления) и силы взаимного отталкивания, причем силы отталкивания с увеличением расстояния убывают быстрее, чем силы сцепления. Поэтому на определенном расстоянии друг от друга молекулы могут находиться в устойчивом равновесии. Согласно современным исследованиям, положение устойчивого равновесия соответствует ***минимуму их потенциальной энергии.***

3. Молекулы, образующие тело, находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения.

Скорость движения молекул возрастает с увеличением температуры, поэтому движение называется *тепловым движением*.

По мере увеличения интенсивности теплового движения, среднее расстояние между молекулами возрастает, следовательно, тело переходит из твердого состояния в жидкое. При дальнейшем нагреве расстояние между

молекулами увеличивается настолько, что силы сцепления исчезают, следовательно, тело переходит в газообразное состояние.

Идеальный газ. Его параметры

Идеальным газом называется газ, между частицами которого отсутствуют силы взаимного притяжения. При соударениях между собой, частицы газа ведут себя как упругие шарики крайне малого размера.

Существующие в действительности газы при не слишком низких температурах и достаточно малых давлениях называются разряженными газами и по своим свойствам близки к идеальному газу.

Количество вещества (число молей) $$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

где N – число молекул, N_A – постоянная Авогадро, m – масса вещества, M – молярная масса.

Уравнение Клапейрона-Менделеева $$pV = \nu RT,$$

где p – давление газа, V – его объем, R – универсальная газовая постоянная, T – термодинамическая температура.

Уравнение молекулярно-кинетической теории газов $$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{1}{3} m n_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где n – концентрация молекул, $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы, m_0 – масса молекулы $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость.

Средняя энергия молекулы $$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – число степеней свободы молекулы, k – постоянная Больцмана.

Внутренняя энергия идеального газа $$U = \frac{i}{2} \nu RT.$$

Система из N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет 3N степеней свободы.

Молекулы газов, состоящие из одного атома (Ar, Xe, He) обладают тремя степенями свободы i=3; молекулы газов, состоящие из двух атомов (O2, H2, N2) обладают пятью степенями свободы i=5; молекулы газов, состоящие из трех и более атомов (CO2, CH4) обладают шестью степенями свободы i=6.

Скорость молекул:

средняя квадратичная $$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT / m_0} = \sqrt{3RT / M};$$

средняя арифметическая $$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{8kT / (\pi m_0)} = \sqrt{8RT / (\pi M)}.$$

наиболее вероятная $$\upsilon_{\text{В}} = \sqrt{2kT / m_0} = \sqrt{2RT / M}.$$

Средняя длина свободного пробега молекулы $$\langle \lambda \rangle = \left(\sqrt{2} \pi d^2 n \right)^{-1},$$

где d – эффективный диаметр молекулы.

Среднее число столкновений молекулы в единицу времени $\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle \upsilon\rangle$.

Распределение молекул в потенциальном поле сил $n = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right)$,

где Π – потенциальная энергия молекулы.

Барометрическая формула $p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right)$.

Уравнение диффузии $dm = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt$,

где D – коэффициент диффузии, ρ – плотность, dS – элементарная площадка, перпендикулярная оси OX.

Уравнение теплопроводности $dQ = -æ\frac{dT}{dx}dSdt$,

где æ – теплопроводность.

Сила внутреннего трения $dF = -\eta\frac{d\upsilon}{dx}dS$,

где η – динамическая вязкость.

Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle$.

Вязкость (динамическая) $\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle = D\rho$.

Теплопроводность $æ = \frac{1}{3}c_V\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle = \eta c_V$,

где c_v – удельная изохорная теплоемкость.

Примеры решения задач

Задача 1. В баллоне вместимостью V = 6,9 л находится азот массой m = 2,3 г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации (отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа) α=0,2. Определить: 1) общее число N_1 молекул и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) концентрации n_2 молекул и n_3 атомов азота после нагревания.

Дано:

V = 6, 9 л = 6, $9\cdot10^{-3}$ м^3
m=2,3 г = 2, $3\cdot10^{-3}$ кг

По определению, концентрация частиц газа есть отношение числа газа к занимаемому газом объему:

$\alpha = 0{,}2$ $\qquad n = \dfrac{N}{V}$

$N_1 = ?\ \ n_1 = ?$

1. Число молекул N_1 газа до нагревания найдем из соотношения

$n_2 = ?\quad n_3 = ?$ $\qquad N_1 = \nu \cdot N_A = \dfrac{m}{M} \cdot N_A,$

где ν – количество вещества; N_A – постоянная Авогадро; M – молярная масса (у азота $M = 28\ 10^{-3}$ кг/моль).

Подставляя численные значения, получим

$$N_1 = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 28} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 4{,}94 \cdot 10^{23} \text{ молекул, а}$$

$$n_1 = \frac{N_1}{V} = \frac{4{,}94 \cdot 10^{23}}{6{,}9 \cdot 10^{-3}}\,\text{м}^{-3} = 7{,}16 \cdot 10^{25}\,\frac{1}{\text{м}^3}.$$

2. Концентрации молекул после нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{N_1(1-\alpha)}{V}$$

где N_2 – число молекул, не распавшихся на атомы. Подставим числовые значения:

$$n_2 = \frac{4{,}94 \cdot 10^{23}(1-0{,}2)}{6{,}9 \cdot 10^{-3}}\,\text{м}^{-3} = 5{,}73 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}.$$

Так как каждая молекула после распада дает два атома, то концентрация атомов после нагревания азота будет равна

$$n_3 = \frac{2N_1 \cdot \alpha}{V}$$

Следовательно, $\qquad n_3 = \dfrac{2 \cdot 4{,}94 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}2}{6{,}9 \cdot 10^{-3}}\,\text{м}^{-3} = 2{,}86 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}.$

Задача 2. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определить удельный объем смеси.

Решение.

Согласно закону Дальтона, давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2. \quad (1)$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева имеем:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \quad \text{и} \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Найдя отсюда p_1 и p_2 и подставив в (1), получим:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT.$$

Удельный объем смеси:

$$= \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \cdot RT}{(m_1 + m_2) \cdot p}$$

Вычисляя, получаем = 8,63 м^3/кг.

Задача 3.

Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты диффузии азота (M_1 = $28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и углекислого газа (M_2 = $44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Решение.

Коэффициент диффузии газа:

$$D = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle, \quad (1)$$

где $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ – средняя арифметическая скорость его молекул; $\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} d^2 n}$ — средняя длина свободного пробега молекул. Поскольку $p = nkT$, из условия задачи ($T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$) следует, что $n_1 = n_2$. Подставив значения $\langle \upsilon \rangle, \langle l \rangle$ в формулу (1) и учитывая условие задачи, найдем

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Вычисляя, получаем $\frac{D_1}{D_2}$ = 1,25.

Вопросы и задания.

1. Термодинамический метод исследования. Температурные шкалы. Идеальный газ.
2. Газовые законы.
3. Уравнение состояния идеального газа.
4. Основное уравнение М.К.Т.
5. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям.
6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.
7. Длина свободного пробега молекул. Опыты, подтверждающие МКТ.
8. Явления переноса.
9. Внутренняя энергия.
10. Закон Больцмана о равномерном распределении молекул.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько молекул газа содержится в баллоне вместимостью *V=30 л* при температуре *T=300 K* и давлении *p = 5 МПа?*
2. В сосуде находится смесь кислорода и водорода. Масса *m* смеси равна 3,6 г. Массовая доля ω_1 кислорода составляет 0,6. Определить количества вещества *v* смеси, а также v_1 и v_2 каждого газа в отдельности.
3. В баллоне вместимостью V = 3 л находится кислород массой m = 4 кг. Определить количество вещества *v* газа и концентрацию *n* его молекул.
4. Определить количество вещества *v* и число *N* молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью *V*=240 см^3 при температуре *T*=290 К и давлении *p*=50 кПа.
5. Определить среднее значение $< \varepsilon >$ полной кинетической энергии одной молекулы следующих газов: гелия, кислорода и водяного пара при температуре T = 400 К.
6. Определить число *N* молекул ртути, содержащихся в воздухе объемом *V*=1 м^3 в помещении, зараженном ртутью, при температуре *t*=20˚С, если давление *p* насыщенного пара ртути при этой температуре равно 0,13 Па.
7. Давление *p* газа равно 1 мПа, концентрация *n* его молекул равна 10^{10} см$^{-3}$. Определить: 1) температуру T газа; 2) среднюю кинетическую энергию $< \varepsilon_n >$ поступательного движения молекул газа.
8. В колбе вместимостью *V*=240 см^3 находится газ при температуре *T*=290 К и давлении *p*=50 кПа. Определить количество вещества *v* газа и число *N* его молекул.
9. Определить кинетическую энергию, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре *T*=1 кК, а также среднюю кинетическую энергию $< \varepsilon_n >$ поступательного движения, $< \varepsilon_в >$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $< \varepsilon >$ молекулы.
10. Смесь гелия и аргона находится при температуре *T*=1,2 кК. Определить среднюю квадратичную скорость $< \upsilon_{кв} >$ и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.
11. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить диффузию *D* гелия.
12. Диффузия *D* кислорода при температуре t = 0 °С равна 0,19 см^2/с. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода.
13. Вычислить диффузию *D* азота: 1) при нормальных условиях; 2) при давлении p = 100 Па и температуре T = 300 К.
14. Определить, во сколько раз отличается диффузия D_1 газообразного водорода от диффузии D_2 газообразного кислорода, если оба газа находятся при одинаковых условиях.
15. Определить зависимость диффузии *D* от температуры *T* при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном.
16. Определить зависимость диффузии *D* от давления *p* при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном.

17. Вычислить динамическую вязкость η кислорода при нормальных условиях.
18. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота при условии, что его динамическая вязкость $\eta = 17$ мкПа·с.
19. Найти динамическую вязкость η гелия при нормальных условиях, если диффузия D при тех же условиях равна $1{,}06 \cdot 10^{-4}$ м^2/с.
20. Определить зависимость динамической вязкости η от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 6.

Тема занятия. **Основы термодинамики.**

Цель занятия. Изучить основные понятия и законы термодинамики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Основные законы термодинамики. Первое начало термодинамики. Работа, совершаемая газом при изменении объема. Работа газа при различных процессах. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона. Круговые процессы (циклы). КПД цикла. Тепловой двигатель. Цикл Карно и его КПД. Приведенная теплота. Энтропия. Изменение энтропии при необратимых процессах. Второе начало термодинамики и его статистический

смысл. Связь энтропии и вероятности состояния. Тепловая теорема Нернста. Третье начало термодинамики. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные понятия и законы термодинамики применяется при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Термодинамика в отличие от молекулярно-кинетической теории не вдаётся в рассмотрение микроскопической картины явлений (оперирует с макропараметрами). Термодинамика рассматривает явления, опираясь на основные законы (начала), которые являются обобщением огромного количества опытных данных.

Внутренняя энергия – энергия физической системы, зависящая от её внутреннего состояния. Внутренняя энергия включает энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц системы (молекул, атомов, ионов и т.д.) и энергию взаимодействия этих частиц. Кинетическая энергия движения системы как целого и её потенциальная энергия во внешних силовых полях во внутреннюю энергию не входит. В термодинамике и её приложениях представляет интерес не само значение внутренней энергии, а её изменение при изменении состояния системы. Внутренняя энергия – функция состояния системы.

Работа термодинамической системы над внешними телами заключается в изменении состояния этих тел и определяется количеством энергии, передаваемой системой внешним телам при изменении объема.

- Уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p - давление: V – объем; T - абсолютная температура; m – масса; μ - молярная масса; R = 8,314 Дж/(К·моль) – универсальная газовая постоянная.

- Уравнение состояния ван-дер-ваальсовского газа (для одного моля):

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

где V - объем, занимаемый молем газа при данных p иT, a и b - постоянные Ван-дер-Ваальса для данного газа.

- Закон Дальтона: *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений*(парциальное давление - это давление, которое оказывал бы на стенки сосуда один газ смеси в отсутствие остальных).

- Зависимость давления газа от высоты в поле силы тяжести в изотермическом приближении дается барометрической формулой:

$$p = p_0 e^{-\mu g h / RT},$$

где p_0 - давление на высоте $h = 0$, $g = 9{,}8$ м/с^2 - ускорение свободного падения.

- Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q - количество тепла, сообщенное системе; A - работа, совершаемая системой; ΔU - приращение внутренней энергии системы.

- Работа, совершаемая газом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

- Теплоемкость системы:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

- Уравнение Майера:

$$C_p - C_V = R$$

где C_p, C_V - молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

- Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении определяются соотношениями:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i},$$

где i - число степеней свободы молекулы газа.

- Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{m}{\mu} \cdot C_V T = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}$$

- Молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе:

$$C = \frac{n - \gamma}{(n-1)(\gamma - 1)} R$$

- Внутренняя энергия моля газа Ван - дер - Ваальса:

$$U = C_V T - \frac{C}{V}$$

- К. п. д. тепловой машины:

$$\eta = A/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1,$$

где Q_1 - тепло, получаемое рабочим телом; Q_2 - отдаваемое тепло.

- К.п.д. цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1, T_2- температуры нагревателя и холодильника.

- Неравенство Клаузиуса:

$$\int \frac{\delta Q}{T} \le 0,$$

где δQ - элементарное тепло, полученное системой.

- Приращение энтропии системы:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T}$$

- Основное уравнение термодинамики для обратимых процессов:

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$$

- Свободная энергия:

$$F = U - TS, \qquad A_T = -\Delta F$$

- Связь между энтропией и статистическим весом Ω (термодинамической вероятностью):

$$S = k \cdot \ln\Omega ,$$

где k - постоянная Больцмана.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить удельную теплоемкость c_V смеси азота и водорода, если количество вещества газов в смеси одинаковы и равны ν.

Решение:

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме c_V найдем из следующих соображений:

1) теплоту, необходимую для нагревания смеси газов на ΔT можно рассчитать по формуле:

$$Q = c_V \left(m_1 + m_2\right) \cdot \Delta T \qquad (1)$$

2) ту же теплоту можно найти и другим способом:

$$Q = \left(c_{V_1} m_1 + c_{V_2} m_2\right) \cdot \Delta T , \qquad (2)$$

где c_{V_1} и c_{V_2} – удельные теплоемкости отдельных газов.

Приравнивая (1) и (2), получим

$$c_{\mathrm{V}}\left(m_1+m_2\right)\cdot\Delta T=\left(c_{\mathrm{V}_1}m_1+c_{\mathrm{V}_2}m_2\right)\cdot\Delta T,\ \text{откуда}$$

$$c_{\mathrm{V}}=\frac{c_{\mathrm{V}_1}m_1+c_{\mathrm{V}_2}m_2}{m_1+m_2} \qquad (3)$$

Так как $c_{\mathrm{V}}=\frac{i}{2}\frac{R}{M}$, где i – число степеней свободы молекулы.

Поскольку молекулы азота и водорода – двухатомные, то $i = 5$. Поэтому

$$c_{\mathrm{V}_1}=\frac{5}{2}\frac{R}{M_1},$$

$$c_{\mathrm{V}_2}=\frac{5}{2}\frac{R}{M_2}.$$

Подставляя эти выражения в (3), получим

$$c_{\mathrm{V}}=\frac{\frac{5}{2}R\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)}{m_1+m_2}=\frac{\frac{5}{2}R\left(\nu_1+\nu_2\right)}{m_1+m_2}=\frac{\frac{5}{2}R\cdot 2\nu}{m_1+m_2}=\frac{5R\nu}{m_1+m_2} \qquad (4)$$

Количество вещества $\nu=\frac{m}{M}$, и $m_1=\nu\cdot M_1$, $m_2=\nu\cdot M_2$.

В результате формула (4) примет вид

$$c_{\mathrm{V}}=\frac{5R\nu}{\nu M_1+\nu M_2}=\frac{5R}{M_1+M_2}$$

Подставляем числовые значения:

$$c_{\mathrm{V}}=\frac{5\cdot 8{,}31}{28\cdot 10^{-3}+2\cdot 10^{-3}}=1385\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}.$$

Задача 2. Определить количество теплоты, поглощаемой водородом m = 0,2 кг при нагревании его от температуры t_1 = 0˚С до температуры t_2 = 100˚С при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Дано:
m = 0,2 кг
t_1 = 0˚С; T_1 = 273 К
t_2 = 100˚С; T_2 = 373 К

Q = ? ΔU = ?
A = ?

Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q=\frac{m}{M}\cdot C_{\mathrm{p}}\cdot\Delta T \qquad (1)$$

где C_{p} – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Так как $C_{\mathrm{p}}=\frac{i+2}{2}\cdot R$, то (1) примет вид

$$Q=\frac{i+2}{2}\cdot\frac{m}{M}R\cdot\Delta T$$

Поскольку водород – двухатомный газ (M = $2\cdot10^{-3}$ кг/моль), и число степеней свободы его молекул i = 5, то

$$Q=\frac{5+2}{2}\cdot\frac{0,2}{2\cdot10^{-3}}\cdot8,31\cdot100=291\cdot10^{3}\left[\frac{\text{кг}\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\,\text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}=\text{Дж}\right]=291\,\text{кДж}.$$

Внутренняя энергия $U=\frac{i}{2}\frac{m}{M}RT$, следовательно

$$\Delta U=\frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T,\ \text{тогда}$$

$$\Delta U=\frac{5}{2}\cdot\frac{0,2}{2\cdot10^{-3}}\cdot8,31100=208\cdot10^{3}\left[\frac{\text{кг}\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\,\text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}=\text{Дж}\right]=208\,\text{кДж}.$$

Работу расширения газа найдем из выражения для первого начала термодинамики: $Q=\Delta U+A$, откуда

$$A=Q-\Delta U=231-208=83\,\text{кДж}.$$

Задача 3. В цилиндре под поршнем находится водород массой m = 0,02 кг при температуре T_1 = 300К. Водород начал адиабатно расширяться, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, уменьшив свой объем в 5 раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A, совершенную газом.

Дано:

m = 0,02 кг

T_1= 300К

$V_2 = 5V_1$

T_2 = ? A =?

Из уравнения Пуассона для адиабатного процесса имеем

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (1) \quad , \textit{где} \quad \gamma=\frac{i+2}{i} \; – \textit{показатель адиабаты.}$$

а $V_1=V_3$ по условию

Так как водород двухатомный газ, то i =5 и γ = 1,4.

Из (1) $T_2=T_1\cdot\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=300\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1} K=158K.$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1=\frac{m}{M}C_V\cdot\left(T_1-T_2\right), \text{ где } C_V=\frac{i}{2}R.$$

Следовательно,

$$A_1=\frac{i}{2}\frac{m}{M}R\left(T_1-T_2\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{0,02}{2\cdot10^{-3}}\cdot8,31\cdot\left(300-158\right)\text{ Дж}=29,5\text{ кДж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2=-RT_2\cdot\frac{m}{M}\ln\frac{V_2}{V_3}=-8,31\cdot158\cdot\frac{0,02}{2\cdot10^{-3}}\ln5=-21,1\text{ кДж}$$

знак минус означает, что при сжатии работа газа совершена внешними силами. Полная работа

$$A=A_1+A_2=\ 8,8\ \text{кДж}.$$

Задача 4. В цилиндре под поршнем находится водород массой m = 0,02 кг при температуре T_1 = 300 К. Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, уменьшив свой объем в 5 раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A, совершенную газом.

Решение:

Согласно уравнению Пуассона для адиабатного процесса

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \qquad (1)$$

где γ – показатель адиабаты, $\gamma=\frac{i+2}{i}$ (i = 5, т.к. водород двухатомный газ), т.е.

$$\gamma=\frac{5+2}{5}=1,4.$$

Из (1) $T_2=T_1\cdot\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=300\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1} T_2=158\,K.$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1=\frac{m}{M}C_V\cdot\left(T_1-T_2\right), \text{ где } C_V=\frac{i}{2}R, \text{ то есть}$$

$$\mathrm{A_1}=\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}\mathrm{R}\left(\mathrm{T_1}-\mathrm{T_2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{0,02}{2\cdot10^{-3}}\cdot8,31\cdot\left(300-158\right)\text{Дж}=29,5\cdot10^3\text{Дж}=29,5\text{кДж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

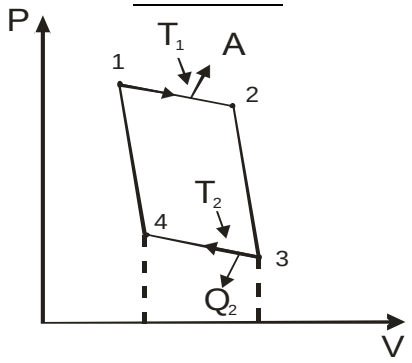
$$A_2 = -RT_2 \cdot \frac{m}{M} \ln \frac{V_2}{V_3} = -8,31 \cdot 158 \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \ln 5 = -21132 Дж = -21 кДж$$

знак «-» показывает, что при сжатии работа газа совершена внешними силами. Полная работа

$$A = A_1 + A_2 = 8,5 кДж$$

Задача 5. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя равна 470 К, температура T_2 охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу A = 100 Дж. Определить термический к.п.д. η цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

Решение:



Термический к.п.д. цикла определяется выражением $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

Количество теплоты переданное охладителю при изотермическом сжатии $(3-4)$ равно работе совершенной над газом сторонними силами

$$A_{34} = -Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Учитывая, что работа газа при изотермическом расширении (1-2)

$$A = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \nu R = \frac{A}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}, \text{ имеем:}$$

$$Q_2 = \frac{A}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = A \frac{T_2}{T_1}$$

Задача 6. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу A = 600 Дж. Температура T_1 нагревателя равна 500 К, T_2 холодильника — 300 К.

Определить: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Решение.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A. \quad (1)$$

где $Q_1 = A/\eta$ — количество теплоты, полученной от нагревателя.

Подставив это выражение Q_1 в (1), найдем

$$Q_2 = A\left(\frac{1}{\eta} - 1\right).$$

Вычисляя, получаем: 1) η = 0,4; 2) Q_2 = 900 Дж.

Задача 7. Найти изменение ΔS энтропии при нагревании воды массой m = 100 г от температуры t_1 = 0˚С до температуры t_2 = 100 ˚С и последующем превращении воды в пар при той же температуре.

Решение:

Определим изменение энтропии ΔS как сумму изменения энтропии ΔS_1 при нагреве воды и изменения энтропии ΔS_2 при ее превращении в пар:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Известно, что

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

При нагревании $dQ = mc \cdot dT$, где c – удельная теплоемкость воды, $c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot К}$,

тогда

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc \cdot dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 0{,}1 \cdot 4200 \cdot \ln \frac{373}{273} = 132 \frac{Дж}{К}.$$

При превращении воды в пар температура не изменяется, значит

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T},$$

где Q – количество теплоты, переданное воде для превращения ее в пар,

$$Q = r \cdot m,$$

где r – удельная теплота парообразования,

$$r = 22{,}5 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг},$$

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T} = \frac{22{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1}{373} = 603 \frac{Дж}{К}, \quad \text{тогда}$$

$$\Delta S = 132 \frac{Дж}{К} + 603 \frac{Дж}{К} = 735 \frac{Дж}{К}.$$

Задача 8. Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой m = 10 г, если давление газа уменьшилось от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 50 кПа.

Решение.

Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 \mathrm{d}Q = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом, $Q = A + \Delta U$. Для изотермического процесса ΔU = 0, поэтому $Q = A$. Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем ΔS = 2,06 Дж/К.

Вопросы и задания.

1. Основные законы термодинамики.
2. Первое начало термодинамики.
3. Работа, совершаемая газом при изменении объема. Работа газа при различных процессах.
4. Адиабатический процесс.
5. Энтропия. Неравенство Клаузиуса.
6. Статистическое истолкование энтропии.
7. Второе начало термодинамики.
8. Тепловой двигатель. Теорема Карно.
9. Холодильная машина.
10. Цикл Карно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определить показатель адиабаты γ такой смеси.
2. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой m_1=10 г и водород массой m_2=4 г.
3. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и равных объемах. Определить удельную теплоемкость c_p смеси.
4. Определить удельную теплоемкость c_v смеси газов, содержащей V_1=5 л водорода и V_2=3 л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.
5. Каковы удельные теплоемкости c_v и c_p смеси газов, содержащей кислород массой m_1=10 г и азот массой m_2=20 г ?

6. Определить показатель адиабаты γ частично диссоциировавшего газообразного азота, степень диссоциации α которого равна 0,4.
7. Азот массой m=5 кг, нагретый на ΔT=150 К, сохранил неизменный объем V. Найти: 1) количество теплоты Q, сообщенное газу; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) совершенную газом работу A.
8. Водород занимает объем V_1=10 м^3 при давлении p_1=100 кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления p_2=100 кПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу A; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.
9. Наименьший объем V_1 газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем V_3, если объем V_2 в конце изотермического расширения и объем V_4 в конце изотермического сжатия соответственно равны: 600 л и 189 л.
10. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты Q_1=4,2 кДж, совершил работу A=590 Дж. Найти термический КПД η этого цикла. Во сколько раз температура T_1 нагревателя больше температуры T_2 охладителя?
11. Идеальный газ, совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в три раза выше температуры T_2 охладителя. Нагреватель передал газу количество теплоты Q_1=42 кДж. Какую работу A совершил газ?
12. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура T_2 охладителя равна 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя.
13. Идеальный многоатомный газ совершат цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД η цикла.
14. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества ν=1 моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем V_{min}=10 л, наибольший V_{max}=20 л, наименьшее давление p_{min}=246 кПа, наибольшее p_{min}=410 кПа. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический КПД η.
15. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты Q_1=4 кДж. Определить работу A газа при протекании цикла, если его термический КПД η = 0,1.
16. Кусок льда массой m=200 г, взятый при температуре t_1= - 10 °С, был нагрет до температуры t_2=0°С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры t_3=10°С. Определить изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.
17. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой m=4 г от объема V_1=5 л до объема V_2=9 л.
18. Кислород массой m=2 кг увеличил свой объем в n=5 раз один раз изотермически, другой – адиабатически. Найти изменения энтропии в каждом из указанных процессов.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Раздел 3. Электричество
Практическое занятие 7.

Тема занятия. **Электростатика**

Цель занятия. Изучить основные законы электростатики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электрические свойства тел. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Электрическое поле. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса. Вычисление напряженностей полей заряженных тел различной геометрии. Работа сил электрического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал поля точечного заряда. Разность потенциалов. Проводники в электрическом поле. Электрическое поле внутри заряженного проводника. Распределение зарядов в проводниках. Электроемкость проводников. Конденсаторы. Энергия электростатического поля. Владеет

способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные законы электростатики применяются при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

<u>Закон Кулона</u>: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r_{12} между ними.

В скалярной форме закон Кулона:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}^2}.$$

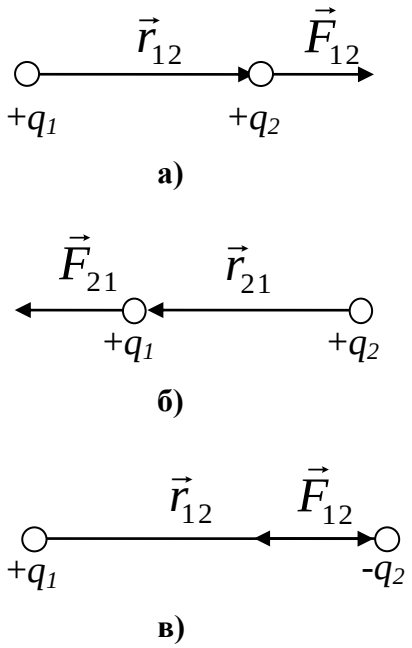


Рис. 1

Здесь: ε_0 – электрическая постоянная; ε_0 = $8.85 \cdot 10^{-12}$Кл^2/Н·м^2 (размерность может быть приведена к виду Ф/м); ε – диэлектрическая проницаемость среды, показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме превышает силу взаимодействия их в среде, т.е. $\varepsilon = \frac{F_0}{F}$ (F_0 – сила Кулона в вакууме, F – в среде); диэлектрическая проницаемость вакуума ε = 1, воздуха ε = 1. Закон Кулона, записанный в векторной форме (1), (2), определяет силу, действующую на заряды q_2 и q_1 со стороны q_1 и q_2 соответственно.

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \qquad (1)$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{21}^3}\vec{r}_{21}. \qquad (2)$$

Сила $\vec{F}_{12}$ действует на заряд q_2 со стороны q_1, при этом радиус-вектор $\vec{r}_{12}$ фиксирует положение заряда q_2 относительно начала системы координат, помещенного в точку, где находится заряд q_1. Радиус-вектор $\vec{r}_{12}$ направлен от q_1 к q_2 (рис.1а). Сила $\vec{F}_{21}$ действует на заряд q_1 со стороны q_2, радиус-вектор $\vec{r}_{21}$ (начало координат помещается в точку, где находится заряд q_2) направлен от q_2 к q_1 (рис.1б). Сила Кулона направлена в ту же сторону (рис.1а,б), что и радиус-вектор $\vec{r}$ при одинаковых знаках зарядов ($q_1q_2>0$), и в сторону,

противоположную радиус-вектору $\vec{r}$ (рис.1в) – при различных знаках зарядов q_1 и q_2 ($q_1q_2<0$).

Силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ по третьему закону Ньютона равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Напомним, что точечным зарядом называется наэлектризованное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других тел, с которыми оно взаимодействует.

Взаимодействие точечного заряда с распределенным зарядом

Заряд, сообщенный телу, может распределяться по его поверхности (металл) или по объему (диэлектрик).

Характеристиками распределенного заряда служат:

1. Линейная плотность заряда (τ).
2. Поверхностная плотность заряда (σ).
3. Объемная плотность заряда (ρ).

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Здесь ΔQ – заряд, находящийся соответственно на элементе длины Δl, поверхности ΔS, объема ΔV заряженного тела.

Напряженность поля точечного заряда

Вектор напряженности электростатического поля в некоторой точке является физической величиной, численно равной силе, действующей на помещенный в эту точку единичный положительный заряд (пробный).

Направление вектора напряженности в некоторой точке поля совпадает с направлением силы, действующей на помещенный в данную точку электростатического поля положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}, \qquad (3)$$

q' - заряд, помещенный в данную точку поля. Размерность Е следует из выражения (3):

$$[E] = \frac{H}{Кл}.$$

Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом q в точке на расстоянии r от заряда находят, используя выражение (3) и закон Кулона:

$$E = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2 q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \qquad (4)$$

Чтобы найти направление вектора напряженности в точке А (рис. 2), следует поместить в эту точку пробный положительный заряд q' и найти направление силы Кулона, действующей на q' со стороны заряда, создающего поле. Вектор напряженности поля, создаваемого положительным зарядом в точке А (рис. 2а),

направлен в сторону от заряда (сравните с рис. 1), а в случае отрицательного заряда направлен в сторону заряда (рис. 2б). Для нахождения напряженности поля, создаваемого системой зарядов, следует воспользоваться принципом суперпозиции электрических полей: вектор напряженности электрического поля системы зарядов равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности.

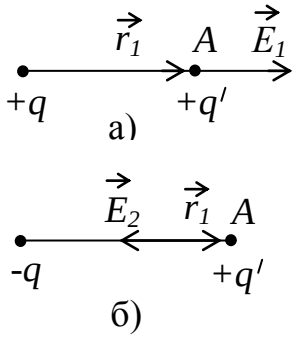


Рис.2

Работа сил поля при перемещении заряда, потенциал, разность потенциалов, потенциальная энергия системы зарядов.

Работа по перемещению заряда в поле. *Потенциал*

Пусть пробный заряд *q'* перемещается в поле точечного заряда *q* на бесконечно малый отрезок *dl* (рис. 3). Элементарная работа, совершаемая полем при перемещении заряда:

$$dA = Fdl\cos\alpha, \qquad (5)$$

Где *F* – сила, действующая на заряд *q'* на отрезке *dl*, α - угол между $\vec{F}$ и $d\vec{l}$ (рис. 3).

По закону Кулона

$$F = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \qquad (6)$$

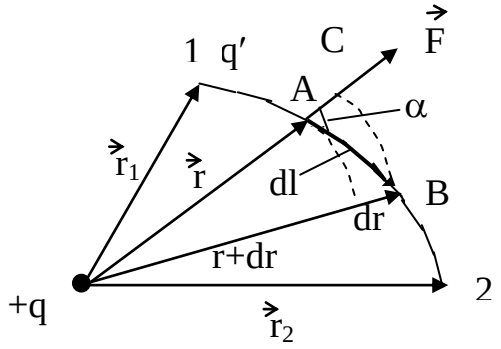


Рис. 3

Из ΔABC (рис. 13) найдем, что приращение длины радиус-вектора $\vec{r}$ численно равно:

$$dr = dl\cdot\cos\alpha. \qquad (7)$$

Подставив выражения (6) и (7) в выражение (5), получим:

$$dA = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr. \qquad (8)$$

Для нахождения полной работы, совершаемой полем при перемещении пробного заряда *q'* из положения 1 в положение 2 (рис.13), следует выражение (8) проинтегрировать по всему пути:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = q'\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = q'\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),$$

то есть

$$A_{12} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}. \qquad (9)$$

Будем перемещать пробный заряд q' из точки 1 за пределы поля, т.е. в бесконечность, где напряженность электрического поля E_∞ равна 0. При этом в формуле (9) $r_2=\infty$, и для $A_{1\infty}$ получим

$$A_{1\infty} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}. \qquad (10)$$

Поделив выражение (10) на q', получим величину, которая называется электрическим потенциалом данной точки поля:

$$\varphi = \frac{A_{1\infty}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \qquad (11)$$

То есть, потенциал данной точки поля численно равен работе, которую совершат силы поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечно удаленную. Потенциал определяется с точностью до постоянной С. Для бесконечно удаленной точки пространства удобно принимать С=0. (В выражении (11) С принята равной 0). Единица измерения потенциала может быть найдена из выражения:

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{Дж}{Кл} = \frac{Кл \cdot В}{Кл} = В.$$

Как следует из выражения (11), потенциал поля точечного заряда в заданной точке поля вычисляют по формуле:

$$\varphi_{Т.З.} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \qquad (12)$$

Здесь q – заряд, который создает поле, r - расстояние от заряда до точки, в которой вычисляется потенциал.

Разность потенциалов

Разделив выражение (9) на q', получим:

$$\frac{A_{12}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Отсюда:

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (13)$$

Величина $(\varphi_1 - \varphi_2)$ называется *разностью потенциалов*. Разность потенциалов двух точек измеряется работой, совершаемой силами поля при перемещении положительного единичного заряда из первой точки во вторую.

Потенциал поля системы точечных зарядов

равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами. То есть для потенциала, так же как и для напряженности поля, справедлив принцип суперпозиции электрических полей. При этом потенциал поля системы зарядов рассчитать всегда легче, чем напряженность, т.к. потенциал – величина скалярная (энергетическая характеристика поля). Поэтому в случаях, когда надо найти напряженность и потенциал в какой-либо точке поля, следует найти

сначала потенциал, а напряженность поля искать, используя связь между напряженностью и потенциалом:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}. \qquad (14)$$

Напряженность поля численно равна изменению потенциала на единицу длины, отсчитанной в направлении по силовой линии, и направлена в сторону убывания потенциала (этим объясняется знак минус в (14)).

Если поле неоднородно, то составляющая вектора напряженности электрического поля в данной точке по любому направлению равна производной от потенциала по этому направлению в той же точке, взятой со знаком минус:

$$E_X = -\frac{d\varphi}{dx};\quad E_Y = -\frac{d\varphi}{dy};\quad E_Z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Для однородного поля во всех его точках напряженность одна и та же. Если φ_1 – потенциал точки 1, а φ_2 – потенциал точки 2, расстояние между точками d, то:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

и выражение (14) для однородного поля имеет вид:

$$E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}.$$

Потенциал поля заряженной сферы (шара) определяется как потенциал поля точечного заряда (формула 12). При этом считается, что заряд сосредоточен в центре сферы, т.е. расстояние r (формула 12) отсчитывается от центра сферы.

Решение задачи по нахождению потенциала поля, создаваемого системой точечных зарядов в данной точке, не вызывает затруднений, поэтому примеры решения задач на эту тему здесь не рассматриваются.

Более сложно решение задач по нахождению потенциала в точках поля распределенного заряда, на этом остановимся подробнее.

Расчет работы,

совершаемой полем при перемещении заряда, и потенциальной энергии системы зарядов.

Работа сил поля, создаваемого зарядом Q, по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 подсчитывается по формуле (9), т.е.

$$A_{12} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Из этого выражения следует, что величина работы по перемещению заряда в электростатическом поле не зависит от пути движения заряда q, а зависит лишь от его начального и конечного положений.

При нахождении работы считается, что перемещающийся заряд (обычно меньший по величине, чем заряд Q, который создает поле) не изменяет электростатического поля, в котором он движется.

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов q и Q равна:

$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + W_\infty .$$

Обычно для упрощения расчетов бесконечно удаленную точку ($r_2 = \infty$) принимают за начало отсчета энергии, т.е. $W_\infty = 0$. Тогда:

$$W(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} . \qquad (15)$$

Сравните (15) и (12).

Из (15) следует, что потенциал поля в данной точке численно равен потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля. Работа, как мера изменения энергии (в данном случае потенциальной):

$$A_{12} = W_1 - W_2 .$$

Итак, работа сил поля по перемещению заряда:

а) $A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$,

б) $A = \int F dl$, ***если*** $F = const$: $A = Fl = qEl$.

(однородное поле, заряд движется по силовой линии)

в) $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

г) $A_{12} = W_1 - W_2$.

Потенциал поля точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$

Связь между потенциалом и напряженностью $E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$

Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора $F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon \cdot S},$

где S – площадь пластин.

Электроемкость:

уединенного проводника $C = \frac{q}{\varphi};$

плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d};$

слоистого конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum d_i / \varepsilon_i},$

шара $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R,$

где d – расстояние между пластинами конденсатора, d_i – толщина i-го слоя диэлектрика, ε_i – его диэлектрическая проницаемость, R – радиус шара.

Электроемкость батареи конденсаторов, соединенных:

параллельно $C = \sum C_i;$

последовательно $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$

Энергия поля:

заряженного проводника $W_Э = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2};$

заряженного конденсатора $W_Э = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2 V,$

где V – объем конденсатора.

Объемная плотность энергии

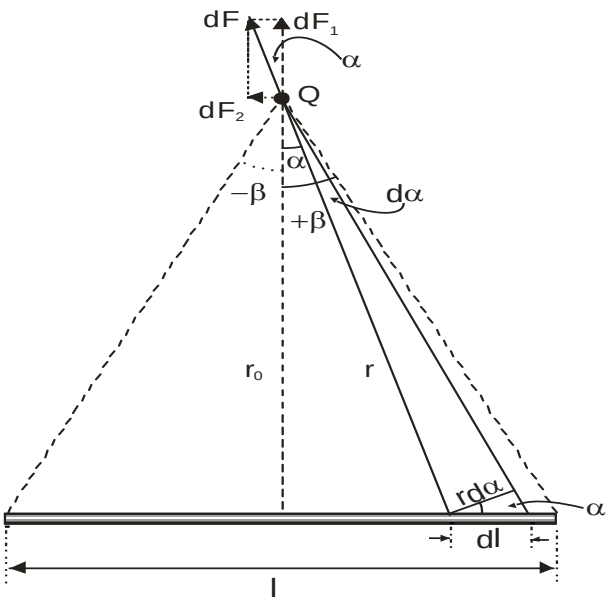
электрического поля $W_Э = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{ED}{2}.$

Примеры решения задач

Задача 1. Тонкий стержень длиной 20 см несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью τ = 2 мкКл/м. На расстоянии 30 см от стержня находится заряд 20 нКл, равноудаленный от концов стержня. Найти силу взаимодействия заряда и стержня.

Дано:
l = 20 см = 0,2 м
τ = 2 мкКл/м = $2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м
r_0 = 30см = 0,3 м
Q = 20 нКл = $2 \cdot 10^{-8}$ Кл

F = ?



Выделим на стержне элементарный участок длиной dl. Заряд его $dQ = \tau dl$ можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона сила взаимодействия между Q_1 и dQ равна

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot dl}{r^2},$$

где r – расстояние от выделенного участка до заряда Q_1 (см. рис.). Из рисунка следует, что $r = \dfrac{r_0}{\cos\alpha}$, $dl = \dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$, где r_0 – расстояние от Q_1 до стержня.

Подставив выражения для r и dl в формулу для силы dF получим, что

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot\tau\cdot rd\alpha}{\dfrac{r_0^2}{\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot\tau\cdot r_0\cdot d\alpha}{\dfrac{r_0^2\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{Q_1\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

Это векторная величина; разложим $d\vec{F}$ на составляющие: перпендикулярную стержню $d\vec{F}_1$ и параллельную ему $d\vec{F}_2$. Очевидно,

$$dF_1 = dF\cdot\cos\alpha, \qquad dF_2 = dF\cdot\sin\alpha, \text{ тогда}$$

$$dF_1 = \frac{Q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha, \quad dF_2 = \frac{Q_1\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha$$

Проинтегрируем полученные выражения для сил в пределах изменения угла α от $-\beta$ до β.

$$F_1 = \int_{-\beta}^{\beta}\frac{Q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\cdot\left|\sin\alpha\right|\Big|_{-\beta}^{+\beta} = \frac{Q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\beta$$

$$F_2 = \int_{-\beta}^{\beta}\frac{Q_1\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha = -\frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\cdot\left|\cos\alpha\right|\Big|_{-\beta}^{+\beta} = 0.$$

В результате получим, что $F = F_1 = \dfrac{Q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\beta$.

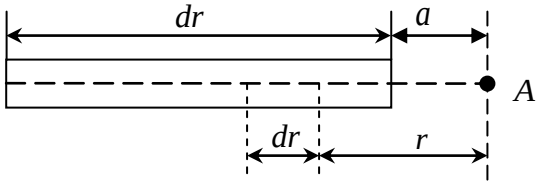
Величину $\sin\beta$ определим из рисунка:

$$\sin\beta = \frac{\dfrac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \dfrac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$$ и подставим в выражение для силы F.

$$F = \frac{Q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\cdot\frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} = \frac{2\cdot10^{-8}\cdot2\cdot10^{-6}}{2\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}3}\cdot\frac{0{,}2}{\sqrt{4\cdot(0{,}3)^2 + (0{,}2)^2}} = 0{,}76\cdot10^{-3}\text{ Н}$$

Задача 2. Тонкий стержень длиной l = 10 см несет равномерно распределенный заряд Q = 1 нКл. Определить потенциал φ электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии a = 20 см от ближайшего его конца.

Дано:
l = 10 см = 0,1 м
Q = 1нКл = 10^{-9} Кл
a = 20 см = 0,2 м
φ – ?



Выделим на стержне элементарный участок длиной *dr*. Заряд на стержне распределен равномерно, следовательно, его линейная плотность $\tau = \frac{Q}{l}$ и на участке длиной dr размещен заряд $dQ = \tau \cdot dr$. Этот заряд можно считать точечным. Тогда потенциал электрического поля этого заряда в точке *A* равен

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} \qquad (1)$$

где r – расстояние от элементарного участка *dr* до точки *A*.

Из принципа суперпозиции следует, что общий потенциал равен сумме потенциалов всех элементарных зарядов стержня.

Поэтому интегрируем выражение (1) для $d\varphi$ в пределах изменения *dr* от *a* до *l*+*a*:

$$\varphi = \int_a^{l+a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_a^{l+a}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+a}{à} = \frac{10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1}\cdot\ln\frac{0{,}1+0{,}2}{0{,}2} = 36{,}5\ \text{В}.$$

Задача 3. Конденсатор емкостью C_0 = 20 мкФ заряжают до разности потенциалов U_0 = 400В и подключают к конденсатору емкостью C = 1 мкФ, в результате чего последний заряжается. Отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор той же емкости (C = 1мкФ), затем третий, четвертый и т.д. Затем конденсаторы соединяют последовательно. Какую максимальную разность потенциалов можно получить таким образом?

Дано:
C_0 = 20 мкФ=$20\cdot 10^{-6}$ Ф
U_0 = 400 В
C = 1мкФ

U = ?

Начальный заряд конденсатора емкостью C_0 будет равным $Q_0 = C_0 \cdot U$.

После подключения к нему конденсатора емкостью C заряд Q_0 распределяется между C_0 и C. После отсоединения C от C_0 на обоих конденсаторах будет одинаковая разность потенциалов (т.к. их соединение было параллельным).

$$U_1 = \frac{Q_0}{C_0 + C} = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C}.$$

На конденсаторе C_0 останется заряд $Q_1 = C_0 \cdot U_1 = \frac{C_0^2 U_0}{C_0 + C}$.

При последующем подключении второго конденсатора C на конденсаторе C_0 останется заряд $Q_2 = C_0 \cdot U_2$.

Причем $U_2 = \frac{C_2 U_2}{C_0 + C} = \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^2 U_0$.

Повторяя эту операцию n раз, мы будем иметь набор конденсаторов, заряженных до напряжений U_1, U_2, U_3,…, $U_n\,(n=1,2,3,...)$. $U_n = U_0\left(\frac{C_0}{C_0+C}\right)^n$.

Общее напряжение после последовательного соединения всех n конденсаторов будет равно

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C}\left(1 + \frac{C_0}{C_0 + C} + \frac{C_0^2}{(C_0 + C)^2} + ... + \frac{C_0^n}{(C_0 + C)^n}\right).$$

Просуммировав полученную бесконечную убывающую геометрическую прогрессию найдем её сумму равную максимальной разности потенциалов U:

$$U = \frac{C_0 U_0}{C} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 400}{10^{-6}} = 8000 \text{ В}.$$

Задача 4. Батарею, состоящую из двух конденсаторов емкостями 4 и 5 мкФ каждый, соединили последовательно и включили в сеть с напряжением 220 В. Потом батарею отключили от сети, а конденсаторы разъединили и соединили параллельно обкладками, имеющими одноименные заряды. Каким будет напряжение на зажимах полученной батареи?

Дано:
U_1 = 220 В
C_1 =4 мкФ = $4 \cdot 10^{-6}$ Ф
C_2 = 5 мкФ = $5 \cdot 10^{-6}$ Ф

U_2 = ?

Так как конденсаторы соединены последовательно, то заряд каждого из них и батареи в целом одинаковы:

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q.$$

Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов вычисляется по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\ .$$

Емкость батареи из двух конденсаторов равна $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$,

а их заряд $Q = CU_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1$.

При отключении конденсаторов заряд каждого из них сохранится. При параллельном их соединении будет равен сумме зарядов конденсаторов $Q' = Q_1 + Q_2 = 2Q$, а емкость батареи будет равна сумме емкостей $C' = C_1 + C_2$.

Общее напряжение станет равным

$$U_2 = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{2Q}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя в полученное выражение формулу для Q, получим:

$$U_2 = \frac{2C_1 C_2 U_1}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 220}{(4 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6})^2} = 108{,}6 \text{ В}$$

Задача 5. Какое количество теплоты Q выделится при разрядке плоского воздушного конденсатора, если разность потенциалов между пластинами равна 10 кВ, расстояние d=0,5 мм, а площадь S каждой пластины равна 100 см^2?

Дано:	
U=10 кВ=10^4 В d=0,5 мм=$5\cdot10^{-4}$ м S=100 см^2=10^{-2} м^2	Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты Q, выделившееся в конденсаторе при его разрядке, равно энергии заряженного конденсатора $Q=\frac{CU^2}{2}$
Q = ?	

Емкость плоского конденсатора определяется по формуле

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха ε=1). Значит

$$Q=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d}=\frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10^{-2}\cdot10^{8}}{2\cdot5\cdot10^{-4}}=8{,}85\cdot10^{-3}\text{ Дж}=8{,}85\text{ мДж}.$$

Вопросы и задания.

1. Электрический заряд и его свойства. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.
2. Напряженность электростатического поля. Линии напряженности электростатического поля. Поток вектора напряженности.
3. Принцип суперпозиции. Поле диполя.
4. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.
5. Применение теоремы Гаусса к расчету полей в вакууме.
6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.
7. Потенциал электростатического поля. Разность потенциалов.
8. Связь между напряженностью и потенциалом. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля.
9. Диэлектрики. Поляризованность диэлектриков. Напряженность поля в диэлектрике.
10. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.
11. Проводники в электростатическом поле. Электроемкость. Соединение конденсаторов в батареи.
12. Энергия системы зарядов и уединённого проводника. Энергия конденсатора. Энергия электростатического поля

Задачи для самостоятельного решения

1. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью σ_1 = 10 нКл/м^2 и σ_2 = -30 нКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S, равную 1 м^2.
2. Две прямоугольные одинаковые параллельные пластины, длины сторон которых a = 10 см и b = 15 см, расположены на малом (по сравнению с

линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд Q_1 = 50 нКл, на другой – заряд Q_2 = 150 нКл. Определить напряженность E электрического поля между пластинами.

3. На отрезке тонкого прямого проводника длиной l = 10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=3 мкКл/м. Вычислить напряженность E, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное его длине.

4. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды Q = 0,3нКл каждый. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в положении равновесия?

5. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами Q_1 = 40 нКл и Q_2 = – 10 нКл, находящимися на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на r_1 = 12см и от второго на r_2 = 6см.

6. Три одинаковых заряда Q=1 нКл каждый расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в положении равновесия? Будет ли это равновесие устойчивым?

7. Тонкая нить длиной l = 20см равномерно заряжена с линейной плотностью τ = 10 нКл/м. На расстоянии a = 10см от нити, против ее середины, находится точечный заряд Q = 1 нКл. Вычислить силу F, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.

8. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a=10 см расположены точечные заряды Q, 2Q, 3Q, 4Q, 5Q, 6Q (Q=0,1 мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд Q, лежащий в плоскости шестиугольника, равноудаленный от его вершин и равный заряду Q.

9. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ заряда, равной 10 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии a=20 см от его конца находится точечный заряд Q = 10 нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

10. Расстояние между двумя точечными зарядами Q_1=1 мкКл и Q_2 = - Q_1 равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд Q=0.1 мкКл, удаленный на r_1 = 6 см от первого и на r_2=8 см от второго зарядов.

11. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии d = 0,5 см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 = 0,2 мкКл/м^2 и σ_2 = 0,3 мкКл/м^2. Определить разность потенциалов U между плоскостями.

12. Определить потенциальную энергию $П$ системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной длиной a = 10см. Заряды одинаковы по абсолютному значению Q = 10нКл, но два из них отрицательны. Рассмотреть два возможных случая расположения зарядов.

13. Какова потенциальная энергия $П$ системы четырех одинаковых точечных зарядов Q = 10нКл, расположенных в вершинах квадрата со стороной a = 10см?

14. Два конденсатора электроемкостями C_1 = 3мкФ и C_2 = 6мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС E = 120В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.
15. Конденсатор электроемкостью C_1 = 0,2мкФ был заряжен до разности потенциалов U_1 = 320В. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов U_2 = 450В, напряжение U на нем изменилось до 400В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора.
16. Электрическое поле создано заряженной (Q = 0,1 мкКл) сферой радиусом R = 10 см. Какова энергия W поля, заключенная в объеме, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раза больше радиуса сферы.
17. Шар радиусом R_1=8 см заряжен до потенциала φ_1=500 В, а шар радиусом R_2=4 см - до потенциала φ_2=300 В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.
18. Шар радиусом R_1=6 см заряжен до потенциала φ_1=300 В, а шар радиусом R_2=4 см – до потенциала φ_2=500 В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.
19. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2. Найти плотность энергии $\boldsymbol{w}$ поля конденсатора.
20. Какое количество теплоты Q выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние d = 1 мм, диэлектрик – слюда и площадь S каждой пластины равна 300 см?

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html
2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 8.

Тема занятия. **Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в диэлектриках**

Цель занятия. Изучить проводники в электрическом поле.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Поляризация диэлектриков. Поляризационные заряды. Диэлектрическая проницаемость среды. Диэлектрики с особыми свойствами: пьезоэлектрики и сегнетоэлектрики. Объемная плотность энергии. Полярные и неполярные диэлектрики. Векторы поляризации и электростатической индукции (смещения). Поляризованность. Условия на границе двух диэлектриков. Проводники. Проводники в электростатическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике. Электроемкость уединенного проводника. Емкость системы проводников. Конденсаторы. Потенциальная энергия системы зарядов. Энергия электростатического поля. Плотность энергии. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные законы электростатики применяются при решении многих инженерных задач.

Теоретическая часть.

Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Поляризация диэлектриков. Поляризационные заряды.

Вектор поляризации (поляризованность) – это дипольный момент единицы объема, он определяется соотношением $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$ где χ – диэлектрическая восприимчивость. Вектор электрической индукции (или вектор электрического смещения определяется выражением $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

Поляризуемость. Диэлектрическая проницаемость зависит от поляризумости молекул вещества, $\vec{p} = \beta\varepsilon_0\vec{E}.$ Тензор поляризуемости. В общем случае дипольный момент молекулы не совпадает по направлению с внешним магнитным полем, поэтому $p_i = \beta_{ij}\varepsilon_0 E_j$.

Плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком. В этой системе связанные заряды будут только на поверхности, и существует связь $\left|\vec{P}\right| = \sigma$, где σ – поверхностная плотность связанных зарядов.

Теорема Гаусса для диэлектриков

Для диэлектриков выполняются следующие соотношения:

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q', \quad div\vec{P} = -\rho';$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q, \quad div\vec{D} = \rho.$$

Поле точечного заряда в диэлектрике

Закон Кулона для бесконечного однородного диэлектрика имеет вид

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.$$

Условия на границе раздела двух диэлектриков во внешнем электрическом поле.

На границе раздела диэлектриков выполняется равенство тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$: $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ и равенство нормальных составляющих вектора $\vec{D}$: $\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}$. Уравнение Пуассона для однородных диэлектриков имеет вид

$$\vec{\nabla}\left(\varepsilon\vec{\nabla}\varphi\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Энергия системы электрических зарядов в диэлектрике. Энергия поля в диэлектриках. Плотность энергии электрического поля в диэлектриках определяется выражением $w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}$.

Электрический ток в проводниках

Плотность тока, плотность тока и ток связаны соотношением $\int \vec{j} d\vec{S} = I$. Уравнение неразрывности (закон сохранения заряда)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0.$$

Закон Ома для плотности тока. Удельная проводимость, удельное сопротивление

Между плотностью тока и напряженностью электрического поля существует линейная связь, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (закон Ома в дифференциальной форме). Закон Ома для однородного проводника записывается в виде $I = \frac{U}{R}$. Закон Джоуля – Ленца задает количество тепла, которое выделяется в проводнике при протекании тока в единицу времени:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{U^2}{R}.$$

Правильное описание движения зарядов в проводниках дает только квантовая теория. Примитивная электронная теория протекания тока через металл основывается на движении зарядов как классических частиц, на которые действует сила со стороны электрического поля и сила трения со стороны среды.

Примеры решения задач

Задача 1. Диполь с электрическим моментом P=50 пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}}$. Найти работу, необходимую для поворота диполя на угол α=30˚.

Дано:
P=50пКл·м=$5\cdot10^{-11}$ Кл·м
$d\alpha$
$E = 30\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}} = 3\cdot10^4\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$
α=30˚

A = ?

Элементарная работа при повороте диполя на угол

$$dA = M\cdot d\alpha,$$

где $M = P\cdot E\cdot\sin\alpha$ - механический момент сил, действующий на диполь. α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{P}$. Таким образом $dA = P\cdot E\cdot\sin\alpha\cdot d\alpha$.

При свободном положении диполь в электрическом поле $\alpha = 0$, значит полная работа может быть рассчитана по формуле

$$A = \int_0^{\alpha} P\cdot E\sin\alpha\cdot d\alpha = -PE\cdot\cos\alpha\Big|_0^{\alpha}.$$

$$A = -5\cdot10^{-11}\cdot3\cdot10^4\left(\cos30^\circ - \cos0^\circ\right) = 2\cdot10^{-7}\text{ Дж}=0{,}2\text{ мкДж}.$$

Вопросы и задания.

1. Диэлектрики в электростатическом поле.
2. Поляризация диэлектриков, вектор поляризации.
3. Связь вектора поляризации с объемной и поверхностной плотностью связанных зарядов.
4. Теорема Гаусса для диэлектриков.
5. Поле точечного заряда в диэлектрике.

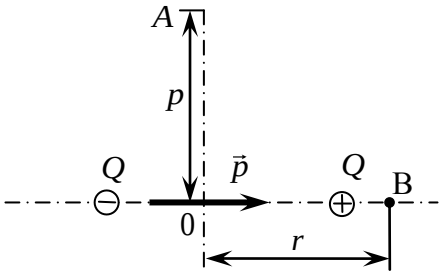
Задачи для самостоятельного решения

1. Точечный диполь с электрическим моментом p = 100 пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью E = 9 МВ/м. Диполь повернули на малый угол и предоставили самому себе. Определить частоту ν собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции J диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен $4 \cdot 10^{-12}$ кг·м^2.

2. Диполь с электрическим моментом p = 100 пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью E = 10 кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии $\Delta П$ диполя при повороте его на угол $\alpha = 60°$.

3 .Диполь с электрическим моментом p = 100 пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью E = 150 кВ/м. Вычислить работу A, необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha = 180°$.

4.Определить напряженность E и потенциал φ поля, созданного точечным диполем в точках A и B. Его электрический момент p = 1 пКл·м, а расстояние r от точек A и B до центра диполя равно 10 см.(см.рисунок).



5. Расстояние l между зарядами Q= ±3,2 нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал φ поля, созданного диполем в точке, удаленной на r=8 см как от первого, так и от второго заряда.

6. Два точечных диполя с электрическими моментами p_1 = 1 пКл·м и p_2 = 4 пКл·м находятся на расстоянии r = 2 см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

7. Два точечных диполя с электрическими моментами p_1 = 20пКл·м и p_2 = 50пКл·м находятся на расстоянии r = 10 см друг от друга так, что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.

8. Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого точечным диполем с электрическим моментом p = 4 пКл·м на расстоянии r = 10 см от центра диполя, в направлении, составляющем угол α = 60°с вектором электрического момента.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 9.

Тема занятия. **Законы постоянного тока.**

Цель занятия. Изучить законы постоянного тока

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Источники тока. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Закон Ома для полной цепи. Разветвленные цепи. Законы Кирхгофа. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца. Тепловое действие электрического тока и его применение в технике. Элементарная классическая теория электропроводности металлов. Границы применимости классической терии электропроводности. Контактные явления. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные понятия и законы постоянного тока применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Характеристики электрического тока и условия его существования

В электростатике изучались явления, обусловленные неподвижными зарядами. Если по какой-либо причине возникает упорядоченное движение зарядов и через поверхность переносится заряд, отличный от нуля, то говорят, что возникает электрический ток.

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока – величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу

времени. Если за время dt через поверхность переносится заряд dq, то сила тока равна:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

Единицей силы тока является ампер (А). За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды или направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов. Свободные заряды, которые перемещаются в среде, называются носителями тока.

Электрический ток может быть распределен неравномерно по поверхности, через которую он течет. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока $\vec{j}$. Пусть заряженные частицы движутся в определенном направлении со скоростью $\vec{u}$. Вектором плотности тока $\vec{j}$ называется вектор, по направлению совпадающий с направлением скорости положительных зарядов (или против направления скорости отрицательных зарядов), а по абсолютной величине равный отношению силы тока dI через элементарную площадку $dS_{\perp}$, расположенную в данной точке пространства перпендикулярно к направлению движения носителей, к ее площади.

$$\boxed{j = \frac{dI}{dS_{\perp}}}$$

Число носителей тока в единице объема n называется плотностью носителей тока. Заряд отдельного носителя будет обозначаться e.

Если свободными зарядами являются, например, электроны, а положительные заряды неподвижны (это имеет место в металлах), то плотность носителей будет совпадать с числом свободных электронов в единице объема.

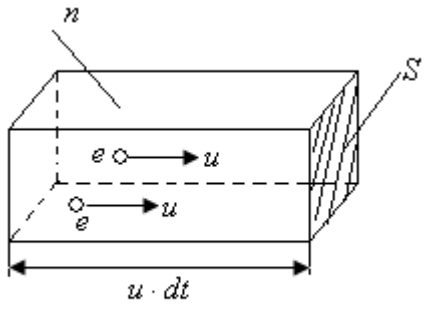


Рис. 20.1

Вектор плотности тока можно выразить через плотность носителей тока и скорость их движения. Количество заряда, перенесенного за время dt через некоторую поверхность S, перпендикулярную к вектору скорости (рис. 20.1), равно $dq = n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot S$. За время dt площадку S пересекут все свободные заряды в параллелепипеде с основанием S и длиной udt. Если площадка S достаточно мала, то плотность тока в её пределах можно считать постоянной и тогда: $j = \frac{I}{S} = \frac{dq}{Sdt} = \frac{n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot S}{S \cdot dt} = n \cdot e \cdot u$.

В векторной форме:

$$\boxed{\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{u}}$$

Сила тока через произвольную поверхность

$$\boxed{I = \int_S \vec{j} d\vec{S}}$$

Электрический ток, обусловленный движением свободных зарядов в проводниках различной природы, называется током проводимости.

Свободные заряды в проводнике испытывают столкновения с атомами проводника. За время «свободного пробега» τ между двумя столкновениями заряд в проводнике приобретает направленную скорость вдоль внешнего электрического поля:

$$\vec{u} = \vec{w}\tau = \frac{e\vec{E}}{m_0}\tau$$

где $\vec{E}$ напряженность электрического поля в проводнике. После очередного столкновения скорость теряется. Затем, до следующего столкновения, происходит новое наращивание направленной скорости.

Из вышеизложенного следует, что ***условиями существования тока*** является:

а) Наличие свободных зарядов;

б) Наличие электрического поля внутри проводника, чтобы поддерживать перемещение зарядов.

Электродвижущая сила, напряженность

Если бы на носитель тока действовали только силы электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из места с большим потенциалом к месту с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это привело бы к выравниванию потенциалов, и в результате ток бы прекратился. Чтобы этого не произошло, должны иметься участки на которых перенос положительных зарядов происходит в сторону возрастания φ, т.е. против сил электростатического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил не электростатического происхождения, называемых сторонними силами. Физическая природа сторонних сил может быть различна. Например, химическая (как в аккумуляторах), механическая, магнитная и другие.

Величина, равная отношению работы сторонних сил по перенесению заряда к величине этого заряда называется электродвижущей силой (ЭДС).

ЭДС измеряется в тех же единицах что и потенциал, т.е. в вольтах (В).

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде $\vec{F}_{стор} = \vec{E}_{стор} q$, где $\vec{E}_{стор}$ - напряженность поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом на некотором участке 1-2:

$$A_{стор}^{1-2} = q\int_1^2 \vec{E}_{стор} d\vec{l}$$

Разделив обе части согласно определению ЭДС на заряд, получим:

$$\boxed{\varepsilon_{12} = \frac{A_{стор}^{1-2}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{стор} d\vec{l}}$$

Для замкнутой цепи:

$$\boxed{\varepsilon = \oint \vec{E}_{стор} d\vec{l}}$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд, равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{стор} = q\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1-2, определяется выражением $A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}_{стор} d\vec{l}$. Т.к. $q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, а $q\int_1^2 \vec{E}_{стор} d\vec{l} = q\varepsilon_{12}$, тогда работа равна $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}$.

Разделим обе части на q. В левой части отношение $\frac{A_{12}}{q}$ обозначим U_{12}. Величина, численно равная отношению работы и электростатических и сторонних сил по перемещению заряда к величине этого заряда называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи U_{12}.

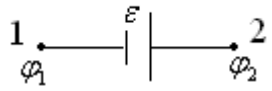


Рис. 20.2

Таким образом (рис. 20.2),

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}$$

Заметим, что если на участке отсутствует ЭДС, то $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. (Для замкнутой цепи точки 1 и 2 совпадают, $\varphi_1 = \varphi_2$ и, тогда $U_{12} = \varepsilon_{12}$.) Можно показать, что $U_{12} = IR$, где R - полное сопротивление цепи и тогда

$$\boxed{IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}$$

Это уравнение выражает закон Ома для неоднородного участка цепи (с ЭДС).

Классическая электронная теория электропроводимости металлов и ее недостаточность

Внутренняя структура металлов характеризуется кристаллической решеткой. В узлах кристаллической решетки находятся положительные ионы; в пространстве между ними практически свободно движутся обобществленные электроны. Немецкий физик П. Друде предположил, что электроны ведут себя как частицы идеального газа, и предложил использовать для описания их поведения известные формулы кинетической теории газов.

Система свободных обобществленных в кристаллической решетке электронов называется электронным газом. В отличие от молекул газа, пробег которых определялся соударением молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами образующими кристаллическую решетку метала. Этими столкновениями обусловлено в частности, сопротивление металла электрическому току.

Хаотическое тепловое движение электронов в металлах можно характеризовать средней скоростью $<\upsilon>=\sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_e}}$ (для комнатных температур $\langle\upsilon\rangle \sim 10^3 м/с$). При наличии внешнего поля электроны обладают еще некоторой средней скоростью направленного движения $\vec{u}$. Обычно $u \sim 10^{-2} \div 10^{-3} м/с$, то есть $u << \langle\upsilon\rangle$.

Вывод законов Ома и Джоуля-Ленца из электронных представлений

Закон Ома.

Средний путь, проходимый свободно движущимися электронами между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки называется средней длинной свободного пробега λ. Среднее время между двумя столкновениями $\tau = \frac{\lambda}{\upsilon}$ (определяется скоростью хаотического движения). При наличии поля $\vec{E}$ направленная скорость электронов накапливается за время свободного пробега и к моменту следующего соударения достигает максимальной величины:

$$\vec{u}_{max} = \vec{w}\tau = \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\lambda}{\upsilon}.$$

Скорость $\vec{u}$ изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее за пробег значение равно половине максимального значения.

$$<\vec{u}>=\frac{1}{2}\vec{u}_{max}=\frac{1}{2}\frac{e\vec{E}}{m}\frac{\lambda}{\upsilon}$$

Плотность тока:

$$\vec{j}=n\cdot e\cdot<\vec{u}>=\frac{n\cdot e^2\cdot\lambda}{2m\upsilon}\vec{E}$$

Коэффициент пропорциональности между $\vec{j}$ и $\vec{E}$ обозначим $\sigma=\frac{n\cdot e^2\cdot\lambda}{2m\upsilon}$ (σ - проводимость). В результате получим закон Ома в локальной форме (параметры относятся к данной точке сечения проводника).

$$\boxed{\vec{j}=\sigma\cdot\vec{E}}$$

Плотность тока в проводнике пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{E}$. Коэффициентом пропорциональности является проводимость. (Замечание. Сравним полученную формулу с известной $I=\frac{U}{R}$. Проводимость σ обратно пропорциональна удельному сопротивлению ρ $\sigma=\frac{1}{\rho}$. Плотность тока $j=\frac{I}{S}$. Напряженность поля $E=\frac{U}{l}$ (l - длинна проводника). Тогда $\frac{I}{S}=\frac{1}{\rho}\frac{U}{l}$, или $I=\frac{U}{\rho\cdot l}S=\frac{U}{R}$, что и требовалось.)

Закон Джоуля – Ленца.

К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, среднее значение которой равно:

$$<\Delta E_k>=\frac{m\cdot u_{max}^2}{2}=\frac{e^2\lambda^2}{2m\upsilon^2}E^2$$

(Напомним: $u_{max}=\frac{eE\lambda}{m\upsilon}$).

Столкнувшись с атомом, электрон, по предположению, полностью передает приобретенную им энергию кристаллической решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляясь в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем $z=\frac{\upsilon}{\lambda}$ соударений. Обозначим число электронов проводимости в единице объема n, тогда полная энергия, переданная электронами за единицу времени в единице объема будет равняться:

$$W=n\cdot z<\Delta E_k>=n\cdot z\cdot\frac{e^2\lambda^2}{2m\upsilon^2}E^2=\frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}\frac{\lambda}{\upsilon}\frac{\upsilon}{\lambda}E^2=\frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}E^2.$$

Зная, что $\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2m\upsilon}$ в результате получим закон Джоуля – Ленца в локальной форме:

$$\boxed{W = \sigma \cdot E^2}$$

Тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема при протекании электрического тока пропорциональна квадрату напряженности поля.

Переходя от σ и E к ρ и j: ($\sigma = \frac{1}{\rho}$, $E = \frac{j}{\sigma}$), получим $W = \frac{1}{\rho}\left(\frac{j}{\sigma}\right)^2 = \rho \cdot j^2$, или

$$\boxed{W = \rho \cdot j^2}$$

Получили другую форму закона Джоуля – Ленца. (Объемная плотность тепловой мощности равна произведению удельного сопротивления на квадрат плотности тока).

Затруднения классической электронной теории электропроводности металлов

Классическая теория смогла объяснить полученные ранее экспериментально законы Ома и Джоуля – Ленца, но есть и существенные затруднения. Основными являются следующие:

1. Теоретическое значение проводимости изменяется с температурой $\sigma_{теор} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, экспериментальная же зависимость $\sigma = \frac{1}{T}$.

2. Классическая теория не в состоянии объяснить такое явление как сверхпроводимость.

Имеются и другие затруднения и в этом недостаточность классической теории.

Современная квантовая теория электропроводимости металлов показывает, что все трудности классической теории связаны с тем, что представление об электронах как идеальном газе является грубым приближением. На самом деле электроны внутри металла не являются такими свободными, как это следует из классической теории.

В современной квантовой теории показывается, что электроны внутри металла, как и электроны в атоме не могут иметь любую энергию, а лишь вполне дискретные значения энергии – энергия электронов квантуется.

5. Законы Кирхгофа

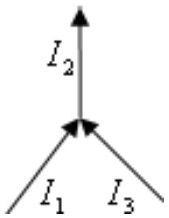


Рис. 20.3

1. Первый закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum I_k = 0$$

При этом токи, идущие к узлу, принято считать положительными, а от узла – отрицательными (можно и наоборот – это несущественно).

Заметим, что узел – это точка, где сходятся три и более тока. Например, для рис. 20.3 первый закон запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

2. Второй закон Кирхгофа (он относится к любому выделенному в цепи замкнутому контуру):

Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления (сумма падений напряжений) равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

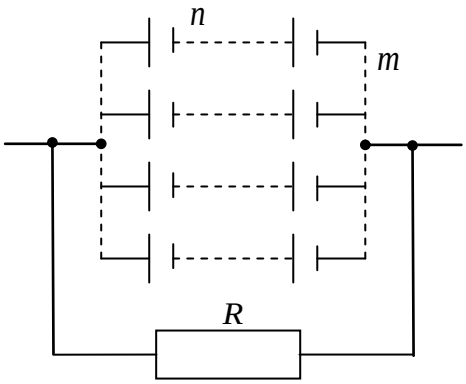
$$\sum I_k R_j = \sum \varepsilon_i$$

Примеры решения задач

Задача 1. Даны 12 элементов с ЭДС $\mathscr{E}$ =1,5 В и внутренним сопротивлением r=0,4Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление R=0,3 Ом? Определить максимальную силу тока I_{max}.

Дано:
N=12
$\mathscr{E}$ =1,5 *В*
r=0, 4 *Ом*
R=0, 3 *Ом*

I_{max} = ?



Предположим, что соединение состоит из m параллельно соединенных ветвей по n последовательно соединенных элементов в каждой (см. рис.). Очевидно, $N = m \cdot n$, При последовательном соединении ЭДС и внутреннего сопротивления элементов складываются; поэтому ЭДС каждой ветви $\mathscr{E}_{\text{В}} = n \cdot \mathscr{E}$, а внутреннее сопротивление $r_{\text{В}} = n \cdot r$.

При параллельном соединении $\mathscr{E}$ системы равна $\mathscr{E}$ отдельного элемента и $\frac{1}{r_{\text{с}}}=\sum_{1}^{m}\frac{1}{r_i}$. Следовательно, ЭДС соединения равна ЭДС отдельной ветви $\mathscr{E}_{\text{С}}=\mathscr{E}_{\text{Б}}$, а внутреннее сопротивление соединения $r_{\text{С}}=\frac{r_{\text{В}}}{m}$.

Таким образом, для батареи элементов имеем $\mathscr{E}_{\text{С}}=n\cdot\mathscr{E}$, и $r_{\text{с}}=\frac{nr}{m}$.

По закону Ома для замкнутой цепи получим

$$I=\frac{\mathscr{E}_C}{r_C+R}=\frac{n\cdot\mathscr{E}}{\frac{nr}{m}+R}=\frac{n\cdot m\mathscr{E}}{nr+mR}=\frac{N\cdot\mathscr{E}}{n\cdot r+mR} \qquad (1)$$

Так как $N=m\cdot n$ и $n=\frac{N}{m}$, то окончательно получим

$$I=\frac{N\cdot\mathscr{E}}{\frac{N}{m}r+mR}=\frac{N\mathscr{E}\cdot m}{Nr+m^2R} \qquad (2)$$

Исследуем на экстремум функцию $I(m)$, представленную формулой (2).

$$I'(m)=\left(\frac{N\mathscr{E}\cdot m}{Nr+m^2R}\right)'=\frac{N\cdot\mathscr{E}\cdot\left(Nr+m^2R\right)-N\cdot\mathscr{E}\cdot m\cdot\left(2mR\right)}{\left(Nr+m^2R\right)^2} \qquad (3)$$

Приравнивая (3) к нулю $\frac{N\mathscr{E}\left(Nr+m^2R\right)-2N\mathscr{E}\cdot m^2R}{\left(Nr+m^2R\right)^2}=0$,

найдем максимальное значение m. В результате получим

$$m=\sqrt{\frac{Nr}{R}}=\sqrt{\frac{12\cdot0{,}4}{0{,}3}}=4, \text{ и } \quad n=\frac{N}{m}=\frac{12}{4}=3.$$

Таким образом:

$$I_{\max}=\frac{N\mathscr{E}}{nr+mR}=\frac{12\cdot1{,}5}{3\cdot0{,}4+4\cdot0{,}3}=7{,}5\text{ А}.$$

Ответ: соединение состоит из четырех ветвей по 3 последовательно соединенных элементов, максимальный ток 7,5 А.

Задача 2. При силе тока I_1=3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность P_1=18 Вт, при силе тока I_2=1 А – соответственно P_2=10 Вт. Определить ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи.

Дано:

I_1=3 А

P_1=18 Вт

I_2=1 А

P_2=10 Вт

$\mathscr{E}$ = ?

r = ?

Так как мощность $P = I \cdot U$, то напряжение в первом случае $U_1 = \frac{P_1}{I_1}$, а во втором $U_2 = \frac{P_2}{I_2}$.

Из закона Ома для замкнутой цепи - $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}$.

Из приведенных выше равенств следует

$$\begin{cases} \mathscr{E} = I_1 r + U_1 \\ \mathscr{E} = I_2 r + U_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{E} = I_1 r + \frac{P_1}{I_1} \\ \mathscr{E} = I_2 r + \frac{P_2}{I_2} \end{cases}$$

$$I_1 r + \frac{P_1}{I_1} = I_2 r + \frac{P_2}{I_2} \Rightarrow r = \frac{P_2 I_1 - P_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = 2 \text{ Ом},$$

и $\mathscr{E} = I_1 r + \frac{P_1}{I_1} = 12$ В.

Задача 3. По железному проводнику, диаметром d = 0,6 мм, течет ток 16 А. Определить среднюю скорость $\langle \upsilon \rangle$ направленного движения электронов, считая, что концентрация n свободных электронов равна концентрации n' атомов проводника.

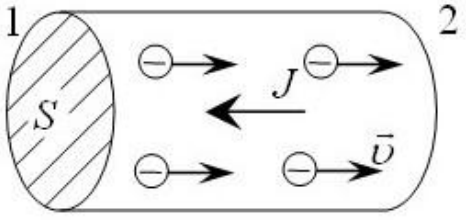
Дано:

d = 0, 6 мм=$6 \cdot 10^{-4}$м

I=16 А

$n = n'$

$\langle \upsilon \rangle$ =?



Средняя скорость упорядоченного движения электронов

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{l}{t} \qquad (1)$$

где t – время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся между сечениями 1 и 2, пройдя сечение 2 (см. рис.), перенесут заряд $Q = e \cdot N$, создавая ток силой

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t} \qquad (2)$$

где e – элементарный заряд, N – число электронов проводника, l – его длина. Очевидно число электронов $N = n \cdot V = n \cdot l \cdot S$ (3)

где V- объем, а S – площадь сечения проводника. По условию, $n = n'$, следовательно

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \cdot \rho}{M}, \quad (4)$$

где N_A – число Авогадро, ρ – плотность железа $\left(\rho = 7{,}87 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$,

M – молярная масса железа $\left(M = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}\right)$.

Подставляя (4) в (3), а затем в (2), окончательно получим

$$I = \frac{N_A \cdot \rho \cdot l \cdot S \cdot e}{M \cdot t},$$

откуда $$l = \frac{IMt}{N_A \rho S e}.$$

Подставим полученное выражение в (1), считая, что $S = \frac{\pi d^2}{4}$,

После преобразования найдем, что

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{4IM}{\pi d^2 N_A \cdot \rho \cdot e} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot \left(6 \cdot 10^{-4}\right)^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23} \cdot 7{,}87 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4{,}2 \cdot 10^{-3} \text{м/с} = 4{,}2 \text{ мм/с}$$

Вопросы и задания.

1. Постоянный электрический ток и его характеристики. Закон Ома для участка цепи.

2. Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для замкнутой цепи.

3. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца.

4. Классическая электронная теория электропроводимости металлов и ее недостаточность

5. Обобщенный закон Ома. Правила Кирхгофа.

6. Электрический ток в металлах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Три батареи с ЭДС $\mathscr{E}_1$= 12 В, $\mathscr{E}_2$= 5 В и $\mathscr{E}_3$ = 10 В и одинаковыми внутренними сопротивлениями r, равными 1 Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов I, идущих через каждую батарею.

2. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС $\mathscr{E}$ каждого элемента равна 1,2 В, внутреннее сопротивление

r = 0,2 Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление R = 1,5 Ом. Найти силу тока I во внешней цепи.

3. Внутреннее сопротивление r батареи аккумуляторов равно 3 Ом. Сколько процентов от точного значения ЭДС составляет погрешность, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением $R_В$ = 200 Ом, принять ее равной ЭДС?

4. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до I = 10 А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление $R_а$ амперметра равно 0,02 Ом и сопротивление $R_ш$ шунта равно 5 мОм?

5. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от I_0 = 0 до I = 3 А в течение времени t = 10 с. Определить заряд Q, прошедший в проводнике.

6. Даны 12 элементов с ЭДС $\mathscr{E}$ = 1,5 В и внутренним сопротивлением r = 0,4 Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление R = 0,3 Ом? Определить максимальную силу тока I_{max}.

7. Два элемента ($\mathscr{E}_1$=1,2 В, r_1=0,1 Ом; $\mathscr{E}_2$=0,9 В, r_2=0,3 Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно 0,2 Ом. Определить силу тока I в цепи.

8. Определить силу тока короткого замыкания источника тока, если при внешнем сопротивлении R_1=50 Ом сила тока в цепи I_1=0,2 А, а при R_2=110 Ом сила тока в цепи I_2=0,1 А.

9. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением $R_в$=1 кОм. Показания амперметра I=0,5 А, вольтметра U = 100 В. Определить сопротивление R катушки. Сколько процентов от точного значения сопротивления катушки составит погрешность, если не учитывать сопротивления вольтметра?

10. К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}$=1,5 В присоединили катушку с сопротивлением R=0,1Ом. Амперметр показал силу тока, равную I_1=0,5 А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока.

11. По проводнику сопротивлением R = 3 Ом течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время τ=8 с, равно 200 Дж. Определить количество электричества q,протекшее за это время по проводнику. В начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.

12. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 12 Ом равномерно убывает от I_0 = 5А до I = 0 в течение времени t = 10 с. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

13. Сила тока в проводнике сопротивлением r = 100 Ом равномерно нарастает от I_0 = 0 до I_{max} = 10 А в течение времени τ =30 с. Определить количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике.

14. При силе тока I_1 = 3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделятся мощность P_1 = 18 Вт, при силе тока I_2 = 1 А – соответственно P_2 = 10 Вт. Определить ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи.

15. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через t_1 = 15 мин, если только вторая, то через t_2 = 30 мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? Параллельно?

16. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС $\mathscr{E}$ батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление r = 1 Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность P=80 Вт. Вычислить силу тока I в цепи и КПД η нагревателя.

17. ЭДС $\mathscr{E}$ батареи равна 20 В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока I = 4А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R_1 КПД будет равен 99%?

18. К батарее аккумуляторов, ЭДС $\mathscr{E}$ которой равна 2 В и внутреннее сопротивление r равно 0,5 Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность P, которая при этом выделяется в проводнике.

19. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathscr{E}$ =12 В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

20. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение U на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление R реостата равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность P=120 Вт. Найти силу тока в цепи.

21. В медном проводнике длиной l=2 м и площадью S поперечного сечения, равной 0,4 мм^2, идет ток. При этом ежесекундно выделяется количество теплоты Q=0,35 Дж. Сколько электронов N проходит за 1 секунду через поперечное сечение этого проводника?

22. Плотность тока j в медном проводнике равна 3 А/мм^2. Найти напряженность E электрического поля в проводнике.

23. Плотность тока j в алюминиевом проводе равна 1 А/мм^2. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 см^3 алюминия равно число атомов.

24. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока I = 10 А и сечении S проводника, равном 1 мм^2. Принять, что каждый атом меди приходится два электрона проводимости.

25. Сила тока I в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение проводника S= 4 мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится n=22,5·10^{22} свободных электронов, определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ их упорядоченного движения.

26. В медном проводнике объемом V=6 см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время t=1 мин выделилось количество теплоты Q=216 Дж. Вычислить напряженность E электрического поля в проводнике.

27. Металлический проводник движется с ускорением a=100 м/с^2. Используя классическую теорию электропроводности металлов, определить напряженность E электрического поля в проводнике.
28. Медный диск радиусом R=0,5 м равномерно вращается (ω=10^4 рад/с) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциалов U между центром диска и его крайними точками.
29. Металлический стержень движется вдоль своей оси со скоростью υ=200 м/с. Определить заряд Q, который протечет через гальванометр, подключаемый к концам стержня, при резком его торможении, если длина l стержня равна 10 м, а сопротивление R всей цепи (включая цепь гальванометра) равно 10 мОм.
30. Удельная проводимость γ металла равна 10 МСм/м. Вычислить среднюю длину $< l >$ свободного пробега электронов в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{28} м$^{-3}$. Среднюю скорость u хаотического движения электронов принять равной 10^6 м/с.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Раздел 4. Магнетизм. Электромагнитные колебания и волны

Практическое занятие 10.

Тема занятия. **Понятие о магнитном поле. Закон Био – Савара – Лапласа.**

Цель занятия. Изучить основные проявления магнитного поля постоянного тока.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции Магнитная индукция и напряженность магнитного поля. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для вектора. Закон Био-Савара-Лапласа для элемента тока. Расчет магнитных полей. Циркуляция вектора. Магнитное поле соленоида и тороида. Сила Ампера. Сила Лоренца. Контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные проявления магнитного поля постоянного тока применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля.
Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$

Термин магнитное поле ввел в 1845 году английский физик М.Фарадей, считавший, что как электрическое, так и магнитное взаимодействия осуществляются посредством единого материального поля.

Источниками макроскопического магнитного поля являются намагниченные тела, проводники с током и движущиеся электрически заряженные тела. Природа этих источников едина: магнитное поле возникает в результате движения заряженных микрочастиц.

Магнитное поле – силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Значение $\vec{B}$ определяет силу, действующую в данной точке поля на движущийся электрический заряд и на тела, имеющие магнитный момент.

Вектор $\vec{B}$ можно ввести одним из трех эквивалентных способов:

а) исходя из силового действия магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу;

б) основываясь на силовом действии магнитного поля на малый элемент проводника с током;

в) исходя из силового действия магнитного поля на небольшую рамку с током.

Например, **магнитная индукция** – векторная величина, модуль которой определяется отношением максимальной силы F_{max}, действующей со стороны магнит-ного поля на участок проводника с током, к силе этого тока I и длине участка Δl проводника

$$B = \frac{F_{max}}{I \cdot \Delta l}, \qquad [B] = Тл \qquad (1)$$

Для графического изображения стационарного магнитного поля пользуются методом линий индукции. Линиями магнитной индукции (силовыми линиями магнитного поля) называются линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной

индукции совпадает с направлением вектора $\vec{B}$ магнитной индукции в этой точке поля. Линии магнитной индукции нигде не обрываются, т. е. не начинаются и не кончаются. Они либо замкнуты, либо идут из бесконечности на бесконечность.

Магнитное поле называется однородным, если во всех его точках вектор магнитной индукции $\vec{B}$ имеет одно и то же значение. В противном случае магнитное поле называется неоднородным.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле $\vec{B}$, создаваемое несколькими источниками, равно векторной сумме полей $\vec{B}_i$, порождаемых каждым источником в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i. \qquad (2)$$

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца. Поэтому поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность *S* равен нулю. Следовательно, **теорема Гаусса для вектора** $\vec{B}$ формулируется следующим образом:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \qquad [\Phi_B] = Вб \qquad (3)$$

Наряду с индукцией $\vec{B}$ используется понятие напряжённости магнитного поля $\vec{\mathrm{H}}$, как меры воздействия на проводники с током и магнитную стрелку (размерность её - *А/м*). Напряженность $\vec{\mathrm{H}}$ характеризует магнитное поле, создаваемое макроскопическими токами и поэтому определяется их величинами, конфигурацией в пространстве и не зависит от свойств среды. Вектор индукции магнитного поля $\vec{\mathrm{B}}$ связан с напряженностью магнитного поля $\vec{\mathrm{H}}$ соотношением

$$\vec{\mathrm{B}} = \mu\mu_0\vec{\mathrm{H}}, \qquad (4)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды.

Закон Био – Савара - Лапласа для элемента тока.

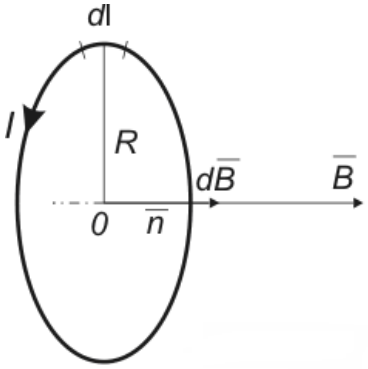
Расчет магнитных полей

На основании анализа опытных данных для магнитных полей постоянных токов бы установлен **закон Био – Савара – Лапласа** вида:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\varphi}{r^2}, \qquad (5)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента проводника в рассматриваемую точку поля; φ – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

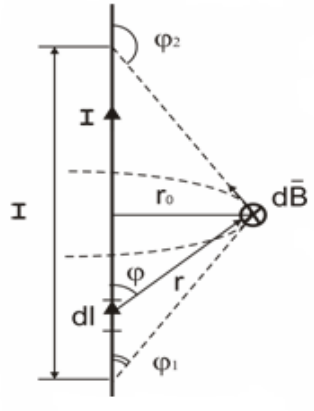
Направление вектора $d\vec{B}$ можно найти по правилу Максвелла (правилу буравчика): если ввинчивать буравчик с правой резьбой по направлению



вектора плотности тока в элементе проводника, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление вектора $d\vec{B}$ магнитной индукции.

I. *Магнитное поле прямого тока.*

Найдем с помощью закона Био-Савара-Лапласа магнитное поле прямолинейного проводника с током I (рисунок 1). Пусть r_0 – расстояние от точки, в которой определяется поле, до проводника с током. Тогда расстояние r от участка проводника dl можно выразить так: $r = r_0/\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$. Длина dl связана с углом φ, под которым виден этот участок проводника из рассматриваемой точки:



$$dl = \frac{rd\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2\varphi}. \qquad (6)$$

Подставим эти значения в формулу (5)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot r_0\cdot d\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\sin^2\varphi}{r_0^2\cdot\sin^2\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}\cdot\sin\varphi d\varphi. \qquad (7)$$

В соответствии с принципом суперпозиции (2) магнитная индукция для участка проводника $\vec{B}$ равна:

$$B = \int dB = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}\cdot\sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{r_0}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right), \qquad (8)$$

где φ_1 и φ_2 – углы между вектором плотности тока в проводнике и радиус-векторами, проведенными в рассматриваемую точку из начала и конца участка проводника.

Рис.2.

Если проводник бесконечно длинный, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ и индукция магнитного поля, как следствие закона Био – Савара – Лапласа, в любой точке пространства
вычисляется по простой формуле вида:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I}{r_0} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r_0}. \qquad (9)$$

Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей.

2. *Магнитное поле в центре кругового проводника с током.*

Как следует из рисунка 2, все элементы кругового проводника с током создают в его центре магнитное поле одинакового направления – вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиус-

вектору ($sin\varphi=1$) и расстояния всех элементов проводника до центра кругового тока одинаковы и равны R, то согласно (5)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} dl. \qquad (10)$$

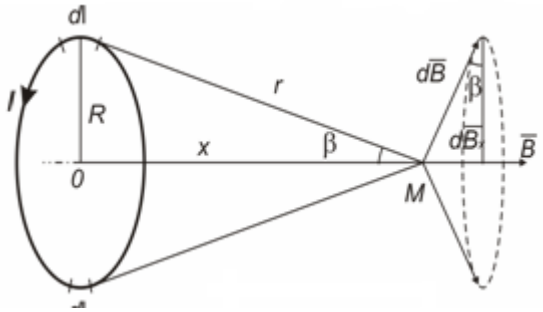
Тогда интеграл, взятый по контуру проводника,

$$B_0 = \oint_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl,$$

Так как $\oint dl = 2\pi R.$, то магнитная индукция в центре кругового проводника с током в вакууме равна

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}. \qquad (11)$$

3. *Магнитное поле на оси кругового витка с током.*



Индукция магнитного поля вдоль оси, проведенной через центр кругового тока перпендикулярно его плоскости, будет уменьшаться по мере удаления от кругового тока. Если на оси выбрать точку M (рис. 3), то результирующая индукция $\vec{B}$ определяется как сумма проекций dB_x, выраженных формулой.

$$dB_x = \sin\beta dB = \frac{R}{r} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl. \qquad (12)$$

Откуда несложно получить, интегрируя (16.12)

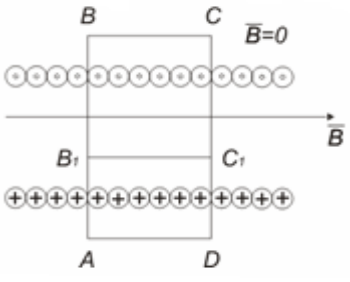
$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \oint_L dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{r^3} \cdot 2\pi R. \qquad (13)$$

Циркуляция вектора $\vec{B}$. Магнитное поле соленоида и тороида

В целях упрощения в вычислении магнитных полей используется теорема о циркуляции результирующего вектора $\vec{B}$, которая формулируется на основании определения циркуляции с учетом индукций магнитных полей $\vec{B}_k$, создаваемых каждым из токов по (16.9) в соответствии с законом Био – Савара – Лапласа, в виде:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{m} I_k, \qquad (14)$$

где индексом "k" обозначены лишь токи, охватываемые контуром. Следовательно, **теорема:** ***циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0.***



Характерным примером использования теоремы о циркуляции $\vec{B}$ (или напряжённости $\vec{H}$; закона полного тока) для получения расчётных

формул являются поле бесконечно длинного соленоида, а также тороида.
Соленоид – свёрнутый в спираль изолированный проводник, по которому течёт электрический ток.

Рис. 4.

Поле бесконечного соленоида аксиально симметрично и может иметь лишь компоненту, параллельную оси соленоида (витки намотаны очень плотно, рис. 4).

Для определения $\vec{B}$ внутри соленоида применим закон полного тока к контуру AB_1C_1DA, в нём N витков. Интеграл не равен нулю только на участке B_1C_1 и поэтому

$$B_{B1C1} \cdot l = n \cdot l \cdot I \cdot \mu_0, \qquad (13)$$

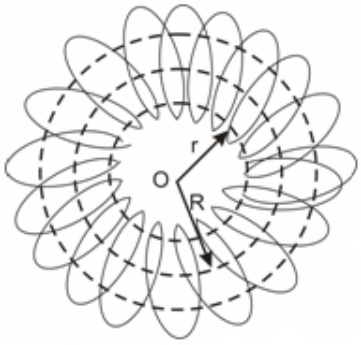
Из (13) видно, что **поле внутри соленоида** однородно и его индукция равна:

$$B = \mu_0 nI \text{ , где } n = N/l \qquad (14)$$

Произведение nI называется числом ампер-витков на метр.
В магнитную индукцию на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад. Поэтому у конца полубесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (16.14)

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI. \qquad (15)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (14) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (15) - для точек на оси вблизи его концов.



Тороид представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму радиально изогнутого цилиндра, у которого входное и выходное сечения совпадают (рис.5).

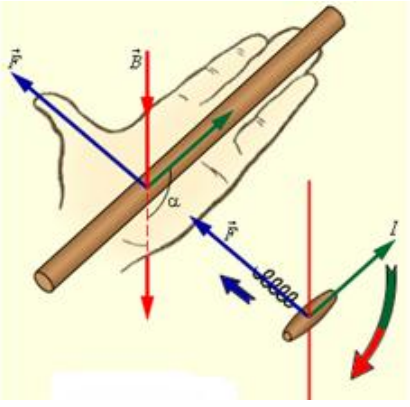
Формула для определения магнитной индукции внутри тороида получается на основании теоремы о циркуляции $\vec{B}$ аналогичным образом, и имеет вид:

$$B = \mu_0 nI \cdot \frac{R}{r}. \qquad (16)$$

Рис.5.

Вне тороида магнитная индукция равна нулю.

С помощью теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ можно решить и ряд других задач, например, найти индукцию в коаксиальном кабеле, который используется для передачи постоянного тока. Кроме того, этот закон используется при расчете магнитных цепей, где выполняет роль второго правила Кирхгофа.



Сила Ампера. Сила Лоренца

Ампер на опыте установил, что на проводник с током **в магнитном поле действует сила**

$$\vec{F} = I[\vec{l}\vec{B}], \qquad (17)$$

модуль которой определяется по формуле:

$$F = I \cdot B \cdot \ell \cdot \sin\alpha,$$

а направление, по правилу правого винта или правилу «левой руки» (рис. 6).

Рис.6.

Возникновение этой силы связано с тем, что магнитное поле действует на заряженные частицы, движущиеся в проводнике с некоторой скоростью $\vec{v}$. Сила, действующая на заряд в этом случае, называется **силой Лоренца,** и определяется по формуле:

$$\vec{F} = q[\vec{\upsilon}\vec{B}], \qquad (18)$$

а ее модуль

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями скорости частицы и вектора магнитной индукции.

Магнитное поле не действует на покоящийся заряд и в этом состоит существенное отличие магнитного поля от электрического. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы (ее перемещению) и поэтому работы не совершает, а, следовательно, не изменяет кинетическую энергию частицы. Выражение для силы Лоренца (18) позволяет определить характер движения заряженной частицы в магнитном поле. При $\alpha = 90°$ частица движется по окружности радиуса $R = \frac{mv}{qB}$. Если угол α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 90°$, то частица движется по спирали с радиусом R и шагом h. Если скорость частицы $\vec{v}$ составляет угол α с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то R и h уменьшаются. На этом основано явление фокусировки заряженных частиц в магнитном поле.

Контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, находящийся в однородном магнитном поле. Выделим элемент контура $d\vec{\ell}$. На него в магнитном поле будет действовать сила, согласно (17), равная $d\vec{F} = I\left[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}\right]$. Результирующая сила, действующая на контур, будет равна геометрической сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т.е.

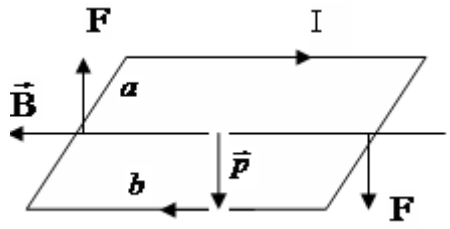


Рис.7.

$$\vec{F} = \oint_L I\left[d\vec{l} \cdot \vec{B}\right] = I \cdot \vec{B} \oint_L d\vec{l} = 0 \ . \qquad (19)$$

Следовательно, в однородном магнитном поле результирующая сила, действующая на контур с током, будет равна нулю, и контур перемещаться не будет.

Для простоты рассуждений возьмем прямоугольный контур со сторонами «a» и «b» (рис. 7). В магнитном поле на него будет действовать вращающий момент пары сил $\vec{F}$ и поэтому, контур будет вращаться. Вращающий момент пары сил $M = F \cdot b \cdot \sin\alpha$, но $F = I \cdot B \cdot a$, и, следовательно, $M = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin\alpha$. Так как $a \cdot b = S$ – площадь контура, то $M = I \cdot B \cdot S \cdot \sin\alpha$. Введем вектор $\vec{p} = I \cdot S$ называемый **вектором магнитного момента** контура. Его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру, которая определяется с помощью правила правого винта. Тогда для вращающего момента, действующего на контур с током в магнитном поле, получим выражение:

$$M = pB\sin\alpha = \left[\vec{p}\vec{B}\right]. \qquad (20)$$

Очевидно, что $M = 0$ при $\sin\alpha = 0$, т.е. контур с током в магнитном поле ориентируется так, чтобы его вектор магнитного момента был параллелен вектору магнитной индукции.

Рассмотрим контур, находящийся в неоднородном поле. Работа, совершаемая при повороте контура на угол $d\alpha$, определяется по формуле $dA = M \cdot d\alpha$. С учетом (20) получим:

$$dA = p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha .$$

Полная механическая работа

$$A = \int dA = \int p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = -pB\cos\alpha . \qquad (21)$$

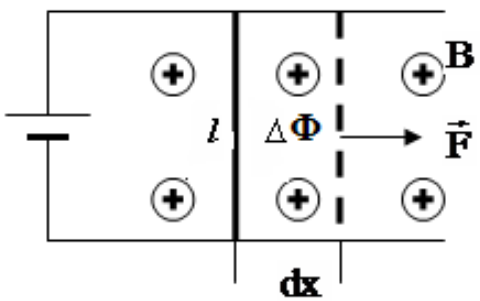
Механическая потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет определяться этим же выражением.

Ранее мы показали, что связь между силой и энергией $F_X = -\dfrac{dW}{dx}$ и, следовательно, на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать сила

$$F_X = p \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \cos\alpha . \qquad (22)$$

При $\alpha < 90°$, $F_X > 0$ контур втягивается в поле, при $\alpha > 90°$, $F_X < 0$ контур выталкивается из поля.

В результате перемещения проводника с током или контура произвольной формы в магнитном поле совершается работа по преодолению сил поля. Не сложно получить формулу, определяющую эту работу.



Рассмотрим проводник длиной ℓ, с током I, способный свободно перемещаться в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно проводнику (рис. 8).

Рис.8.

В этом случае на проводник будет действовать сила Ампера $F = B \cdot I \cdot \ell$ и при перемещении проводника на расстояние dx, будет совершена работа $dA = I \cdot B \cdot \ell \cdot dx$, но $l \cdot dx = dS$, а элементарный магнитный поток $B \cdot dS = d\Phi$ и тогда элементарная работа $dA = I \cdot d\Phi$. Интегрируя данное выражение, получим, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле будет определяться выражением

$$A = I \cdot \Delta\Phi, \qquad (23)$$

где $\Delta\Phi$ – магнитный поток, пересеченный проводником.

Примеры решения задач

Задача 1. По тонкому проводу, изогнутому в виде равностороннего треугольника, течет ток силой I =40А. Длина стороны треугольника a =30 см. Определить индукцию $\vec{B}$ в точке пересечения высот треугольника.

Дано:
найдем,

I=40 А
a=30 см=0,3м

B = ?

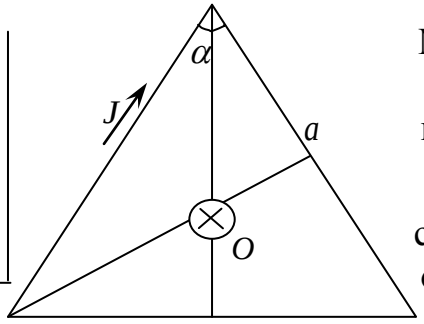


Рис. 1.

Магнитную индукцию в точке O используя принцип суперпозиции для магнитных полей: $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$. В нашем случае весь контур можно разбить на 3 одинаковых части, индукция каждой из которых $\vec{B}_1$ в точке O имеет одинаковые величину и направление - вертикально вниз (определяемое по правилу правого винта). Поэтому индукция в точке O будет равной B=3B_1 и направленной вниз перпендикулярно рис 1.

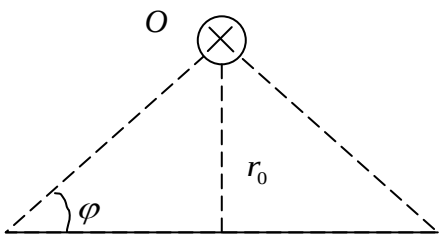


Рис. 2

Магнитную индукцию стороны треугольника B_1 найдем используя формулу для индукции, отрезка проводника при симметричном расположении его концов относительно точки *O* (рис.2). Треугольник токов равносторонний и его высоты являются также и медианами и биссектрисами. Таким образом,. имеем

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\varphi \text{ и, } \quad \varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ,\ r_0 = \frac{a}{2}\cdot tg\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\frac{a}{2\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a} \text{ и } \quad B = 3B_1 = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} = 240 \text{ мкТл.}$$

Задача 2. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией *B* = 0,03 Тл по окружности радиусом *r*=10 см. Определить скорость электрона.

Дано:

B=0,03 Тл
r=10 см =0,1м
e =1,6· 10^{-19} Кл
m = 9,1·10^{-31} кг
υ= ?

В магнитном поле на движущийся электрон действуют сила Лоренца. Величина этой силы равна

$$F = e\cdot\upsilon\cdot B\cdot\sin\alpha \ .$$

Так как траектория электрона – окружность, то сила Лоренца является центростремительной силой, и угол α = π/2. Следовательно,

$$F = \frac{m\upsilon^2}{r} = e\upsilon B.$$

Откуда имеем

$$\upsilon = \frac{eBr}{m}. \qquad (1)$$

Подставив численные значения, получим

$$\upsilon = \frac{eBr}{m} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot3\cdot10^{-2}\cdot10^{-2}}{9\cdot10^{-31}} = \frac{1{,}6}{3}\cdot10^8 \text{м/с} \approx 0{,}533\cdot10^8 \text{м/с}.$$

То есть скорость υ сравнима со скоростью света *c* =3·10^8 м/с. Это означает, что при расчетах необходимо использовать элементы специальной теории относительности (СТО).

Формулы классической механики применимы в СТО, если считать, что масса тела зависит от его скорости по закону, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где m_0 - масса покоя тела и β=υ/c. Подставим эти выражения в (1). После несложных преобразований получим релятивистское выражение для скорости электрона $\upsilon_р = \frac{\upsilon}{\sqrt{1+\beta^2}}$.

Таким образом, релятивистское значение скорости раво $\upsilon_р$= 0, 525 ·10^8 м/с.

Задача 3. В магнитном поле с индукцией 0,1 Тл вращается рамка, содержащая 1000 витков площадью 150 $см^2$ каждый. Максимальное ЭДС, индуцируемое в рамке равно 94 В. Определить частоту вращения рамки.

Дано:

B=0,1Тл

$N=1000=10^3$

S=150см^2=1,5·10^{-2}м^2

$\mathscr{E}_{\text{i}}^{\max}$=94В

n = ?

По закону Фарадея для электромагнитной индукции имеем

$$\mathscr{E}_{\text{i}} = -\frac{d\psi}{dt}, \qquad (1)$$

где ψ – потокосцепление.

$$\psi = N \cdot \Phi,$$

где $\Phi = BS\cos\alpha$ – магнитный поток.

В условиях данной задачи $\alpha = 2\pi \cdot n \cdot t$, где n -частота вращения рамки. Таким образом, закон Фарадея (1), после процедуры дифференцирования имеет вид

$$\mathscr{E}_{\text{i}} = NBS\,2\pi n \cdot \sin\left(2\pi n \cdot t\right).$$

Из полученного выражения следует, что максимальное значение ЭДС $\mathscr{E}_{\text{i}}^{\max} = NBS \cdot 2\pi n,$ возникает когда угол α = π/2. Отсюда имеем

$$n = \frac{\mathscr{E}_{\text{i}}^{\max}}{NBS \cdot 2\pi} = \frac{94}{10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3{,}14} = 10\ \text{с}^{-1}.$$

Вопросы и задания.

1. Магнитное поле и его основные характеристики.
2. Закон Био - Савара - Лапласа и его применение.
3. Закон Ампера.- Взаимодействие параллельных токов.
4. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лоренца.
5. Движение заряженных частиц в магнитном поле.
6. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$. Магнитные поля соленоида и тороида.
7. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля.
8. Работа по перемещению проводника в магнитном поле.
9. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея.
10. Правило Ленца. Вращение рамки в магнитном поле. Вихревые токи.
11. Индуктивность контура. Самоиндукция.
12. Токи при размыкании и замыкании цепи.
13. Взаимная индукция.
14. Трансформаторы. Энергия магнитного поля.
15. Магнитные свойства вещества. Диа- и парамагнетики.
16. Магнитное поле в веществе.
17. Закон полного тока.
18. Ферромагнетики и их свойства.

Задачи для самостоятельного решения

1. Расстояние d между двумя длинными параллельными проводами равно 5 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи силой I = 30 А каждый. Найти напряженность H магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии r_1 = 4см от одного и r_2 = 3 см от другого провода.

2. По тонкому проводящему кольцу радиусом R = 15 см течет ток силой I = 60 А. Найти магнитную индукцию B в точке, равноудаленной от центра кольца на r = 20 см.

3. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой I_1 = 20 А и I_2 = 30 А в противоположных направлениях. Расстояние d между проводами равно 20 см. Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной на r_1 = 25 см от первого и на r_2 = 40 см от второго провода.

4. По двум бесконечно длинным параллельным проводам текут токи силой I_1 = 20 А и I_2 = 30 А в одном направлении. Расстояние d между проводами равно 10 см. Вычислить магнитную индукцию B в точке, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние r = 10см.

5. По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток силой I = 40 А. Длина a стороны треугольника равна 30 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения высот.

6. По контуру в виде квадрата идет ток силой I = 50 А. Длина a стороны квадрата равна 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

7. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток силой I = 60 А. Длины сторон прямоугольника равны a=30 см и b=40 см. Определить магнитную индукцию B в точке пересечения диагоналей.

8. По двум одинаковым квадратным контурам со стороной a=20 см текут токи силой I = 10 А в каждом. Определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние d между соответственными сторонами контуров равно 2 мм.

9. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом R = 10см, текут одинаковые токи силой I = 10 А в каждом. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между центрами колец равно 1 мм.

10. По трем прямым параллельным проводам, находящимся на одинаковом расстоянии a = 10см друг от друга, текут одинаковые токи силой I = 100 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной l = 1 м каждого провода.

11. По двум параллельным проводам длиной l = 1 м каждый текут токи одинаковой силы. Расстояние d между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой F = 1 мН. Найти силу тока I в проводах.

12. По двум параллельным прямым проводам длиной l = 2,5 м каждый, находящимся на расстоянии d = 20 см друг от друга, текут одинаковые токи силой I = 1 кА. Вычислить силу взаимодействия токов.

13. Прямой провод длинной l = 10 см, по которому течет ток силой I = 20А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,01Тл. Найти угол α между направлениями вектора B и тока, если на провод действует сила F = 10 мН.

14. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,01 Тл находится прямой провод длиной l = 8 см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток силой I = 2 А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние s = 5 см. Найти работу A сил поля.

15. Соленоид индуктивностью L = 4 мГн содержит N = 600 витков. Определить магнитный поток Φ, если сила тока I, протекающего по обмотке, равна 12 А.
16. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на ΔI=0,1 А в 1 с. Индуктивность L катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $<\mathscr{E}_i>$.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 11.

Тема занятия. **Действие магнитного поля на движущийся заряд**

Цель занятия. Изучить действие магнитного поля на движущийся заряд.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Сила Лоренца. Модуль силы Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Действие магнитного поля на движущийся заряд применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Сила Лоренца

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера:

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Сила Ампера обусловлена суммарным действием магнитного поля на все движущиеся в проводнике заряды. Определим силу, действующую на единичный движущийся в магнитном поле заряд.

Возьмем элемент длины проводника $d\vec{l}$. Обозначим N - число заряженных частиц, движущихся в элементе $d\vec{l}$, q - заряд каждой частицы, $\vec{\upsilon}$ - среднюю скорость их направленного движения. Тогда

$$id\vec{l} = Nq\vec{\upsilon}. \quad (2)$$

Подставим выражение (4.46) в формулу для силы Ампера (4.45), получим:

$$d\vec{F} = Nq\vec{\upsilon} \times \vec{B}. \quad (3)$$

Здесь $d\vec{F}$ - суммарная сила, действующая со стороны магнитного поля на N носителей заряда. На одиночный электрический заряд в магнитном поле действует сила, равная

$$\vec{F}_{л} = \frac{d\vec{F}}{N}. \quad (4)$$

Подставим в это выражение формулу (4.47), получим:

$$\vec{F}_{л} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}. \quad (5)$$

Эта сила называется *силой Лоренца*.

Свойства силы Лоренца определяются свойствами векторного произведения, поэтому она перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Для положительных зарядов (q>0) направление силы Лоренца совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\upsilon} \times \vec{B}$. Если заряд частицы отрицателен (q<0), то направления векторов $\vec{F}_{л}$ и $\vec{\upsilon} \times \vec{B}$ противоположны.

Модуль силы Лоренца равен:

$$F_{л} = q\upsilon B \sin\alpha, \quad (6)$$

где α - угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Из формулы (6) следует, что магнитное поле не действует на заряженную частицу в двух случаях:

- когда частица покоится ($\upsilon = 0$);
- когда частица движется вдоль линий магнитного поля ($\vec{\upsilon} \parallel \vec{B}$).

Так как сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно вектору

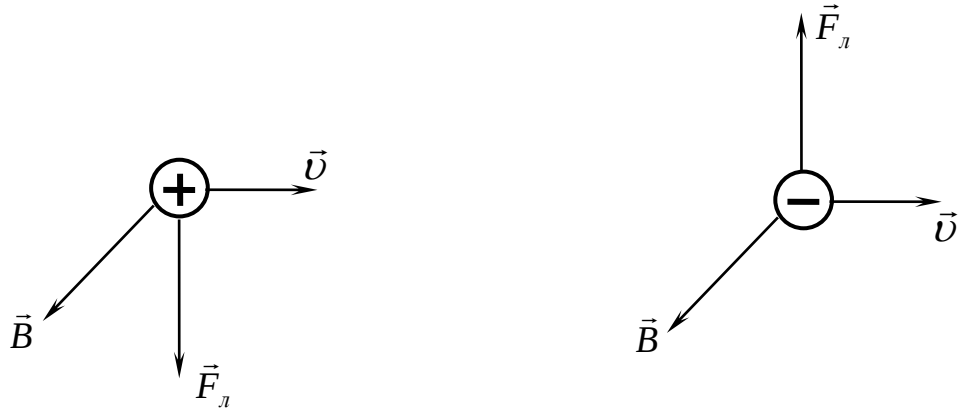


Рис.1 . Взаимная ориентация векторов $\vec{\upsilon}$, $\vec{B}$ ***и*** $\vec{F}_л$.

скорости, то она не совершает работы над частицей. Следовательно, постоянное магнитное поле не изменяет кинетическую энергию частицы.

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Пусть заряженная частица влетает в однородное поле с индукцией $\vec{B}$.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда скорость частицы перпендикулярна вектору магнитной индукции. На частицу будет действовать сила Лоренца, перпендикулярная к направлению ее движения. Так как $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$ ($\alpha=\pi/2$), то модуль силы Лоренца равен: $F_л = q\upsilon B$. В результате траекторией заряженной частицы будет окружность (рис.4.14).

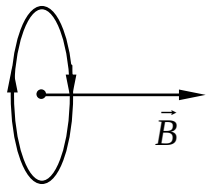


Рис. 2.

Сила Лоренца сообщает частице нормальное ускорение и играет роль центростремительной силы. Нормальное ускорение определяется выражением:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\ , \qquad (7)$$

где R - радиус окружности.

Запишем второй закон Ньютона для этого случая:

$$ma_n = F_л, \qquad (8)$$

или

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = q\upsilon B. \qquad (9)$$

Для радиуса окружности получим выражение:

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}. \qquad (10)$$

Формулу (10) также можно записать в виде:

$$R = \frac{\upsilon}{\frac{q}{m}B}. \qquad (11)$$

Здесь $\frac{q}{m}$ - удельный заряд частицы.

Период обращения частицы по окружности равен:

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon}. \qquad (12)$$

Подставляя в (12) выражение для радиуса траектории и производя сокращения, получим:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \qquad (13)$$

Из выражений (11) и (13) следует:

- радиус окружности тем меньше, чем больше магнитная индукция;
- период обращения частицы в магнитном поле не зависит от её скорости, а зависит от величины удельного заряда и от магнитной индукции поля.

Изменяется лишь направление скорости, а это означает, что заряженная частица в однородном магнитном поле должна двигаться точно по окружности, если нет составляющей скорости вдоль магнитного поля.

Рассмотрим случай, когда скорость частицы составляет с магнитным полем угол α, отличный от $\pi/2$.

Разложим вектор скорости на две составляющие: перпендикулярную магнитному полю $\vec{\upsilon}_\perp$ и параллельную полю $\vec{\upsilon}_\parallel$ (рис.3). Модули этих составляющих равны:

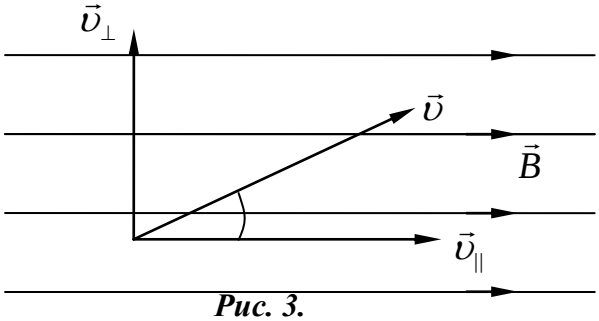


Рис. 3.

$$\upsilon_\perp = \upsilon \cdot \sin\alpha,$$

$$\upsilon_\perp = \upsilon \cdot \cos\alpha.$$

Сила Лоренца обусловлена только составляющей $\vec{\upsilon}_\perp$ и равна (по модулю):

$$F_л = q\upsilon B \sin\alpha. \qquad (14)$$

Заряженная частица будет участвовать в двух движениях:

- в равномерном движении в направлении вектора $\vec{B}$ со скоростью $\vec{\upsilon}_\parallel$;

▪ в движении по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению вектора $\vec{B}$, со скоростью $\vec{\upsilon}_{\perp}$.

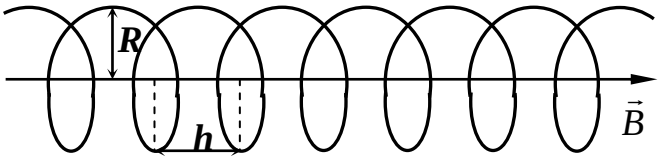


Рис. 4. Винтовая линия

В результате наложения этих двух движений траекторией частицы будет винтовая линия (рис.4.).

Определим параметры траектории частицы. Радиус винтовой линии будет равен:

$$R = \frac{\upsilon_{\perp}}{\left(\frac{q}{m}\right)B} = \frac{\upsilon \sin\alpha}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \qquad (15)$$

Шаг винтовой линии

$$h = \upsilon_{\parallel} T = \upsilon \cos\alpha \frac{2\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \qquad (16)$$

Рассмотрим случай, когда заряженная частица влетает в неоднородное магнитное поле. Пусть магнитная индукция возрастает в направлении *x* (рис.3). Тогда заряженная частица будет двигаться по винтовой линии, радиус и шаг которой уменьшаются.

Таким образом, *заряженные частицы, влетающие в постоянное магнитное поле, изменяют направление своего движения и "навиваются" на линии вектора* $\vec{B}$. Этим свойством пользуются в некоторых приборах, чтобы удержать пучки заряженных частиц от расплывания.

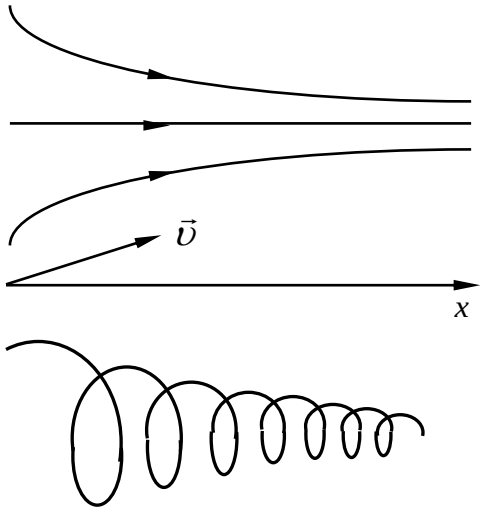


Рис.5. Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

Сущность метода магнитной фокусировки (в кратком варианте) состоит в следующем. Если частица движется точно вдоль линии вектора $\vec{B}$, то магнитное поле не оказывает на нее никакого воздействия. Если частица по каким-то причинам получит составляющую скорости, перпендикулярную к линиям поля, то она все равно не уйдет далеко в сторону от основной траектории и будет двигаться по винтовой линии.

Примеры решения задач

Задача 1. α-частица, ускоренная разностью потенциалов 250 В, влетает в однородное магнитное поле индукцией 25 мТл, перпендикулярно линиям

магнитной индукции и движется по окружности. Найдите радиус окружности и период обращения α-частицы.

Запишем краткое условие задачи.

Дано:	СИ
$e=1{,}6\cdot10^{-19}$Кл	
$m_p=1{,}67\cdot10^{-27}$кг	
U=250В	
B=25мТл	$=25\cdot10^{-3}$Тл
$\alpha=90^0$.	
R, T-?	

Решение:

Работа электрического поля затрачивается на увеличение кинетической энергии частицы:

$$qU=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

В магнитном поле на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца: $F_Л=qBv\sin\alpha$, угол $\alpha=90^0$ и $\sin\alpha=1$. Согласно второму закону Ньютона $F_Л=ma_n$, где $a_n=\frac{mv^2}{R}$ - центростремительное ускорение частицы, движущейся по окружности радиуса R. Получаем $qBv=\frac{mv^2}{R}$. Окончательно радиус окружности: $R=\frac{mv}{qB}=\frac{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}}{qB}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$.

Период обращения частицы найдем, разделив длину окружности на скорость частицы: $T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\frac{mv}{qB}}{v}=\frac{2\pi m}{qB}$.

Заряд α-частицы: $q=2e=2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\text{Кл}=3{,}2\cdot10^{-19}\text{Кл}$, ее масса

$m=4m_P=4\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\text{кг}=6{,}68\cdot10^{-27}\text{кг}$

Проведем проверку размерности:

$$[R]=\frac{1}{\text{Тл}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}}=\frac{1}{\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}/\text{Кл}}{\text{Кл}}}=\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{Дж}}{\text{Кл}^2}}=$$

$$\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{Кл}}\sqrt{\text{кг}\cdot\text{Дж}}=\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}\sqrt{\text{кг}\cdot\text{Н}\cdot\text{м}}=\frac{\text{м}}{\text{Н}\cdot\text{с}}\sqrt{\text{Н}^2\cdot\text{с}^2}=\text{м}$$

$$[c]=\frac{\text{кг}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}}=\frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м})}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}\cdot\text{Н}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Н}}=\text{с}$$

Произведем вычисления: $R=\frac{1}{25\cdot10^{-3}}\sqrt{\frac{2\cdot6{,}68\cdot10^{-27}\cdot250}{3{,}2\cdot10^{-19}}}=0{,}13\text{м}$

$$T=\frac{2\cdot3{,}14\cdot6{,}68\cdot10^{-27}}{3{,}2\cdot10^{-19}\cdot25\cdot10^{-3}}=5{,}2\cdot10^{-6}\text{с}$$

Ответ: 0,13 м; $5{,}2\cdot10^{-6}$ с.

Вопросы и задания.

1. Сила Лоренца.
2. Модуль силы Лоренца
3. Движение заряженных частиц в магнитном поле.

Задачи для самостоятельного решения

1. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 3 В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии 4 мм от него. Какая сила будет на него действовать, если по проводнику пропустить ток силой 5А?
2. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 5В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии 4 мм от него. Какое ускорение приобретет электрон, если по проводнику пропустить ток силой 10А?
3. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?
4. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, впадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?
5. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поле равна 0,01 Тл. Определить радиус кривизны траектории электрона.
6. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,001 Тл. Определить период и частоту обращения электрона по окружности.
7. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории альфа-частицы больше радиуса кривизны траектории прогона?
8. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз период обращения альфа- частицы больше периода обращения протона?
9. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле так, что направление его скорости составляет угол 30° с направлением силовых линий. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить радиус кривизны траектории электрона.
10. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,01 Тл. Чему равны тангенциальное и нормальное ускорения электрона?
11. Протон, ускоренный разностью потенциалов 1000В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить тангенциальное и нормальное ускорение протона.

12. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 30°. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить тангенциальное и нормальное ускорение электрона.
13. Протон, ускоренный разностью потенциалов 5000В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 45°. Индукция поля равна 0,005 Тл. Определить тангенциальное и нормальное ускорение протона.
14. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 60 В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 30°. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить радиус кривизны траектории электрона и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
15. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 30В, влетает в магнитное поле соленоида под углом 30° к его оси. Число ампер-витков соленоида равно 5000. Длина соленоида 25 см. Определить шаг винтовой траектории электрона в магнитном поле соленоида.
16. Протон влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 30°. Индукция поля равна 0,1 Тл. Определить кинетическую энергию протона, если радиус кривизны его траектории 1,5 см.
17. В однородное магнитное поле с индукцией В =10 мТл перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с кинетической энергией К = 30 эВ. Определить радиус кривизны траектории электрона.
18. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 71 В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 37°, и описывает спираль радиусом 54 мм. Определить индукцию магнитного поля и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
19. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10 В, влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет 53°. Индукция поля равна 0,1 Тл. Определить радиус кривизны траектории и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
20. Определить кинетическую энергию протона, движущегося по дуге окружности радиусом 60 см в магнитном поле, индукция которого $2 \cdot 10^{-3}$ Тл.
21. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью 106 м/с. Индукция магнитного поля 0,3 Тл. Радиус окружности 4 см. Определить заряд частицы, если известно, что ее энергия равна 12 кэВ.
22. В однородное магнитное поле с индукцией 0,01 Тл перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с кинетической энергией 30 кэВ. Определить радиус кривизны траектории движения частицы.

23. Протон и альфа-частица попадают в однородное магнитное поле, двигаясь перпендикулярно линиям индукции. Сравнить радиусы кривизны их траекторий, если они имеют одинаковую энергию.
24. Электрон, влетевший в однородное магнитное поле с индукцией 0,02 Тл перпендикулярно направлению магнитного поля, движется в нем по окружности радиусом 2 см. Определить разность потенциалов, которую прошел электрон перед тем, как влетел в магнитное поле.
25. Электрон, прошедший некоторую разность потенциалов, влетает в однородное магнитное поле с индукцией 1,5·10-2 Тл перпендикулярно магнитным силовым линиям. В магнитном поле электрон описывает окружность радиусом 114 мм. Определить разность потенциалов, которую прошел электрон перед тем, как влетел в магнитное поле.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 12.

Тема занятия. **Электромагнитные колебания в колебательном контуре.**

Цель занятия. Изучить электромагнитные колебания в колебательном контуре.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электрические колебания в колебательном

контуре, дифференциальное уравнение собственных электрических колебаний. Затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс. Переменный ток, его промышленное получение. Переменный ток в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением, векторная диаграмма напряжений и токов. Электромагнитная индукция. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла. Система уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Основные свойства электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Электромагнитные колебания в колебательном контуре применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Электромагнитные колебания в колебательном контуре

Уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний

Колебательный контур – это электрическая цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R. В **идеальном колебательном контуре** считается, что сопротивление R пренебрежимо мало ($R \approx 0$), что позволят в **идеальном контуре** (рис. 18), состоящем только из катушки индуктивности и конденсатора, получить **незатухающие электромагнитные колебания.**

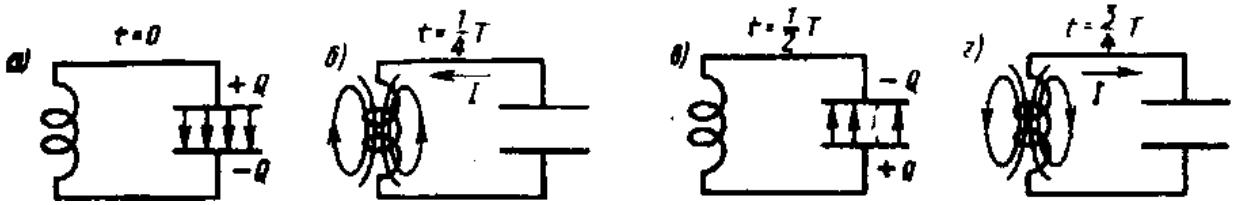


Рис. 18

Для возбуждения в контуре колебаний предварительно заряжают конденсатор, сообщая его обкладкам заряд $\pm q$. Тогда в начальный момент времени $t=0$ (рис. 18, *а)* между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле. Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, конденсатор начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток I. Когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля конденсатора полностью перейдет в энергию магнитного поля катушки (рис. 18, *б*). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать, и, следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, тогда в ней согласно закону Фарадея индуцируется ток, который течет в соответствии с правилом Ленца в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет

электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который, в конце концов, обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 18, *в*). Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 18, *г*), и система к моменту времени $t=T$ (T – период колебаний) придет в первоначальное состояние (рис. 18, *а*). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора, то есть начнутся периодические незатухающие колебания величины заряда q на обкладках конденсатора, напряжения U_C на конденсаторе и силы тока I, текущего через катушку индуктивности. Согласно закону Фарадея напряжение U_C на конденсаторе определяется скоростью изменения силы тока в катушке индуктивности идеального контура, то есть:

$$U_C = \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt} .$$

Исходя из того, что $U_C=q/C$, а $I=dq/dt$, получаем **дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 .$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция $q(t)$, то есть **уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

где $q(t)$ – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени t;

q_0 – амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора;

ω_0 – круговая (или циклическая) частота колебаний ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$);

$\omega_0 = 2\pi/T$ (T – период колебаний, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – **формула Томсона**);

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t;

φ_0 – начальная фаза колебаний, то есть фаза колебаний в момент времени $t=0$.

Уравнение свободных затухающих гармонических колебаний.

В реальном колебательном контуре учитывается, что, кроме катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C, в цепи также имеется резистор сопротивлением R, отличным от нуля, что является причиной затухания колебаний в реальном колебательном контуре. Свободные **затухающие колебания** – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Для цепи реального колебательного контура напряжения на последовательно включенных конденсаторе емкостью C и резисторе сопротивлением R складываются. Тогда с учетом закона Фарадея для цепи реального колебательного контура можно записать:

$$U_C + IR = \varepsilon_S = -L\frac{dI}{dt},$$

где ε_S – электродвижущая сила самоиндукции в катушке;

U_C – напряжение на конденсаторе ($U_C = q/C$);

IR – напряжения на резисторе.

Исходя из того, что $I=dq/dt$, получаем **дифференциальное уравнение свободных затухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

где δ – коэффициент затухания колебаний ($\delta = \frac{R}{2L}$), $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Решением полученного дифференциального уравнения является функция $q(t)$, то есть **уравнение свободных затухающих гармонических колебаний** величины заряда q на обкладках конденсатора:

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где $q(t)$ – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени t;

$q_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора в момент времени t;

q_0 – начальная амплитуда затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора;

ω – круговая (или циклическая) частота колебаний ($\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$);

$(\omega t + \varphi)$ – фаза затухающих колебаний в момент времени t;

φ – начальная фаза затухающих колебаний.

Электромагнитные волны. Вектор Умова-Пойнтинга

Согласно теории Максвелла электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость υ распространения которых определяется выражением:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}},$$

где ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные,

ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды,

c – скорость света в вакууме ($c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$) .

В вакууме (ε = 1, μ = l) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью света (c), что согласуется с теорией Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны.

По теории Максвелла **электромагнитные волны** являются **поперечными,** то есть векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\upsilon}$ скорости распространения волны, причем векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{\upsilon}$ образуют правовинтовую систему (рис. 19).

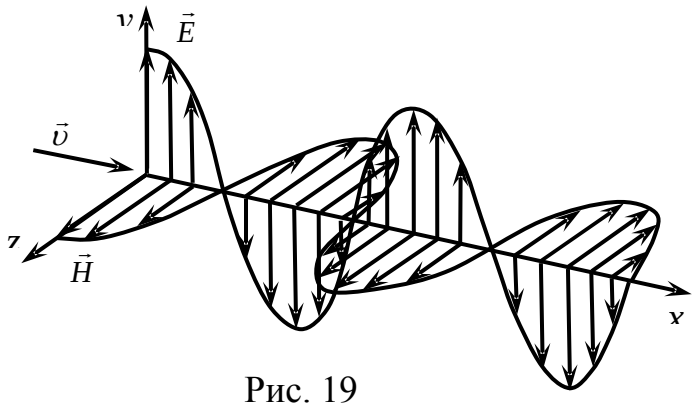


Рис. 19

Из теории Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются в одинаковых фазах (рис. 19), то есть значения напряженностей E и H электрического и магнитного полей одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль, причем мгновенные значения E и H связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H .$$

Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны (индексы y и z при E и H подчеркивают лишь то, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей в соответствии с рис. 19):

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей,

ω – круговая частота волны, $\omega = 2\pi / T$ (T – период колебаний),

k – волновое число, $k = 2\pi / \lambda$ (λ – длина волны),

φ – начальная фаза колебаний (начальная фаза колебаний φ имеет одинаковое значение как для колебания электрического, так и магнитного векторов, так как в электромагнитной волне эти колебания происходят в одинаковых фазах).

Энергия электромагнитных волн. Электромагнитные волны переносят энергию. Объемная плотность w энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей $w_{эл}$ электрического и $w_м$ магнитного полей:

$$w = w_{ýë} + w_{ì} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} .$$

Учитывая выражение связи между величинами E и H , можно получить, что суммарная плотность энергии электрического и магнитного полей:

$$w = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{\varepsilon \mu} EH .$$

Умножив плотность энергии w на скорость υ распространения волны в среде, получим модуль плотности потока энергии:

$$S = w\upsilon = EH .$$

Тах как векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны, то произведение EH совпадает с модулем вектора $\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]$ ($\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]$ – векторное произведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$). Кроме того, направление вектора $\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]$ совпадает с направлением распространения волны, то есть с направлением переноса энергии, что позволило ввести в**ектор** $\vec{S}$**,** равный векторному произведению $\left[\vec{E}\,\vec{H}\right]$, как **вектор плотности потока электромагнитной энергии,** называемый **вектором Умова–Пойнтинга:**

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\,\vec{H}\right] .$$

Модуль в**ектора** $\vec{S}$ равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Примеры решения задач

Задача 1. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с пластинами площадью S=100 см^2 и катушки с индуктивностью L=1 мкГн, резонирует на волну длиной λ=10 м. Определить расстояние между пластинами конденсатора.

Дано:

S=100 см^2=10^{-2} м^2 L=1мкГн=10^{-6} Гн λ=10 м d=?	Емкость плоского конденсатора определяется по формуле $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ Следовательно, $d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{C}$. (1) Длина волны связана с периодом колебаний T и скоростью

c электромагнитных волн соотношением

$$\lambda = c \cdot T . \quad (2)$$

По формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Выразив C из формулы Томсона, с учетом (2) и (1), получим

$$d = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon c^2 SL}{\lambda^2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{10^2} = 3{,}14 \cdot 10^{-3} = 3{,}14 \text{ мм}$$

Задача 2. Резонанс в колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью C_1 = 1 мкФ, наступает при частоте ν_1 = 400 Гц. Когда же параллельно конденсатору C_1 подключили еще один емкостью C_2, резонансная частота становится равной ν_2 = 100 Гц. Найти емкость конденсатора C_2.

Дано: C_1 = 1 мкФ = 10^{-6} Ф; ν_1 = 400 Гц; ν_2 = 100 Гц.

Найти: C_2.

Решение

Резонанс в колебательном контуре наступает, когда собственная частота колебаний становится равной частоте вынужденных колебаний, возбуждаемых внешним передатчиком. При этом амплитуда электромагнитных колебаний в контуре становится максимальной. Частота вынужденных колебаний, равная собственной частоте колебательного контура, называется резонансной частотой. Резонансная частота ν_1 в колебательном контуре, содержащем только один конденсатор C_1, определяется формулой Томсона: $\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$. (1),

где L – индуктивность катушки колебательного контура. Когда к конденсатору C_1 подключили параллельно конденсатор C_2, емкость батареи конденсаторов

стала равна C_1+C_2. Резонансная частота ν_2 при этом равна:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}. \qquad (2)$$

Обе частоты ν_1 и ν_2, а также емкость C_2 известны. Неизвестна индуктивность катушки L и искомая емкость C_2. Следовательно, необходимо исключить из уравнений (1) и (2) индуктивность L, например, поделив левые и правые части этих уравнений соответственно друг на друга. После деления, сокращения и упрощения получаем: $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}{2\pi\sqrt{LC_1}}$,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{L(C_1 + C_2)}{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1}}$$

Отсюда $\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = 1 + \frac{C_2}{C_1}$; $\frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1$; $C_2 = C_1\left(\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1\right)$.

Задача в общем, виде решена. Проведем вычисления:

$$C_2 = 10^{-6}\left(\left(\frac{400}{100}\right)^2 - 1\right) = 1{,}5\cdot 10^{-5}\ \Phi.$$

Ответ: $C_2 = 1{,}5\cdot 10^{-5}\ \Phi$.

Вопросы и задания.

1. Электрические колебания в колебательном контуре, дифференциальное уравнение собственных электрических колебаний.
2. Затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс.
3. Переменный ток, его промышленное получение.
4. Переменный ток в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением, векторная диаграмма напряжений и токов.
5. Электромагнитная индукция. Вихревое электрическое поле.
6. Первое уравнение Максвелла. Ток смещения.
7. Второе уравнение Максвелла.
8. Система уравнений Максвелла.
9. Электромагнитные волны. Основные свойства электромагнитных волн.
10. Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна.

11.Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Умова - Пойнтинга.

12. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.

13. Шкала электромагнитных волн.

Задачи для самостоятельного решения

1. По обмотке соленоида индуктивностью L=0,2 Гн течет ток I=10 А. Определить энергию W магнитного поля соленоида.
2. Индуктивность L катушки (без сердечника) равна 0,1 мГн. При какой силе тока I энергия W магнитного поля равна 100 мкДж?
3. Соленоид содержит N=1000 витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида равен 0,1 мВб. Вычислить энергию W магнитного поля.
4. На железное кольцо намотано в один слой N=200 витков. Определить энергию W магнитного поля, если при токе I=2,5 А магнитный поток Φ в железе равен 0,5 мВб.
5. При некоторой силе тока I плотность энергии w магнитного поля соленоида (без сердечника) равна 0,2 Дж/м^3. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?
6. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет n=10 витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии w поля, если по обмотке течет ток I=16 А.
7. Обмотка тороида содержит n=10 витков на каждый сантиметр длины. Сердечник не магнитный. При какой силе тока I в обмотке плотность энергии w магнитного поля равна 1 Дж/м^3?
8. Катушка индуктивностью L=1 мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром D=20 см каждая, соединены параллельно. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить период T электрических колебаний в таком контуре.
9. Конденсатор электроемкостью C=500 пФ соединен параллельно с катушкой длиной l=40см и площадью S сечения, равной 5 см^2. Катушка содержит N=1000 витков. Сердечник немагнитный. Найти период T электрических колебаний в этом контуре.
10. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L=20 мкГн и конденсатора электроемкостью C = 80 нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2%. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 13.

Тема занятия. **Переменный электрический ток.**

Цель занятия. Изучить законы переменного электрического поля.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Переменный электрический ток. Действующее значение переменного тока. Электрическая цепь с резистором. Электрическая цепь с катушкой индуктивности. Электрическая цепь с конденсатором. Закон Ома для цепи переменного тока. Мгновенная мощность. Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Электромагнитные колебания в колебательном контуре применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Переменный электрический ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания в цепи с резистором, катушкой индуктивности и конденсатором можно рассматривать как *переменный электрический ток*. Если подводимые к контуру внешняя ЭДС или напряжение периодически изменяются по гармоническому закону, то переменный ток называют *синусоидальным* (рис. 1):

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

или

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где i – мгновенное значение силы тока, то есть значение тока для каждого момента времени; I_m – амплитудное значение силы тока.

При частоте $\nu = 50\ Гц$ (промышленная частота) период электромагнитных колебаний составляет $T = 0{,}02\ с$.

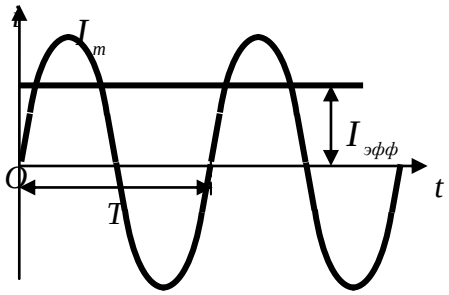


Рис.1.

Ввиду того, что в течение периода сила переменного тока изменяется, о величине такого тока судят не по мгновенным значениям, а по действующему или эффективному значению $I_{эфф}$. При этом действие переменного тока оценивают по тепловому эффекту, который сравнивают с тепловым эффектом постоянного тока.

Действующее значение переменного тока

Действующим (эффективным) значением переменного тока называют такую величину, которая равна силе постоянного тока, выделяющего в проводнике такое же количество теплоты, что и данный переменный ток за одно и то же время. Действующее значение переменного синусоидального тока связано с его амплитудным значением соотношением

$$I = I_{эфф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Для мгновенных значений синусоидальных токов выполняются закон Ома и правила Кирхгофа.

Рассмотрим цепи, содержащие резистор, катушку индуктивности, конденсатор и все три элемента, соединенные последовательно, на зажимах которых приложено переменное напряжение

$$u = U_m \cos \omega t,$$

где U_m – амплитудное значение напряжения.

Электрическая цепь с резистором

Сила тока, протекающего через резистор (рис.2), определяется законом Ома

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \qquad (2)$$

где $I_m = \frac{U_m}{R}$ – амплитуда силы тока. Очевидно, что при чисто активном (R) характере цепи сдвиг фаз колебаний тока и напряжения равен нулю (рис. 3).

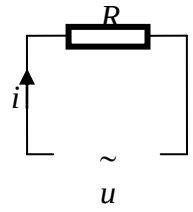


Рис. 2

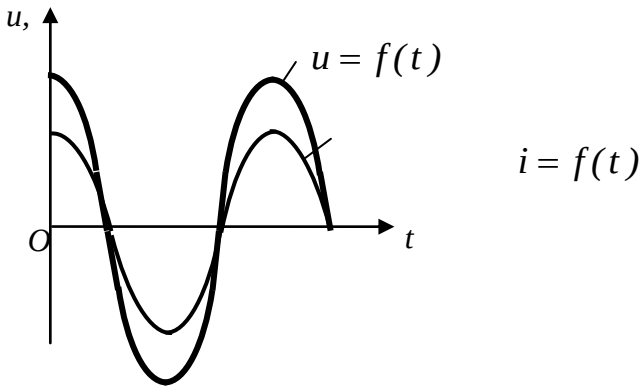


Рис. 3

Электрическая цепь с катушкой индуктивности

В катушке без потерь ($R \approx 0$) будет протекать ток, если напряжение на ее выводах компенсирует ЭДС самоиндукции (рис. 4), то есть

$$u = -\varepsilon_s = L\frac{di}{dt}, \tag{3}$$

откуда ток

$$i = \int \frac{1}{L} U_m \cos \omega t dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + A = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \tag{4}$$

Постоянная интегрирования *A=0,* так как ток изменяется по гармоническому закону, то есть не имеет постоянной составляющей. Очевидно, что амплитуда тока в цепи с катушкой

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \tag{5}$$

где $x_L = \omega L$ – *индуктивное сопротивление*, зависящее от частоты. При $\nu = 0$ (при протекании постоянного тока) $x_L = 0$.

Таким образом, в цепи с катушкой индуктивности колебания силы тока отстают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от колебаний напряжения (рис.5).

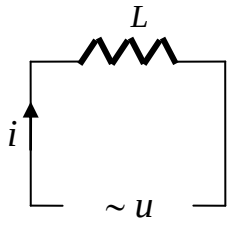


Рис. 4

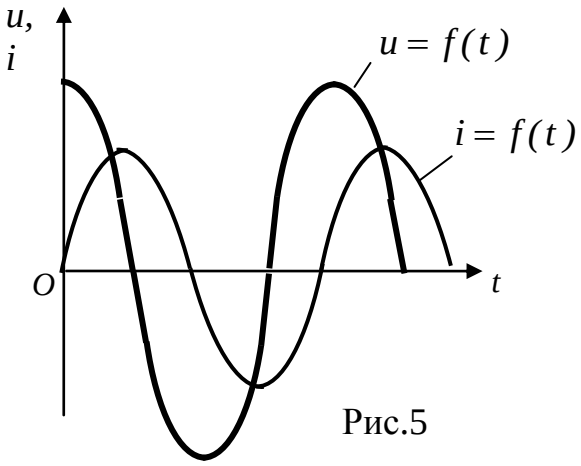


Рис.5

Электрическая цепь с конденсатором

Если пренебречь активным сопротивлением соединительных проводов и обкладок конденсатора (рис.6), то напряжение на конденсаторе $u_c = \frac{q}{C}$ будет равно напряжению на зажимах цепи, то есть $U_m \cos \omega t = \frac{q}{C}$,

откуда заряд конденсатора

$$q = U_m C \cos \omega t.$$

Сила тока в цепи конденсатора

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega U_m C \sin \omega t = U_m \omega C = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (6)$$

где $I_m = U_m \omega C = \frac{U_m}{x_C}$, $x_C = \frac{1}{\omega C}$ - *емкостное сопротивление* цепи. Чем меньше частота ν, тем больше x_C. Поэтому в цепи постоянного тока ($\nu = 0$) $x_C \to \infty$ и конденсатор не проводит электрический ток.

Таким образом, в цепи с конденсатором колебания силы тока опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания напряжения (рис.7).

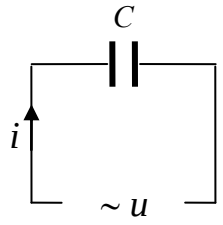


Рис.6

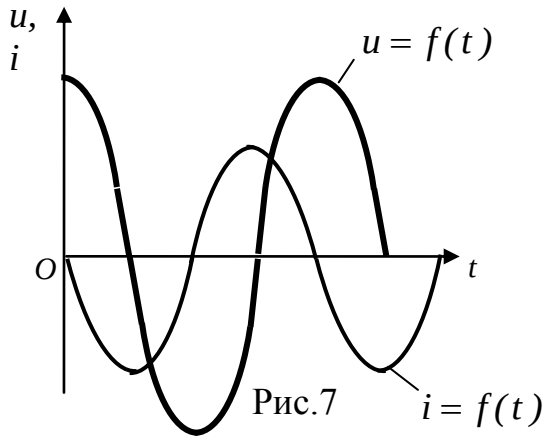


Рис.7

Закон Ома для цепи переменного тока

Рассмотрим теперь электрическую цепь из последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора (рис.8).

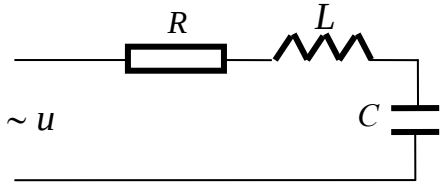


Рис.8

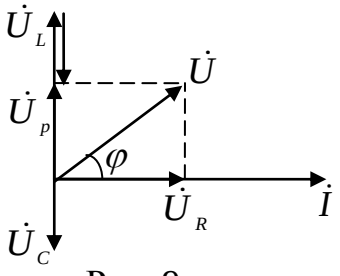


Рис. 9

По второму правилу Кирхгофа для мгновенных значений напряжение на зажимах цепи равно сумме напряжений на отдельных элементах

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Построим векторную диаграмму цепи с учетом полученных ранее фазовых соотношений: а) напряжение на резисторе совпадает по фазе с током; б) напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на $\frac{\pi}{2}$; в) напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 9).

Из векторной диаграммы найдем модуль действующего значения напряжения

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_p^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}, \qquad (20.9)$$

где U_p – реактивная составляющая напряжения.

Учитывая, что $U_R = IR$, $U_L = Ix_L$, $U_C = Ix_C$, получим:

$$U = I\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = IZ,$$

где Z – *полное сопротивление* цепи. Выражение

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \qquad (10)$$

называется *законом Ома для цепи переменного тока*.

Разность $x_p = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ называют *реактивным сопротивлением*. Из векторной диаграммы следует, что угол сдвига фаз между током и напряжением для рассматриваемой схемы

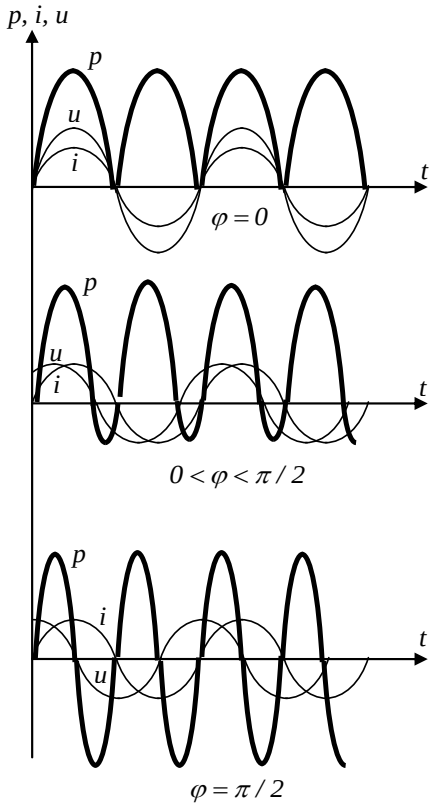
$$\varphi = arctg\frac{U_p}{U_R} = arctg\frac{U_L - U_C}{U_R} = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (20.11)$$

Если $x_L > x_C$, цепь имеет индуктивный характер, $\varphi > 0$; если $x_L < x_C$, цепь имеет емкостный характер, $\varphi < 0$; если $x_L = x_C$, то реактивное сопротивление цепи $x_p = 0$, $\varphi = 0$ и цепь имеет активный характер даже при наличии в ней L и C.

Мгновенная мощность

Мгновенная мощность, развиваемая в цепи переменного тока, равна произведению мгновенных значений силы тока и напряжения:

$$p(t) = i(t)u(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) U_m \cos\omega t. \qquad (12)$$



Среднее за период значение мгновенной мощности называют *активной мощностью*

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt. \qquad (13)$$

Из-за наличия сдвига фаз φ знаки у тока и напряжения в данный момент времени могут быть разные. Поэтому мгновенная мощность может быть отрицательной в некоторые доли периода переменного тока, что означает возвращение энергии из цепи источнику тока.

На рис.20.10 приведены графики изменения мгновенной мощности при различных углах сдвига фаз между колебаниями напряжения и тока.

При $\varphi = 0$ в любой момент времени мощность положительна, она расходуется в цепи на совершение различных видов работы. При $0 < \varphi < \pi / 2$ в отдельные промежутки времени мощность отрицательна. Это объясняется тем, что при наличии в цепи катушки индуктивности возрастание тока приводит к созданию в ней магнитного поля, которое обладает запасом энергии. При уменьшении силы тока магнитное поле исчезает и запасенная в нем энергия возвращается к источнику тока (генератору).

Аналогичный процесс происходит при наличии в цепи конденсатора: в течение той четверти периода, когда происходит зарядка конденсатора, энергия в нем запасается, а когда конденсатор разряжается, он отдает в цепь запасенную энергию.

При $\varphi = \pi / 2$ положительная мощность равна отрицательной мощности, работа тока за период равна нулю, следовательно, средняя мощность также равна нулю. При этом периодически энергия запасается в магнитном и электрическом полях, а затем снова передается генератору. Последний случай возможен лишь при *R=0.*

Подставив (12) в (13) и выполнив преобразования, найдем среднее значение мощности переменного тока:

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi = UI\cos\varphi, \qquad (14)$$

где $\cos\varphi$ – косинус угла сдвига фаз, который называется *коэффициентом мощности*.

Формула (14) показывает, что развиваемая в цепи переменного тока мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между напряжением и током.

Коэффициент мощности $\cos\varphi$ *характеризует потери энергии в цепи* и, следовательно, является важнейшей технико-экономической характеристикой при проектировании электрооборудования переменного тока. Если нагрузки в цепи имеют большие емкостные и индуктивные сопротивления, то $\varphi \neq 0$ и $\cos\varphi$ может быть много меньше единицы.

В этих случаях для передачи требуемой активной мощности P (при заданном напряжении) необходимо увеличивать силу тока, что приводит к выделению в цепи большого количества теплоты. Поэтому приходится либо увеличивать сечение проводов ($R \sim 1/S$), либо распределять реактивные нагрузки так, чтобы $\cos\varphi$ был по возможности ближе к единице.

Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений

Резонансом в электрической цепи называется режим участка, содержащего индуктивный и емкостный элементы, при котором угол φ сдвига фаз колебаний напряжения и тока равен нулю. Резонанс характеризуется рядом особенностей, которые обусловили его широкое применение в радиотехнике, электротехнике, измерительной технике и других областях.

Различают несколько видов резонанса: резонанс напряжений (при последовательном соединении элементов), резонанс токов (при параллельном соединении элементов), резонанс в магнитно-связанных цепях и др.

Резонанс напряжений. Из выражения (1) следует, что при последовательном соединении R, L, C ток в цепи приобретает максимальное значение при $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, то есть при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Этому условию удовлетворяет частота

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (15)$$

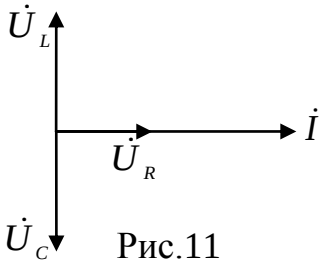


Рис.11

В этом случае $\varphi = 0$, $Z = R \to min$, падения напряжения на катушке индуктивности и конденсаторе одинаковы по величине и противоположны по фазе (рис.11). Таким образом, при резонансе напряжений

$$U_L = U_C,$$

и

$$U_L = \omega_{рез} LI = \frac{1}{\sqrt{LC}} LI = \sqrt{\frac{L}{C}} I = \frac{U}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = UQ, \qquad (16)$$

где Q – добротность контура.

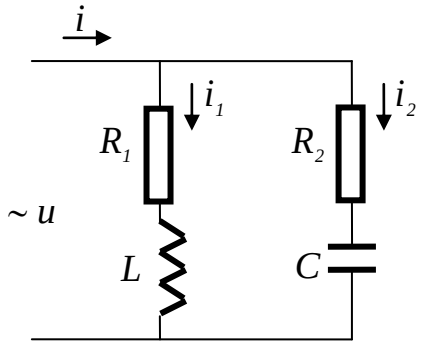


Рис.12

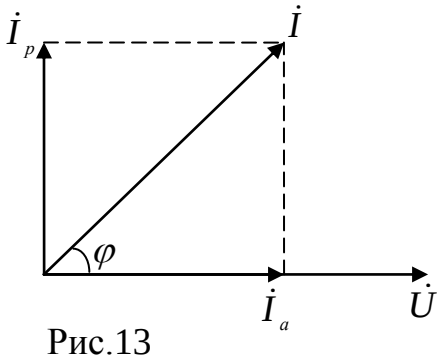


Рис.13

Так как добротность колебательных контуров больше единицы, то напряжение, как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение ***U,*** приложенное к цепи. Из выражения (16) следует, что добротность контура показывает, во сколько раз при резонансе напряжение на реактивных элементах больше по величине входного напряжения.

Явление резонанса напряжений используется в радиотехнике и электронике для усиления колебаний напряжения какой-либо определенной частоты. В электроэнергетике явление резонанса напряжений необходимо учитывать при выборе изоляции высоковольтного оборудования, так как иначе может произойти ее пробой.

Вопросы и задания.

1. Переменный электрический ток.
2. Действующее значение переменного тока.
3. Электрическая цепь с резистором.
4. Электрическая цепь с катушкой индуктивности.
5. Электрическая цепь с конденсатором.
6. Закон Ома для цепи переменного тока.
7. Мгновенная мощность.
8. Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений.

Задачи для самостоятельного решения

1. В сеть переменного тока с действующим напряжением 220 В включено активное сопротивление 55 Ом. Определить действующее и амплитудное значение силы тока.
2. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока с эффективным напряжением $V_Э$=71 В и периодом T=(1/50)с. Найти промежуток времени, в течение которого длится вспышка лампы, и частоту вспышек лампы n. Напряжение зажигания лампы $V_З$=86,7В считать равным напряжению гашения $V_Г$.
3. В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением R, конденсатор с емкостью C и катушка с индуктивностью L. По цепи протекает переменный ток. Определите амплитуды напряжения на

каждом из элементов цепи и во всей цепи. По какому закону изменяется приложенное к цепи напряжение?

Раздел 5. Оптика. Квантовая природа излучения

Практическое занятие 14.
Тема занятия. **Геометрическая оптика. Линзы**
Цель занятия. Изучить основные законы геометрической оптики.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Закон прямолинейного распространения света в однородной среде. Основные законы оптики. Полное тражение. Линзы. Формула линзы. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Основные законы геометрической оптики применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Закон прямолинейного распространения света в однородной среде

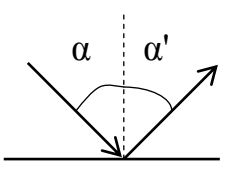
Прямолинейность световых лучей означает, что форма тени предмета при его освещении точечным источником соответствует геометрической *центральной проекции* контура предмета (с центром в источнике). Представление о прямолинейных световых лучах используется в инструментальной оптике для конструирования и расчета оптических приборов. В оптически неоднородных средах геометрическая оптика допускает и непрямолинейное распространение света.

Закон независимости световых лучей

Опыт показывает, что световые пучки при пересечении, как правило, не возмущают друг друга. Производимое одним пучком действие не зависит от наличия других пучков. Математически это означает, что при наложении нескольких световых пучков результирующая интенсивность пучков равна сумме интенсивностей, каждого из пучков $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$, то есть здесь мы пренебрегаем волновыми свойствами света (интерференцией и дифракцией). Кроме того, этот закон строго справедлив для вакуума. Для световых лучей в веществе закон независимости световых лучей справедлив для *линейных* сред, оптические свойства которых не зависят от интенсивности света. Это выполняется точно при небольшой и приближенно при умеренной интенсивности света. При распространении света высокой интенсивности в веществе этот закон нарушается.

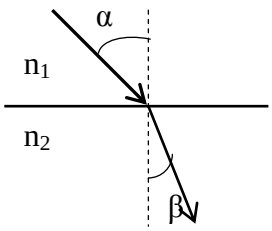
Закон отражения света

При падении луча света на границу раздела двух сред, в точке падения восстанавливают нормаль к границе раздела и отсчитывают угол падения α, как угол между падающим лучом и нормалью, а угол отражения α' - как угол между отраженным



лучом и нормалью. Тогда закон *отражения света* гласит: *луч падающий, луч отраженный и нормаль к отражающей поверхности лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения α = α′.*

Закон преломления света

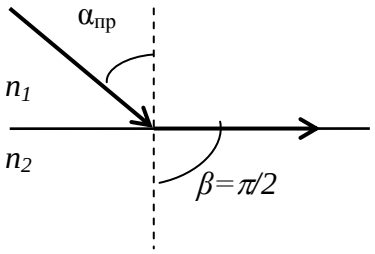


Более сложный закон имеет место при переходе света из одной среды в другую. При падении света на границу раздела прозрачных сред с абсолютными показателями преломления $n_1 = \frac{c}{v_1}$ и $n_2 = \frac{c}{v_2}$ часть света отражается, а часть проходит во вторую среду, изменяя направление распространения (преломляется). Здесь *c* – скорость света в вакууме, *v* – скорость света в соответствующей среде. Угол к нормали, под которым свет распространяется во второй среде, называют углом преломления *β*. Тогда *закон преломления* гласит: *луч падающий, луч преломленный и нормаль к преломляющей поверхности лежат в одной плоскости. Угол падения и угол преломления связаны соотношением:* $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}$, где n_{21} - относительный коэффициент преломления второй среды относительно первой. $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$.

Здесь различают два случая:

1. Когда свет переходит из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду ($n_2 > n_1$), угол преломления меньше угла падения ($\beta < \alpha$). В этом случае доля отраженной энергии светового луча от границы раздела двух сред сильно возрастает по мере увеличения угла падения. Однако даже при очень больших углах падения, близких к 90º, когда световой луч почти скользит вдоль поверхности раздела двух сред, все же часть световой энергии переходит во вторую среду.

2. Новое интересное явление возникает тогда, когда свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду ($n_2 < n_1$). Тогда угол преломления больше угла падения ($\beta > \alpha$). Здесь также доля отраженной энергии возрастает с увеличением угла падения, однако возрастание идет по иному закону: *начиная с некоторого угла падения, вся световая энергия отражается от границы раздела*. Это явление носит название *полного внутреннего отражения.* Угол падения $\alpha_{пр}$, начиная с которого вся световая энергия отражается от границы раздела, называется *предельным углом полного внутреннего отражения*. Значение этого угла определяется выражением: $\sin\alpha_{пр} = n_{21}$. При падении луча с углом падения $\alpha > \alpha_{пр}$, вся световая энергия отражается в первую среду и не проходит во вторую, преломленного луча во второй среде нет.



Следствия из законов геометрической оптики

Фокусное расстояние сферического зеркала

$$F = R / 2,$$

где R – радиус кривизны зеркала.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = 1 / \mathrm{F}.$$

Формула сферического зеркала

$$\pm\frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где d и f – расстояния от полюса зеркала соответственно до предмета и изображения. Знак плюс соответствует действительным величина, а знак минус – мнимым.

Оптическая сила тонкой линзы

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где F – фокусное расстояние линзы; $n_{\text{л}}$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{\text{ср}}$ – абсолютный показатель преломления окружающей среды.

Радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком плюс, вогнутых – со знаком минус.

Оптическая сила двух тонких линз, сложенных вплотную

$$D = D_1 + D_2.$$

Формула тонкой линзы

$$\pm\frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где d и f – расстояния от оптического центра линзы соответственно до предмета и изображения. Знак плюс соответствует действительным величина, а знак минус – мнимым.

Угловое изображение лупы

$$\Gamma = \frac{d_0}{F},$$

где d_0 – расстояние наилучшего зрения ($d_0 = 25$ см).

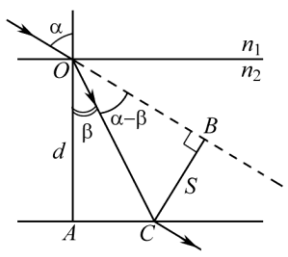
Угловое увеличение телескопа в случае, когда в телескоп наблюдают удаленные предметы

$$\Gamma = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 и F_2 – фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра.

Примеры решения задач

Задача 1. Световой луч падает под углом $\alpha = 60°$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 10$ см. Определите смещение S луча пластинкой, если пластинка погружена в воду.



Показатели преломления стекла и воды соответственно равны $n_2 = 1{,}5$, $n_1 = 1{,}33$.

Дано:
$\alpha = 60°$
$d = 10$ см
$n_1 = 1{,}33$
$n_2 = 1{,}5$

$S - ?$

Решение. Из прямоугольных треугольников AOB и BOC следует:

$$\frac{d}{\cos\beta} = \frac{S}{\sin(\alpha - \beta)} = CO.$$

Отсюда смещение луча пластинкой

$$S = \frac{d\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} = d\left(\sin\alpha - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}\right). \quad (1)$$

По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \sin\beta = \frac{n_1\sin\alpha}{n_2}. \quad (2)$$

Следовательно,

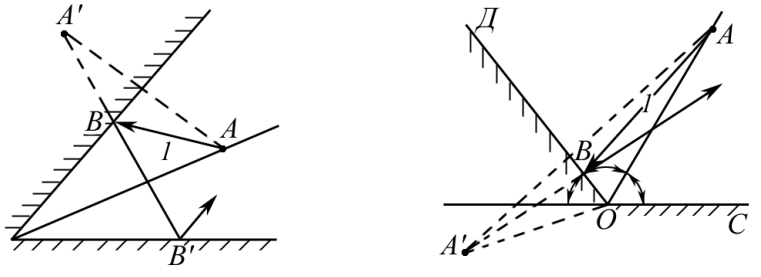
$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{1}{n_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}\,. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$S = d\left(\sin\alpha - \frac{n_1 n_2\cos\alpha\sin\alpha}{n_2\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}}\right) = d\left(\sin\alpha - \frac{n_1\sin 2\alpha}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}}\right) =$$

$$= 10\left(\sin 60^\circ - \frac{1{,}33\sin 120^\circ}{2\sqrt{1{,}5^2 - 1{,}33^2\sin^2 60^\circ}}\right) \approx 2{,}67 \text{ см}.$$

Задача 2. Внутренняя поверхность конуса покрыта отражающим слоем, образующим коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него натянута светящаяся нить. Определите минимальный угол раствора конуса α_{min}, при котором лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза.



а) *б)*

Решение. Рассмотрим ход луча (*1*), испущенного точкой *A*, лежащей на нити. После первого отражения от конической поверхности в точке *B* луч *1* пойдет так, как если бы он вышел из точки *A′* – мнимого изображения точки *A*. Если угол раствора конуса мал, то точка *A′* – изображение точки *A* будет лежать выше прямой *OC* (рис. *а*). Тогда луч *1* может отразиться в точке *Д′* второй раз от

нижней поверхности конуса. При большом угле раствора конуса точка A' лежит ниже прямой OC (рис. *б*).

Тогда ни один луч, вышедший из точки A второй раз не попадет на зеркало. Это будет иметь место, если

$$\angle A'OД + \angle AOД + \angle AOC \geq 180\ °. \qquad (1)$$

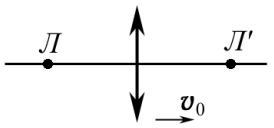
Но $\angle AOC = \angle AOД = \angle A'OД = \alpha / 2$. Подставим выражение для углов в (1): $3(\alpha / 2) \geq 180\ °$.

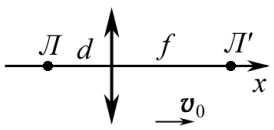
Отсюда получим

$$\alpha_{min} = \alpha \geq (2 / 3)\cdot 180°.$$

$$\alpha_{min} \geq 120°.$$

Задача 3. На оптической скамье установлена лампочка $Л$ (ее можно считать точечным источником света). От лампочки отодвигают с постоянной скоростью v_0 собирающую линзу, фокусное расстояние которой равно F. В какую сторону, и с какой скоростью будет двигаться изображение $Л'$ лампочки в тот момент, когда линза окажется от нее на расстоянии $1{,}5F$? Лампочка все время остается на главной оптической оси линзы.





Дано:	**Решение.** В системе отсчета, связанной с
$d = 1{,}5F$	линзой, скорость лампочки
v_0	$\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}_0$.
$v_x - ?$	Продифференцируем формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \qquad (1)$$

где d – расстояние от предмета до линзы; f – расстояния от изображения до линзы; F – фокусное расстояние.

$$-\frac{dd}{d^2 dt} - \frac{1}{f^2}\frac{df}{dL} = 0.$$

Здесь $\frac{dd}{dt} = v_0$ – положительная величина, так как расстояние до предмета увеличивается. Скорость изменения f обозначим U:

$$U = \frac{df}{dt} = -\frac{f^2}{d^2} v_0.$$

Из выражения (1) находим f:

$$f = \frac{Fd}{d - F} = \frac{F \cdot 1{,}5F}{1{,}5F - F} = 3F.$$

Тогда

$$U = -\frac{9F^2 v_0}{(1{,}5F)^2} = -4v_0.$$

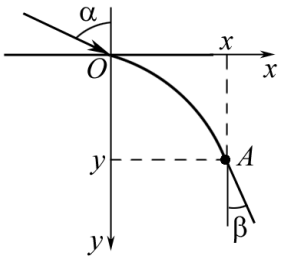
Знак «минус» говорит о том, что f уменьшается по величине, т.е. изображение лампочки движется по направлению к линзе.

Скорость изображения в неподвижной системе отсчета

$$v_x = U_x + v_{0x} = -4v_0 + v_0 = -3v_0.$$

Таким образом, изображение лампочки движется по направлению к линзе со скоростью $3v_0$.

Задача 4. Луч света падает под углом α на поверхность среды с показателем преломления, изменяющемуся по закону $n = n_0 + ky$, где n_0 и k – положительные постоянные; y – координата. Определите траекторию луча света в среде.



Решение. Для любой точки A, лежащей на траектории луча (см. рис.) можно записать:

$$\frac{dy}{dx} = ctg\ \beta, \qquad (1)$$

где β – угол преломления луча.

Из закона преломления света следует

$$\sin\beta / \sin\beta = n.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \sin\alpha / n,\ \ cos\,\beta = \sqrt{1 - sin^2\,\beta} = \frac{\sqrt{n^2 - sin^2\,\alpha}}{n}. \qquad (2)$$

Подставим выражения (2) в (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{n^2 - sin\,\alpha}}{sin\,\alpha}.$$

Отсюда

$$dx = dy\,\frac{sin\,\alpha}{\sqrt{n^2 - sin\,\alpha}}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем траекторию луча

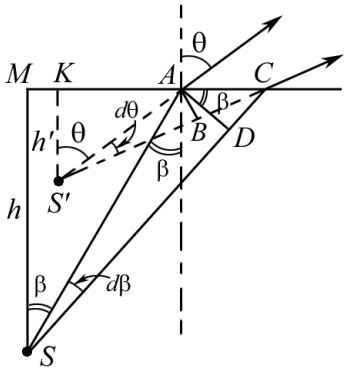
$$x = \int_0^y \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{n^2 - sin\,\alpha}}\,dy = \int_0^y \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{(n_0 + ky)^2 - sin\,\alpha}}\,dy =$$

$$= \frac{sin\,\alpha}{k}\,ln\left[\left(\frac{n_0 + ky}{sin\,\alpha}\right) + \sqrt{\frac{n_0 + ky}{sin\,\alpha} - 1}\right]\Bigg|_0^y.$$

После несложных преобразований получим:

$$X = \frac{sin\,\alpha}{k}\,ln\left[(n_0 + ky) + \sqrt{(n_0 + ky)^2 - sin^2\,\alpha}\right] + C,$$

где $C = -\frac{sin\,\alpha}{k}\,ln\left(n_0 + \sqrt{n_0^2 - sin^2\,\alpha}\right).$



Задача 5. Две плосковыпуклые линзы, сложенные плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием F_1. Найти фокусное расстояние F_2 линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла n_1=1,66, воды n_2=1,33.

Дано:

F_1=10см

n_1=1,66

n_2=1,33

F_2 =?

В первом случае мы имеем двояковыпуклую линзу, оптическая сила которой определяется по формуле

$$\Phi_1 = \frac{1}{F_1} = (n_1 - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз.

Во втором случае к двум плосковыпуклым линзам добавляется третья линза (водяная) с вогнутыми поверхностями, с отрицательными радиусами кривизны R_1 и R_2 и оптической силой

$$\Phi = \frac{1}{F} = (n_{21} - 1)\cdot\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Здесь $n_{21} = n_2/ n_1$– относительный показатель преломления.

Оптическая сила сложенных вплотную линз

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi \quad \text{или} \quad \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F} \qquad (3)$$

Подставим в (3) выражение (2)

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} + (n_2 - 1)\cdot\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{F_1} - (n_2 - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) =$$
$$= \frac{1}{F_1} - (n_2 - 1)\cdot\frac{n_1 - 1}{n_1 - 1}\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (4)$$

Подставим в (4) левую часть (1):

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}\cdot\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_1}\cdot\left(1 - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}\right) = \frac{1}{F_1}\cdot\frac{n_1 - n_2}{n_1 - 1},$$

откуда $$F_2 = \frac{n_1 - 1}{n_1 - n_2}\cdot F = \frac{1{,}66 - 1}{1{,}66 - 1{,}33}\cdot 10 = \frac{0{,}66}{0{,}33}\cdot 10 = 20\ \text{см}.$$

Вопросы и задания.

1. Закон прямолинейного распространения света в однородной среде.
2. Основные законы оптики.
3. Полное тражение.
4. Линзы. Формула линзы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием f = 1 м лежит выпуклой стороной на стеклянной пластинке. Радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете r_5=1,1 мм. Определить длину световой волны λ.
2. Оптическая сила Φ объектива телескопа равна 0,5 дптр. Окуляр действует как лупа, дающая увеличение Γ_1 = 10. Какое увеличение Γ_2 дает телескоп?
3. Лупа дает увеличение Γ=2. Вплотную к ней приложили собирающую линзу с оптической силой Φ_1=20 дптр. Какое увеличение Γ_2 будет давать составная лупа?
4. Пределы аккомодации газа близорукого человека без очков лежат между a_1 = 16 см и a_2 = 80 см. В очках он хорошо видит удаленные предметы. На каком минимальном расстоянии d он может держать книгу при чтении в очках? Считать расстояние наилучшего зрения D=25 см.
5. Человек без очков читает книгу, располагая ее перед собой на расстоянии a = 12,5 см. Какой оптической силы Φ очки следует ему носить?
6. Главное фокусное расстояние f собирающей линзы в воздухе равно 10 см. Определить, чему оно равно: 1) в воде; 2) в коричном масле.
7. Каково возможное наименьшее расстояние l между предметом и его действительным изображением, создаваемым собирающей линзой с главным фокусным расстоянием f =12 см?
8. Луч света переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2. Показать, что если угол между отраженным и преломленным и преломленным лучами равен $\pi/2$, то выполняется условие $tg\varepsilon_1 = \frac{n_2}{n_1}$ (ε_1-угол падения).
9. Пучок параллельных лучей шириной a падает на толстую стеклянную пластину под углом ε = 60° и, преломляясь, переходит в стекло. Ширина a пучка в воздухе равна 10 см. Определить ширину b пучка в стекле.
10. Луч падает под углом ε = 60°на стеклянную пластинку толщиной d =30 мм. Определить боковое смещение Δx луча после выхода из пластинки.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 15.

Тема занятия. **Волновая оптика. Интерференция и дифракция света. Дисперсия и поляризация света.**

Цель занятия. Изучить основы волновой оптики. Интерференцию и дифракцию света. Дисперсию и поляризацию света.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Электромагнитная природа света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Оптическая длина пути и оптическая разность хода лучей. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Интерференция в тонких пленках. Интерференция многих волн. Дифракционная решетка. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса — Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Дифракция от щели. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и преломлении. Двойное лучепреломление. Нормальная и аномальная дисперсии. Электронная теория дисперсии света. Рассеяние света. Поглощение света. Связь дисперсии с поглощением. Спектры поглощения и цвета тел. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы волновой оптики применяется при решении инженерных задач.

Теоретическая часть.

Интерференция света

В волновой оптике рассматриваются оптические явления, в которых проявляется волновая природа света (например, явления интерференции, дифракции, поляризации и дисперсии света). Свет представляет собой электромагнитные волны, в которых совершают колебания векторы

электрической напряженности ***E*** и магнитной напряженности ***H***. Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие свойства света вызываются колебаниями электрического вектора.

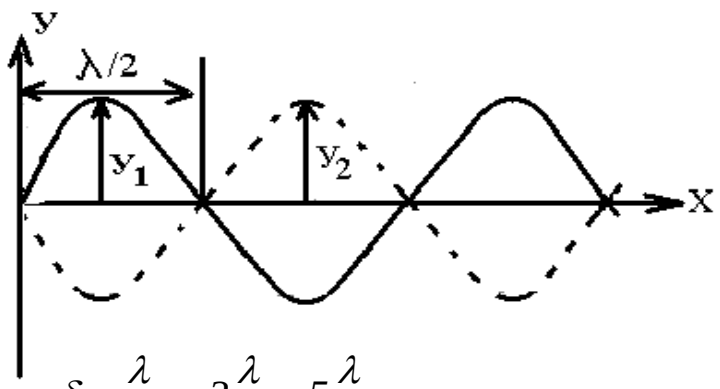
В соответствии с этим, в дальнейшем, говоря о световом векторе, будем подразумевать под ним вектор напряженности электрического поля ***E***. *Явление интерференции света состоит в усилении или ослаблении колебаний, которое происходит в результате сложения двух или нескольких волн с одинаковыми периодами, распространяющихся в пространстве, и зависит от соотношения между фазами складывающихся колебаний.*

Необходимым условием интерференции волн является их когерентность, то есть *равенство их частот и постоянная во времени разность фаз.* Этому условию удовлетворяют только монохроматические световые волны, то есть волны одного цвета. Для световых волн, так же как и для любых других, справедлив принцип суперпозиции, то есть результирующий световой вектор двух волн, проходящих через одну точку, равен векторной сумме световых векторов каждой из волн в отдельности.

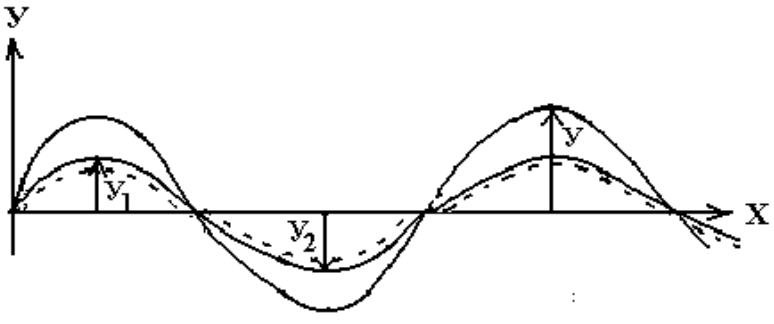
Амплитуда результирующего колебания находится путем геометрического сложения амплитуд исходных колебаний. Условия усиления или ослабления результирующего колебания обычно формулируются не через разность фаз $\Delta\varphi$, а через разность хода волн δ. Известно, что фазе $\varphi = \pi$, соответствует пройденный волновой путь, равный половине длины волны $\lambda/2$ (Рис.1). Тогда условие максимумов интерференции можно сформулировать следующим образом: максимальное усиление результирующего колебания наступает, если разность хода световых волн равна четному числу полуволн, или целому числу длин волн, то есть

$$\delta = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda\,. \qquad (1)$$

Аналогично формулируется условие минимумов: ослабление результирующего



$$\delta = \frac{\lambda}{2};\quad 3\frac{\lambda}{2};\quad 5\frac{\lambda}{2}\ldots \qquad y = y_1 = y_2 = 0$$



$$\delta = 0;\quad 2\frac{\lambda}{2};\quad 4\frac{\lambda}{2}\ldots \qquad y = y_1 + y_2$$

Рис. 1.

колебания будет, если разность хода слагаемых волн равна нечетному числу полуволн, то есть

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (2)$$

где k = 0,1,2… называется порядком интерференционного максимума или минимума.

Решение задач на интерференцию света надо обязательно сопровождать рисунком, указать в нем, какие лучи интерферируют. Следует различать путь геометрический и путь оптический. Если свет проходит в среде, показатель преломления которой относительно вакуума равен n, то оптическая длина его пути S связана с геометрической ℓ следующим соотношением

$$S = n\ell \qquad (3)$$

При отражении луча от среды более плотной, чем та среда, в которой идет падающий луч, фаза колебаний изменяется на π радиан, то есть в данной точке, говорят, происходит «потеря» половины длины волны. Наиболее типичным и распространенным примером интерференции света в природе является интерференция в тонких пленках: мыльные пузыри, радужная пленка нефти на воде, оксиды пленки на металлах и т.д. Допустим, что тонкую пленку толщиной d окружает воздух (рис.2). На нее под углом α к нормали падает параллельный пучок лучей, из которого можно выделить два луча 1 и 2 (рассматривается интерференция в отраженном и проходящем свете). Для разности хода этих лучей имеют место следующие выражения:

а) в отраженном свете: 2-ой луч, отражаясь в точке C от среды более плотной пленки «теряет» $\lambda/2$, поэтому разность хода

$$\delta = 2dn\cos d + \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2}; \qquad (4)$$

б) в проходящем же свете ни 1-ый, ни 2-ой лучи не имеют «потери» $\lambda/2$ и поэтому

$$\delta = 2dn\cos\gamma = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}\,. \qquad (5)$$

Рассматривая интерференцию света в тонких пленках, различают полосы равной толщины. Первые наблюдаются в тех случаях, когда на плоскопараллельную, тонкую пленку падает под разными углами α расходящийся (или сходящийся) пучок света. Интерференционную картину можно видеть на экране Э, установленном в фокальной плоскости собирающей линзы.

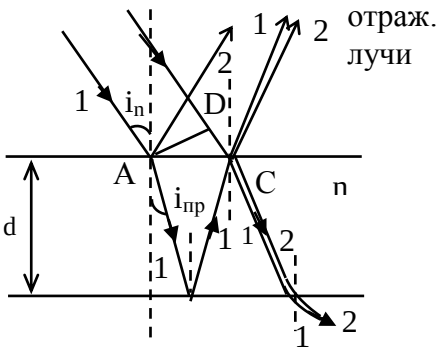


Рис. 2.

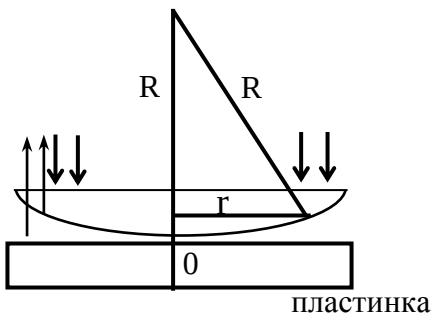


Рис. 3.

Результаты интерференции отраженного света в различных точках экрана зависят только от углов α падения на пленку. Интерференционные полосы в этом случае называются полосами равного наклона, так как они получаются в результате интерференции лучей, падающих на пленку под одним и тем же углом. Для разных полос углы падения различны.

Полосы равной толщины наблюдаются при отражении параллельного пучка лучей света (d = const) от тонкой прозрачной пленки, толщина d которой не одинакова в разных местах. Оптическая разность хода интерферирующих волн изменяется при переходе от одних точек на поверхности пленки к другим, в соответствии с изменением толщины d, так что условия интерференции одинаковы в точках, соответствующих одинаковым значениям d. При проектировании пленки на экран посредством линзы таким образом, чтобы на экране получилось изображение пленки, последняя оказывается покрытой полосами, проходящими по точкам, соответствующим равной толщине d пленки (рис.2). Эти полосы называются полосами равной толщины.

Частным случаем полос равной толщины являются кольца Ньютона (рис.3). Плосковыпуклая линза с большим радиусом R кривизны выпуклой поверхности обращена этой поверхностью к плоской пластинке и соприкасается с ней в точке *0*. Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного промежутка между линзой и пластинкой. При наложении отраженных волн возникают интерференционные кольца равной толщины. Радиус k-того светлого кольца в отраженном свете (или темного в проходящем) равен

$$r_{н} = \sqrt{(2k+1)\frac{\lambda}{2}R}. \qquad (6)$$

Радиус k-того темного кольца в отраженном свете (или светлого в проходящем) равен

$$r_k = \sqrt{k\lambda R}, \qquad (7)$$

где R – радиус кривизны линзы.

Дифракция света. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка. Дифракция рентгеновских лучей

Дифракцией называется отклонение света от прямолинейного распространения в однородной среде, когда свет, огибая препятствия, заходит в область геометрической тени. Дифракция света всегда сопровождается интерференцией дифрагированных лучей. Дифракция возникает в том случае, когда фронт волны не является безграничным, а частично экранирован. (Например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия). Проникновение световых волн в область геометрической тени может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром

вторичных волн. Огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент (рис.1). Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис.2).

Рис. 1.

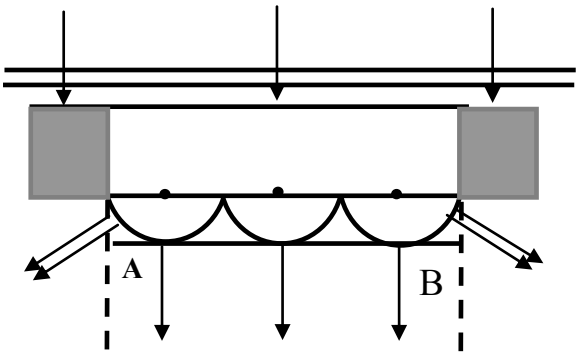


Рис. 2.

По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка открытого фронта волны служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн *AB*, можно убедиться в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени, огибая края преграды.

Принцип Гюйгенса не дает никаких сведений об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем. Последний впервые предположил, что все вторичные волны являются когерентными и поэтому могут интерферировать в любой точке пространства. Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет рассмотреть многие случаи дифракции света и дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытом. Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке *P* сферической волной от источника *S* (рис.3).

Разобьем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки *P* отличаются на $\lambda/2$. Это зоны Френеля. Колебания, приходящие в точку *P* от аналогичных точек двух соседних зон, находятся в противофазе, поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон отличаться по фазе на π. При небольшом числе *k* зон Френеля площади их примерно одинаковы, а высота сегмента $h_k << a$, Поэтому можно легко вывести радиус *k*-той зоны Френеля;

$$r_k = \sqrt{\frac{a \cdot в}{a + в} k\lambda}\,. \qquad (8)$$

Расстояние $в_k$ от зоны до точки *P* медленно растет с ростом номера зоны *k*, значит

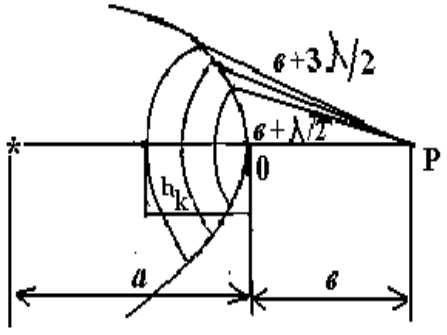


Рис.3

амплитуда A_k колебания, возбуждаемого k-той зоной в точке P монотонно убывает. Вследствие этого можно приближенно считать, что

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2} \quad и \quad A = \frac{A_1}{2}.$$

То есть амплитуда в точке P равна половине амплитуды центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачной экран с отверстием, открывающим только центральную зону, то амплитуда в точке P будет равна A, а интенсивность света будет в четыре раза больше, чем при отсутствии преград между точками S и P.

Если же отверстие таково, что открывает две зоны Френеля, то амплитуды от этих зон (примерно одинаковые) придут в точку P в противофазе, и в ней будет наблюдаться минимум интенсивности света. Можно заключить, что, *если в открытый фронт волны входит четное число зон Френеля, то наблюдается минимум интенсивности света, если k – нечетное, то в точке P наблюдается максимум интенсивности света.*

Различают два случая дифракции света: дифракцию Френеля, или дифракцию в сходящихся лучах, и дифракцию Фраунгофера, или дифракцию в параллельных лучах. В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся за препятствием на конечном расстоянии от него. Во втором случае на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на щели. Пусть параллельный пучок монохроматического света падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана узкая щель шириной a (рис. 4). В соответствии с принципом Гюйгена-Френеля все точки щели являются когерентными источниками света, колеблющимися в одной фазе.

Оптическая разность хода между крайними лучами MC и ND, идущими от щели в произвольном направлении φ

$$\delta = a \sin \varphi. \qquad (9)$$

Разобьем щель MN на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру M щели. Все зоны в заданном направлении излучают свет совершенно одинаково. При интерференции света от каждой пары соседних зон амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как эти зоны вызывают колебания с одинаковыми амплитудами, но противоположными

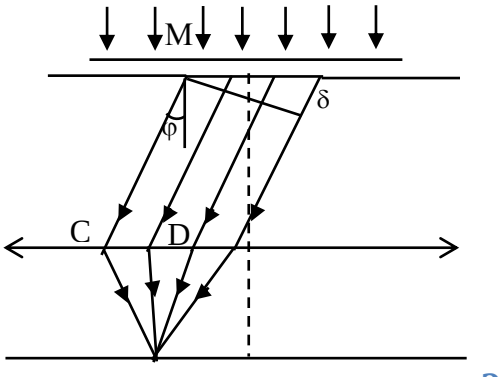


Рис. 4.

фазами. Результат интерференции в точке B определяется тем, сколько зон Френеля укладывается в щели. Если число зон четное, то есть

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} \quad (k = 1,2\ldots), \tag{10}$$

то наблюдается дифракционный минимум.

Если число зон нечетное, то есть

$$a\sin\varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad , \tag{11}$$

то наблюдается дифракционный максимум.

Величина k называется порядком дифракционного максимума (или минимума).

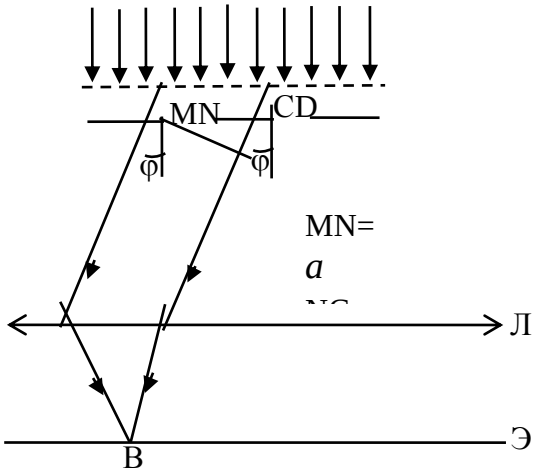


Рис. 5.

Широкое распространение в науке и технике получили дифракционные решетки, которые представляют собой множество щелей одинаковой ширины, разделенных одинаковой ширины непрозрачными промежутками. Общая ширина промежутка и щели называется постоянной (или периодом решетки), то есть $d = a + в$.

Дифракционная картина от решетки сложнее, чем от одной щели, потому, что свет от разных щелей также интерферирует. Если на решетку нормально к ее поверхности падает свет с длиной волны λ, то (рис.5) лучи, идущие под углом φ к первоначальному направлению от соответствующих точек каждой щели, обладают разностью хода

$$\delta = d\sin\varphi.$$

Если эта разность хода равна целому числу длин волн, то наблюдается максимум интерференции. Условия главных максимумов для решетки записываются в виде

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda\ (k = 0,1,2\ldots). \tag{12}$$

Как следует из формулы, если на решетку падает белый свет, то для более коротких волн условие максимума выполняется при меньших углах.

Разрешающая способность R дифракционной решетки, то есть способность ее представить раздельно две спектральные линии, определяется по формуле

$$R = kN, \tag{13}$$

где N – общее число штрихов дифракционной решетки, k - порядок дифракционного максимума.

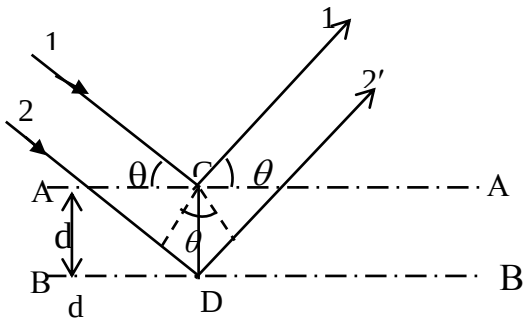


Рис.6.

Для наблюдения дифракционной картины необходимо, чтобы постоянная решетки была того же порядка, что и длина волны падающего света. Поэтому для рентгеновского излучения в качестве дифракционных решеток можно использовать кристаллы, поскольку расстояние между атомами в кристаллах одного порядка с $\lambda_{рент.\ изл.}$ ($\approx 10^{-12} – 10^{-8}$м).

Дифракцию рентгеновского излучения можно рассматривать как результат его отражения от системы параллельных сетчатых плоскостей кристалла, то есть плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решетки. Это отражение, в отличие от обычного, осуществляется лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют интерференционным максимумам для лучей, отраженных от разных плоскостей.

Абсолютный показатель преломления всех сред для рентгеновского излучения близок к единице, поэтому оптическая разность хода между двумя лучами 1′ и 2′, отражающимися от плоскостей AA и BB равна (рис.6)

$$2\,d\sin\theta, \qquad (14)$$

где d – межплоскостное расстояние, θ - угол скольжения. Дифракционные максимумы наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют условию Вульфа-Брэггов

$$\delta = 2\,d\sin\theta = m\lambda, \ (m = 1,2,3\ldots). \qquad (15)$$

Поляризация света. Двойное лучепреломление. Вращение плоскости поляризации

Обычные источники света испускают естественный свет, то есть свет, в котором имеются колебания светового вектора, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис.7).

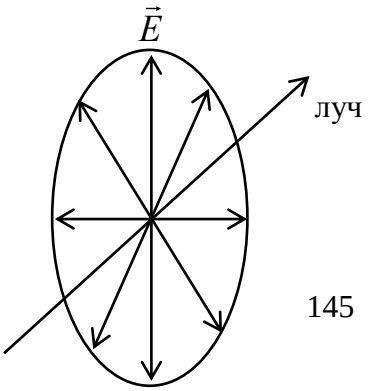


Рис. 7.

Излучение светящегося тела слагается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около 10^{-8} с. За это время успевает образоваться последовательность горбов и впадин (или, как говорят, цуг волн), протяженностью примерно 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно вспыхивает множество атомов. Возбуждаемые ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для каждого цуга ориентирована случайно. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений равновероятны. В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

Свет, в котором направления колебаний светового вектора ***E*** *упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным.* Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, свет называется плоско - (или линейно) поляризованным. Упорядоченность может заключаться еще и в том, что вектор ***E*** поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате, конец вектора ***E*** описывает или эллипс (эллиптически поляризованный свет) или окружность (поляризованный по кругу свет). *Плоскость, в которой колеблется световой вектор* ***E****, называется плоскостью колебаний, а перпендикулярная ей плоскость называется плоскостью поляризации.*

Плоскополяризованный свет можно получить с помощью различных устройств, называемых поляризаторами. Эти приборы пропускают свободно колебания, параллельные плоскости, которая называется плоскостью поляризатора, и полностью задерживают колебания, перпендикулярные этой плоскости. Поляризованный свет можно получить также при отражении от диэлектрика. Как показывает опыт, отраженный и преломленный лучи всегда частично поляризованы. Степень поляризации зависит от угла падения и показателя преломления.

Изучая это явление, Брюстер установил, что при определенном значении угла падения отраженный луч полностью линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. При этом отражается только та компонента вектора напряженности электрического поля, которая параллельна поверхности диэлектрика (условно эту компоненту обозначаем точками, то есть колебания ***E*** происходят перпендикулярно плоскости чертежа). Преломленный луч поляризован лишь частично. Угол падения, при котором отраженный луч полностью поляризован, называется углом Брюстера (рис.8) и определяется соотношением

$$tgi_{Б} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \qquad (17)$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления сред. При этом угол между отраженным и преломленным лучами равен 90°.

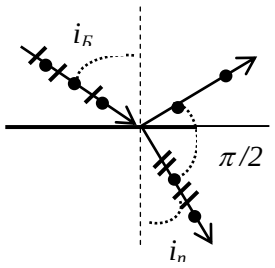


Рис. 8.

Действия различного типа поляризаторов основаны либо на законе Брюстера, либо на *явлении двойного лучепреломления, которое состоит в том, что в оптически анизотропных кристаллах луч света, падающий на поверхность кристалла, раздваивается в нем на два преломленных луча* (рис. 9). Один из них лежит в плоскости падения, подчиняется законам преломления света и называется обыкновенным лучом (о). Второй не удовлетворяет этим условиям и называется необыкновенным (е). Двойное лучепреломление свидетельствует о том, что падающая на оптически анизотропный кристалл световая волна возбуждает две волны, распространяющиеся в кристалле по различным направлениям. Обыкновенная и необыкновенная волны линейно поляризованы. Направления векторов ***E*** в этих волнах условно показывают точками на обыкновенном луче и черточками на необыкновенном. В одноосном кристалле скорость обыкновенного луча υ_0 численно одинакова по всем направлениям: $\upsilon_0 = C / n_0$, где n_0 – показатель преломления кристалла для обыкновенного луча. Соответственно, для необыкновенного луча: $\upsilon_e = C / n_e$. Значения n_e и υ_e зависят от направления необыкновенного луча по отношению к оптической оси кристалла (это направление в кристалле, вдоль которого не наблюдается двойное лучепреломление). Для луча, распространяющегося вдоль оптической оси, $n_e = n_0$, $\upsilon_e = \upsilon_0$.

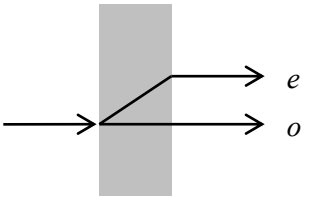


Рис. 9.

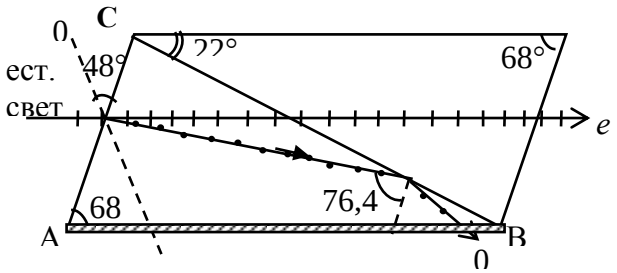


Рис. 10.

Примером поляризации может служить призма Николя (рис.10). Она вырезается из кристалла исландского шпата, и в поперечном сечении имеет форму ромба. По плоскости СВ кристалл разрезан и склеян канадским бальзамом.

Обыкновенный луч 0 полностью отражается от него и поглощается зачерненной поверхностью АВ. Из призмы Николя выходит только необыкновенный луч *е*, который поляризован в плоскости, параллельный главной плоскости призмы. *Устройства, служащие для анализа степени поляризации света, называются анализаторами.*

Ими могут служить те же призмы Николя. Всякий анализатор можно условно изобразить в виде решетки, прутья которой параллельны направлению колебаний светового вектора $\boldsymbol{E_a}$ в проходящем сквозь нее свете (рис.11). Если на такую решетку-анализатор падает естественный луч, то интенсивность I_a проходящего света не изменится при повороте анализатора. Это происходит вследствие того, что в естественном свете ни одно из направлений плоскости колебаний не является преобладающим. Если на анализатор падает линейно поляризованный свет, полученный с помощью поляризатора и имеющий интенсивность I_p, то интенсивность света, прошедшего через анализатор будет зависеть от угла α между главными плоскостями поляризации анализатора (a – a) и поляризатора (P-P) (рис. 12). $\boldsymbol{E_p}$ - амплитуда вектора колебаний света, прошедшего через поляризатор. На входе в анализатор луч разложится на два *луча,* поляризованные в главной плоскости анализатора (a – a) и перпендикулярной к ней плоскости

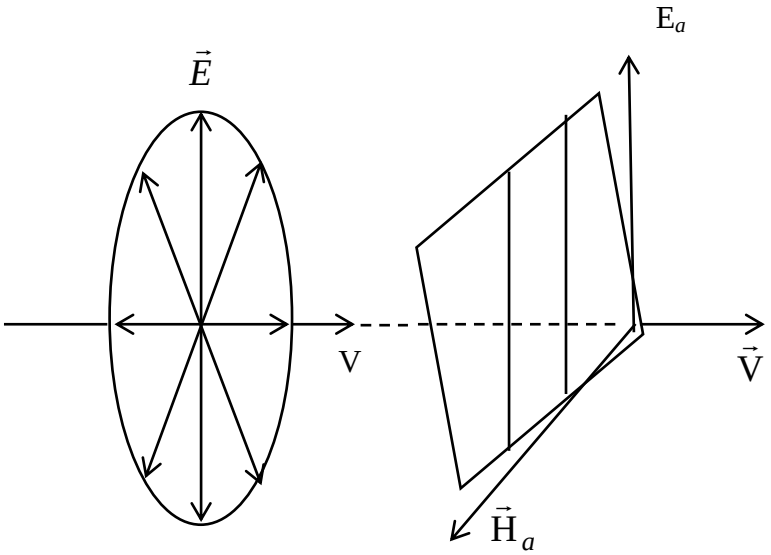


Рис.11

$$E_1=E_P\sin\alpha;\ E_2=E_P\cos\alpha$$

Первый луч поглотится в анализаторе, второй пройдет через него

$$E_a = E_P \cos\alpha.$$

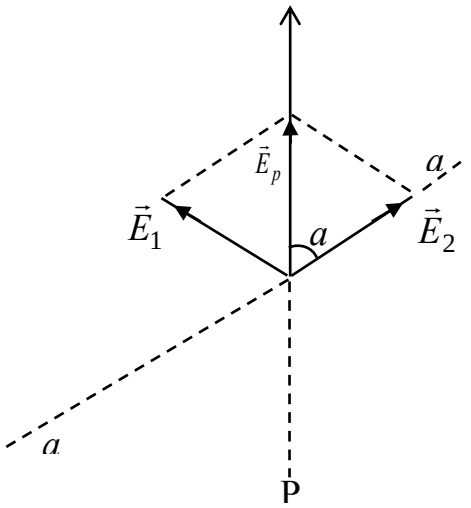


Рис. 12.

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через анализатор и поляризатор, меняется в зависимости от угла α по закону Малюса

$$I_a = I_p \cos^2\alpha \qquad (18)$$

Если $I_{ест}$ - интенсивность естественного света, то из поляризатора выходит плоскополяризованный свет, интенсивность которого

$$I_P = \frac{1}{2} I_{ест}.$$

Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора

$$I_a = \frac{1}{2} I_{ест} \cos^2 \alpha.$$

Откуда $I_{\max} = \frac{1}{2} I_{ест}$ (поляризаторы параллельны) и $I_{min} = 0$ (поляризаторы скрещены).

Формулы приведены без учета потерь интенсивности. Некоторые растворы (например, раствор сахара) и твердые вещества (в частности кварц) обладают свойством вращать плоскость поляризации поляризованного луча. Угол φ поворота плоскости поляризации зависит от пути луча в этих веществах ℓ и концентрации раствора C.

Для твердых веществ

$$\varphi = [\alpha]\,\ell\,. \qquad (19)$$

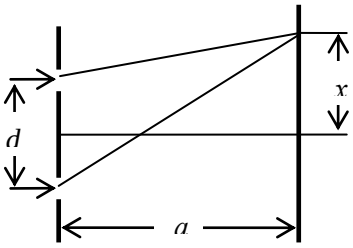
Для растворов

$$\varphi = [\alpha]\,\ell\,C, \qquad (20)$$

где $[\alpha]$ – удельный угол вращения (постоянная вращения), показывающий, на какой угол повернется плоскость поляризации, если $\ell = 1$ и $C = 1$(для растворов). Размерность $[\alpha]$ зависит от того, в каких единицах взяты ℓ и C в СИ. $[\alpha]$ – рад/м (для твердых веществ) для растворов $[\alpha]$ = рад/м· (кг/м^3).

Примеры решения задач

Задача1. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы x = 0,05 см. Данные установки a = 5 м, d = 0,5 см.



Дано:
x = 0,05см
a = 5 м
d = 0,5см
λ = ?

Решение. Разность хода лучей, прошедших в точку наблюдения равна

$$\delta = r_2 - r_1; \qquad (1)$$

$$r_2^2 = a^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2; \qquad (2)$$

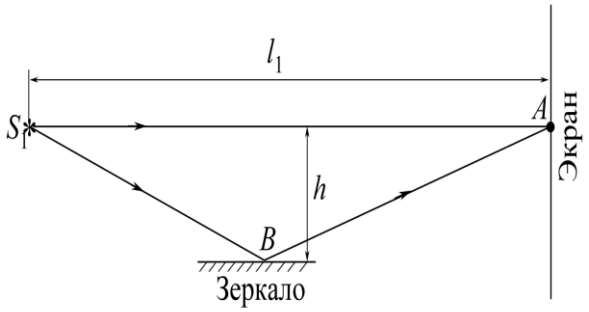
$$r_1^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + a^2. \qquad (3)$$

Легко видеть, что

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{a} = m\lambda. \qquad (4)$$

По условию задачи m = 1, поэтому

$$\lambda = \frac{xd}{a} = 500\,\text{нм}.$$



Задача 2. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны λ = 0,5 мкм приходит два луча: непосредственно от источника перпендикулярный экрану луч S_1A и луч S_1BA, отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A. Расстояние l_1 равно 1 м, расстояние h равно 2 мм. Определите, что будет наблюдаться в точке A экрана – усиление или ослабление освещенности.

Дано:	**Решение:** Источник S_1 и мнимый S_2 являются когерентными, поэтому на экране возникает интерференционная картина. Максимум или минимум возникает в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода δ интерферирующих лучей
$\lambda = 0{,}5$мкм	
$l_1 = 1$м	
$h = 2$мм	
min, max - ?	

$$m = \frac{2\delta}{\lambda}. \qquad (1)$$

Если m – целое четное число, то имеем максимум, если m – целое нечетное, то минимум.

Оптическая разность хода δ_1 будет складываться из геометрической разности $l_2 - l_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды, оптически более плотной. Таким образом

$$\delta_1 = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2}. \qquad (2)$$

По теореме Пифагора $l_2^2 = l_1^2 + (2h)^2$, $(l_2 - l_1) = \dfrac{(2h)^2}{2l_1}$, так как

$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1)$, где $l_2 + l_1 \approx 2l_1$, $2h$ Ⓟ l.

Подставив это выражение $l_2 - l_1$ в формулу (2), найдем:

$$\delta_1 = \frac{(2h)^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}. \qquad (3)$$

Зная δ_1, можно по формуле (1) найти m_1:

$$m_1 = \frac{\dfrac{(2h)^2}{2l_1} + \dfrac{\lambda}{2}}{\lambda/2} = \frac{(2h)^2}{l_1\lambda} + 1.$$

Тогда окончательно получим

$$m_1 = 4\frac{h^2}{l_1\lambda} + 1.$$

Выразим h, l_1 и λ в микрометрах и вычислим:

$$m_1 = 4\frac{\left(2\cdot 10^3\right)^2}{1\cdot 10^6\cdot 0{,}5} + 1 = 32 + 1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке A наблюдается максимальное ослабление освещенности.

Задача 3. На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной l = 2 см с плоскопараллельными стеклянными основаниями и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на m = 20 полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения производятся со светом линии D натрия (λ = 5890 Å). Принимая показатель преломления воздуха n = 1,000276, вычислите показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

Дано:
l = 2 см
m = 20
λ = 5890 Å
n_1 = 1,000276
n_{Cl} - ?

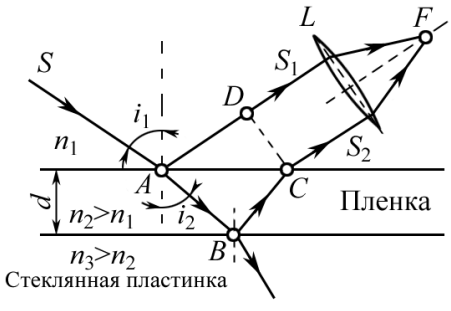
Решение. Легко догадаться, что разность хода лучей при усилении света по определению равна $m\lambda$. В данном случае оптическая разность хода равна $(n_{\mathrm{Cl}} - n)l$. Из полученного равенства находим

$$(n_{\mathrm{Cl}} - n)l = m\lambda \qquad (1)$$

$$n_{Cl} = n + \frac{m\lambda}{l}. \qquad (2)$$

Вычисляя, получаем n_{Cl} = 1,000865.

Задача 4. На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, коэффициент преломления вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света (λ = 0,6 мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определите толщину пленки.



Дано:
λ = 0,6 мкм
n_2 = 1,4
d - ?

Решение. В точках A и B падающий луч SA отражается и частично преломляется. Отраженные лучи AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу L, пересекаются в ее фокусе F и интерферируют между собой.

Показатель преломления воздуха (n_1 = 1,0029) меньше показателя преломления вещества пленки (n_2 = 1,4), который в свою очередь меньше показателя преломления стекла (n_3 = 1,5). В обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной.

Следовательно, никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого луча не происходит.

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Как видно из рисунка, оптическая разность хода

$$\delta = (AB + BC)\, n_2 - ADn_1.$$

Следовательно,

$$(AB + BC)\, n_2 - ADn_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Если угол падения i_1 будет уменьшаться, то в пределе при $i_1 = 0$ будем иметь

$$\delta = 2dn_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда искомая толщина пленки

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, получим возможные значения толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0{,}6}{4 \cdot 1{,}4} = 0{,}11 \text{ мкм};$$

$$d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0{,}33 \text{ мкм}.$$

Задача 5. Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, обычно темный, а в проходящем светлый?

Решение. В проходящем свете на границе стекло-воздух вектор напряженности электрического поля ***E*** не испытывает изменения фазы, а при отражении на границе воздух – стекло меняет фазу на 180 °, что соответствует приобретению разности хода, равной половине длины волны.

Задача 6. На дифракционную решетку от разрядной трубки, наполненной гелием, нормально падает пучок света. На какую линию λ_1 (в нанометрах) в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия длиной волны λ_2 = 706 нм в спектре второго порядка?

Дано:	**Решение:** Условия главных максимумов освещенности для дифракционной решетки выглядит следующим образом:
$k_1 = 3$	
$k_2 = 2$	
$\lambda_2 = 706$ нм	$d \sin\varphi_1 = k_1\lambda_1; \quad d \sin\varphi_2 = k_2\lambda_2$
$\lambda_1 - ?$	

Спектральные линии накладываются одна на другую, поэтому углы дифракции будут равными, то есть $\varphi_1 = \varphi_2$. Разделив первое уравнение на второе:

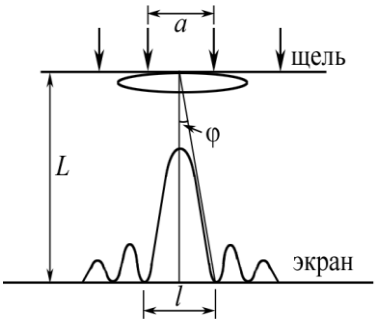
$$1 = \frac{k_1 \lambda_1}{k_2 \lambda_2},$$

откуда $$\lambda_1 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_1}$$

Подставим численные значения:

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 706 \cdot 10^{-9}}{3} = 471 \text{ нм}.$$

Задача7. На щель (рис.) шириной a = 0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ=0,6мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L = 1 м.



Дано:	**Решение:** Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева максимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между двумя минимумами интенсивности (рис.).
a = 0,1 мм	
λ = 0,6мкм	
L = 1 м	
l = ?	

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием

$$a \sin \vartheta = \pm k\lambda, \qquad (1)$$

где k – порядок минимума. В нашем случае k = 1.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по рисунку: l = 2L tg φ. При малых углах $tg\varphi \approx \sin\varphi$, тогда

$$l = 2L \sin \varphi. \qquad (2)$$

Выразим sin φ из уравнения (1) и подставим в равенство (2):

$$l = \frac{2Lk\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{10^{-4}} \text{ м} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 1{,}2 \text{ см}.$$

Задача 8. Дифракционная решетка содержит n = 200 штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет (λ = 0,6 мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

Дано:	**Решение:** Период дифракционной решетки найдем из формулы
$\lambda = 0{,}6 \cdot 10^{-6}$ м	
n = 200 мм$^{-1}$	$n = 1 / d.$
k_{max} – ?	Отсюда $d = 1/n = 1/2 \cdot 10^5 = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ м.

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{max}, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90 °. Постоянная решетки d, длина волны λ и угол отклонения φ, соответствующий k-му дифракционному максимуму, связаны соотношением:

$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

где $\varphi = 90$ ° – максимальный угол отклонения лучей решеткой. Отсюда

$$k_{max} = d \sin\varphi / \lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-5} / 0{,}6 \cdot 10^{-6} = 8{,}3.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 9, так как при этом значении $\sin \varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $k_{max} = 8$.

Задача 9. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20$ °. Определите длину волны света λ.

Дано:	**Решение:** Период дифракционной решетки найдем из формулы
$n = 100$ мм$^{-}$	$n = 1 / d.$
$\Delta\varphi = 20$ °	Отсюда
$k = 3$	$d = 1/n = 1/10^5 = 10^{-5}$ м.
λ – ?	

Максимумы интенсивности света одного порядка при дифракции на дифракционной решетке находятся на одинаковом расстоянии от центрального максимума и, следовательно, наблюдаются под одинаковыми углами дифракции φ:

$$d \sin \varphi = k\lambda. \qquad (1)$$

По условию задачи, чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 20$ °. Следовательно, угол дифракции $\varphi = \Delta\varphi / 2 = 10$ °. Тогда из уравнения (1) длина волны света равна

$$\lambda = \frac{d \sin\varphi}{k} = \frac{10^{-5} \cdot \sin 10}{3} = 0{,}0578 \cdot 10^{-5} \approx 580\,\text{нм}.$$

Задача 10. Свет с $\lambda = 589$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2{,}5$ мкм, содержащую $N = 10000$ штрихов. Найдите угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

Дано:	**Решение:** Угловая дисперсия дифракционной решетки, состоящей из одной щели:
$\lambda = 589$ нм	$D = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos\theta}.$
$d = 2{,}5$ мкм	
$N = 10000$	
$k = 2$	

$\Delta\theta - ?$ | Тогда угловая ширина дифракционного максимума, создаваемого решеткой, содержащей N штрихов:

$$\Delta\theta = \frac{k\lambda}{Nd\cos\theta} = \left[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right] = \frac{k\lambda}{Nd\sqrt{1-\sin^2\theta}}.$$

Свет падает на дифракционную решетку нормально. Условие главных максимумов:

$$d\sin\theta = k\lambda.$$

Отсюда $\sin\theta = \frac{k\lambda}{d}$. Тогда угловая ширина дифракционного максимума второго порядка будет равна:

$$\Delta\theta = \frac{k\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{k\lambda}{Nd\sqrt{1-\left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2}}.$$

Подставим численные значения:

$$\Delta\theta = \frac{2\cdot 589\cdot 10^{-9}}{10^4\cdot 2{,}5\cdot 10^{-6}\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot 589\cdot 10^{-9}}{2{,}5\cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 11''$$

Задача 11. С помощью дифракционной решетки с периодом d = 20 мкм требуется разрешить дублет натрия (λ_1 = 589 нм и λ_2 = 589,6 нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине решетки это возможно?

Дано:	**Решение:** Разрешающая способность дифракционной решетки: $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$, где N – число штрихов решетки.
d = 20 мкм λ_1 = 589 нм λ_2 = 589,6 нм k = 2	
l – ?	Число штрихов решетки можно найти, зная длину решетки l и период решетки d: $N = \frac{l}{d}$.

Тогда

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = k\frac{l}{d}.$$

Отсюда наименьшая длина решетки, при которой возможно разрешить дублет натрия:

$$l = \frac{d\lambda}{k\delta\lambda},$$

где $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}6\cdot 10^{-9}$ м, а $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 589{,}3\cdot 10^{-9}$ м.

Тогда

$$l = \frac{d\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{20\cdot 10^{-6}\cdot 589{,}3\cdot 10^{-9}}{2\cdot 0{,}6\cdot 10^{-9}}\,м = 982\cdot 10^{-5}\,м \approx 10\,\text{мм}.$$

Задача 12. Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 нм равны n_0 = 1,544 и n_e = 1,553 для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на 90 °, если используется свет указанной длины волны?

Дано:	**Решение.** Сдвиг фаз вычисляется по формуле
λ = 600 нм n_0 = 1,544 n_e = 1,553 $\Delta\varphi$ = 90°	$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)d,$$ где d – расстояние, пройденное светом. Полагая $\Delta\varphi = \pi / 2$ и произведя вычисления, находим:
d - ?	d = 16,7 мм.

Вопросы и задания.

1. Электромагнитная природа света.
2. Когерентность и монохроматичность световых волн.
3. Оптическая длина пути и оптическая разность хода лучей.
4. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Интерференция в тонких пленках.
5. Интерференция многих волн. Дифракционная решетка.
6. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса — Френеля.
7. Метод зон Френеля.
8. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера.
9. Дифракция от щели.
10. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах.
11. Естественный и поляризованный свет.
12. Закон Малюса.
13. Поляризация света при отражении и преломлении.
14. Двойное лучепреломление.
15. Нормальная и аномальная дисперсии.
16. Электронная теория дисперсии света. Рассеяние света.
17. Поглощение света.

Задачи для самостоятельного решения

1. На мыльную пленку (n=1,3), находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине d пленки отраженный свет с длиной волны λ=0,55 мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции.

2. Пучок монохроматических (λ=0,6 мкм) световых волн падает под углом ε_1=30° на находящуюся в воздухе мыльную пленку (n=1,3). При какой

наименьшей толщине d пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? Максимально усилены?

3. На тонкий стеклянный клин (n =1,55) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол α между поверхностями клина равен 2'. Определить длину световой волны λ, если расстояние b между соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм.

4. Двугранный угол стеклянного клина равен 0,2'. На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны λ=0,55 мкм. Определить ширину b интерференционной полосы.

5. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет (λ=600 нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

6. В опыте Юнга расстояние d между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии l от щелей следует расположить экран, чтобы ширина b интерференционной полосы оказалась равной 2 мм? (λ=640 нм).

7. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ, испускаемой источником
монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

8. Расстояние d между двумя когерентными источниками света (λ=500 нм) равно 0,1 мм. Расстояние b между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние l от источников до экрана.

9 .Найти все длины волн видимого света (от 0,76 до 0,38 мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода Δ интерферирующих волн, равной 1,8 мкм.

10. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет (λ=380 нм). Определить угол θ между поверхностями клина, если расстояние b между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 6 мм.

11. Какое наименьшее число N_{min} штрихов должна содержать дифракционная решетка, чтобы в спектре 2-го порядка можно было видеть раздельно две желтые линии натрия с длинами волн λ_1=589 нм и λ_2=589,6? Какова длина l такой решетки, если постоянная решетки d=5 мкм?

12. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол $\varphi_1 = 14^o$. На какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка?

13. Дифракционная решетка содержит n=200 штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет (λ =0,6 мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

14. На дифракционную решетку, содержащую n=400 штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет (λ =0,6 мкм). Найти общее число дифракционных максимумов, которое дает эта решетка. Определить угол φ дифракции, соответствующий последнему максимуму.

15. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница (λ = 0,4 мкм) спектра третьего порядка.

16. На дифракционную решетку, содержащую n=600 штрихов на миллиметр, падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину b спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана L=1,2 м. Границы видимого спектра $\lambda_{кр}$ = 780нм, $\lambda_{ф}$= 400 нм.

17. Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете(λ=0,6мкм), максимум пятого порядка отклонен на угол φ=18°?

18. На щель шириной a=0,1 мм падает нормально монохроматический свет (λ = 0,5 мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол φ дифракции равен: 1) 17′; 2) 43′.

19. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол φ отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен 1˚. Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

20. На щель шириной 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ=0,6 мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

21. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. В результате дифракции в некоторых точках оси отверстия, находящихся на расстояниях b_i от его центра, наблюдаются максимумы интенсивности. 1) Получить вид функции $b=f(r, \lambda, n)$, где r-радиус отверстия; λ - длина волны; n-число зон Френеля, открываемых для данной точки оси отверстия. 2) Сделать то же самое для точек оси отверстия, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.

22. Посредине между точечным источником монохроматического света λ=550 нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определите радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным.

23. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом ε_1 =54°. Определить угол преломления ε_2 пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

24. На какой угловой высоте φ над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?

25. Угол Брюстера $\varepsilon_Б$ при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57°. Определить скорость света в этом кристалле.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 16.

Тема занятия. **Квантовая природа излучения**

Цель занятия. Изучить вопросы квантовой теории излучения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Законы теплового излучения. Закон Стефана-Больцмана. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Давление света. Эффект Комптона. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы квантовой теории применяется при решении научных задач.

Теоретическая часть.

Законы теплового излучения

Тепловым излучением называют электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойств этого тела. Тепловое

излучение – единственное излучение, способное находиться в термодинамическом равновесии с веществом (равновесное).

Количественной характеристикой теплового излучения служит энергетическая светимость (излучательность) R_T – мощность излучения абсолютно черного тела с единицы площади поверхности тела во всем интервале частот (длин волн) от 0 до ∞. Спектральной характеристикой теплового излучения тела является спектральная плотность энергетической светимости (спектральная плотность излучательности) $r_{\nu,T}$ – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени с единицы площади поверхности тела в интервале частот от ν до ν + dν.

Распределение энергии излучения абсолютно черного тела в зависимости от частоты и температуры приведено на рис.1.

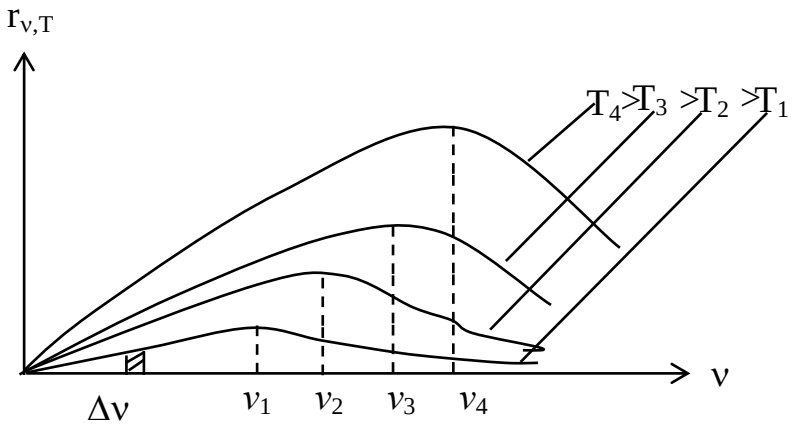


Рис. 1.

Величина излучательности может быть рассчитана по закону Стефана-Больцмана

$$R_T = \sigma T^4, \qquad (1)$$

где σ - постоянная Стефана-Больцмана, T – абсолютная температура. Если взять на графике единичный интервал частоты $\Delta\nu$, то площадь заштрихованного участка определит величину спектральной плотности излучательности.

Максимальное значение спектральной плотности излучательности определяется законом Вина

$$(r_{\nu,T})_{max} = cT^5, \qquad (2)$$

где c – вторая постоянная Вина.

При увеличении температуры абсолютно черного тела частота, на которую приходится максимум спектральной плотности излучательности, смещается в сторону более высоких частот. Длина волны λ_{max}, соответствующая максимальному значению излучательности, обратно пропорциональна его температуре (закон смещения Вина)

$$\lambda_{\max} = \frac{в}{T},$$

где $в$ – первая постоянная Вина.

Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоны

Дать теоретическое обоснование спектральным закономерностям теплового излучения абсолютно черного тела удалось М. Планку. Для этого ему пришлось отказаться от установившегося положения классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, то есть, может принимать любые сколь угодные близкие значения. *М.Планк выдвинул квантовую гипотезу, заключающуюся в том, что энергия атомов-осцилляторов может изменяться дискретно, порциями, пропорциональными некоторой элементарной порции – кванту энергии*

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \qquad (3)$$

где h – постоянная Планка.

Используя статистические методы и представления о квантовом характере теплового излучения, М.Планк вывел формулу

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \qquad (4)$$

которая согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения абсолютно черного тела во всем интервале частот от 0 до ∞ и при различных температурах. Кроме того, формула М.Планка содержит в себе законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в этих законах.

Эйнштейн, создавая квантовую теорию света, предположил, что не только излучение света, но и его распространение происходит в виде потока световых квантов-фотонов. Массу фотона можно найти из соотношения $mc^2 = h\nu$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}, \qquad (5)$$

а импульс фотона

$$p = m \cdot c = \frac{h}{c \cdot \lambda} \cdot c = \frac{h}{\lambda}. \qquad (6)$$

Внешний фотоэффект

Явление вырывания электронов с поверхности металлов световым потоком называется внешним фотоэффектом. При взаимодействии квантов света (фотонов) с металлами выполняется соотношение, которое называется уравнением Эйнштейна

$$h\nu = A_{вых} + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}, \qquad (7)$$

где $A_{вых}$ – работа выхода электронов из металла, $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вылетающих из металла.

Если энергия падающего фотона много меньше энергии покоя электрона E_0 = 0,51 МэВ, то кинетическую энергию можно рассчитать по классической формуле, то есть

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (8)$$

Если же энергия кванта света, падающего на металл сравнима или больше E_0, то для вычисления кинетической энергии $E_{кин}$ фотоэлектронов следует воспользоваться релятивистской формулой

$$K = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right), \qquad (9)$$

где m_0c^2 – энергия покоя электрона.

Если скорость вырванных из металла электронов $\upsilon = 0$, то энергия фотона $\varepsilon = h\nu_к = h\frac{c}{\lambda_к}$, а $\nu_к$ или $\lambda_к$ соответствует красной границе фотоэффекта для данного металла, то есть $\lambda_к$ – *та максимальная длина волны фотона, при которой начинается для данного металла фотоэффект.*

Давление света

Современные квантовые представления о свойствах света существенно отличаются от ньютоновской корпускулярной теории света. С квантовой точки зрения давление света на поверхность какого-либо тела обусловлено тем, что при соударении с этой поверхностью каждый фотон передает ей свой импульс.

Отражение света от поверхности тела следует рассматривать как сложный процесс «переизлучения» фотонов – падающий фотон поглощается поверхностью, а затем вновь излучается ею с противоположным направлением импульсов. При этом давление света на отражающую поверхность должно быть таким же, каким оно было в том случае, если бы фотоны «зеркально отражались» от поверхности подобно абсолютно упругим шарикам.

Величина светового давления определяется формулой

$$P = \omega(1+\rho), \qquad (10)$$

где $\omega = E_э/c$ – объемная плотность энергии излучения ($E_э$ – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, С – скорость света в вакууме); ρ - коэффициент отражения света от поверхности тела.

Эффект Комптона

Квантовые свойства света проявляются в эффекте Комптона, который *заключается в упругом рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и γ-излучения) на свободных или слабосвязанных электронах вещества, сопровождающемся увеличением длины волны* $\Delta\lambda$. Величина $\Delta\lambda$ определяется формулой Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (11)$$

где λ - длина волны падающего излучения, λ' - длина волны рассеянного излучения, θ - угол рассеяния рентгеновского кванта, λ_c – комптоновская длина волны, $\lambda_c = \dfrac{2h}{m_0 c}$, λ_c = 2,426 пм (m_0 – масса покоя электрона).

Объяснение эффекта Комптона может быть дано на основе квантовых представлений о природе света, как результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. В процессе столкновения фотон передает электрону часть своих энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения.

Примеры решения задач

Задача 1. Длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела λ_{max} = 0,6 мкм. Определите: 1) энергетическую светимость этого тела R_T; 2) спектральную плотность энергетической светимости $r_{\nu,T}$ или $r_{\lambda,T}$, рассчитанную на 1 нм вблизи λ_{max} в спектре излучения абсолютно черного тела.

Дано:
λ_{max} = 0,6 мкм
$в$ = 2,9·10^{-3} К·м
c = 1,23·10^{-5} $\dfrac{Вт}{м^3 \cdot К^5}$
σ = 5,67·10^{-8} $\dfrac{Вт}{м^3 \cdot К^5}$
$\Delta\lambda$ = 1 нм = 10^{-9} м

R_1 =? $r_{\lambda,T}$ = ?

Решение. Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обратно пропорциональна температуре

$$\lambda_{\max} = \frac{в}{T},$$

отсюда

$$T = \frac{в}{\lambda_{\max}},$$

а энергетическая светимость R_T определяется законом Стефана-Больцмана, то есть, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры

$$R_T = \sigma T^4 = \sigma\left(\frac{в}{\lambda_{max}}\right)^4.$$

$$R_T = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}}\right) = 33 МВТ/м^2.$$

Максимум спектральной плотности энергетической светимости, согласно закону Вина, пропорционален пятой степени температуры

$$r_{\lambda,T} = cT^5 = c\left(\frac{в}{\lambda_{max}}\right)^5,$$

Но мы получили $r_{\lambda,T}$ в интервале длин волн $\Delta\lambda'$ = 1 м (единичный интервал в СИ). Так как 1 нм в 10^9 раз меньше, то и $(r_{\lambda,T})_{max}$, приходящаяся на $\Delta\lambda$ = 1 нм вблизи λ_{max}, во столько же раз будет меньше. Таким образом, искомое значение определится выражением:

$$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = \frac{c\left(\frac{в}{\lambda_{\max}}\right)^5}{10^9}$$

$$\left(r_{\lambda,T}\right)_{max} = 1{,}23\cdot 10^{-5}\,\frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-7}}\cdot 10^{-9} = 3{,}8\cdot 10^{4}\,Вт/м^2\cdot нм = 38 кВт/м^2\cdot нм$$

Итак, спектральная плотность энергетической светимости, приходящаяся на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм вблизи λ_{max} равна 38 кВт/м^2·нм.

Задача 2. Раскаленная металлическая поверхность $S = 10$ см^2 излучает в 1 мин энергию $E = 4\cdot 10^4$ Дж. Температура поверхности $T = 2500$ К. Найдите отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Дано:
$S = 10$ см^2 $= 10\cdot 10^{-4}$ м^2
$t = 1$ мин $= 60$ с
$E = 4\cdot 10^{-4}$ Дж
$T = 2500$ К
$\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \frac{Вт}{м^2\cdot К^4}$

n = ?

Решение. Искомая величина $n = \frac{R_э}{R_{ч.т.}}$, где $R_э$ и $R_{ч.т.}$ – энергетическая светимость металлической поверхности и черного тела, соответственно, по закону Стефана-Больцмана

$R_{ч.т.} = \sigma T^4 = 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 2500^4 = 2{,}21\cdot 10^6$ Вт/м^2.

Энергия, излучаемая раскаленной металлической поверхностью, равна $E = R_э\cdot t\cdot S$. Отсюда

$$R_э = \frac{E}{t\cdot S}$$

$$R_э = \frac{4\cdot 10^4}{60\cdot 10^{-3}} = 0{,}67\cdot 10^6\ \ \frac{Вт}{м^2}.$$

Найдем отношение $\frac{R_э}{R_{ч.т.}} = n;\quad n = \frac{0{,}67\cdot 10^6}{2{,}21\cdot 10^6} = 0{,}3.$

Задача 3. Во сколько раз увеличится мощность излучения черного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано:
$\lambda_к = 0{,}76$ мкм
$\lambda_ф = 0{,}38$ мкм

$N_к/N_ф$ - ?

Решение. Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обратно пропорциональна температуре

$$\lambda_{max} = \frac{в}{T},\ \text{отсюда}\ T_к = \frac{в}{\lambda_к},\quad T_ф = \frac{в}{\lambda_ф}.$$

Мощность излучения равна $N = RS$.

В соответствии с законом Стефана – Больцмана $R = \sigma T^4$, для температур $T_к$ и $T_ф$ имеем: $N_к = \sigma T_к^4 S$ и $N_ф = \sigma T_ф^4 S$. Тогда их отношение равно

$$\frac{N_ф}{N_к} = \left(\frac{T_ф}{T_к}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_к}{\lambda_ф}\right) = \left(\frac{0.76}{0{,}38}\right)^4 = 16.$$

Задача 4. На платиновую пластинку падает ультрафиолетовое излучение. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающее напряжение $U_1 = 3{,}7$ В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающее напряжение нужно увеличить до $U_2 = 6$ В. Определите работу выхода (в электронвольтах) из второго металла.

Дано:
$U_1 = 3{,}7$ В
$U_2 = 6$ В
$A_1 = 6{,}3$ эВ
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
A_2 =?

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта, имеем

$$h\nu = A_1 + \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить задерживающее напряжение U_1.

$$eU_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

где e и m – заряд (по модулю) и масса электрона.
Таким образом,

$$h\nu = A_1 + eU_1. \quad (1)$$

Аналогичное выражение запишем для пластинки из второго металла

$$h\nu = A_2 + eU_2. \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2)

$$A_1 + eU_1 = A_2 + eU_2$$

$$A_2 = A_1 + eU_1 - eU_2 = A_1 - e(U_2 - U_1)$$

$$A_2 = 10{,}1 \cdot 10^{-19} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}(6\text{-}3{,}7) = 6{,}42 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$A_2 = \frac{6{,}42 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4 эВ.$$

Задача 5. Облучение литиевого фотокатода производится фиолетовыми лучами, длина волны которых равна 0,4 мкм. Определите скорость фотоэлектронов, если длина волны красной границы фотоэффекта для лития равна 0,52 мкм.

Дано:
$\lambda = 0{,}4$ мкм
$\lambda_к = 0{,}52$ мкм
v - ?

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта энергия фотона $E_ф = hc/\lambda$ расходуется на работу выхода электрона $A = hc/\lambda_к$ и сообщение электрону кинетической энергии K.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + K. \quad K = \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_к}.$$

Тогда $$v = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_к}\right)\frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{\lambda_к - \lambda}{\lambda_к \lambda}\right)}.$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}\left(5{,}2 - 4\right) \cdot 10^{-7}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 5{,}2 \cdot 4 \cdot 10^{-14}}} \cong 5 \cdot 10^{5}\, м/с.$$

Задача 6. Определите максимальную скорость электрона, вырванного с поверхности металла γ-квантом с энергией 1,53 МэВ.

Дано:
E_γ = 1,53 МэВ
v_{max} - ?

Решение. По формуле Эйнштейна для фотоэффекта $E_\gamma = A + K$. Работа выхода электрона из металла составляет величину порядка единиц электронвольт, что много меньше мегаэлектронвольт, следовательно меньшей величиной можно пренебречь. Тогда $E_\gamma = K$. Так как энергия гамма-кванта превышает энергию покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 0{,}511$ МэВ, то кинетическая энергия фотоэлектрона должна рассчитываться для релятивистского случая.

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - E_0.$$

Тогда

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{K + E_0}\right)^2} = 3 \cdot 10^{8}\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}511}{1{,}53 + 0{,}511}\right)^2} = 2{,}8 \cdot 10^{8}\ \text{м/с}.$$

Задача 7. Определите силу светового давления солнечных лучей перпендикулярных поверхности на площадь 100 м^2 , если коэффициент отражения лучей равен 0,2 и солнечная постоянная $1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2. (Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца).

Дано:
S = 100 м^2
ρ = 0,2
$E = 1{,}4 \cdot 10^3 \frac{Вт}{м^2}$
$c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$
F=?

Решение. Сила светового давления F на поверхность равна произведению светового давления P на площадь S поверхности $F = P \cdot S$.
Световое давление может быть найдено по формуле $P = \frac{E(1+\rho)}{c}$. Тогда искомая сила $F = \frac{E \cdot S(1+\rho)}{c}$,

$$F = \frac{1{,}4 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 1{,}2}{3 \cdot 10^8} = 5{,}6 \cdot 10^{-4}\, Н.$$

Задача 8. На зачерненную поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм, производя давление $5 \cdot 10^{-6}$ Па. Определите

концентрацию фотонов вблизи поверхности и число фотонов, падающих на площадь 1 м^2 в 1 с.

Дано:	**Решение:** Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ вычисляется по формуле $P=\omega(1+\rho)$, где ω – объемная плотность энергии, которая связана с полной энергией (освещенностью) E_0 падающих фотонов на единицу площади поверхности в единицу времени соотношением $\omega=E_0/c$.
$\lambda = 0{,}65$ мкм	
$P = 5\cdot10^{-6}$ Па	
$S = 1$ м^2	
$t = 1$с	
n_0, n - ?	

С учетом того, что для зачерненной поверхности коэффициент отражения ρ равен нулю получим формулу для давления света в виде $P = \omega = E_0 / c$. Объемная плотность энергии равна произведению концентрации фотонов n_0 на энергию одного фотона E_1, $\omega = n_0E_1 = n_0hc/\lambda$, откуда

$$n_0 = \frac{\omega\lambda}{hc} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{5\cdot10^{-6}\cdot6{,}5\cdot10^{-7}}{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}} = 1{,}6\cdot10^{13}\text{ м}^{-3}.$$

Число фотонов, падающих на единицу площади поверхности в единицу времени, равно отношению энергетической освещенности E_0 к энергии одного фотона E_1:

$$n = \frac{E_0}{E_1} = \frac{P\lambda}{h} = n_0c = 1{,}6\cdot10^{13}\cdot3\cdot10^{8} = 4{,}8\cdot10^{21}\text{ м}^{-2}\text{с}^{-1}.$$

Задача 9. В явлении Комптона энергия падающего фотона E распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найдите энергию и импульс рассеянного фотона.

Дано:	**Решение.** Энергия падающего фотона определяется формулой $E = h\frac{c}{\lambda}$, где λ - длина волны падающего фотона. Энергия рассеянного фотона $E' = h\frac{c}{\lambda'}$, где λ' - длина волны рассеянного на электроне фотона. По условию задачи $E = E' = 2$, тогда
$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг	
$\theta = \pi/2$	
$E/E' = 2$	
$h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с	
$c = 3\cdot10^{8}$ м/с	
E', P' = ?	

$$\lambda'/\lambda = 2, \quad \lambda = \lambda'/2. \qquad (1)$$

По формуле Комптона изменение длины волны фотона при рассеянии выражается формулой

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta), \qquad (2)$$

учитывая (1), имеем

$$\lambda' - \frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

или

$$\frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

откуда

$$\lambda' = \frac{2h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$$

Подставляя выражение (3) в формулу для энергии рассеянного фотона, получаем окончательно

$$E' \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hcm_e c}{2h(1 - \cos\theta)} = \frac{m_e c^2}{2(1 - \cos\theta)}.$$

$$E' = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{2 \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = 4{,}1 \cdot 10^{-14}\ Дж = 0{,}26\ МэВ.$$

Для определения импульса рассеянного фотона воспользуемся следующими соображениями.

Энергия фотона $E' = m_ф \cdot c^2$, а импульс фотона $p' = m_ф \cdot c$, тогда

$$p' = \frac{E'}{c}.$$

Импульс рассеянного фотона равен

$$p' = \frac{4{,}1 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 1{,}18 \cdot 10^{-22}\ кг \cdot м/с.$$

Задача 10. Фотон с импульсом $5{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с был рассеян на свободном электроне на угол 30º в результате эффекта Комптона. Определите импульс рассеянного фотона.

Дано:	**Решение.** Импульс фотонов $p_1 = h/\lambda_1$; $p_2 = h/\lambda_2$, откуда $\lambda_1 = h/p_1$, $\lambda_2 = h/p_2$. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при эффекте Комптона равно
$p_1 = 5{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с	
$\theta = 30º$	
p_2 - ?	

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \text{ или } \frac{h}{p_2} - \frac{h}{p_1} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Отсюда

$$p_2 = \frac{p_1 m_0 c}{p_1(1 - \cos\theta) + m_0 c} = \frac{5{,}44 \cdot 10^{-22} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}{5{,}44 \cdot 10^{-22} \cdot 0{,}134 + 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 4{,}3 \cdot 10^{-22}\ кг \cdot м/с.$$

Задача 11. Фотон с энергией 0,51 МэВ в результате комптоновского рассеяния отклонился на угол 180º. Определите долю энергии в процентах, оставшуюся у рассеянного фотона.

Дано:	**Решение.** По закону сохранения энергии $E_1 = E_2 + E_э$, где E_1 – энергия налетающего фотона, E_2 – энергия рассеянного фотона, $E_э$ – энергия электрона. Энергия налетающего электрона равна $E_1 = hc/\lambda_1$, отсюда $\lambda_1 = hc/E_1$, где λ_1 – длина волны налетающего фотона. Аналогично
$E_1 = 0{,}51$ МэВ	
$\theta = 180º$	
E_2/E_1 - ?	

$\lambda_2 = hc/E_2$. Изменение длины волны при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C(1 - cos\theta),$$

где $\lambda_C = h/m_0c = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$м – комптоновская длина волны электрона.

Тогда $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot 2$, отсюда $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + 2\lambda_C$ и, следовательно, энергия рассеянного фотона равна

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_1 + 2\lambda_C} = \frac{hc}{hc/E_1 + 2\lambda_C}.$$

А ее доля

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{hc}{hc + E_1 \cdot 2\lambda_C} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 + 0{,}51 \cdot 10^{-13} \cdot 2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}} = 0{,}33 = 33\%$$

Вопросы и задания.

1. Квантовая природа излучения. Законы теплового излучения.
2. Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоны.
3. Фотоэффект.
4. Масса, энергия и импульс фотона.
5. Давление света. Эффект Комптона.

Задачи для самостоятельного решения

1. Красная граница фотоэффекта для цинка λ_0=310 нм. Определить максимальную кинетическую энергию T_{max} фотоэлектронов в электрон–вольтах, если на цинк падает свет с длиной волны λ =200 нм.

2. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности $(R_{\lambda,T})_{max}$ сместился с λ_1 =2,4 мкм на λ_2= 0,8 мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость $R_э$ тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?

3. При увеличении термодинамической температуры T черного тела в два раза длина волны λ_m, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda$=400 нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2.

4. Эталон единицы силы света – кандела – представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадь S = 0,5305 мм^2 имеет температуру t затвердевания платины, равную 1063 ˚С. Определить мощность P излучателя.

5. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(R_{\lambda,T})_{max}$ черного тела равна $4{,}16 \cdot 10^{11}$ Вт/м^2. На какую длину волны λ_m она проходится?

6. Температура черного тела равна 2 кК. Определить: 1) Спектральную плотность энергетической светимости $(r_{\lambda,T})$ для длины волны λ =600 нм; 2) Энергетическую светимость R_λ в интервале длин волн от λ_1 =590 нм до λ_2 = 610

нм. Принять, что средняя спектральная плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для волны $\lambda = 600$ нм.

7. Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ- фотонами с энергией ε =1,82 МэВ.

8. Максимальная скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из метала при облучении его γ-фотонами, равна 291 Мм /с. Определить энергию ε фотонов.

9. Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ- фотонами с энергией ε =1,53 МэВ.

10. Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ- излучения с длиной волны λ=0,3нм.

11. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10^7 м/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

12. На цинковую пластину падает монохроматический свет с длиной волны λ = 220 нм. Определить максимальную скорость υ_{max} фотоэлектронов.

13. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U_1 = 3,7 В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу A выхода электронов с поверхности этой пластинки.

14. На поверхность лития падает монохроматический свет (λ =310 нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Определить работу выхода A.

15. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта λ_0 =307 нм и максимальная кинетическая энергия T_{max} фотоэлектрона равна 1 эВ?

16. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны λ =300 нм.

17. Определить энергию E, массу m и импульс p фотона, которому соответствует длина волны λ = 380 нм (фиолетовая граница видимого спектра).

18. Определить длину волны λ, массу m и импульс p фотона с энергией ε =1 МэВ. Сравнить массу этого фотона с массой покоящегося электрона.

19. Определить длину волны λ фотона, импульс которого равен импульсу электрона, обладающего скоростью V =10^7 м/с.

20. Определить длину волны λ фотона, масса которого равна массе покоя: 1) электрона; 2) протона.

21. Давление p монохроматического света (λ =600 нм) на черную поверхность расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время t=1 с на поверхность площадью S=1 см^2

22. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника d = 40 м. Зная солнечную постоянную C=1,4 кДж/м^2·с и принимая, что

поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления F солнечного света на спутник.

23. Определить поверхностную плотность I потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление p при перпендикулярном падении лучей равно 10 мкПа.

24. Фотон с энергией ε =0,4 МэВ рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном электроне. Определить энергию ε' рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи.

25. Определить импульс p электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$.

26. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол θ =180°? Энергия ε фотона до рассеяния равна 0,255 МэВ.

27. Фотон с энергией ε = 0,25 МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия ε' рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния θ.

28. Угол рассеяния θ фотона равен 90°. Угол отдачи φ электрона равен 30°. Определить энергию ε падающего фотона.

29. Фотон (λ = 1 пм) рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

30. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине волны $\lambda_к$ электрона. Определить энергию ε и импульс p фотона.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Раздел 6. Элементы квантовой механики и ядерной физики
Практическое занятие 17.

Тема занятия. **Теория атома водорода по Бору. Элементы квантовой механики.**

Цель занятия. Изучить вопросы квантовой теории излучения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Модели атома Томсона и Резерфорда. Линейчатый спектр атома водорода. Постулаты Бора. Спектр атома водорода по Бору. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм. Соотношение неопределенностей Гейзенберга. Уравнение Шредингера. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы квантовомеханической теории применяется при решении научных задач.

Теоретическая часть.

На основании опытов по рассеянию α–частиц тонкими металлическими фольгами Э. Резерфордом была предложена ядерная модель атома. Согласно этой модели, в ядре атома сосредоточен весь положительный заряд и практически вся масса атома. Линейные размеры ядра равны 10^{-15}-10^{-14} м, вокруг ядра в области с линейными размерами 10^{-10} м движутся электроны, масса которых составляет лишь весьма малую долю массы ядра. Ядерная модель атома Резерфорда внешне очень напоминает солнечную систему: в центре системы находится «Солнце» – ядро, и вокруг него по орбитам движутся «планеты» – электроны. Поэтому данную модель часто называют планетарной.

Опыты показывают, что атому свойственна исключительная устойчивость, однако устойчивость атома не может быть согласована с классическим истолкованием ядерной модели. Электрон, движущийся ускоренно по орбите вокруг ядра, должен излучать электромагнитные волны. Это излучение (и связанная с ним потеря электроном его энергии) должно происходить непрерывно. Поэтому, на основании классических представлений, электрон не может удержаться на орбите, а должен по спирали приближаться к ядру. Отсюда следует, что атом за очень короткое время прекратит свое существование, кроме того, излучение атома должно иметь непрерывный спектр. Однако обширный экспериментальный материал указывает на стабильность и на дискретный (линейчатый) спектр атомов, что находится в прямом противоречии с классическим истолкованием модели атома Резерфорда.

Первая попытка построения неклассической теории атома, которая в настоящее время представляет только исторический интерес, была предпринята Н. Бором. В основе этой теории лежала идея связать в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер поглощения и излучения света. В теории Бора сохранялось описание поведения электронов в атоме при помощи законов классической физики. Однако классические законы ему пришлось дополнить некоторыми ограничениями, которые были сформулированы в виде постулатов,

физический смысл которых не мог быть объяснен в рамках применяемой теории.

Теория Бора применима к атому водорода и так называемым водородоподобным атомам, состоящих из ядра с зарядом Ze и одного электрона, вращающегося вокруг ядра на внешней орбите.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний (орбит)) заключается в следующем: *существуют некоторые состояния электрона в атоме, находясь в которых он не излучает энергии*.

Второй постулат Бора (правило квантования орбит) утверждает, что *в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию*

$$L_n = m\mathrm{v}_n r_n = n\hbar\,, \qquad (1)$$

где n – ряд натуральных чисел (n = 1, 2, 3, …), m – масса электрона, v – его скорость, r – радиус его орбиты.

Третий постулат Бора (правило частот) устанавливает, что *при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один квант энергии в виде фотона*

$$E_{n1} - E_{n2} = h\nu \qquad (2)$$

где E_{n1} и E_{n2} – энергии электрона в двух стационарных состояниях, ν – частота фотона. При $E_{n2} < E_{n1}$ происходит излучение фотона, при $E_{n2} > E_{n1}$ – его поглощение.

Боровская модель атома водорода

Чтобы получить согласие с результатами наблюдений, Бор предположил, что электрон в атоме водорода движется только по тем круговым орбитам, для которых его момент импульса

$$M = m\upsilon r = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (3)$$

где n — квантовые числа, m – масса электрона, υ - его скорость, r - радиус орбиты. (Рассуждения, которые привели Бора к этому предположению мы опустим.)

С помощью этого *правила квантования* можно найти радиусы круговых стационарных орбит водорода и водородоподобных систем: ионов атомов с одним оставшимся электроном (H, He^+, Li^{++}, …) и соответствующие им энергии. Пусть заряд ядра водородоподобной системы равен e. Масса ядра значительно больше массы электрона, поэтому ядро при движении электрона можно считать неподвижным. Следуя Бору, будем предполагать, что электрон движется вокруг ядра по окружности радиуса r.

Согласно 2-му закону Ньютона

$$m\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}, \qquad (4)$$

Решая совместно (3) и (4), можно найти радиусы электронных орбит и их скорости на этих орбитах:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2}n^2; \upsilon_n = \frac{Ze^2}{\hbar}\frac{1}{n}. \qquad (5)$$

Таким образом, радиус первой (ближайшей к ядру) орбиты электрона в атоме водорода (его обозначают обычно r_0 и называют *первым Боровским радиусом*)

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5{,}29\,\text{нм} \qquad (6)$$

Внутренняя энергия атома складывается из кинетической энергии электрона (ядро полагают неподвижным) и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром. С учетом (5) получим:

$$E_n = \frac{m\upsilon_n^2}{2} + \left(-\frac{Ze^2}{r_n}\right) = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}. \qquad (7)$$

При переходе атома водорода (Z =1) из состояния n_1 в состояние n_2 излучается фотон

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right). \qquad (8)$$

Тогда частота испущенного света равна

$$\omega = \frac{me^4}{2\hbar^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right), \qquad (9)$$

Что соответствует обобщенной формуле Бальмера, если постоянная Ридберга определяется $R = \dfrac{me^4}{2\hbar^3}$. (10)

Расчет по этой формуле хорошо согласуется с экспериментально определенным значением.

Схема энергетических уровней (разрешенных значений энергии) атома водорода приведена на рис.1. Там же показаны возможные переходы, сопровождающиеся излучением фотонов определенной частоты.

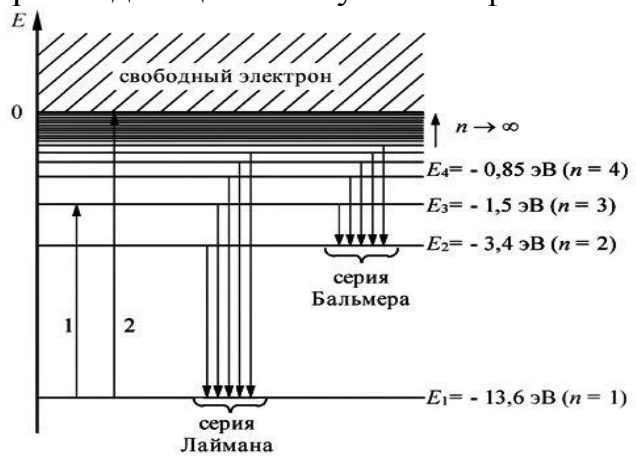


Рис.1.

Спектральные закономерности

Изучение спектров излучения сыграло большую роль в познании строения атомов. В первую очередь это касается спектров, обусловленных излучением невзаимодействующих друг с другом атомов. Эти спектры состоят из отдельных узких спектральных линий, и их называют линейчатыми.

Наличие многих спектральных линий указывает на сложность внутреннего строения атома. Изучение атомных спектров послужило ключом к познанию внутренней структуры атомов. Прежде всего, было замечено, что спектральные линии расположены не беспорядочно, а образуют серии линий. Изучая линейчатый спектр *атомарного водорода*, Бальмер (1885) установил некоторую закономерность. Для части линий соответствующие им частоты можно в современных обозначениях представить так:

$$\omega = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3, 4, 5, \ldots, \tag{11}$$

где ω — циклическая частота, соответствующая каждой спектральной линии ($\omega = 2\pi c/\lambda$), R — постоянная, называемая *постоянной Ридберга*:

$$R = 2{,}07 \cdot 10^{16}\ \text{с}^{-1}. \tag{12}$$

Формулу (11) называют формулой *Бальмера*, а соответствующую серию спектральных линий — серией Бальмера (рис.2). Основные линии этой серии находятся в видимой части спектра.

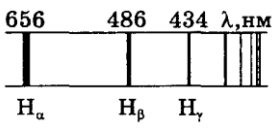


Рис.2.

Дальнейшие исследования спектра атомарного водорода показали, что имеется еще несколько серий.

В ультрафиолетовой части спектра — *серия Лаймана*:

$$\omega = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{13}$$

а в инфракрасной части спектра – *серия Пашена*:

$$\omega = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots, \tag{14}$$

и так далее.

Все эти серии можно представить в виде *обобщенной формулы Бальмера*:

$$\boxed{\omega = R\left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}\right),} \tag{15}$$

где n_0 - постоянное для каждой серии число: $n_0 = 1$ для серии *Лаймана*, $n_0 = 2$ для серии *Бальмера* и т. д. При заданном n_0 число n принимает все целочисленные значения, начиная с $n_0 + 1$.

Максимальной длине волны серии *Лаймана* (13) отвечает $n = 2$, это $\lambda_{\text{макс}} = 2\pi c/\omega_{\text{мин}} = 8\pi c/3R = 121{,}6$ нм. Соответствующую спектральную линию называют резонансной линией водорода.

С ростом n частота линий в каждой серии стремится к предельному значению R/n_0^2, которое называют границей серии (рис.2). За границей серии спектр не обрывается, а становится сплошным. Это присуще не только всем сериям водорода, но и атомам других элементов.

Таким образом, интересующая нас серия Бальмера заключена в спектральном интервале от 365 нм до 656 нм, т. е. действительно, все основные линии ее расположены в видимой области спектра.

Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм материи

Существование волновых и корпускулярных свойств у физических объектов было сначала обнаружено в световых явлениях. Оптические явления (например, интерференция и дифракция), которые объяснялись на основе волновой (электромагнитной) теории, были в основном явления распространения света и взаимодействия световой волны с макроскопическими телами: линзами, призмами, дифракционными решетками и т. д. Однако в некоторых явлениях (например, Комптон-эффект и фотоэффект), течение которых определяется взаимодействием света с микроскопическими объектами – отдельными заряженными частицами, атомами или молекулами, обнаруживается расхождение между предсказаниями волновой теории и результатами наблюдений и измерений.

В 1924 г., Луи де Бройль высказал гипотезу, что корпускулярно-волновой дуализм (двойственность, т.е. одновременное наличие корпускулярных и волновых свойств), должен быть распространен не только на световые частицы – фотоны, но и на частицы вещества: электроны, протоны, атомы и т.д.

Соотношение длины волны фотона $\lambda_ф$ с его импульсом $P_ф$

$$\lambda_ф = \frac{h}{P_ф} \tag{16}$$

де Бройль обобщил, предположив, что оно имеет универсальный характер для любых волновых процессов, связанных с частицами, обладающими импульсом P:

$$\lambda = \frac{h}{P}\ , \tag{17}$$

где λ – длина волны де Бройля для частицы, h – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия *K*. Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя E_0) и для релятивистского случая (когда $K \geq E_0$).

В нерелятивистском случае $P = \sqrt{2m_0K}$, тогда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}\ , \tag{18}$$

где m_0 – масса покоя частицы.

В релятивистском случае $P = \frac{1}{c}\sqrt{K\left(2E_0 + K\right)}$, тогда

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(2E_0 + K)}} \quad , \tag{19}$$

где $E_0 = m_0 c^2$ - энергия покоя частицы, c – скорость света.

Опыты показали, что двойственность присуща не только полевой форме материи (например, электромагнитная волна – фотон), но и вещественной форме, т.е. волновыми (наряду с корпускулярными) свойствами обладают также частицы вещества – электроны, протоны, нейтроны, атомы, молекулы и т.д. Поэтому в настоящее время говорят о корпускулярно-волновом дуализме материи.

Уравнение Шредингера

При описании явлений, в которых участвуют микроскопические частицы вещества – электроны, протоны, нейтроны и др., на основе представлений и законов классической физики (механики, электродинамики, волновой оптики и т.д.) встретились затруднения, оказавшиеся непреодолимыми. Для объяснения новых явлений (фотоэффект, дифракция электронов и других частиц и т.д.) потребовались новые представления, которые не укладывались в рамки классической физики, явно противоречили ее основным положениям.

Со временем отдельные разрозненные предположения и гипотезы, возникшие в различных областях атомной физики, были связаны между собой и привели к формированию единой физической теории, получившей название квантовой физики.

Важнейшими свойствами квантовых объектов являются следующие:

1) существование у частиц корпускулярных и волновых свойств, неотделимых друг от друга и несводимых друг к другу;
2) существование у физических систем дискретного спектра устойчивых состояний, что следует, например, из дискретного спектра излучения атомов.

Корпускулярные свойства заключаются в том, что каждая частица имеет некоторую сосредоточенную в малом объеме энергию и импульс; при взаимодействии частиц между собой соблюдаются законы сохранения и импульса.

Волновые свойства заключаются в том, что траектория частицы определяется некоторой связанной с ней волной, распространение которой подчинено принципу Гюйгенса и для которой соблюдается принцип суперпозиции. Однако это утверждение требует расшифровки, какова природа этих волн, какая физическая величина характеризует эти волны и изменяется в соответствии с волновым уравнением, каким образом поведение частицы связано со значениями этой величины в различных точках пространства, т.е. как взаимодействуют между собой «волна» и «частица». Заметим, что для одной из частиц – фотона – частота колебаний связана с энергией, а длина волны – с импульсом частицы.

Однако для электронов, протонов, нейтронов и других частиц волны, которые были бы ответственны за дифракцию и в тоже время доступны непосредственному изучению при помощи соответствующей физической аппаратуры, не обнаружены. Отсюда следует, что волны де Бройля (волны

частиц) имеют специфическую квантовую природу, не имеющую аналогии в классической физике.

Для описания волновых свойств квантовых частиц введем некоторую функцию $\Psi(x,y,z,t)$, называемую волновой функцией (или пси-функцией). Волны де Бройля получили своеобразное статистическое (вероятностное) истолкование. Физический смысл имеет не сама функция Ψ, а квадрат ее модуля. Величина $|\Psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности

$$\frac{d\omega}{dV} = |\Psi|^2. \qquad (20)$$

Из (20) следует: вероятность $d\omega$ того, что частица находится в элементе объема dV, пропорциональна $|\Psi|^2$ и элементу объема dV.

Из вышесказанного следует, что в квантовой физике возникает важнейшая проблема – отыскание такого уравнения движения квантовых частиц, которое явилось бы тем же, чем является уравнение движения Ньютона для классической механики. При этом искомое уравнение должно быть уравнением относительно функции $\Psi(x,y,z,t)$. Это уравнение было найдено в 1926 г. Э. Шредингером и имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \qquad (21)$$

Здесь $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Дирака, $U(x,y,z,t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, где частица движется, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, i – мнимая единица.

Из-за присутствия в уравнении (21) мнимой единицы волновые функции Ψ, удовлетворяющие этому уравнению, всегда комплексны. Поэтому сами эти функции не наблюдаемы. Измеримы только квантовомеханические вероятности, всегда содержащие функции Ψ в произведениях совместно с комплексно сопряженными им величинами.

Уравнение (21) справедливо для любой частицы, движущейся со скоростью $v << c$. В релятивистской области движения при $v \sim c$ уравнение Шредингера заменяется более сложным уравнением Дирака.

Уравнение (21) называют нестационарным (временным) уравнением Шредингера, ибо оно содержит производную от функции Ψ по времени. Однако для большого числа физических явлений, происходящих в микромире, например, для описания поведения электронов в атоме, в ряде случаев важно находить стационарные решения уравнения Шредингера, не содержащие времени. В этом уравнении должна быть исключена зависимость Ψ от времени.

Стационарное уравнение Шредингера обычно записывают в форме

$$\Delta\psi + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0. \qquad (22)$$

Здесь E – полная энергия частицы, $\Psi = \Psi(x,y,z)$.

Уравнение (22) является важнейшим соотношением нерелятивистской квантовой физики, играющим основную роль в атомной физике.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно. Всегда есть некоторая ошибка измерений. Ошибка называется также неточностью или неопределенностью, причем последний термин используется преимущественно только в квантовой физике.

В классической физике не было принципиальных ограничений на точность измерений. Считалось, что при достаточно совершенной аппаратуре все величины, характеризующие физическую систему, могут быть измерены со сколь угодной точностью. Этот взгляд подтверждался всеми опытными фактами макроскопической физики. Но, как выяснилось, для микроскопических систем неограниченное повышение точности измерений имеет место не всегда. В ряде случаев существуют принципиальные ограничения на точность измерения физических величин. Эти ограничения не определяются совершенством измерительной техники. Каждое из них является фундаментальным свойством материи. Но проявление этих свойств существенны только в микроскопических системах. Принципиальные ограничения на точность измерения физических величин называются соотношениями неопределенностей. Впервые они были сформулированы в 1927 г. В. Гейзенбергом.

Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей.

Первое ограничивает точность одновременного измерения координат частицы и соответственных компонент ее импульса. Эти соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta P_x &\geq \hbar \\ \Delta y \Delta P_y &\geq \hbar \\ \Delta z \Delta P_z &\geq \hbar . \end{aligned} \qquad (23)$$

Второе соотношение устанавливает предел точности измерения энергии за данный промежуток времени. Оно имеет вид

$$\Delta t \Delta \mathrm{E} \geq \hbar , \qquad (24)$$

где Δt – длительность измерения энергии, а ΔE – ее неопределенность.

Соотношения (23) означают, что если, например, местоположение частицы по координатной оси x известно с точностью Δx, то в тот же момент времени x компоненту импульса частицы можно измерить только с точностью $\Delta P_x \approx \hbar/\Delta x$. Согласно (24) для измерения энергии с точностью до ΔE необходимо время, не меньшее чем $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$. Отличие $\hbar$ от нуля исключает обращение в нуль неопределенностей в импульсе и энергии при заданных Δx и Δt . Только переход к классической физике, при котором $\hbar \to 0$, снимает ограничения на точность измерений.

Соотношения неопределенностей являются следствием объективно существующей двойственности частиц микромира – наличия у них

корпускулярных и волновых свойств. Эти соотношения свидетельствуют об объективно существующих ограничениях в возможности описания поведения микрообъектов с помощью, например, классических понятий координат и импульсов. В частности, эти соотношения исключают движение квантовых частиц по траекториям, т.к. для существования траектории требуется, чтобы одновременно можно было точно задать x и v_x (т.е. P_x) . Но именно это и запрещается соотношением неопределенностей.

Примеры решения задач

Задача 1. Получить формулу для радиусов орбит электрона в атоме водорода и вычислить радиус первой орбиты (первый боровский радиус), а также скорость электрона на этой орбите.

Решение.

Из первого постулата Бора имеем

$$m\upsilon r = n\frac{h}{2\pi},$$

где m – масса электрона, v - его скорость, r – радиус орбиты, h – постянная Планка.

Для первой орбиты n=1, и поэтому $m\upsilon r = \frac{h}{2\pi}$. (1)

Сила кулоновсого притяжения электрон-ядро является центростремительной силой, поэтому из второго закона Ньютона имеем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r} \quad \text{или} \quad m\upsilon^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}, \qquad (2)$$

где e – заряд электрона.

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e} = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-16}} = 5{,}29\cdot 10^{-11}\ \text{м}$$

Из формулы (1) получим, что

$$\upsilon = \frac{h}{2\pi m r} = \frac{1{,}05\cdot 10^{-34}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 5{,}29\cdot 10^{-11}} = 2{,}18\cdot 10^{6}\ \text{м/с}$$

Задача 2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) U_1 = 51 В; 2) U_2 = 510 кВ.

Дано:	**Решение.** Работа сил электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона $A=\Delta K=K_2 - K_1$. Здесь $A = eU$, а $\Delta K = K_2 = K$, так как K_1= 0, то есть $K = eU$.
U_1 = 51 В	
U_2 = 510 кВ	
λ_1, λ_2 - ?	

Теперь необходимо определить характер движения электрона, нерелятивистский или релятивистский

$$E_0 = m_0c^2 = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot(3\cdot 10^{8})^2 = 8{,}19\cdot 10^{-14}\ \text{Дж} = 0{,}51\ \text{МэВ}.$$

В первом случае $K_1 = eU_1 = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot51 = 8{,}16\cdot10^{-18}$ Дж = 51 эВ. Во втором случае $K_2=eU_2=1{,}6\cdot10^{19}\cdot5{,}1\cdot10^{5}=8{,}16\cdot10^{14}$Дж$\approx51\cdot10^{4}$эВ=0,51МэВ.

Следовательно: в первом случае K_1 « E_0 – нерелятивистское движение электрона и его длину волны де Бройля λ_1 необходимо рассчитывать по формуле (3), во втором случае $K_2 \approx E_0$ – релятивистское движение и λ_2 рассчитывается по формуле (4).

Принимая во внимание то, что $K_1 = 0{,}51\cdot10^{-4}$ МэВ = $10^{-4}\ E_0$, а $K_2 = E_0$, рассчитаем λ_1 и λ_2.

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0K_1}} = \frac{h}{\sqrt{2\frac{E_0}{c^2}10^{-4}E_0}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\frac{hc}{E_0} =$$

$$= \frac{10^2 6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{\sqrt{2}\cdot8{,}19\cdot10^{-14}} = 1{,}71\cdot10^{-10}\,м = 171\,нм.$$

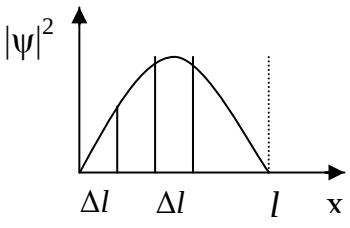
$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{K_2(2E_0+K_2)}} = \frac{hc}{\sqrt{E_0(2E_0+E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{3}E_0} =$$

$$= \frac{6{,}62\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{\sqrt{3}\cdot8{,}19\cdot10^{-14}} = 1{,}40\cdot10^{-12}\,м = 1{,}40\,нм.$$

Задача 3. Волновая функция $\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{\pi}{l}x)$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике
шириной l. Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале $\Delta l = 0{,}01l$ в двух случаях: 1) вблизи стенки ($0 \le x \le \Delta l$); в средней части ящика ($\frac{l}{2}-\frac{\Delta l}{2} \le x \le \frac{l}{2}+\frac{\Delta l}{2}\cdot$)

Дано:
$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$
$\Delta l = 0{,}01l$
ω - ?

Решение. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале dx, согласно соотношению (5) запишется в виде: $d\omega = |\Psi|^2\,dV$. В первом случае вероятность найдется интегрированием в пределах от 0 до $0{,}01l$: $\omega_1 = \frac{2}{l}\int_0^{0{,}01l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx\cdot$



Знак модуля опущен, т.к. Ψ- функция, в данном случае, не является комплексной. Так как x изменяется в интервале ($0 \le x \le 0{,}01l$) и,
следовательно, $\pi x / l << 1$, справедливо приближенное равенство $\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) \approx \left(\frac{\pi}{l}x\right)^2$. С учетом этого искомая вероятность примет вид:

$$\omega_1 = \frac{2}{l}\int_0^{0{,}01l}\left(\frac{\pi}{l}x\right)^2dx = \frac{2\pi^2}{l^3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0{,}01l} = \frac{2\pi^2}{3}10^{-6} = 6{,}6\cdot10^{-6}.$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале (Δl = 0,01l) практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$\omega_2 = \left|\Psi\left(\frac{l}{2}\right)\right|^2 \Delta x = \frac{2}{l} sin^2\left(\frac{\pi}{l}\frac{l}{2}\right)\Delta l = \frac{2}{l}\cdot 1^2 \cdot 0{,}01l = 0{,}02.$$

Из сравнения видно, что $\omega_1 << \omega_2$ и, следовательно, частица с наибольшей вероятностью находится в средней части ящика.

Задача 4. Кинетическая энергия K электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

Дано: K = 10 эВ; l - ?

Решение. Для решения воспользуемся соотношением неопределенностей (8) $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar$. Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а, следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде:

$$\frac{l}{2} \cdot \Delta P_x \geq \hbar,$$

откуда

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta P_x}.$$

Физическая разумная неопределенность импульса ΔP_x , во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса P_x , то есть $\Delta P_x \leq P_x$. Импульс P_x связан с кинетической энергией K соотношением $P_x = \sqrt{2m_0K}$.

Заменим ΔP_x на P_x (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m_0K}} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-18}}} = 1{,}24\cdot 10^{-10}\,м = 124\,нм.$$

Задача 5. Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы длина волны де Бройля протона $\lambda_Б$ равнялась его комптоновской длине волны λ_C?

Дано: $\lambda_Б = \lambda_C$; K - ?

Решение. Длина волны де Бройля и комптоновская длина волны определяются по формулам: $\lambda_Б = h/p$, $\lambda_C = h/m_0c$.

Импульс движущегося протона

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так как $\lambda_Д = \lambda_C$, то $p = m_0 c = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

Откуда $\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, следовательно $\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}$. Кинетическая энергия протона $K = E - E_0$, где $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ - полная энергия протона, $E_0 = m_0 c^2$ – его энергия покоя.

Окончательно

$$K = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = E_0\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

$$= 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}41 = 6{,}23 \cdot 10^{-11}\,\text{Дж} = 389\,\text{МэВ}.$$

Задача 6. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислите минимальную неопределенность длины волны λ = 0,12 мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

Дано:	**Решение.** Энергия излучаемого фотона $E=hc/\lambda$.
Δt = 12 нс	Продифференцируем E по λ:
λ = 0,12 мкм	$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2}$, или $\Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$.
$\Delta\lambda$ - ?	

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ выразим ΔE. $\Delta E = \frac{h}{2\pi\Delta t}$, здесь ΔE и Δt - неопределенность энергии и времени.

Приравняем выражения для ΔE:

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{h}{2\pi\Delta t},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t} = \frac{1{,}2^2 \cdot 10^{-14}}{6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-8}} = 6{,}4 \cdot 10^{-16}\,\text{м}.$$

Задача 7. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы l = 1 нм. Определите наименьшую разность энергетических уровней электрона.

Дано:	**Решение.** Энергия электрона E_n, находящегося в потенциальной яме шириной l, на n-м энергетическом уровне определяется по формуле
l = 1 нм	
ΔE_{min} - ?	

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2 .$$

Разность $\Delta E_{n,n+1}$ энергий электрона на соседних n и $(n+1)$-м уровнях равна

$$\Delta E_{n,n+1} = \frac{h^2}{8ml^2}(2n+1).$$

Очевидно, что ΔE будет минимальна при $n = 1$.

$$\Delta E_{min} = \frac{3 \cdot 6{,}63^2 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-18}} = 1{,}8 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж} = 1{,}1\,\text{эВ}.$$

Вопросы и задания.

1. Модели атома Томсона и Резерфорда.
2. Линейчатый спектр атома водорода.
3. Постулаты Бора.
4. Спектр атома водорода по Бору.
5. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм.
6. Соотношение неопределенностей Гейзенберга
7. Уравнение Шредингера.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить радиусы r_2 и r_3 второй и третьей орбит в атоме водорода.
2. Определить скорость υ электрона на второй орбите атома водорода.
3. Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.
4. Определить потенциальную $П$, кинетическую T и полную E энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.
5. Определить длину волны λ, соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.
6. Найти наибольшую λ_{max} и наименьшую λ_{min} длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).
7. Вычислить энергию ε фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.
8. Определить наименьшую ε_{min} и наибольшую ε_{max} энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).
9. Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только три спектральные линии. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.
10. Фотон с энергией ε = 16,5 эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость υ будет иметь электрон вдали от ядра атома?

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с.

: табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

Практическое занятие 18.

Тема занятия. **Основы физики атомного ядра**

Цель занятия. Изучить основы физики атомного ядра.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Состав и структура ядер. Ядерные силы. Дефект массы. Энергия связи ядра. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Ядерные реакции. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

Актуальность темы. Элементы основы физики атомного ядра применяется при решении научных задач.

Теоретическая часть.

Состав и структура ядер

С момента установления ядра в атоме Э. Резерфордом вопрос о составе ядра являлся одним из центральных в ядерной физике. В 1932 г. была открыта новая частица – нейтрон. Это позволило Д.Д. Иваненко и В. Гейзенбергу сформулировать гипотезу о протонно - нейтронном строении ядра. Эта гипотеза, очень быстро получившая всеобщее признание, явилась основой для создания теории атомного ядра.

Согласно современным представлениям, свойства атомных ядер определяются их составом и структурой:

1) числом протонов Z (определяющим заряд ядра) и нейтронов N в ядре;
2) свойствами этих частиц; характером взаимодействия между ними;
3) относительным расположением и движением протонов и нейтронов внутри ядра.

Протоны и нейтроны как составные части ядер объединены общим названием – нуклоны; $Z + N = A$ - есть число нуклонов в ядре (или A – массовое число ядра).

Ядра принято обозначать химическим символом элемента, снабженным числами, указывающими содержание ядра, по схеме:

1) ${}^{A}_{Z}X_{N}$ - в данном разделе; 2) ${}^{A}_{Z}X$ - в последующих разделах; 3) ${}^{A}X$ - в специальной (научной) литературе. Например, ядро натрия, содержащее 11 протонов и 12 нейтронов, записывается так: ${}^{23}_{11}Na_{12}$.

Известно и изучено около 1300 ядер, из которых 267 являются стабильными. Большинство стабильных ядер имеют четные значения Z и N. Из них 159 являются четно-четными, т.е. имеют одновременно четные и Z, и N; 54 ядра являются четно (Z) – нечетными (N); 50 – нечетно-четными и лишь 5 стабильных ядер являются нечетно-нечетными:

$$ {}^{2}_{1}H_{1};{}^{6}_{3}Li_{3};{}^{10}_{5}B_{5};{}^{14}_{7}N_{7};{}^{50}_{23}V_{27} $$

(впрочем, ванадий имеет очень большой период полураспада – около 10^{15} лет). Эти сведения показывают, что при комплектовании внутренней структуры стабильных ядер четность чисел протонов и нейтронов имеет важное значение.

Ядра, имеющие:

1) одинаковые Z, но разные N, называются *изотопами*;
2) одинаковые N, но разные Z, называются *изотонами*;
3) разные Z и N, но одинаковые $A = Z + N$, называются *изобарами*,

эти же ядра, у которых число протонов одного равно числу нейтронов другого $Z_1=N_2$; $N_1=Z_2$; $A_1=A_2$ называются *зеркальными*. К ним относятся, например, ${}^{3}_{1}H_{2}u{}^{3}_{2}He_{1};{}^{11}_{5}B_{6}u{}^{11}_{6}C_{5}$ и др.

Кроме того, могут существовать ядра, имеющие одинаковый состав (Z и N), но *отличающиеся* некоторыми свойствами, в частности *периодами полураспада*. Такие ядра называются *изомерами*.

Ядра, у которых числа протонов или нейтронов равны 2, 8, 20, 28, 50, 82 (а для нейтронов еще и 126), отличаются большой распространенностью в Земной коре и резко выделяются по основным свойствам среди соседних ядер. Эти ядра получили название *магических*. Ядра, у которых магическими являются оба числа Z и N, называются дважды магическими; к ним относятся, например, ${}^{4}_{2}He_{2};{}^{16}_{8}O_{8};{}^{208}_{82}Pb_{126}$.

Ядерные силы. Дефект массы. Энергия связи ядра

Опыт показывает, что ядра, содержащие положительно заряженные протоны и нейтроны, лишенные заряда, представляют собой устойчивые образования. Устойчивость атомных ядер указывает на то, что между ядерными частицами действуют силы притяжения, которые на расстояниях $\leq 10^{-15}$м значительно превосходят силы кулоновского отталкивания между протонами. Эти силы, обладающие рядом специфических свойств, получили название *ядерных сил*.

Ядерные силы в одинаковой мере действуют как между протонами, между нейтронами, так и между нейтроном и протоном, т.е. ядерные силы не зависят от сорта частиц (внутри ядра, из-за постоянных превращений, протоны и нейтроны неразличимы). Поэтому протоны и нейтроны, *находящиеся* в ядре, получили общее название – *нуклонов*.

Ядро окружено потенциальным барьером, обусловленным ядерными и кулоновскими силами. Выход из ядра нуклона или системы нуклонов (например, α - частиц) возможен либо путем *«туннельного эффекта»*, либо при получении энергии извне. В первом случае происходит спонтанный, радиоактивный распад ядра, во втором – вынужденная ядерная реакция. Для того чтобы разделить ядро на составляющие его нуклоны и развести эти нуклоны на такие расстояния, при которых прекращаются взаимодействия между ними, необходимо затратить энергию. Эта энергия называется *энергией связи ядра.*

Опыт показывает, что масса ядра меньше, чем сумма масс, составляющих его нуклонов. Уменьшение суммарной массы нуклонов при образовании из них ядра можно объяснить выделением энергии связи ядра. Из известного соотношения Эйнштейна вытекает, что

$$E = mc^2 . \qquad (1)$$

Если обозначить через ΔE величину энергии, выделяющейся при образовании ядра, то соответствующая ей масса

$$\Delta m = \Delta E/c^2 \qquad (2)$$

характеризует уменьшение суммарной массы при образовании ядра из составных частиц.

Если ядро с массой $M_я$ образовано из Z протонов с массой m_p и из $N = A – Z$ нейтронов с массой m_n , то величина

$$\Delta m = Zm_p + (A\text{-}Z)m_n – M_я \qquad (3)$$

и называется *дефектом массы* ядра.

Дефект массы Δm служит (в первом приближении) мерой *энергии связи*. Из (2) и (3) следует, что

$$\Delta E = \Delta mc^2 = (Zm_p + (A\text{-}Z)m_n – M_я)c^2. \qquad (4)$$

В ядерной физике «прочность» ядра принято характеризовать *удельной энергией связи*, приходящейся на один нуклон

$$E_1 = \frac{\Delta E}{A} = c^2 \frac{\Delta m}{A} \qquad (5)$$

Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

Радиоактивность ядер есть самопроизвольное (обусловленное только внутренними факторами, действующими в ядре) превращение неустойчивых ядер одного элемента в ядра другого элемента. Радиоактивность элементов, существующих в природе, называется *естественной*; к ним относятся элементы, расположенные в конце периодической системы Менделеева, а также калий. *Искусственные* радиоактивные ядра могут быть получены при бомбардировке ядер протонами, нейтронами, α – частицами и др.

Изучение радиоактивности показало, что распад ядра следует полагать совершенно случайным событием; невозможно предвидеть момент распада данного ядра. Одни ядра могут существовать в неустойчивом состоянии большое время, другие – малое. Из наблюдений за радиоактивностью большого числа одинаковых ядер определяют либо среднее «время жизни» ядра, либо вероятность распада.

Допустим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ имеется N_0 радиоактивных ядер, а в момент t их стало N. Число dN ядер, испытавших распад за время dt, очевидно, будет пропорционально N и dt.

Вероятностью λ распада (или постоянной распада) называется относительное уменьшение числа радиоактивных ядер в единицу времени, следовательно, $\lambda = - dN / Ndt$. Отсюда $dN = -\lambda Ndt$ и

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (6)$$

Выражение (6) называется законом радиоактивного распада. Этот закон является *статистическим* законом.

На практике для характеристики ядер относительно распада, для оценки продолжительности жизни данного радиоактивного изотопа, вводится понятие о периоде полураспада. *Время T, в течение которого число радиоактивных ядер уменьшается вдвое, называется периодом полураспада.* Из (6) следует, что

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Отсюда получаем

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \qquad (7)$$

Важной характеристикой радиоактивных элементов является их *активность - равной числу ядер, распадающихся в единицу времени*:

$$a = \frac{dN_p}{dt} = \frac{d}{dt}\left(N_0 - N\right) = \frac{d}{dt} N_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = a_0 e^{-\lambda t}, \qquad (8)$$

где $a_0 = \lambda N_0$ – начальная активность радиоактивного элемента. Единицей активности элемента в СИ является беккерель (1Бк = 1расп./с). На практике обычно измеряют активность во внесистемных единицах – кюри (1Ки = $3.7 \cdot 10^{10}$ расп./с).

Ядерные реакции

У термина «ядерная реакция» есть широкий и узкий смысл.

В широком смысле ядерная реакция – это микроскопический процесс, который начинается со столкновения, как правило, двух и гораздо реже – нескольких элементарных частиц (как простых, так и составных), при котором происходят различные взаимопревращения частиц и их рассеяние.

К ядерным реакциям в узком смысле этого слова относятся процессы столкновения элементарных частиц (простых или составных) только с атомными ядрами или только радиоактивный распад атомных ядер. Общее

между всеми этими процессами является то, что подавляющее большинство ядерных реакций происходит за счет сильных или ядерных взаимодействий.

При изучении ядерных реакций очень важную роль играют законы сохранения, которые позволяют получать информацию даже при неизвестном механизме реакции. Требуя равенства некоторых физических величин в начальном и конечном состояниях, эти законы накладывают ограничения на характеристики продуктов реакций, ставя их в зависимость от характеристик исходных частиц.

В нашем случае мы ограничимся законами сохранения электрических зарядов и энергии (масс). По первому закону – сумма зарядов исходных частиц равна сумме зарядов возникающих частиц. Второй закон может быть записан в следующем виде: если $M_я$ и m – масса исходного ядра и частицы (при радиоактивном распаде ядра m=0), а $\sum M_i$ - масса возникающих ядер и частиц, то

$$M_я + m = \sum M_i + \frac{\Delta E}{c^2}. \qquad (9)$$

Так как энергия ΔE обычно соответствует массе, выражаемой небольшими долями единицы атомного веса, то из (9) следует, что сумма массовых чисел исходных частиц (обладающих массой покоя) равна (примерно) сумме массовых чисел возникающих частиц.

На примере ядерной реакции (называемой – *мечтой алхимиков*), протекающей при бомбардировке быстрыми нейтронами ядер атома ртути возникают ядра атома золота и протоны:

$$^{1}_{0}n + ^{198}_{80}Hg \rightarrow ^{198}_{79}Au + ^{1}_{1}p + \Delta E \qquad (10)$$

видно, что сумма нижних индексов (зарядов всех ядер и частиц), а также сумма верхних индексов (их массовых чисел) – неизменна как до, так и после реакции.

Величина ΔE в подобной записи добавляется для суждения об энергетическом характере реакции и рассчитывается по формуле, аналогичной (4):

$$\Delta E = \left(\sum_i M_i^{исх} - \sum_j M_j^{возн} \right) c^2 , \qquad (11)$$

где в скобках обозначены суммы масс исходных частиц (до начала реакции) и возникающих частиц (после реакции). Величина ΔE может быть как отрицательной для *эндотермических* реакций (происходящих с поглощением энергии), так и положительной для *экзотермических* реакций (происходящих с выделением энергии).

Примеры решения задач

Задача 1. Написать формулы электронного строения атомов бора, углерода и натрия.

Дано: $_5B$, $_6C$, $_{11}Na$

Решение. Для записи формулы электронной конфигурации атомов необходимо знать полное число электронов в атоме, которое равно порядковому номеру элемента *Z*. Следовательно, электронное облако бора составляют 5 электронов, углерода – 6, а у натрия – 11. Запишем искомые формулы:

$$_5B - 1s^2\,2s^2\,p^1;$$
$$_6C - 1s^2\,2s^2\,p^2;$$
$$_{11}Na - 1s^2\,2s^2\,p^6\,3s^1.$$

Задача 2. Вычислите дефект массы и энергию связи ядра ^7_3Li.

Дано: $Z = 3$, $A = 7$; Δm, ΔE - ?

Решение. Согласно (25) дефект массы ядра равен $\Delta m = Zm_p + (A\text{-}Z)m_n - M_я$. В справочных таблицах обычно даются массы нейтральных атомов, но не ядер поэтому, эту формулу целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входила масса нейтрального атома M_A. Масса нейтрального атома равна сумме масс ядра и электронов, составляющих электронную оболочку атома:

$$M_A = M_я + Zm_e,$$

откуда

$$M_я = M_A - Zm_e.$$

Следовательно

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)\,m_n - M_A.$$

Замечая, что $m_p + m_e = M_H$, где M_H – масса атома водорода, окончательно найдем:

$$\Delta m = ZM_H + (A\text{-}Z)m_n - M_a = 3\cdot 1{,}00783 + (7\text{-}3)\cdot 1{,}00867 - 7{,}01601 =$$
$$= 0{,}04216 \text{ а.е.м.}$$

Энергию связи найдем из соотношения (26)

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2.$$

Коэффициент пропорциональности c^2 может быть выражен двояко:

$$c^2 = 9\cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2$$

или

$$c^2 = \Delta E/\Delta m = 9\cdot 10^{16} \text{ Дж/кг}.$$

В последней формуле, перейдя к внесистемным единицам, получим

$$c^2 = 931 \text{ МэВ/а.е.м.}$$

С учетом этого, искомая формула для энергии связи примет вид

$$\Delta E = 931\cdot\Delta m \text{ (МэВ)}.$$

Подставив, ранее найденное значение дефекта массы, получим

$$\Delta E = 931\cdot 0{,}04216 = 39{,}2 \text{ МэВ}.$$

Задача 3. Энергия покоя ядра $^{20}_{10}Ne$ равна $E_{0я}$ = 18617,88 МэВ. Определите удельную энергию связи нуклонов в ядре данного изотопа неона в МэВ.

Дано:	**Решение.** Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, называется удельной
$E_{0я}$ = 18617,88 МэВ	
E_{0p} = 938,3 МэВ	
E_{0n} = 939,6 МэВ	
$E_{уд}$ - ?	

$$E_{уд} = \frac{E_{св}}{A} = \frac{ZE_{0p} + (A - Z)E_{0n} - E_{0я}}{A}$$

$$E_{уд} = \frac{10 \cdot 938{,}3 + 10 \cdot 939{,}6 - 18617{,}88}{20} \approx 8 \frac{МэВ}{нукл}.$$

Задача 4. Период полураспада ^{235}U составляет T = 8,5·10^8 лет. Определите удельную активность этого изотопа урана.

Дано:	Активность радиоактивного изотопа определяется как $a=\lambda N$, где λ – постоянная распада, равная $\lambda=ln2/T$, N – количество радиоактивных ядер. Удельная активность определяется как активность данного изотопа на единицу его массы a/m.
$T = 8{,}5 \cdot 10^8$ лет	
M = 235 г/моль	
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$	
a/m - ?	

Количество N радиоактивных ядер можно найти из соотношения

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}; \quad N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

где N_A – число Авогадро.

Окончательно расчетная формула примет вид:

$$\frac{a}{m} = \frac{ln2}{\mu T} N_A = \frac{0{,}693 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{235 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}68 \cdot 10^{16}} = 6{,}63 \cdot 10^7 \text{ расп/кг·с}.$$

Задача 5. Определите начальную активность a_0 радиоактивного препарата магния ^{27}Mg массой m = 0,2 мкг, а также его активность а через время t = 6 ч. Период полураспада T магния равен 10 минутам.

Дано:	**Решение.** Закон изменения активности радиоактивного препарата со временем выражается формулой $a = a_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, где $a_0 = \lambda N_0$ - начальная активность препарата. Начальное число радиоактивных атомов N_0, содержащихся в препарате массой m равно произведению числа Авогадро на число килограмм-атомов данного
T = 10 мин	
A = 27 г/моль	
t = 6 ч	
m = 0,2 мкг	
a_0 , a - ?	

изотопа m/A, где A – масса одного килограмм-атома.

$$N_0 = \frac{m}{A} \cdot N_A.$$

Определив постоянную распада λ, рассчитаем начальную активность

$$a_0 = \frac{\ln 2}{T} \frac{m}{A} N_A = \frac{0{,}693}{600} \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27} 6{,}02 \cdot 10^{26} = 5{,}13 \cdot 10^{12} Бк = 139 Ки.$$ Расс

читаем активность препарата через 6 часов

$$a = a_0 \cdot e^{-\lambda t} = a_0 \cdot e^{-\frac{t}{T} \ln 2} = a_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = 139 \cdot 2^{-\frac{2{,}16 \cdot 10^4}{600}} = 2{,}20 \cdot 10^{-9} Ки = 2{,}20 нКи.$$

Задача 6. Изотоп $^{60}_{27}Co$ β – радиоактивен. Каков заряд всех β – частиц, испущенных этим изотопом за 1 год, если масса исходного препарата 1г?

Дано:
μ = 60 г/моль
T = 5,3 лет
t = 1 год
m= 1г
$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$моль$^{-1}$
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
q - ?

Решение. Заряд, уносимый испущенными частицами, равен $q=e\Delta N$, где $\Delta N=N_o-N$ и по закону радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{\lambda t}.$$

Тогда

$$\Delta N = N_0(1-e^{-\lambda t}).$$

Начальное количество частиц N_0 найдем из соотношения $N_0=mN_A/\mu$.

$$\Delta N = \frac{m}{\mu} N_A(1-e^{-\lambda t}),$$

Постоянную распада λ свяжем с периодом полураспада T: $\lambda=ln2/T$.

Окончательно для определяемой величины q получаем:

$$q = e\frac{m}{\mu} N_A(1-2^{-\frac{t}{T}}) = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-3}\cdot6{,}02\cdot10^{23}}{6\cdot10^{-2}}(1-2^{-\frac{1}{5{,}3}}) \approx 200 Ku.$$

Задача 7. При соударении α- частицы с ядром бора $^{10}_{5}B$ произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода – протон $^{1}_{1}p$. Определите порядковый номер и массовое число второго ядра, дать символическую запись ядерной реакции и определите ее энергетический эффект.

Дано:
$^{10}_{5}B$
$^{4}_{2}He$
Y, ΔE - ?

Решение. Обозначим неизвестное ядро символом Y. Так как α- частица есть ядро атома гелия, запись реакции будет иметь вид: $^{10}_{5}B+^{4}_{2}He\rightarrow^{A}_{Z}Y+^{1}_{1}p+\Delta E$. Применив закон сохранения числа нуклонов, получим уравнение

10 + 4 = A + 1, откуда A = 13. Применив закон сохранения заряда, получим уравнение 5 + 2 = Z + 1, откуда Z = 6. Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода $^{13}_{6}C$. Теперь можем записать реакцию в окончательном виде:

$$^{10}_{5}B+^{4}_{2}He\rightarrow^{13}_{6}C+^{1}_{1}p.$$

Энергетический эффект ядерной реакции определим согласно формуле (33).

$$\Delta E = c^2\left\{\left(M_{^{10}_{5}B}+M_{^{4}_{2}He}\right)-\left(M_{^{13}_{6}C}+M_{^{1}_{1}p}\right)\right\}.$$

В расчетную формулу подставим массы атомов, а не ядер, т.к. при вычитании суммы масс нейтральных атомов углерода и водорода из суммы масс атомов гелия и бора массы электронов выпадут, и мы получим тот же результат, как если бы брали массы ядер:

$$\Delta E = 931((10{,}01294 + 4{,}00260) - (13{,}00335 + 1{,}00783)) = 4{,}06 \text{ МэВ}.$$

Так как $\Delta E > 0$, то реакция идет с выделением энергии и является экзотермической.

Задача 8. Одна из ядерных реакций, происходящих в недрах Солнца, имеет вид: ${}^{3}_{2}He + {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{8}_{5}B$. Энергия покоя ядра ${}^{8}_{5}B$ равна 7472,4 МэВ. Вычислите энергетический выход ядерной реакции в МэВ.

Дано:
$E_{0я} = 7472{,}4$ МэВ
$E_0({}^{3}_{2}He) = 2808{,}4$ МэВ
$E_0({}^{4}_{2}He) = 3728{,}4$ МэВ
$E_0({}^{1}_{1}p) = 938{,}3$ МэВ

Q - ?

Решение. Энергетический выход ядерной реакции Q определяется по формуле:

$$Q = E_0({}^{3}_{2}He) + E_0({}^{4}_{2}He) + E_0({}^{1}_{1}p) - E_{0я} =$$
$$= 2808{,}4 + 3728{,}4 + 938{,}3 - 7472{,}4 = 2{,}7 МэВ.$$

Задача 9. Почему альфа-частицы, испускаемые радиоактивными препаратами не могут вызвать ядерные реакции в других элементах?

Решение. Энергии альфа-частицы недостаточно для преодоления кулоновского барьера (сил отталкивания между ядром элемента и альфа-частицей) ядра элемента и проникновения в него.

Вопросы и задания.

1. Состав ядра.
2. Энергия связи ядер.
3. Ядерные силы.
4. Магнитные и электрические свойства ядер.
5. Ядерные модели.
6. Радиоактивный распад и законы сохранения.
7. Прохождения заряженных частиц и гамма-излучения через вещество.
8. Ядерные реакции. Физические основы ядерной энергетики.
9. Элементарные частицы.
10. Современная физическая картина мира

Задачи для самостоятельного решения

1. Зная постоянную Авогадро N_A, определить массу m_a нейтрального атома углерода ${}^{12}C$ и массу m, соответствующую углеродной единице массы.
2. Чем отличается массовое число от относительной массы ядра?
3. Хлор представляет собой смесь двух изотопов с относительными атомными массами A_{r1}=34,969 и A_{r2}=36,966. Вычислить относительную атомную массу A_r хлора, если массовые доли w_1 и w_2 первого и второго изотопов соответственно равны 0,754 и 0,246.
4. Бор представляет собой смесь двух изотопов с относительными атомными массами A_{r1}=10,013 и A_{r2}=11,009. Определить массовые доли w_1 и w_2 первого и

второго изотопов в естественном боре. Относительная атомная масса A_r бора равна 10,811.

5. Какую часть массы нейтрального атома плутония составляет масса его электронной оболочки?

6. Определить массу ядра лития, если масса нейтрального атома лития равна 7,01601 а.е.м.

7. Укажите, сколько нуклонов, протонов, нейтронов содержат следующие ядра: 1) ${}^{3}_{2}He$; 2) ${}^{10}_{5}B$; 3) ${}^{23}_{11}Na$; 4) ${}^{54}_{26}Fe$; 5) ${}^{104}_{47}Ag$; 6) ${}^{238}_{92}U$.

8. Напишите символические обозначения ядер изотопов водорода и назовите их.

9. Укажите, сколько существует изобар с массовым числом A=3. Напишите символические обозначения ядер.

10. Какие изотопы содержат два нейтрона? (Дать символическую запись ядер.)

11. Определить дефект массы Δm и энергию связи $E_{св}$ ядра атома тяжелого водорода.

12. Определить энергию $E_{св}$, которая освободится при соединении одного протона и двух нейтронов в атомное ядро.

13. Определить удельную энергию связи E ядра ${}^{12}_{6}C$.

14. Энергия связи $E_{св}$ ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определить массу m_a нейтрального атома, имеющего это ядро.

15. Определить массу m_a нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи $E_{св}$ ядра равна 26,3 МэВ.

16. Атомное ядро, поглотившее γ-фотон (λ=0,47 пм), пришло в возбужденное состояние и распалось на отдельные нуклоны, разлетевшиеся в разные стороны. Суммарная кинетическая энергия T нуклонов равна 0,4 МэВ. Определить энергию связи $E_{св}$ ядра.

17. Какую наименьшую энергию E нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядра ${}^{7}_{3}Li$ и ${}^{7}_{4}Be$? Почему для ядра берилия эта энергия меньше, чем для ядра лития?

18. Определить энергию E, которая выделится при образовании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}^{4}_{2}He$ массой m=1 г.

19. Какую наименьшую энергию E нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_{7}N$?

20. Найти минимальную энергию E, необходимую для удаления одного протона из ядра азота ${}^{14}_{7}N$.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и

термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ФИЗИКЕ

I. Основные формулы по всем разделам курса физики

Раздел 1. Физические основы механики

Кинематика материальной точки

Скорости:

средняя $$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1},$$

средняя путевая $$\upsilon_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

мгновенная $$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - вектор перемещения, s – расстояние вдоль траектории движения, $\Delta s = s_2 - s_1$ – пройденный путь, t – время, $\Delta t = t_2 - t_1$ – время движения, $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательный к траектории.

Ускорения:

среднее $$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t};$$

мгновенное $$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt};$$

тангенциальное $$\vec{a}_{\tau} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau};$$

нормальное $\vec{a}_{\text{n}} = \dfrac{\upsilon^2}{R}\vec{n};$

полное $\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_{\text{n}}, \quad a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_{\text{n}}^2},$

где R – радиус кривизны траектории, $\vec{n}$ – единичный вектор главной нормали.

Скорость угловая:

средняя $\omega_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t};$

мгновенная $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt},$

где φ – угловое перемещение.

Ускорение угловое:

среднее $\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$;

мгновенное $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Связь между линейными и угловыми величинами $s = \varphi R, \quad \upsilon = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R$.

Если точка движется равномерно:

поступательно $s = \upsilon t$;

вращательно $\varphi = \omega \cdot t$.

Если точка движется равноускоренно:

поступательно $\upsilon = \upsilon_0 + at; \quad s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$;

вращательно $\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Динамика материальной точки.

Импульс (количество движения) материальной точки $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$,
где m – масса материальной точки, $\vec{\upsilon}$ – её скорость.

Основное уравнение динамики материальной точки

(второй закон Ньютона) $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$.

При $m = const$, второй закон Ньютона имеет вид $\vec{F} = m\vec{a}$.

Законы сохранения энергии и импульса.

Закон сохранения импульса для изолированной системы
$\sum \vec{P}_i = \sum m_i \vec{\upsilon}_i = const$.

Радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$.

Скорость частиц после центрального столкновения:

упругого

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = -\vec{\upsilon}_1 + 2\dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}, \\ \vec{u}_2 = -\vec{\upsilon}_2 + 2\dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}; \end{cases}$$

неупругого

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2},$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости частиц до столкновения, m_1 и m_2 – массы частиц.

Работа силы:

элементарная $dA = \vec{F}d\vec{r}$;

полная $A = \int \vec{F}d\vec{r}$.

Мощность $N = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}.$

Кинетическая энергия материальной точки $T = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$.

Закон сохранения механической энергии $E = T + П = const$.

Законы механики твёрдого тела.

Момент инерции материальной точки $J = mr^2,$

где m – масса точки, r – её расстояние до оси вращения.

Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс $J = \int_V \rho r^2 dV$,

где ρ – плотность тела.

Если тело имеет форму:

а) *тонкостенного цилиндра (кольца) радиуса R* $J_0 = mR^2;$

б) *сплошного цилиндра (диска) радиуса R,* $J_0 = \frac{1}{2}mR^2;$

(*оси вращения совпадают с осью цилиндров*).

в) *шара радиуса R* $J_0 = \frac{2}{5}mR^2;$

г) *тонкого стержня длиной l* $J_0 = \frac{1}{12}ml^2.$

(*ось вращения перпендикулярна стержню*).

Момент инерции тела массой m относительно произвольной оси (теорема Штейнера) $J = J_0 + md^2,$

где J_0 – момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, d – расстояние между осями.

Момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$

где r – радиус-вектор точки приложения силы.

Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}.$

Основное уравнение динамики вращательного движения $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}.$

При $J = const$, $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$.

Закон сохранения момента импульса для изолированной системы $\sum \vec{L}_i = \sum J_i \vec{\omega}_i = const.$

Работа при вращательном движении:

элементарная $dA = \vec{M}\, d\vec{\varphi};$

полная $A = \int \vec{M}\, d\vec{\varphi}.$

Кинетическая энергия вращающегося тела $T = \dfrac{J\omega^2}{2} = \dfrac{L^2}{2J}.$

Силы в механике. Элементы классической теории гравитации.

Сила сухого трения скольжения $F_{тр} = \mu F_n,$

где μ – коэффициент трения, F_n – сила нормального давления.

Сила упругости $F_{упр} = -k\Delta l,$

где k – коэффициент упругости (жесткость), Δl - изменение длины.

Сила гравитационного взаимодействия $F_{гр} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2},$

где m_1 и m_2 – массы частиц, G – гравитационная постоянная, r – расстояние между частицами.

Потенциальные энергии:

упруго деформированного тела $П = \dfrac{k(\Delta l)^2}{2};$

гравитационного взаимодействия двух частиц $П = -G\dfrac{m_1 m_2}{r};$

тела в однородном гравитационном поле $П = mgh,$

где g – напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения), h – расстояние от нулевого уровня отсчета (обычно - поверхности Земли).

Напряженность гравитационного поля Земли $$g = \frac{GM_3}{(R_3 + h)^2},$$

где M_3 – масса Земли, R_3 – радиус Земли, h – расстояние от поверхности Земли.

Потенциал гравитационного поля Земли $$\varphi = -\frac{GM_3}{R_3 + h}.$$

Элементы релятивистской механики.

Релятивистское сокращение длины $$l = l_0\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2},$$

где l_0 – длине покоящегося тела, c – скорость света в вакууме.

Релятивистское замедление времени $$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}},$$

где m_0 – масса покоя.

Энергия покоя частицы $$E_0 = m_0c^2.$$

Полная энергия релятивистской частицы $$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}.$$

Релятивистский импульс $$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы $$T = E - E_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - 1\right).$$

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом $$E^2 = p^2c^2 + E_0^2.$$

Теорема сложения скоростей в релятивистской механике $$u' = \frac{u \pm \upsilon}{1 \pm u\upsilon/c^2},$$

где u и u' – скорости в двух инерциальных системах координат, движущихся относительно друг друга со скоростью υ, совпадающей по направлению с u (знак минус) или противоположно ей направленной (знак плюс).

Раздел 2. Статистическая физика и термодинамика

Статистическая физика

Количество вещества (число молей) $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$

где N – число молекул, N_A – постоянная Авогадро, m – масса вещества, M – молярная масса.

Уравнение Клапейрона-Менделеева $pV = \nu RT,$

где p – давление газа, V – его объем, R – универсальная газовая постоянная, T – термодинамическая температура.

Уравнение молекулярно-кинетической теории газов $p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{1}{3} m n_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2,$

где n – концентрация молекул, $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы, m_0 – масса молекулы $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость.

Средняя энергия молекулы $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$

где i – число степеней свободы молекулы, k – постоянная Больцмана.

Внутренняя энергия идеального газа $U = \frac{i}{2} \nu RT.$

Скорость молекул:

средняя квадратичная $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT / m_0} = \sqrt{3RT / M};$

средняя арифметическая $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{8kT / (\pi m_0)} = \sqrt{8RT / (\pi M)}.$

наиболее вероятная $\upsilon_{\text{В}} = \sqrt{2kT / m_0} = \sqrt{2RT / M}.$

Средняя длина свободного пробега молекулы $\langle \lambda \rangle = \left(\sqrt{2} \pi d^2 n \right)^{-1},$

где d – эффективный диаметр молекулы.

Среднее число столкновений молекулы в единицу времени $\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle \upsilon \rangle.$

Распределение молекул в потенциальном поле сил $n = n_0 \exp\left(-\frac{П}{kT} \right),$

где $П$ – потенциальная энергия молекулы.

Барометрическая формула $$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right).$$

Уравнение диффузии $$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt,$$

где D – коэффициент диффузии, ρ – плотность, dS – элементарная площадка, перпендикулярная оси OX.

Уравнение теплопроводности $$dQ = -æ\frac{dT}{dx}dSdt,$$

где æ – теплопроводность.

Сила внутреннего трения $$dF = -\eta\frac{d\upsilon}{dx}dS,$$

где η – динамическая вязкость.

Коэффициент диффузии $$D = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle.$$

Вязкость (динамическая) $$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle = D\rho.$$

Теплопроводность $$æ = \frac{1}{3}c_V\rho\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle = \eta c_V,$$

где c_v – удельная изохорная теплоемкость.

Термодинамика

Молярная теплоемкость идеального газа

изохорная $$C_v = \frac{i}{2}R;$$

изобарная $$C_p = \frac{(i+2)}{2}R.$$

Первое начало термодинамики $$dQ = dU + dA.$$

Здесь $dU = vC_v dT$ - изменение внутренней энергии, $dA = pdV$ – совершаемая работа.

Работа расширения газа при процессах

изобарном $$A = p(V_2 - V_1) = vR(T_2 - T_1);$$

изотермическом $$A = vRT\ln\frac{V_2}{V_1} = vRT\ln\frac{p_1}{p_2};$$

адиабатном $$A = vC_V(T_1 - T_2) = \frac{vRT_1}{(\gamma-1)}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{(\gamma-1)}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где γ – показатель адиабаты: $\gamma = C_p/C_V$.

Уравнения Пуассона

$$\begin{cases} pV^{\gamma} = const, \\ TV^{\gamma-1} = const, \\ T^{\gamma} p^{1-\gamma} = const. \end{cases}$$

Коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T},$$

где Q – количество теплоты полученное от нагревателя, температура которого T; Q_0 – количество теплоты переданное холодильнику, температура которого T_0.

Изменение энтропии при переходе

из состояния 1 в состояние 2

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Раздел 3. Электричество и магнетизм

Электростатика

Закон Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где q_1 и q_2 – величины точечных зарядов, ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды, r – расстояние между зарядами.

Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Напряженность поля

точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2};$$

бесконечно длинной заряженной нити

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r};$$

равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где τ – линейная плотность заряда, σ – поверхностная плотность заряда, r – расстояние до источника поля.

Дипольный момент

$$\vec{P} = q\vec{l}\ .$$

Индукция электрического поля (электрическое смещение)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Работа перемещения заряда

в электростатическом поле $A = q\int E_l dl = q(\varphi_1 - \varphi_2)$,

где φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек.

Потенциал поля точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Связь между потенциалом и напряженностью $E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$.

Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора $F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon \cdot S}$,

где S – площадь пластин.

Электроемкость:

уединенного проводника $C = \frac{q}{\varphi}$;

плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$;

слоистого конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 S}{\sum d_i / \varepsilon_i}$,

шара $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$,

где d – расстояние между пластинами конденсатора, d_i – толщина i-го слоя диэлектрика, ε_i – его диэлектрическая проницаемость, R – радиус шара.

Электроемкость батареи конденсаторов, соединенных:

параллельно $C = \sum C_i$;

последовательно $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$.

Энергия поля:

заряженного проводника $W_Э = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}$;

заряженного конденсатора $W_Э = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 V$,

где V – объем конденсатора.

Объемная плотность энергии электрического поля $W_Э = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{ED}{2}$.

Законы постоянного тока

Сила тока $I = \dfrac{dq}{dt}.$

Плотность тока $j = \dfrac{dI}{dS}.$

Закон Ома:

в дифференциальной форме $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \dfrac{\vec{E}}{\rho};$

в интегральной форме $I = \dfrac{U}{R},$

где γ – удельная проводимость, ρ – удельное сопротивление, U – напряжение на концах цепи, R – сопротивление цепи, j – плотность тока.

Электродвижущая сила $\mathscr{E} = \dfrac{A_{\text{ст}}}{Q},$

где $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил по перемещению заряда на замкнутом участке цепи. Q – величина заряда.

Напряжение $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E},$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы двух точек цепи, $\mathscr{E}$ – ЭДС участка, U_{12} – напряжение.

Работа тока $dA = IUdt = I^2Rdt = \dfrac{U^2}{R}dt.$

Мощность тока $P = \dfrac{dA}{dt} = IU = I^2R = \dfrac{U^2}{R},$

где I – сила тока, U – напряжение, R – сопротивление.

Правила Кирхгофа

1-е. Алгебраическая сумма токов сходящихся в узле равна нулю: $\sum_{\text{k}} I_{\text{k}} = 0.$

2-е. Алгебраическая сумма произведений сил токов I_{i} на сопротивление R_{i} соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС $\mathscr{E}_{\text{i}}$, встречающихся в контуре: $\sum_{\text{i}} I_{\text{i}} R_{\text{i}} = \sum_{\text{i}} \mathscr{E}_{\text{i}},$

где i – номер элемента.

Плотность тока j, средняя скорость $\langle \upsilon \rangle$ упорядоченного движения носителей заряда и их концентрация n связаны соотношением $\vec{j} = e \cdot n \cdot \langle \vec{\upsilon} \rangle,$

где e – элементарный заряд.

Закон Джоуля – Ленца:

в дифференциальной форме $$\frac{dw}{dt} = \vec{j}\vec{E} = \gamma E^2 = \frac{E^2}{\rho};$$

в интегральной форме $$dQ = IUdt = \frac{U^2}{R}dt = I^2 Rdt.$$

Сопротивление однородного проводника $$R = \frac{\rho \cdot l}{S},$$

где l – длина проводника, S – площадь его поперечного сечения.

Удельная электрическая проводимость $$\gamma = \frac{1}{2}e^2 \cdot n \cdot \langle l \rangle / (mu),$$

где e и m – заряд и масса электрона, n – концентрация электронов, $\langle l \rangle$ - средняя длина их свободного пробега, u – средняя скорость их хаотического движения.

Закон Видемана–Франца $$\frac{\lambda}{\gamma} = 3\frac{k^2}{e^2}T,$$

где λ – теплопроводность, k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.

Зависимость удельного сопротивления от температуры $$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где α – температурный коэффициент сопротивления, t – температура по шкале Цельсия.

Термоэлектродвижущая сила, возникающих в термопаре $$\mathscr{E} = \alpha(T_1 - T_2),$$

где α – удельная термоЭДС, $T_1 - T_2$ – разность температур спаев термопары.

Законы электролиза Фарадея:

Первый закон $$m = k \cdot Q,$$

где m – масса выделившегося на электроде вещества при прохождении через электролит электрического заряда Q, k – электрохимический эквивалент вещества;

Второй закон $$k = \frac{M}{F \cdot Z},$$

где F–постоянная Фарадея ($F = 96{,}5 \frac{\text{кК}}{\text{моль}}$), M – молярная масса вещества,

Z– валентность ионов.

Подвижность ионов $$b = \langle \upsilon \rangle / E,$$

где E – напряженность электрического поля.

Закон Ома для электролитов $$\vec{j} = Q \cdot n \cdot (b_+ + b_-) \cdot \vec{E},$$

где Q – заряд иона, n– концентрация b_+ и b_- – подвижности ионов.

Плотность тока насыщения $j_{\text{нас}} = Q \cdot n_0 \cdot d$,

где n_0 – число пар ионов создаваемых полем в единице объема в единицу времени, d – расстояние между электродами ($n_0 = \frac{N}{V \cdot t}$, где N – число пар ионов, V – объем, t – время).

Магнитное поле постоянного тока

Сила Лоренца $\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B},$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость заряда q, B – индукция магнитного поля.

Сила Ампера $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B},$

где I – сила тока в проводнике, dl – элемент длины проводника.

Магнитный момент контура с током $\vec{p}_{\text{m}} = I\vec{S},$

где $\vec{S}$ – площадь контура.

Механический момент, действующий на контур с током в магнитном поле $\vec{M} = \vec{p}_{\text{m}} \times \vec{B}$

Закон Био-Савара-Лапласа $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3},$

где μ_0 – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды, $d\vec{B}$ – вектор магнитной индукции.

Магнитная индукция:

в центре кругового тока $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R},$

поля бесконечно длинного прямого тока $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r};$

поля, созданного отрезком проводника с током $B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2),$

поля бесконечно длинного соленоида $B = \mu_0 \mu n I,$

где R – радиус кругового тока, r – кратчайшее расстояние до оси проводника, α_1 и α_2 – углы между отрезком проводника и линией, соединяющей концы отрезка проводника с точкой поля, n – число витков на единицу длинны соленоида.

Сила взаимодействия двух прямолинейных бесконечно длинных параллельных токов на единицу их длины $F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi r},$

где r – расстояние между токами I_1 и I_2.

Работа по перемещению контура с током в магнитном поле $A = I\Delta\Phi,$

где Φ – магнитный поток через поверхность контура.

Магнитный поток однородного магнитного поля через площадку *S* $\Phi = BS\cos\alpha,$

где α – угол между вектором B и нормально к площадке.

Закон электромагнитной индукции $\mathscr{E}_{\text{i}} = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d\psi}{dt},$

где N – число витков контура.

Потокосцепление контура с током $\psi = LI,$

где L – индуктивность контура.

Электродвижущая сила самоиндукции $\mathscr{E}_{\text{S}} = -L\dfrac{dI}{dt}.$

Индуктивность соленоида $L = \mu_0\mu n^2 V,$

где V – объем соленоида n – число витков на единицу длины соленоида

Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением *R* и индуктивностью *L*

$$I = I_0\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) + \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right].$$

Энергия магнитного поля $W_{\text{M}} = \dfrac{LI^2}{2}.$

Объемная плотность энергии магнитного поля $W_{\text{M}} = \dfrac{BH}{2} = \dfrac{B^2}{2\mu_0\mu} = \dfrac{\mu_0\mu H^2}{2}.$

Раздел 4. Колебания и волны

Колебательные процессы в механике

Уравнение гармонического колебания $s = A\sin(\omega t + \varphi_0),$

где A – амплитуда колебания, ω – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза.

Период колебания маятников:

пружинного $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

физического $$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

где m – масса маятника, k – жесткость пружины, J – момент инерции маятника, определенный относительно оси вращения, g – ускорение свободного падения, l – расстояние от оси вращения до центра масс.

Волновые процессы в механике

Уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении оси *X* $$s = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right],$$

где υ – скорость распространения волны.

Длина волны $$\lambda = \upsilon T,$$

где T – период колебаний волны.

Скорость распространения звука в газах $$\upsilon = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}},$$

где γ – отношение теплоемкостей газа, при постоянном давлении и объеме, R – молярная газовая постоянная, T – термодинамическая температура, M – молярная масса газа.

Электромагнитные колебания и волны

Период колебаний в электрическом колебательном контуре $$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L – индуктивность соленоида, C – емкость конденсатора.

Скорость распространения электромагнитной волны $$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где c – скорость света в вакууме, ε – диэлектрическая и μ – магнитная проницаемости среды.

Вектор Пойнтинга $$\vec{p} = \vec{E} \times \vec{H},$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей электромагнитной волны.

Раздел 5. Волновая и квантовая оптика

Геометрическая оптика

Абсолютный показатель преломления среды $n = \frac{c}{\upsilon}$,

где υ – скорость света в среде, c – скорость света в вакууме.

Законы отражения света:
1. Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.
2. Угол отражения равен углу падения $\varepsilon' = \varepsilon$.

Законы преломления света:
1. Падающий луч, преломленный и перпендикуляр к границе раздела двух сред, проведенный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.
2. Отношение синусов углов падения ε и преломления r есть величина постоянная, равная относительному показателю преломления двух сред

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin r} = n_{21},$$

где n_{21} – относительный показатель преломления ($n_{21} = n_2 / n_1$, n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления).
Законы отражения и преломления справедливы и при обратном направлении хода световых лучей.

Оптическая сила линзы $\Phi = \frac{1}{f} = (n_{21} - 1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$,

где f – фокусное расстояние линзы; R_1 и R_2 – радиусы кривизны обеих поверхностей линзы (для вогнутой линзы считающиеся отрицательными).

Формула тонкой линзы: $\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{d}$,

где s – расстояние до предмета , d – расстояние до изображения. У рассеивающих линз фокусное расстояние и расстояние до изображения отрицательны.

Увеличение линзы $\Gamma = B/G = s/d$,
где B – размер изображения, G – размер предмета.

Волновая оптика

Оптическая длина пути в однородной среде $L = nl$,

где l – геометрическая длина пути световой волны, n – показатель преломления среды.

Оптическая разность хода $\Delta = L_2 - L_1,$

где L_1 и L_2 – оптические пути двух световых волн.

Условие интерференционных максимумов $\Delta = \pm m\lambda,\ m = 0,1,2,...;$

условие интерференционных минимумов $\Delta = \pm(2m+1)\lambda/2,\ m = 0,1,2,...,$

где λ – длина световой волны.

Ширина интерференционных полос в опыте Юнга $\Delta x = \dfrac{\lambda_0 l}{d},$

где d – расстояние между когерентными источниками света, l – расстояние от источников до экрана.

Оптическая разность хода в тонких пленках:

в проходящем свете $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i};$

в отраженном свете $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \dfrac{\lambda_0}{2},$

где d – толщина пленки, n – показатель преломления пленки, i – угол падения света.

Радиусы светлых колец Ньютона в проходящем свете
или темных в отраженном $r_m = \sqrt{m\lambda R};\quad m = 0,1,2,...;$
и темных колец в проходящем свете или
светлых в отраженном свете $r_m = \sqrt{(2m-1)\lambda R/2};\quad m = 1,2,...,$

где R – радиус кривизны линзы, λ – длина световой волны.

Радиусы зон Френеля:

для сферической волновой поверхности $r_m = \sqrt{m\lambda ab/(a+b)};\quad m = 1,2,...;$

для плоской волновой поверхности $r_m = \sqrt{m\lambda b};\quad m = 1,2,...,$

где a – радиус волновой поверхности, b – кратчайшее расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения.

Условие дифракционных максимумов
от одной щели $a\sin\varphi_m = \pm(2m+1)\lambda/2;\quad m = 1,2,...;$
и дифракционных минимумов $a\sin\varphi_m = \pm m\lambda, m = 1,2,...,$

где a – ширина щели.

Условие главных максимумов дифракционной решетки $d\sin\varphi_m = \pm m\lambda; \quad m = 0,1,2,...,$

где d – постоянная дифракционной решетки.

Разрешающая способность дифракционной решетки $R = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN,$

где $\Delta\lambda$ – минимальная разность длин волн двух, спектральных линий, разрешаемых решеткой, m – порядок спектра, N – общее число щелей решетки.

Формула Вульфа – Брэггов $2d\sin\theta_m = m\lambda, m = 1,2,...,$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла, θ_m – угол скольжения рентгеновских лучей.

Степень поляризации светового луча $p = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$

где I_{max} и I_{min} – максимальная и минимальная интенсивности света.

Закон Брюстера $tg\varepsilon_Б = \dfrac{n_2}{n_1},$

где $\varepsilon_Б$ – угол Брюстера, n_1 и n_2 – показатели преломления первой и второй среды.

Закон Малюса $I = I_0\cos^2\alpha,$

где I_0 и I – интенсивность плоскополяризованного света, падающего и прошедшего через поляризатор, соответственно, α – угол между плоскостью поляризации падающего света и главной плоскостью поляризатора.

Угол поворота плоскости поляризации света

в кристаллах и чистых жидкостях $\varphi = \varphi_0 l;$

в растворах $\varphi = [\varphi_0]cl,$

где φ_0 – постоянная вращения, $[\varphi_0]$ – удельная постоянная вращения, c – концентрация оптически активного вещества в растворе, l – расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе.

Фазовая скорость света $\upsilon = \dfrac{c}{n},$

где c – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды.

Коэффициент дисперсии вещества $D = \dfrac{dn}{d\lambda}.$

Групповая скорость света $$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

Направление излучения Вавилова-Черенкова $$\cos\theta = \frac{c}{n\upsilon},$$

где υ – скорость заряженной частицы.

Законы теплового излучения

Закон Стефана-Больцмана $$R = \sigma T^4,$$

где R – энергетическая светимость черного тела, T – термодинамическая температура тела, σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Закон смещения Вина $$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где $\lambda_{\max}$ – длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела, b – постоянная Вина.

Второй закон Вина: Зависимость максимальной спектральной плотности излучательности от температуры $$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5,$$

где $C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/$\left(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5\right)$ – постоянная.

Давление света при нормальном падении на поверхность $$p = \frac{I}{c}(1+\rho) = w(1+\rho),$$

где I – интенсивность света, ρ – коэффициент отражения, w – объемная плотность энергии излучения.

Квантовая оптика

Энергия фотона $$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где h – постоянная Планка, ν – частота света.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $$\varepsilon = A + T_{\max},$$

где A – работа выхода электронов из металла, $T_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Комптоновская длина волны частицы $$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = \frac{hc}{E_0},$$

где m_0 – масса покоя частицы, E_0 – энергия покоя частицы.

Изменения длины волны излучения
при эффекте Комптона $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1-\cos\theta) = 2\lambda_C \sin^2(\theta/2),$
где λ и λ' – длина волны падающего и рассеянного излучения, соответственно;
θ – угол рассеяния.

Раздел 6. Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики

Атом водорода по теории Бора

Формула Бальмера-Ридберга
для водородоподобных атомов $$\frac{1}{\lambda} = Rz^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$
где λ – длина волны спектральной линии, R – постоянная Ридберга,
z – порядковый номер элемента, n = 1,2,3,…, $k = n+1, n+2,\ldots$.

Первый постулат Бора. Атомы могут склоль угодно долго находиться в стационарных состояниях, не излучая энергии. Стационарными состояниями (орбитами электронов) являются те, на которых выполняется условие:
$$m \cdot \upsilon_n \cdot r_n = n\hbar \quad (n = 1,2,3,\ldots),$$
где n – номер орбиты (главное квантовое число), r_n – радиус орбиты, m - масса электрона, υ_n – его скорость на n-ой орбите радиуса, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Дирака.

Второй постулат Бора. При переходе с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) один фотон с энергией
$$h\nu = E_n - E_m,$$
где E_n и E_m – энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения), ν – частота излученного (поглощенного) фотона.

Радиус *n*-ой стационарной орбиты электрона
в водородоподобном атоме $r_n = \frac{\hbar \cdot 4\pi\varepsilon_0}{mze^2} n^2$, ($n$ = 1,2, 3, …)
где z – порядковый номер элемента; e – заряд и m – масса электрона.
ε_0 – электрическая постоянная.

Энергия электрона в водородоподобном атоме $E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{z^2 me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$, ($n$ = 1,2, 3, …).

Спектральные линии характеристического

рентгеновского излучения $$\frac{1}{\lambda} = R(z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где a – постоянная экранирования.

Элементы квантовой механики

Длина волны де Бройля $$\lambda = \frac{h}{p},$$

где h – постоянная Планка, p – импульс частицы.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

для координаты и импульса $$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

где Δx – неопределенность координаты частицы, Δp_x – неопределенность проекции импульса частицы на соответствующую координатную ось;

для энергии и времени $$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

где ΔE – неопределенность энергии частицы в некотором состоянии, Δt – время нахождения частицы в этом состоянии $\hbar$ – постоянная Дирака.

Плотность вероятности нахождения частицы $$w = |\psi|^2,$$

где ψ – волновая функция частицы.

Вероятность обнаружения частицы в координатном интервале от x_1 до x_2 $$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

Волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме (решение уравнения Шредингера)

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где l – ширина ямы, x – координата частицы в яме ($0 < x < l$),
n – квантовое число ($n = 1,2,3,\ldots$).

Энергия частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме $$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2,$$

где m – масса частицы.

Среднее число фотонов с энергией ε_i в кристалле $\langle N_i \rangle = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}$,

где k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.

Молярная изохорная теплоемкость кристаллической решетки:

при температуре $T << \theta_D$ $c_V = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 = 234R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3$;

при температуре $T >> \theta_D$ $c_V = 3R$,

где R – молярная газовая постоянная, T – термодинамическая температура кристалла, θ_D – характеристическая температура Дебая.

Среднее число свободных электронов

с энергией E_i в металле $\langle N_i \rangle = 2\left[\exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT} \right) + 1 \right]^{-1}$,

где E_F – энергия Ферми.

Примесная электропроводность полупроводников $\gamma = e(n_+ b_+ + n_ b_)$,

где e – элементарный заряд, n_- и n_+ – концентрация электронов и дырок, $b_$ и b_+ - подвижность электронов и дырок.

Элементы физики атомного ядра

Дефект массы ядра $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$,

где m_p – масса протона, $m_п$ – масса нейтрона, $m_я$ – масса ядра атома ${}^A_Z X$;
Z и A – зарядовое и массовое числа.

Энергия связи ядра $E_{св} = c^2 \Delta m$,

где c – скорость света в вакууме.

Удельная энергия связи $\varepsilon_{св} = \frac{E_{CB}}{A}$.

Закон радиоактивного распада $N = N_0 \exp(-\lambda t)$,

где N_0 – начальное число радиоактивных ядер в момент времени $t = 0$,
N – число нераспавшихся радиоактивных ядер в момент времени t,
λ – постоянная радиоактивного распада.

Активностьрадиоактивного вещества $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$.

Закон поглощения гамма-излучения веществом $I = I_0 \exp(-\mu x)$,

где I_0 – интенсивность гамма-излучений на входе в поглощающий слой вещества, I – интенсивность гамма-излучений после прохождения поглощающего слоя вещества толщиной x, μ – линейный коэффициент поглощения.

Энергия ядерной реакции $Q = c^2(m_1 + m_2 - \sum m_i')$,

где m_1 и m_2 – массы покоя частиц, вступающих в реакцию, $\sum m_i'$ - сумма масс покоя частиц, образовавшихся в результате реакций.

II. Основные табличные значения

1. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль·К)
Молярный объем*	V_m	$22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00\cdot10^{8}$ м/с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}90\cdot10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	h	$6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Дирака	$\hbar$	$1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}10\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Первый боровский радиус	a	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны	λ	$2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927\cdot10^{-23}$ А·м^2
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}660\cdot10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

*Молярный объем идеального газа при нормальных условиях.

2. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
Масса Земли	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95\cdot10^{8}$ м
Масса Солнца	$1{,}98\cdot10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}74\cdot10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}33\cdot10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49\cdot10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84\cdot10^{8}$ м

3. Плотность твердых тел

Твердое тело	Плотность, кг/м^3		Твердое тело	Плотность, кг/м^3
Алюминий	$2{,}70 \cdot 10^3$		Медь	$8{,}93 \cdot 10^3$
Барий	$3{,}50 \cdot 10^3$		Никель	$8{,}90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6{,}02 \cdot 10^3$		Свинец	$11{,}3 \cdot 10^3$
Висмут	$9{,}80 \cdot 10^3$		Серебро	$10{,}5 \cdot 10^3$
Железо	$7{,}88 \cdot 10^3$		Цезий	$1{,}90 \cdot 10^3$
Литий	$0{,}53 \cdot 10^3$		Цинк	$7{,}15 \cdot 10^3$

4. Плотность жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м^3		Жидкость	Плотность, кг/м^3
Вода (при 4 ˚С)	$1{,}00 \cdot 10^3$		Сероуглерод	$1{,}26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1{,}26 \cdot 10^3$		Спирт	$0{,}80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13{,}6 \cdot 10^3$			

5. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность, кг/м^3		Газ	Плотность, кг/м^3
Водород	0,09		Гелий	0,18
Воздух	1,29		Кислород	1,43

6. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей

Жидкость	Коэффициент, мН/м		Жидкость	Коэффициент, мН/м
Вода	72		Ртуть	500
Мыльная пена	40		Спирт	22

7. Эффективный диаметр молекулы

Газ	Диаметр, м		Газ	Диаметр, м
Азот	$3{,}0 \cdot 10^{-10}$		Гелий	$1{,}9 \cdot 10^{-10}$
Водород	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$		Кислород	$2{,}7 \cdot 10^{-10}$

8. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость		Вещество	Проницаемость
Вода	81		Стекло	7,0
Масло трансформаторное	2,2		Слюда	7,0
Парафин	2,0		Фарфор	5,0
			Эбонит	3,0

9. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м		Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Железо	$9{,}8\cdot10^{-8}$		Нихром	$1{,}1\cdot10^{-6}$
Медь	$1{,}7\cdot10^{-8}$		Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$

10.Энергия ионизации

Вещество	E_i, Дж	E_i, эВ
Водород	$2{,}18\cdot10^{-18}$	13,6
Гелий	$3{,}94\cdot10^{-18}$	24,6
Литий	$1{,}21\cdot10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1{,}66\cdot10^{-18}$	10,4

11.Подвижность ионов в газах, $м^2/(В\cdot с)$

Газ	Положительные ионы	Отрицательные ионы
Азот	$1{,}27\cdot10^{-4}$	$1{,}81\cdot10^{-4}$
Водород	$5{,}4\cdot10^{-4}$	$7{,}4\cdot10^{-4}$
Воздух	$1{,}4\cdot10^{-4}$	$1{,}9\cdot10^{-4}$

12.Показатель преломления

Вещество	Показатель		Вещество	Показатель
Алмаз	2,42		Глицерин	1,47
Вода	1,33		Стекло	1,50
Масло коричное	1,6		Сероуглерод	1,63

13. Работа выхода электронов

Металл	A, Дж	A, эВ
Калий	$3{,}5\cdot10^{-19}$	2,2
Литий	$3{,}7\cdot10^{-19}$	2,3
Платина	$10\cdot10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3{,}4\cdot10^{-19}$	2,1
Серебро	$7{,}5\cdot10^{-19}$	4,7
Цезий	$3{,}2\cdot10^{-19}$	2,0
Цинк	$6{,}4\cdot10^{-19}$	4,0

14.Относительные атомные массы (округленные значения) A_r и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	Символ	A_r	Z		Элемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7		Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13		Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18		Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56		Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23		Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1		Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74		Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2		Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26		Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79		Сера	S	32	16
Калий	K	39	19		Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20		Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8		Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12		Хлор	Cl	35	17

15. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	m_0		E_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9{,}11\cdot10^{-31}$	0,00055	$8{,}16\cdot10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}672\cdot10^{-27}$	1,00728	$1{,}50\cdot10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}675\cdot10^{-27}$	1,00867	$1{,}51\cdot10^{-10}$	939
Дейтрон	$3{,}35\cdot10^{-27}$	2,01355	$3{,}00\cdot10^{-10}$	1876
α-частица	$6{,}64\cdot10^{-27}$	4,00149	$5{,}96\cdot10^{-10}$	3733
Нейтральный π-мезон	$2{,}41\cdot10^{-28}$	0,14498	$2{,}16\cdot10^{-11}$	135

16. Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}Ac$	10 сут.
Йод	$^{131}_{53}I$	8 сут.
Кобальт	$^{60}_{27}Co$	5,3 г
Магний	$^{27}_{12}Mg$	10 мин
Радий	$^{226}_{86}Ra$	1620 лет
Радон	$^{222}_{86}Rn$	3,8 сут.
Стронций	$^{90}_{38}Sr$	27 лет
Фосфор	$^{32}_{15}P$	14,3 сут.
Церий	$^{144}_{58}Ce$	285 сут.

17. Массы атомов легких изотопов

Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.	Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.
Нейтрон	${}_{0}^{1}n$	1,00867	Бор	${}_{5}^{9}B$ ${}_{5}^{10}B$ ${}_{5}^{11}B$	9,01333 10,01294 11,00931
Водород	${}_{1}^{1}H$ ${}_{1}^{2}H$ ${}_{1}^{3}H$	1,00783 2,01410 3,01605	Углерод	${}_{6}^{10}C$ ${}_{6}^{12}C$ ${}_{6}^{13}C$ ${}_{6}^{14}C$	10,00168 12,00000 13,00335 14,00324
Гелий	${}_{2}^{3}He$ ${}_{2}^{4}H$	3,01603 4,0026	Азот	${}_{7}^{14}N$	14,00307
Литий	${}_{3}^{6}L$ ${}_{3}^{7}Li$	6,01513 7,01601	Кислород	${}_{8}^{16}O$ ${}_{8}^{17}O$	15,99491 16,99913
Бериллий	${}_{4}^{7}Be$ ${}_{4}^{9}Be$ ${}_{4}^{10}Be$	7,01693 9,01219 10,01354	Фтор	${}_{9}^{19}F$	18,99840

18. Тепловые свойства веществ

ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж /(кг К)	Температура плавления, ^{0}C	Удельная теплота плавления, кДж/кг
Алюминий	0,88	600	380
Лед	2,1	0	330
Медь	0,38	1083	180
Олово	0,23	232	59
Свинец	0,13	327	25
Серебро	0,23	960	87

ЖИДКОСТИ

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг К)	Температура кипения, °C	Удельная теплота парообразования, МДж/кг
Вода	4,2	100	2,3
Ртуть	0,12	357	0,29
Спирт	2,4	78	0,85

ГАЗЫ

Вещество	Удельная теплоемкость, кДж/(кг К)	Температура конденсации, °C
Азот	1,0	-196
Водород	14	-252
Воздух	1,0	-
Кислород	0,92	-183

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Теорема Виета:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1$$

$$\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin\alpha=1/\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

$$\cos\alpha=1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\mp\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$

$$\operatorname{sh}\alpha=(e^{\alpha}-e^{-\alpha})/2$$

$$\operatorname{ch}\alpha=(e^{\alpha}+e^{-\alpha})/2$$

$$\operatorname{th}\alpha=(e^{\alpha}-e^{-\alpha})/(e^{\alpha}+e^{-\alpha})$$

$$\operatorname{cth}\alpha=(e^{\alpha}+e^{-\alpha})/(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$$

Свойства тригонометрических функций

$$\sin(-x) = -\sin x,$$
$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$
$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x + 2\pi k) = \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(x + 2\pi k) = \operatorname{ctg} x,$$

где k – любое целое число.

Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Аргумент α						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, где a,b,c – длины сторон треугольника.

Теорема косинусов:

Уравнение прямой: $Ax + Bx + C = 0$, где A,B,C – любые вещественные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$.

$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k.

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a,b – полуоси.

Разложение на множители: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $\quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, $\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\cos x$	$-\sin x$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
e^{nx}	ne^{nx}	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$1/x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\frac{u(x)}{\upsilon(x)}$	$\frac{\upsilon u' - \upsilon' u}{\upsilon^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$
$u\,\upsilon$	$\upsilon u' - \upsilon' u$	$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq 1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm k}\right|$$

$$\int e^x\, dx = e^x$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{e^x - 1} = 2,405$$

$$\int u\, d\upsilon = u \cdot \upsilon - \int \upsilon\, du$$

Некоторые постоянные числа и приближенные формулы

Постоянные числа	Приближенные формулы (при $\alpha << 1$)
$\pi = 3{,}141$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9.8696$	$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$\ln(1+\alpha) \approx \alpha$
$e = 2{,}7183$	$\sin\alpha \approx \alpha$
$\lg e = 0{,}4343$	$\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$
$\ln 10 = 2{,}3026$	$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$

Некоторые сведения о векторах

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Векторное произведение векторов:

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,] = \vec{b}\,[\vec{c}\,\vec{a}\,] = \vec{c}\,[\vec{a}\,\vec{b}\,]$$

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\,\vec{a}) = \frac{d\alpha}{dt}\vec{a} + \alpha\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\,\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b} + \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}\,\vec{b}] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}\right]$$

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772

2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732

3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и

физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883

Дополнительная литература:

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70731.html

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287.