

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
федерального университета

Дата подписания: 12.09.2023 09:48:39

Уникальный программный ключ:

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

**Методические указания
по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Математика»**

Направление подготовки
Направленность (профиль)
Квалификация выпускника
Форма обучения
Год начала обучения

08.03.01 Строительство
Городское строительство и хозяйство
Бакалавр
заочная
2021

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры физики, электроэнергетики и электротехники

протокол № ____ от _____ 2021

Зав.кафедрой ФЭиЭ _____ А.В.Пермяков

Составитель: профессор кафедры ФЭиЭ Янукян Э.Г.

Содержание

Введение	Стр.
Лабораторная работа №1. Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.	6
Лабораторная работа №2. Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.	12
Лабораторная работа №3. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.	14

Введение

Дисциплина «Математика» входит в базовую часть дисциплин подготовки бакалавра направления 08.03.01 «Строительство». Ее освоение происходит в 1,2 семестрах.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения содержания дисциплины студент должен:

знать: элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; основы математической статистики; методологию организации, проведения и обработки данных теоретического и экспериментального исследования.

уметь: эффективно использовать методы математического анализа и математического моделирования в профессиональной деятельности; конструировать и анализировать математические модели объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

владеть: навыками использования компьютерных программ для представления и математической обработки информации; навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач.

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины «Математика».

Тематический план лабораторных работ

№ Темы	Наименование работы	Объем часов	Форма проведения
1 семестр			
1	Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.	1,5	
4	Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.	1,5	
8	Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.	1,5	
Итого за 1 семестр		4,5	

Лабораторная работа № 1.

Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.

Цель работы: выработать умение применять алгоритм выполнения действий над матрицами и вычисления ранга матрицы и применять умения для решения практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Сложение матриц.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью $B - A$ матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X , что $A + X = B$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица O , все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A .

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α , надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \|a_{ij}\| = \|\alpha a_{ij}\|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A .

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i -ой строке и j -ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы B на соответствующие элементы j -го столбца матрицы A .

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Рассмотрим некоторую, не обязательно квадратную матрицу A . Выберем какие-нибудь S номеров строк $i_1, i_2, \dots, i_s$ и S номеров столбцов $j_1, j_2, \dots, j_s$.

Определение. Минором порядка S матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка S , образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M_{\substack{i_1 \dots i_s \\ j_1 \dots j_s}} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка S , сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, \dots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_s$.

Определение. В матрице A размеров $m \times n$ минор порядка S называется базисным, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $S+1$ равны нулю или миноров порядка $S+1$ у матрицы A вообще нет.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $S+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $S+2$, а, следовательно, и всех больших порядков.

Определение. Рангом матрицы называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m \times n$ справедливо соотношение $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

Рассмотрим способы вычисления ранга матрицы:

а) Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице найден минор M k -го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$ -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M : если

все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k + 1)$ -го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Существует только один минор

третьего порядка, окаймляющий выбранный минор M_2 . Вычислим его.

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 7 \cdot (-2) -$$

$$- 3 \cdot 5 \cdot (-3) - 4 \cdot 7 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 7 = -35 - 24 - 42 + 45 + 28 + 28 = 0.$$

Значит, минор M_2 базисный, а ранг матрицы равен его порядку, т.е. $r(A) = 2$.

Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) *Метод элементарных преобразований*

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования:

- 1) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одной строке другой строки;
- 3) перестановку строк;
- 4) такие же преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Теорема. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A) = r$.

В самом деле, $r(A) = r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r :

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r + 1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B . Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B .

Пример: Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение: Поменяем местами первую и вторую строку (т.к. первый элемент второй строки -1 и с ней будет удобно выполнять преобразования). В результате получим матрицу, эквивалентную данной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обозначим i -тую строку матрицы – C_i . Нам необходимо привести исходную матрицу к треугольному виду. Первую строку будем считать ведущей, она будет участвовать во всех преобразованиях, но сама остается без изменений.

На первом этапе выполним преобразования, позволяющие получить в первом столбце нули, кроме первого элемента. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2

$(C_2 - 2C_1)$, к третьей строке прибавим первую $(C_3 + C_1)$, а из третьей вычтем первую, умноженную на 3 $(C_3 - 3C_1)$. Получаем матрицу, ранг которой совпадает с рангом данной матрицы. Обозначим ее той же буквой A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2-3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-3 & \end{pmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую. При этом имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2-3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получена матрица треугольного вида, и можно сделать вывод, что $r(A) = 2$, т. е. числу ненулевых строк. Коротко решение задачи можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2-3-4 & & \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \times C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2-3-4 & & \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1, C_3 + C_1, C_3 - 3C_1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2-3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-3 & \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2-3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

- а) $A+B$;
- б) $A-B$.

Задача 2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = (-1 \ 2 \ 3), \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая-нибудь операция не определена, объясните, почему):

- а) $A+B$;
- б) $B-D$;
- в) $A+B-C$;
- г) A^T+B ;
- д) D^T+F ;
- е) F^T+A .

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

- а) $A-2B$;
- б) $3A+2B$;
- в) $2A-4B$.

Задача 4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = (-1, 2, 3), \quad X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая-нибудь операция не определена, объясните, почему):

- а) $2A+B$;
- б) $2B-D$;
- в) $A+2B-3C$;
- г) $3A^T+B$;
- д) D^T+2X ;
- е) $2X-D$.

Задача 5. Даны квадратные матрицы 2-ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите $A \cdot B$, $B \cdot A$ и $A \cdot B - B \cdot A$.

Задача 6. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 7. Вычислите следующие матричные выражения (если какая-нибудь операция не определена, объясните, почему):

- а) $A \cdot B$ и $B \cdot A$;
- б) $D \cdot C$ и $C \cdot D$;
- в) $A \cdot F$ и $F \cdot A$;
- г) $D \cdot F$ и $F \cdot D$;
- д) $F \cdot A$;
- е) $F^T \cdot A$.

Задача 8. Вычислить ранг матрицы двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 18 & -6 & -12 & -24 \\ 0 & 6 & 7 & 23 & 11 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 13 & 0 \\ 7 & 7 & -6 & 3 & 12 \\ -16 & -11 & -17 & 56 & -36 \end{pmatrix}$$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>

Перечень дополнительной литературы

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Высшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

Лабораторная работа № 2.

Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.

Цель работы: сформировать представление о возможных способах задания прямой на плоскости, выработать умение выбирать соответствующее уравнение для конкретной задачи.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1-й степени и, наоборот, каждое уравнение 1-й степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$, где k – угловой коэффициент прямой, b – начальная ордината.

Пример: Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1)$ и образующей с прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45° .

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0), \text{ т.е. } y - 1 = k_1(x + 2)$$

В равенстве необходимо определить угловой коэффициент k_1 . Для этого воспользуемся условием, что искомая прямая образует с данной прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45° . Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 3$. Тогда имеем:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_2},$$

откуда $1 + 3k_1 = 3 - k_1$, или $k_1 = \frac{1}{2}$. Подставив $k_1 = \frac{1}{2}$, получим: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $x - 2y + 4 = 0$ – искомое уравнение прямой.

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – произвольные числа. Очевидно, A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Замечание. Прямая линия в отрезках отсекает от координатного угла прямоугольный треугольник, площадь которого определяется формулой $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|a||b|$.

Пример. Дана прямая $5x - 3y - 30 = 0$. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатных осей.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках, разделив все члены данного уравнения на 30: $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} = 1$. Из уравнения видно, что $a=6; b=-10$. Следовательно,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|6||-10| = 30 \text{ кв.ед.}$$

Нормальное уравнение прямой: $x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$, где θ – угол, который образует прямая с положительным направлением оси OX .

Пример. Дано уравнение прямой $5x - 12y + 26 = 0$. Привести к нормальному виду.

Решение. Для перехода от общего уравнения прямой к нормальному необходимо обе части общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаком C . В данном уравнении $A=5, B=-12, C=26$. Так как $C > 0$, то нормирующий множитель берем со знаком минус, т.е. $M = -\frac{1}{\pm \sqrt{25 + 144}} = -\frac{1}{13}$.

Умножив на $M = -\frac{1}{13}$ данное уравнение, получим: $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ – нормальное

уравнение прямой: $\cos \theta = -\frac{5}{13}, \sin \theta = \frac{12}{13}, P = 2$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задачи:

Задача 1. Дано общее уравнение прямой $3x - 2y + 12 = 0$. Составьте уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Задача 2. Составьте уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = 2$, проходящей через точку $M(-1;2)$.

Задача 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$ и $M_2(1;-3)$.

Задача 4. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 60 = 0$. Написать:

- 1) уравнение с угловым коэффициентом;
- 2) уравнение в отрезках;
- 3) нормальное уравнение.

Задача 5. Прямая на плоскости отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв.ед.

Вопросы:

1. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости? Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Для каких прямых угловой коэффициент не определяется?
3. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.
4. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках?
5. Запишите нормальное уравнение прямой.
6. Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>

Перечень дополнительной литературы

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Высшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.

Лабораторная работа № 3.

Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Цель работы: сформировать умение вычислять производные неявных, показательных и параметрически заданных функций, производные высших порядков и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Пусть необходимо вычислить производную функции, заданной параметрически, если зависимость y от x задана посредством параметра t :

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

то зависимость y' от x задается посредством параметра t формулами

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y' = \frac{g'(t)}{f'(t)}. \end{cases} \quad (1)$$

Вычисляем $f'(t)$ и $g'(t)$, подставляем в формулу (1) и записываем ответ.

Пример

Найти производную y'_x , если

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}} \frac{\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - (1+\sqrt{1+t^2})}{t^2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получаем

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y' = \frac{1+t^2}{t}. \end{cases}$$

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида $f(x,y)=0$, которое не разрешено относительно y , то y называется неявной функцией x . Несмотря на то, что уравнение $f(x,y)=0$ не разрешено относительно y , оказывается возможным найти производную от y по x . Прием вычисления производной неявной функции состоит в том, что обе части уравнения $f(x,y)=0$ дифференцируются по x с учетом, что y есть функция x . Из полученного уравнения определяется y' .

Пример Найти производную от неявной функции $5x+3y-7=0$.

Дифференцируя по x обе части равенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна 0, получаем $5 + 3y' = 0$; $3y' = -5$; $y' = -\frac{5}{3}$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка. Эта производная сама является функцией от x и, может быть, в свою очередь имеет производную. Производную от функции $y' = f'(x)$ называют *второй производной* (или производной *второго порядка*) от функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f''(x), \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x).$$

Может случиться, что и вторая производная в свою очередь имеет производную; эту производную называют *третьей производной* (или производной *третьего порядка*) от функции $y = f(x)$ и обозначают каким-либо из символов

$$y''', \quad \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad f'''(x), \quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x).$$

Аналогично вводится *четвертая, пятая* и другие производные - производные любого порядка. Для обозначения производной n -го порядка употребляются символы:

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Иногда для указания той переменной, по которой берется производная, пишут

$$y''_{xx}, \quad y''_{xxx}, \quad \dots$$

или, более коротко,

$$y''_{x^2}, \quad y''_{x^3}, \quad \dots$$

Пример

$$y = 2x^3, \quad y' = 6x^2, \quad y'' = 12x, \quad y''' = 12, \quad y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = 0.$$

Пример

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 1, \quad y' = 6x^2 - 10x, \quad y'' = 12x - 10, \quad y''' = 12, \quad y^{(4)} = y^{(5)} = \dots = 0.$$

Пример

$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x$, значения последующих производных чередуются в том же порядке.

Чтобы имело смысл говорить о конечном или бесконечном значении $y^{(n)}$ в точке x_0 , нужно, чтобы $y^{(n-1)}$ как функция от x была определена и конечна в некотором промежутке, содержащем точку x_0 . Таким образом, когда говорят, что в точке x_0 имеется конечная или бесконечная n -я производная, то тем самым подразумевают существование конечной $(n-1)$ -й производной в некотором промежутке, содержащем точку x_0 .

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Вычислить производную функции:

а)

$$1) y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right);$$

$$2) y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right);$$

$$3) y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} \ln \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} \right).$$

б)

$$1. y = (\sin x)^{\sqrt{x}}.$$

$$2. y = x^x 3^{\sqrt{x}}.$$

$$5. y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}.$$

$$6. y = x^{\sqrt{x}} 2^{\sin x}.$$

$$7. y = x^{2^{\cos x}}.$$

$$8. y = x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$9. y = (\sin 3x)^{\ln \sin 3x}.$$

$$10. y = x^{2^x} 3^x.$$

Задание 2. Найти производные n -го порядка заданных функций:

$$1. y = \sin 2x + \cos 3x. \quad 2. y = \sin(3x+1) + \cos 2x. \quad 3. y = 2^{3x}.$$

$$4. y = \ln(2x+4). \quad 5. y = \frac{x}{x+1}. \quad 6. y = \frac{x+1}{2x+3}.$$

$$7. y = 3^{2x+1}. \quad 8. y = \ln(3x+1). \quad 9. y = 5^{2x+4}.$$

$$10. y = \sqrt{x}.$$

Вопросы

1. Какая функция считается заданной неявно?
2. Запишите формулы дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Для дифференцирования каких функций целесообразно применение метода логарифмического дифференцирования?
4. Дайте определение производной порядка n . Как обозначаются производные высших порядков?
5. Опишите особенности дифференцирования функций, заданных параметрически.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>

Перечень дополнительной литературы

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.