

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухова Татьяна Михайловна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского федерального университета

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Дата подписания: 11.09.2023 17:40:46

Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

Уникальный программный ключ:

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**  
для студентов по выполнению контрольных работ  
по дисциплине  
**Математика**  
(Наименование дисциплины)

Направление подготовки

08.03.01 Строительство

Направленность (профиль)

Строительство зданий и сооружений

Квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Год начала обучения

2021

Изучается в 1,2 семестрах

Пятигорск 2021 г.



## **Содержание**

1.Цель, задачи, реализуемые компетенции	4
2.Формулировка задания	5
3.Общие требования к написанию и оформлению работы	16
4. Список рекомендуемой литературы	17

## 1. Цели, задачи, реализуемые компетенции

Целью освоения дисциплины «Математика» является формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Знания, умения и навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
<p><b>Знать:</b> элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; основы математической статистики; методологию организации, проведения и обработки данных теоретического и экспериментального исследования.</p> <p><b>Уметь:</b> эффективно использовать методы математического анализа и математического моделирования в профессиональной деятельности; конструировать и анализировать математические модели объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками использования компьютерных программ для представления и математической обработки информации; навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач.</p>	<b>ОПК-1</b>

**2.Формулировка задания**  
**Контрольная работа (1 семестр)**  
**Базовый уровень**

**Задание 1.**

Даны векторы  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ ,  $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$  в некотором базисе. Показать, что векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{d}$  в этом базисе. Систему линейных уравнений решить по методу Гаусса.

1.  $\vec{a}(1;2;3)$ ,  $\vec{b}(-1;3;2)$ ,  $\vec{c}(7;-3;5)$ ,  $\vec{d}(6;10;17)$ .
2.  $\vec{a}(4;7;8)$ ,  $\vec{b}(9;1;3)$ ,  $\vec{c}(2;-4;1)$ ,  $\vec{d}(1;-13;-13)$ .
3.  $\vec{a}(8;2;3)$ ,  $\vec{b}(4;6;10)$ ,  $\vec{c}(3;-2;1)$ ,  $\vec{d}(7;4;11)$ .
4.  $\vec{a}(10;3;1)$ ,  $\vec{b}(1;4;2)$ ,  $\vec{c}(3;9;2)$ ,  $\vec{d}(19;30;7)$ .
5.  $\vec{a}(2;4;1)$ ,  $\vec{b}(1;3;6)$ ,  $\vec{c}(5;3;1)$ ,  $\vec{d}(24;20;6)$ .
6.  $\vec{a}(1;7;3)$ ,  $\vec{b}(3;4;2)$ ,  $\vec{c}(4;8;5)$ ,  $\vec{d}(7;32;14)$ .
7.  $\vec{a}(1;-2;3)$ ,  $\vec{b}(4;7;2)$ ,  $\vec{c}(6;4;2)$ ,  $\vec{d}(14;18;6)$ .
8.  $\vec{a}(1;4;3)$ ,  $\vec{b}(6;8;5)$ ,  $\vec{c}(3;1;4)$ ,  $\vec{d}(21;18;33)$ .
9.  $\vec{a}(2;7;3)$ ,  $\vec{b}(3;1;8)$ ,  $\vec{c}(2;-7;4)$ ,  $\vec{d}(16;14;27)$ .
10.  $\vec{a}(7;2;1)$ ,  $\vec{b}(4;3;5)$ ,  $\vec{c}(3;4;-2)$ ,  $\vec{d}(2;-5;-13)$ .

**Задание 2.**

Дана матрица А. Найти матрицу  $A^{-1}$  обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение  $A \cdot A^{-1}$

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad 4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad 6. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задание 3.**

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопитала.

$$1. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 4};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{x-1}$$

$$2. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{x^2 + 6x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{6x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 2}{3x - 4} \right)^{2-x}$$

$$3. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x - x^2}{x^2 + 4x + 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{\sqrt{8+x} - 3};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1 - \cos x};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x + 3}{4x - 1} \right)^{2x-3}$$

$$4. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^3 - x + 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6};$$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{3+x}}{x - x^2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x-1} \right)^{3-x}$

5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 4}{3 + x - 4x^2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7+x} - \sqrt{7-x}}{5x};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-1}{5x+4} \right)^{2x+1}$

6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{3x^2 + x + 3};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{3x^2 + x};$

7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 4}{2x^2 - x + 1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x^2 - 4x};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-7}{2x-3} \right)^{4x+1}$

8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{3x^2 + 4x + 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{\sqrt{8+x-3}};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+1}{4x-3} \right)^{1-2x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xtgx}{\sin^2 x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xtgx}{1 - \cos x};$

6)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 + 5x + 2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{4x^2};$

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 4x};$

6)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\sin^2 5x};$

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg^2 3x}{10x^2}$

9. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x - 3x^2}{x^2 + x + 3};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4x} - x}{x^2 - 16};$

10.  $\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-2}{5x+3} \right)^{3-2x}$
- а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{2x^3 + 5x - 1};$
- б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x}};$
- в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{4-x};$
- г)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 3x;$

**Задание 4.**

Найти производные следующих функций:

1. а)  $y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2};$    б)  $y = \left( \frac{1+x^2}{x} \right);$    в)  $x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t$

2. а)  $y = 2^{\sqrt{x}};$    б)  $y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x};$    в)  $x = \ln(1 + t^2), \quad y = t^2$

3. а)  $y = x^3 \cdot e^{3x};$    б)  $y = \sqrt[3]{1 + \ln^2 x};$    в)  $x = 1 - \cos 2t, \quad y = 2 + \sin 2t$

4. а)  $y = \sqrt{1 + e^x};$    б)  $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x};$    в)  $x = \frac{1}{2}t^2, \quad y = \frac{1}{2}t^3 + t$

5. а)  $y = e^{2x} \cdot \sin x;$    б)  $y = \operatorname{arctg}^3 x;$    в)  $x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{t-1}{t}$

6. а)  $y = (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x};$    б)  $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};$    в)  $x = \ln(\cos t), \quad y = \sin^2 t$

7. а)  $y = e^x \cos 3x;$    б)  $y = \ln^2(x^3 + 1);$    в)  $x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t}$

8. а)  $y = x^2 \ln(x^2 + 1);$    б)  $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg} 2x};$    в)  $x = e^{t^2}, \quad y = t \cdot e^{t^2}$

9. а)  $y = (x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 1};$    б)  $y = e^{\sin^2 x};$    в)  $x = \ln t, \quad y = t + \frac{1}{t}$

10. а)  $y = \cos 2x - \frac{1}{3} \cos^3 2x;$    б)  $y = (x^2 + 4) \cdot e^{-x^2};$    в)  $x = \frac{1}{2}t^2 + t, \quad y = \frac{1}{3}t^3 - t$

**Продвинутый уровень**

**Задание 5.**

Задана функция  $y=f(x)$ . Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

1. 
$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. 
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$$

2. 
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

7. 
$$f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

3. 
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

8. 
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4. 
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

9. 
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

5. 
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

10. 
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

**Контрольная работа (2 семестр)**

ВАРИАНТ 1  
Базовый уровень

1.  $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx$       2.  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$       3.  $\int \frac{x^3 dx}{x^2+2x+3}$       4.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+3x}$

5.  $\int x \operatorname{arctg} x dx$       6.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$       7.  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$       8.  $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

9.  $\int \cos x \cos 3x dx$       10.  $\int \frac{\sqrt{2+x}}{x} dx$

11. Найти площадь эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
12. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $r = a(1+\cos\phi)$ .
13. Найти длину дуги кривой  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  от точки  $M_1$  с абсциссой  $x_1 = a$  до точки  $M_2$  с абсциссой  $x_2 = b$  ( $b > a$ ).
14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  астроиды  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .
15. Решить дифференциальные уравнения
- 1)  $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$
  - 2)  $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dy;$

Продвинутый уровень

16. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  вокруг оси  $Ox$ .
17. Котел, имеющий форму полушара радиуса  $r$ , наполнен водой. Какую работу необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла?

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$

ВАРИАНТ 2  
Базовый уровень

1.  $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx$
2.  $\int \exp(\sqrt{x}) dx$
3.  $\int \frac{dx}{1 + x^3}$
4.  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1 + \sqrt{x}}$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$
6.  $\int \sin 2x \cos 4x dx$
7.  $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$
8.  $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$
9.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} + 1}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $y = \frac{8a^3}{(x^2 + 4a^2)}$  и ее асимптотой.
12. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .
13. Найти длину дуги кривой  $r = 2a \sin \phi$

14. Вычислить объем тела вращения, ограниченного поверхностями полученными при вращении

отрезков линий  $y = e^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x < \infty$  вокруг оси Ох и Оу.

15. Решить дифференциальные уравнения

1)  $(x^2 - 1)dy + (1 - y^2)dx = 0$ ;

2)  $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2ydy$ ;

16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $z = \pm c$ .

Продвинутый уровень

17. Какую работу необходимо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом  $r$  и высотой  $h$ , если плотность песка  $\gamma = 2$ .

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$  ( $n \geq 0$ ).

### ВАРИАНТ 3

Базовый уровень

1.  $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$       2.  $\int \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} dx$       3.  $\int \operatorname{arctg} x^2 dx$       4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$       5.

$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$       6.  $\int \frac{dx}{(1+x)(x^2 + x + 1)^2}$       7.  $\int \frac{\cos x dx}{\cos x + 1}$       8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$       9.

$\int \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} dx$       10.  $\int \sqrt{x} (1 + 2\sqrt[6]{x})^3 dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = x^2 \ln x$  и осью Ох.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля  $r = 2a(2 + \cos\phi)$ .

13. Доказать что длина эллипса  $x = \sqrt{2} \sin t$ ,  $y = \cos t$  равна длине одной волны синусоиды  $y = \cos x$ .

14. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох плоской фигуры, ограниченной

гиперболой  $x^2 - y^2 = 1$  и прямой  $x = a + 1$  ( $a > 0$ ).

15. Решить дифференциальные уравнения

1)  $x^2 dy + (y - 5)dx = 0$ ;

2)  $x^2 y^2 y' + 1 = y$ ;

16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $z = \frac{c}{a}x$ ,  $z = 0$ .

Продвинутый уровень

17. Определить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму полукруга радиуса  $a$ , диаметр которого находится на поверхности воды.

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$ .

### ВАРИАНТ 4

Базовый уровень

1.  $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$     2.  $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$     3.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} dx$     4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - x^2}}$     5.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$$

6.  $\int \ln(1 + x^2) dx$     7.  $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$     8.  $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx$     9.  $\int \sin x \sin 3x dx$     10.

$$\int e^x \sin x dx$$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , осью Ох и прямой  $y = c$  ( $c > 0$ ).

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 - \cos\varphi)$ .

13. Определить длину дуги кривой  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

14. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,

$y = a(1 - \cos t)$  вокруг оси Ох.

15. Решить дифференциальные уравнения

1)  $(x^2 + x)dy = (2y + 1)dx$ ;

2)  $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$ ;

16. Вычислить объем тела, образованного вращением эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси Оу.

Продвинутый уровень

17. Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку, основание которой  $a$

расположено на поверхности воды, а высота равна  $h$ .

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

ВАРИАНТ 5

Базовый уровень

1.  $\int \frac{x^2 dx}{a + ax^2}$     2.  $\int \frac{dx}{1 - x^3}$     3.  $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{a - x}}$     4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$     5.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

6.  $\int \arcsin x dx$     7.  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$     8.  $\int e^x \sin x dx$     9.  $\int \frac{x - 1}{\sqrt{2x - 1}} dx$     10.

$$\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кубической параболой  $y = x^3$  и прямой  $y = 2x$ .

12. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

13. Определить длину дуги цепной линии  $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$  между прямыми  $x = -a$  и  $x = a$ .

14. Вычислить объем тела, образованного вращением эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси Ох.

15. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $y' = e^{x-2y}$ ;

2)  $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ ;

16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = ax$ .

Продвинутый уровень

17. Определить силу давления воды на вертикальную треугольную площадку с высотой  $h$ , основание которой  $a$  параллельно поверхности воды, а противоположная вершина находится на поверхности воды.

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{x} dx$

### ВАРИАНТ 6

Базовый уровень

$$\begin{array}{llll} 1. \int x \operatorname{arctan} x dx & 2. \int \frac{x^5 - x + 3}{x^2 - 1} dx & 3. \int x \sqrt{a - x} dx & 4. \int \frac{dx}{x \sqrt{3x^2 - 2x - 1}} \\ 5. \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx & 6. \int \frac{\ln(1 + x^2)}{x^3} dx & 7. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} & 8. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x} \\ 9. \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx & 10. \int \frac{dx}{x^4 - 1} & & \end{array}$$

11. Вычислить площадь, ограниченную линиями:  $y^2 = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 0$ .

12. Найти площадь фигуры, ограниченной  $r = a \cos 2\phi$ .

13. Определить длину дуги кривой между точками пересечения с осью Ох:  $x = t^2$ ,  
 $y = \frac{t(t^2 - 3)}{3}$ .

14. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $x^2 - y^2 = a^2$ ,

$x = a^2$ ,  $x = -2a$  вокруг оси Ох.

15. Решить дифференциальные уравнения:

1)  $x + xy = -(y + xy)y'$ ;

2)  $x\sqrt{6 + y^2}dx + y\sqrt{5 + x^2}dy = 0$ ;

16. Вычислить объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$  и плоскостью  $z = 1$ .

Продвинутый уровень

17. В цилиндре под вращением находится воздух объема  $V_0$  под давлением  $P_0$ .

Определить работу изотермического сжатия воздуха до объема  $V_1$ .

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$

### ВАРИАНТ 7

Базовый уровень

$$1. \int \frac{x^4 dx}{x^2 + 2} \quad 2. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx \quad 3. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x}} \quad 4. \int \frac{e^x dx}{e^x - 1} \quad 5. \int \exp(-\sqrt{x}) dx$$

$$6. \int \left( \frac{x}{2-x} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad 7. \int \sqrt{1-\sin x} dx \quad 8. \int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x} dx \quad 9. \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2} \quad 10.$$

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x}$$

11. Вычислить площадь, ограниченную линиями  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = x + 4$ .

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = a \sin 3\varphi$ .

13. Определить длину дуги кривой  $x = \frac{t^6}{6}$ ,  $y = 2 - \frac{t^4}{4}$  между точками пересечения с осями координат ( $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 8^{\frac{1}{4}}$ ).

14. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x = -a, \quad x = a, \quad y = 0 \text{ вокруг оси } Ox.$$

15. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) \operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} y dy = 0;$$

$$2) y' y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0;$$

16. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом  $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$  и конусом

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$$

#### Продвинутый уровень

17. Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из полушара с радиусом  $R$ .

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}$

#### ВАРИАНТ 8

##### Базовый уровень

$$1. \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx \quad 2. \int x(\operatorname{artg} x)^2 dx \quad 3. \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x-2x-x^2}} \quad 4. \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}} \quad 5.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$6. \int \frac{dx}{1+x^4} \quad 7. \int \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} \quad 8. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} \quad 9. \int \operatorname{tg}^5 x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{5+4\cos x}$$

11. Вычислить площадь, ограниченную линиями  $y^2 = 2px$ ,  $x = h$ .

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = a \cos 3\varphi$ .

13. Определить длину дуги кривой  $r = a(1-\cos 3\varphi)$ .

14. Вычислить объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной петлей кривой  $x = 2t - t^2$ ,  $y = 4t - t^3$  вокруг оси  $Ox$ .

15. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) 2xy' + y^2 = 1;$$

$$2) y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0;$$

16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + z^2 = a^2$  и  $y^2 + z^2 = a^2$ .

Продвинутый уровень

17. Пластиинка, имеющая форму эллипса с осями  $2a$  и  $2b$  ( $a > b$ ), наполовину погружена вертикально в воду, так что малая плоскость лежит на поверхности воды. Вычислить давление на пластиинку (плотностью воды  $\rho$ )

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

### ВАРИАНТ 9

Базовый уровень

$$1. \int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} dx \quad 2. \int (\arcsin x)^2 dx \quad 3. \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \quad 4. \int e^x \sin^2 x dx \quad 5.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \quad 6. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} \quad 7. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} \quad 8. \int \frac{dx}{\sin^3 x} \quad 9.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad 10. \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$$

11. Найти площадь, ограниченную линиями  $y^2 = 2x + 4$ ,  $x = 0$ .

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = 3 + 2\cos\varphi$ .

13. Определить длину дуги кривой  $y = \ln x$  от точки  $(\sqrt{3}; \ln \sqrt{3})$  до точки  $(\sqrt{8}; \ln \sqrt{8})$ .

14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением

кривой  $y = \frac{1}{1+x^2}$  вокруг ее асимптоты.

15. Решить дифференциальные уравнения:

$$1) \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0;$$

$$2) 2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx;$$

16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении отрезков линий  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси Ох и оси Оу.

Продвинутый уровень

17. Определить работу, которую надо затратить, чтобы электрический заряд  $e_2 = 1$  приблизить к заряду  $e_1$  из бесконечности на расстояние, равное единице.

18. Исследовать сходимость интеграла  $\int_a^b \frac{dx}{x^2 - a^2}$

### ВАРИАНТ 10

Базовый уровень

$$\begin{array}{lllll}
1. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx & 2. \int \frac{xdx}{\sin^2 x} & 3. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} & 4. \int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} - 1} & 5. \int (\ln x)^2 dx \\
6. \int \frac{(x^3 + 1)dx}{x(x^2 + x + 1)^2} & 7. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1} & & 8. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} & 9. \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} \\
10. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}
\end{array}$$

11. Вычислить площадь, ограниченную линиями  $y = 3 - 2x - x^2$ ,  $y = 0$ .  
 12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $r = a \sin 2\phi$ .  
 13. Определить длину дуги кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$   
 14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями, полученными при вращении линии  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  вокруг оси Oy ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).  
 15. Решить дифференциальные уравнения:

$$\begin{array}{l}
1) y' = \frac{y-1}{x+1}; \\
2) (e^x + 2)dy - y^2 e^x dx = 0;
\end{array}$$

16. Вычислить объем тел, ограниченных параболоидом  $z = x^2 + 2y^2$  и эллипсоидом  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ .

Продвинутый уровень

17. Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4м.

$$18. \text{Исследовать сходимость интеграла } \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

### 3.Общие требования к написанию и оформлению работы

К оформлению текста контрольной работы предъявляются определенные требования, предусмотренные государственными стандартами. Контрольная работа может быть оформлена рукописным или машинописным способом в виде текста, подготовленного на персональном компьютере с помощью текстового редактора и отпечатанного на принтере на листах формата А4 с одной стороны. Текст на листе должен иметь книжную ориентацию, альбомная ориентация допускается только для таблиц и схем приложений. Основной цвет шрифта - черный.

Параметры страницы:

Размер бумаги – А4 (297x210 мм).

Ориентация страницы – книжная.

Левое поле – 3 см. Верхнее поле – 2 см. Правое поле – 1,5 см. Нижнее поле – 2 см.

Шрифт – Times New Roman. Размер шрифта – 14 пт. Масштаб шрифта – 100%.

Интервал – обычный.

Выравнивание – по ширине. Отступ слева – 0 см. Отступ справа – 0 см. Отступ первой строки – 1,25 см (пять знаков). Межстрочный интервал – 1,5. Интервал перед и после каждого абзаца – 0 пт.

Страницы нумеруются арабскими цифрами с соблюдением сквозной нумерации по всему тексту (нумерация страниц - автоматическая). Номер страницы проставляется в центре нижней части листа без точки. В общую нумерацию включают титульный лист, план работы, но номер страницы на них не проставляют. Таким образом, работа начинается с 3-й страницы, номер которой также не проставляется, а первая цифра

нумерации страниц текста появляется на второй странице основной части работы, это цифра «4».

#### **4. Критерии оценивания работы**

Оценка «отлично» ставится, если студент выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности действий; в ответе правильно и аккуратно выполняет все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления; правильно выполняет анализ ошибок.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил требования к оценке "5", но допущены 2-3 недочета.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент выполнил работу не полностью, но объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы; в ходе проведения работы были допущены ошибки.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент выполнил работу не полностью или объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

#### **5. Список рекомендуемой литературы**

##### **5.1. Основная литература:**

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28060.html>

##### **5.2. Дополнительная литература:**

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юрутъ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юрутъ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юрутъ ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20211.html>.