МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ
Колледж Пятигорского института (филиала) СКФУ

ЕН. 01 Математика

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Специальности СПО

Специальность 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей

Квалификация: специалист

Пятигорск, 2021 г.

Методические указания для практических занятий по ЕН. 01 Математика составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к подготовке выпуска для получения квалификации техник. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности Специальность 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей

Рассмотрено на заседании ПЦК колледжа Пятигорского института (филиала) СКФУ

Протокол № _8_ от «_22_» ____03____2021 г.

Составитель		А.А. Батдыев
Директор		З.А. Михалина

Пояснительная записка

Для многих студентов значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данных методических указаниях главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры надо добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения для самостоятельной работы студентов.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

- Анализировать сложные функции и строить их графики;
- Выполнять действия над комплексными числами;
- Вычислять значения геометрических величин;
- Производить операции над матрицами и определителями;
- Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;
- Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;
- Решать системы линейных уравнений различными методами

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

- Основные математические методы решения прикладных за-дач;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
- Основы интегрального и дифференциального исчисления;
- Роль и место математики в со-временном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Практическая работа № 1

Тема 1.2. Вычисление предела функции
Цель: Научить вычислять пределы функций
Теоретическая часть
Предел функции

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Определение предела функции можно сформулировать и так: Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки a, что для любого $x \neq a$ из этой окрестности $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел обозначается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Пример 1. Предел постоянной функции в любой точке равен этой же постоянной.
Решение. Пусть $f(x) = k$ для всех x. Очевидно, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ справедливы соотношения $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.
Значит, по определению предела

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k.$$

Пример 2. Дана функциия $f(x) = x$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ - любое число. Положив $\delta = \varepsilon$, для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ получим $|f(x) - a| = |x - a| < \delta$, т. е. $|f(x) - a| < \varepsilon$, значит

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к a, то этот предел единственен.

Теоремы о пределах функции

Теорема 1. Если при x → a существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует также и пределы их суммы, равный сумме пределов функций f(x) и g(x):

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. Если при x → a существуют пределы функций f(x) и g(x), то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций f(x) и g(x):

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.
Действительно,

$$\lim_{x\to a}(kf(x) = \lim_{x\to a} k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3. Если при x → a существуют пределы функций f(x) и g(x) и предел функции g(x) отличен от нуля, то существует также и предел их отношения f(x)/g(x), равный отношению пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x).$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю, то она называется бесконечно малой величиной.
Если предел функции равен бесконечности, т.е. величине обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной. Следовательно, выполняются равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{0} = \infty, \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{\infty} = 0$$

Вычислите пределы

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3) = \lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 3 = 7+3 = 10.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x) + \lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x) + \lim\limits_{x\to 1}(-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x + 2}{\lim\limits_{x\to 1} 2 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x - 7} =$$

$$= \frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7} = 5/(-5) = -1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$

$$=2+2=4.$$

Решение упражнений

1 $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-1)(x-3)(x-5)]$

1. $\lim\limits_{x\to 0}[(2x-4)(x-1)(x+2)]$
2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3x^2+2x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$
8. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$
9. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2+25}$
10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$
11. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$
12. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$
15. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2-5x+6)$
16. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^3+3x^2)$
17. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x}{x-2}$
18. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-8}{2x-2}$
19. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-4x^2+2x}$
20. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-5x+4}{x^2-2x+3}$
21. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2-x}-x$
22. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2+5x}-x$
23. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$
24. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9x}$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$
26. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$
27. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2-x}{3-\sqrt{2x-1}}$

Практическая работа № 2

Тема 1.4: Непрерывность функции. Точки разрыва функции
Цель: Научить исследовать функции на непрерывность, находить точки разрыва функций и исследовать их характер

Теоретическая часть

Непрерывность функции

Определение 1. Функция $f(x)$называется непрерывной в точке $x = a,$ если предел функции при $x \to a$ равен значению функции при $x = a$, т.е.$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Определение 2. Функция$y = f(x)$называется непрерывной в точке $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно маломо приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$/

Если условие непрерывности функции в точке $x = a$ нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Точки разрыва функции.

Если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$при$x \to a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) *разрыв 1 рода* – в этом случае существуют конечные пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$;

2) *разрыв 2 рода* – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Примеры :

1. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер
$$y = \frac{x}{x-3}$$
Даная функция определена при всех значениях x, кроме $x = 3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \to 3$:
$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty,$$
Следовательно, функция $\frac{x}{x-3}$ в точке $x = 3$ имеет бесконечный разрыв , т.е. $x = 3$ – точка разрыва 2 рода.
2. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер
$$y = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$$
Единственной точкой разрыва является точка $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции при $x \to 0$:
$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = 1$$
$$\lim_{x\to +0} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = 0$$
Поскольку левый и правый пределы функции при $x = 0$ являются конечными, $x = 0$ – точка разрыва 1 рода.

Решение упражнений

Найдите точки разрыва функции и исследуйте их характер:

1. $y = \frac{5}{2x-1}$;
2. $y = \frac{1}{x^2}$;
3. $y = \frac{1}{1-x^2}$;
4. $y = \frac{3}{x^2-2x+1}$;
5. $y = \frac{x-1}{x^2-3x-10}$;
6. $y = 1 + 2^{\frac{1}{x-2}}$;
7. $y = \frac{x}{x-2}$
8. $y = 3^{\frac{1}{x}}$
9. $y = arctg\,\frac{1}{x-1}$
10. $y = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3), & x \le 1 \\ 6-5x, & 1 < x < 3 \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases}$

11. $y = \frac{5x^2-3x}{2x}$
12. $y = \frac{1}{x-x^3}$
13. $y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
14. $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Практическая работа №3

Тема 1.6: Вычисление производных высших порядков.

Цель: Научить вычислять производные.

Теоретическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

1. $C' = 0,$ где $C - const$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
5. $(f \cdot C)' = f' \cdot C,$ где $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y''. Аналогично определяются производные 3-го, 4-го,…, порядка.

Решение упражнений

1. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
2. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
3. $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$
4. $y = cosln(1-x^2)$
5. $y = sin\sqrt{3} + \frac{1sin^2 3x}{3cos6x}$
6. $y = ctg\sqrt[3]{5}$-$\frac{1cos^2 4x}{8sin8x}$
7. $y = arcsin^3\sqrt{4-5x}$
8. $y = arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$
9. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6}}$
10. $y = lnsin\frac{2x+4}{x+1}$
11. $y = lntg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
12. $y = ln^3(1 + cos4x)$
13. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + 2^{\pi^{\sqrt{2}}}$
14. $y = \ln arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$
15. $y = e^{-x^2}cos^3(2x+3)$
16. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot arctg^2 2x$
17. $y = \frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$
18. $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
19. y=$(19)^{x^{19}}x^{19}$
20. $y = (ctgx)^{lntg\frac{x}{4}}$

Практическая работа № 4

Тема 1.8: Вычисление неопределенного и определенного интеграла
Цель: Научить вычислять неопределенный и определенный интегралы

Теоретическая часть

Неопределенный интеграл

F(x) - **первообразная** для f(x) на множестве X если F'(x) = f(x) для всех x∈X. Если F(x) - первообразная для f(x) на множестве X, то F(x) + c - множество всех первообразных для f(x) на множестве X. Это множестве первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
$$\int dF(x) = F(x) + C$$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$d\int f(x)d(x) = f(x)d(x)$$
3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
$$\int [f(x) + \varphi(x)]d(x) = \int f(x)\,d(x) + \int \varphi(x)d(x)$$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:
$$\int af(x)d(x) = a\int f(x)d(x)$$

Основные формулы интегрирования

1.$\int dx = x + C$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x}$=$lnx + C$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$

6. $\int sinx\,dx = -cosx + C$

7$\int cosx\,dx = sinx + C$

8.$\displaystyle\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

9.$\displaystyle\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

10.$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a}$+C

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений:

1. $\int xdx$
2. $\int \frac{x}{5}dx$
3. $\int x^5 dx$
4. $\int 7x^6 dx$
5. $\int (7x+1)^3 dx$
6. $\int 10\sin 5xdx$
7. $\int 3(5x+1)^2 dx$
8. $\int (2x-1)^2 dx$
9. $\int \frac{dx}{x^3}$
10. $\int \sqrt[4]{x^3}dx$
11. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$.
12. $\int 3\cos 3xdx$
13. $\int 4(5-6x)^3 dx$
14. $\int \frac{dx}{x^4}$
15. $\int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$
16. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)}$
17. $\int 2\sqrt[3]{(7-3x)^2}dx$
18. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$
19. $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$
21. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$
23. $\int \frac{dx}{25 + x^2}$
24. $\int_0^3 \frac{dx}{9 - x^2}$
25. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$
27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{sin^2 x})$

Практическая работа № 5

Тема 1.10: Числовые ряды. Знакопеременные числовые ряды
Цель: Научить исследовать ряд на сходимость и расходимость

Теоретическая часть

1. *Необходимый признак сравнения ряда.*
   Теорема: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$=0.
   Если же для некоторого ряда его общий член не стремится к нулю, то теорема позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.
2. *Признак сравнения рядов с положительными членами*
   Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда;
   Исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.
   При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрический ряд, гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд.
3. Признак Даламбера: Если для ряда с положительными членами
   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \ (u_n > 0)$$
   выполняется условие $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{u_{n+1}}}{\mathrm{u_n}} = \mathrm{l}$, то ряд сходится при $\mathrm{l} < 1$ и расходится при $\mathrm{l} > 1$.
   Признак Даламбера не дает ответа, если $\mathrm{l} = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Рассмотрим примеры:
Пример 1. Исследовать сходимость ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2^n} + \cdots$$
Решение: Находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$=0. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots + \cdots$ который сходится так как $q = \frac{1}{2} < 1$.
Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства
$$\frac{1}{3\cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5\cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \dots \frac{1}{(2n-1)2^n} < \frac{1}{2^n} \dots$$
т.е. члены ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.
Пример 2. Исследовать сходимость ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots.$$
Решение: Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда; следовательно, ряд расходится.
Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\cdots$$

Решение: Находим
$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$=0. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\cdots$$

Который сходится, поскольку р=$\frac{3}{2}>1$. Следовательно, сходится и данный ряд.
Пример 4. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\cdots+\frac{2n}{5^n}+\cdots$$

Решение: Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число n+1, получим$\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$
Найдем предел отношения (n+1) –го члена к n-му члену при$n\to\infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1$$

Следовательно, данный ряд сходится.
Пример 5. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}=\frac{1}{3}+\frac{1\cdot2}{3^2}+\frac{1\cdot2\cdot3}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{3^n}+\cdots$$

Решение: $u_n=\frac{n!}{5^n}u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$
$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}:\frac{n!}{5^n}$=$\frac{n+1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty>1,$$

Т.е. ряд расходится.

Решение упражнений

I. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:
1. $u_n=\frac{n}{n+1}$
2. $u_n=\frac{2n}{2n-1}$
3. $u_n=\frac{2^n+3}{2^{n+1}}$
4. $u_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$

II. Найдите первые четыре члена по его заданному общему члену:
1. $u_n=\frac{(n+1)!}{2n}$
2. $u_n=\frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$
3. $u_n=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

4. $u_n = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{2n}$
5. $u_n = \frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$
6. $u_n = \frac{n+1}{(2n-1)3^{n-1}}$

III. Найдите формулу общего члена ряда по его данным первым членам
1. $\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{8}{9}+\frac{16}{16}+\cdots$
2. $\frac{1}{9}+\frac{1\cdot2}{25}+\frac{1\cdot2\cdot3}{49}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{81}+\cdots$
3. $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{11}-\frac{5}{14}+\cdots$

IY. Вычислите сумму членов ряда:
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Y. Найдите n-й член ряда по его данным первым членам:
1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$
2. $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots$
3. $\frac{2}{4}-\frac{4}{9}+\frac{6}{16}-\frac{8}{25}+\cdots$

YI. Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак и один из признаков сравнения:
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

Исследуйте сходимость ряда, использую признак Даламбера.
1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot2^{2n-1}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

Практическое занятие № 6

Тема 2.2: Решение дифференциальных уравнений

Цель: Научить решать дифференциальные уравнения.

Теоретическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

6. $C' = 0, где\ C - const$
7. $(f+g)' = f' + g'$
8. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
9. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
10. $(f \cdot C)' = f' \cdot C, где\ C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y''. Аналогично определяются производные 3-го, 4-го,…, порядка.

Решение упражнений

21. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
22. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
23. $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$
24. $y = cosln(1-x^2)$
25. $y = sin\sqrt{3} + \frac{1sin^2 3x}{3cos6x}$
26. $y = ctg\sqrt[3]{5}$-$\frac{1cos^2 4x}{8sin8x}$
27. $y = arcsin^3\sqrt{4-5x}$
28. $y = arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$
29. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6}}$
30. $y = lnsin\frac{2x+4}{x+1}$
31. $y = lntg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$
32. $y = ln^3(1 + cos4x)$
33. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + 2^{\pi^{\sqrt{2}}}$
34. $y = \ln arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$
35. $y = e^{-x^2}cos^3(2x+3)$

36. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot arctg^2 2x$
37. $y = \frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$
38. $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
39. y=$(19)^{x^{19}}x^{19}$
40. $y = (ctgx)^{lntg\frac{x}{4}}$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Уравнение вида $y^` + p(x) = f(x)$ (1)

где $p(x)$ и$f(x)$ - непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) называется *линейным однородным уравнением.*

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным уравнением.*

Для нахождения общего решения такого уравнения сначала решают соответствующее однородное уравнение $y^` + p(x) = 0$, а затем применяют метод вариации постоянной.

Рассмотрим на примере решение линейных дифференциальных неоднородных уравнений первого порядка.

Пример.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^` + ycosx = sin2x$$

Решение.

Найдем общее решение однородного уравнения$y^` + ycosx = 0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -cosxdx$

интегрируя, находим $lny = -sinx + lnC; y = Ce^{-sinx}$. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-sinx}$ методом вариации постоянной, то есть С будем считать не постоянной , а новой неизвестной функцией от x. Дифференцируя, имеем $y = C^` e^{-sinx} - cosxCe^{-sinx}$. Подставляя в данное уравнение выражения для $y$ и $y^`$, получаем

$$C^` e^{-sinx} - cosxCe^{-sinx} + C(x)e^{-sinx}cosx = sin2xC^`(x)e^{-sinx} = sin2xC^`(x) = e^{-sinx}sin2x$$

$$dC = e^{sinx}sin2xdxC(x) = \int e^{sinx} 2sinxcosx$$

Применяя подстановку $sinx = t$ и интегрирование по частям, получим

$$C(x) = 2e^{sinx}(sinx - 1) + C_2$$

Следовательно ,общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-sinx} = \left(2e^{sinx}(sinx - 1) + C_2\right)e^{-sinx} = 2(sinx - 1) + C_2e^{-sinx}$$

Решение упражнений

1. $(1 + y)dx - (x - 1)dy = 0;$
2. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0;$
3. $(1 + y^2)dx - xydy = 0$
4. $y^` - (2y + 1)ctgx = 0$
5. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0;$
6. $x^2y^` + y^2 = 0$
7. $ydx - (x^2 - 4)dy = 0$
8. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$
9. $(2x + 1)dy - y^2dx = 0;$

10. $2dy + (y - 6x)dx = 0$
11. $y^{`} - ytgx = \frac{1}{cosx}$
12. $xy^{`} + y = e^{x}$
13. $xy^{`} - \frac{y}{x+1} = x$
14. $xy^{`} + 2y = x^{2}$
15. $y^{`} + 2y = 4x$
16. $y^{`} + y = cosx$
17. $y^{`} = x + y$
18. $y^{`} + 4y = e^{2x}$
19. $y^{`} - y = e^{x}$

Практическое занятие №7

Тема 3.2: Операции над множествами

Цель: Научить решать задачи, используя основные операции над множествами

Теоретическая часть

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством. Операции над множествами: объединение, пресечение, дополнение, разность, симметрическая разность.
Пример: На фирме работают 40 человек. Из анкетных данных известно, что 20 человек владеют английским языком, 20 человек – компьютером, 14 – делопроизводством. Английским языком и компьютером владеют 9 человек; . английским языком и делопроизводством – 7 человек; компьютером и делопроизводством – 5 человек; английским языком, делопроизводством
И компьютером – 2 человека. Сколько человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством?
Решение: 1) Введем обозначения:
U- множество человек работающих на фирме;
A- множество человек, владеющих английским языком;
B- множество человек, владеющих компьютером;
C- множество человек, владеющих делопроизводством.
Тогда m(U)=40: m(A)=20; m(B)=20; m(C)=14.
Кроме того, известно, что английским языком владеют 9 человек, следовательно, $m(A \cap B) = 9$; английским языком и делопроизводством – 7 человек, следовательно, $m(A \cap \mathrm{C}) = 7$; компьютером и делопроизводством – 5 человек, следовательно, $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 5$; английским языком, делопроизводством и компьютером – 2 человека, следовательно, $m(A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 2$.
Необходимо определить

Разобьем множество M=$A \cup B \cup C$ на 7 попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_7$ и найдем мощности каждого из этих множеств:
а) $A_1 = A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, владеющих английским языком, делопроизводством и компьютером, $m(A_1)$= $m(A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 2$
б) $A_2 = \bar{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, не владеющих английским языком и владеющих компьютером и делопроизводством. Заметим, что$\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = A_1 \cup A_2$, следовательно $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = m(A_1) + m(A_2)$, откуда $m(A_2)$= $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - m(A_1) = 5 - 2 = 3$;
в) A_3= $A \cap \bar{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, владеющих английским языком и делопроизводством и не владеющих компьютером. Заметим, что$A \cap \mathrm{C}$=$A_1 \cup A_3$, следовательно, $m(A \cap \mathrm{C}) = m(A_1) + m(A_3)$, откуда
$m(A_3)$= $m(A \cap \mathrm{C}) - m(A_1)$=7-2=5
г) A_4= $A \cap \mathrm{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком, компьютером и не владеющих делопроизводством. $A \cap \mathrm{B} = A_1 \cup A_4,$ следовательно, $m(A \cap B) = m(A_1) + m(A_4)$, откуда
$m(A_4)$= $m(A \cap \mathrm{B}) - m(A_1)$=9-2=7;
д) $A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \mathrm{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком, компьютером и владеющих делопроизводством.
$\mathrm{C} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$, следовательно, m(C)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_3) + m(A_5)$, откуда, $m(A_5)$= , m(C)- $m(A_1) - m(A_2)$- $m(A_3)$=14-2-3-5=4;
е) $A_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком и делопроизводством и владеющих компьютером B=$A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6$,

m(B)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_4) + m(A_6)$, откуда $m(A_6)$= m(B)- $m(A_1) - m(A_2)$+$-m(A_4) - m(A_6) = 20 - 2 - 3 - 7 = 8$;
ж) $A_7 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком и не владеющих делопроизводством и компьютером. A=$A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_7$, следовательно, m(A)= $m(A_1) + m(A_3)$+ $m(A_4) + m(A_7)$, откуда $m(A_7)$= m(A)- $m(A_1) - m(A_3)$+$-m(A_4) = 20 - 2 - 5 - 7 = 6$;
Окончательно,
M= $A \cup B \cup C$=$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, следовательно, m(M)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_3) + m(A_4) + m(A_5)$+ $m(A_6)$+ $m(A_7)$=$2 + 3 + +5 + 7 + 4 + 8 + 6 = 35$

1) Так как U=M+$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, то m(U) = m(M) + $m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$, откуда $m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$= m(U) − m(M) = 40 − 35 = 5

Следовательно, 5 человек не владеют ни английским языком, ни делопроизводством, ни компьютером.

Решение упражнений

1.Даны множества: $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}, A = \{a, c, e, p\}, B = \{b, d, f, p\}, C = \{a, d, f, q\}$
Выполните следующие операции:
а) $\overline{(A/\bar{B}}/B \cap C)/\bar{\bar{\bar{C}}}$ ∪A
б) $(A \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B/C$;
в) $\bar{A}/\overline{B \cap C}/A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$;
г) $A \cup B \cap \overline{B \cup C}/\bar{B}$;
д) $(A \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$;
е) $(A \cup B \cap \mathrm{C})/(\bar{B} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\overline{A \cup B \cup C})$;
ж)($A \cup (B/A) \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap C/C$
2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна упростите выражения:
а) $\bar{A} \cup (A/\overline{B}) \cup (\bar{A}/\overline{B})$;
б) A∪ $\overline{(\bar{A} \cup B)}$∪ $\bar{B}$;
в) $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B})$
г))$(\bar{A} \cup \overline{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B}) \cap (A \cup B)$
3. Из 276 отобранных студентов экономического вуза 83 изучают математику,95-право, 102-финансы. Кроме того, известно, что 27 из них изучают математику и право, 24-математику и финансы, 20-право и финансы 11-изучают все три предмета. Сколько учащихся не изучают ни одного из этих предметов? Сколько из них изучают финансы, но не изучают ни математику, ни право?
4. Проверочный экзамен по математике содержал три задачи: предел, производная и интеграл. Из 800 студентов задачу с пределом решили 250 человек; с пределом или интегралом – 600 человек. По две задачи решили 400 человек, из них две задачи на предел и производную решили 150 человек, на предел и интеграл – 50 человек. Ни один студент не решил все задачи. 20 студентов не решили ни одной задачи. Только задачу на интеграл решили120 человек. Сколько студентов решили только одну задачу? Сколько человек решили задачу на производную?
5. Кафедра математики обслуживает три факультета: Экономический, финансовый, товароведный. Некоторые преподаватели кафедры могут работать сразу на нескольких факультетах. На финансовом факультете работают 22 преподавателя, на экономическом - 23 преподавателя, на экономическом и товароведном – 36 преподавателей.Только на финансовом факультете работают 10 преподавателей, только на экономическом и товароведном -5 преподавателей. Два преподавателя работают на трех факультетах. Число преподавателей, работающих только на экономическом и финансовом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на финансовом и товароведном факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколь преподавателей работает только на одном факультет?

Практическая работа № 8

Тема 4.2 Решение задач на классическое и статистическое определения вероятности случайного события

Цель: Научить решать задачи на классическое и статистическое определения вероятности случайного события

Теоретическая часть

Классическое определение вероятности Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу, всех исходов (несовместных, единственно возможных, равновозможных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы. Невозможному событию соответствует вероятность равная 0, а достоверному – вероятность равна единице.

Примеры:

Из урны в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение: Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев равно 8. Число случаев благоприятствующих появлению события А, равно3. Получим

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

Решение упражнений

1. Герман из повести А.С. Пушкина «Пиковая дама» вынимает 3 карты из колоды в 52 листа. Найдите вероятность того, что это будут: тройка, семерка, туз.
2. В ящике лежат 15 красных, 9 синих, и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих, 3 красных шара.
3. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже.
4. В урне 10 шаров, из которых 2 белых,3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета.
5. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные.
6. Коллектив, включающий четырех женщин и троих мужчин, разыгрывает 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины.
7. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.
8. В урне 6 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажутся 2 белых и 1 черный шар.
9. Юноша забыл две последние цифры телефонного номера своей знакомой и помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер будет набран правильно?

Практическая работа № 9

Тема 5.1.1: Вычисление площадей поверхностей многогранников

Цель: Научить решать задачи на вычисление площадей поверхностей многогранников

Теоретическая часть

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

$$S_{\text{бок.пов.пр.ппризм}} = P_{\text{осн.}}h; S_{\text{бок.пов.пр.ппирамыд}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн.}}l.$$

Решение задач по теме "Вычисление площадей поверхностей многогранников".

Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1? (6)

Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности. (24 м^2)

Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) *n* раз? (в 4 раза, в 9 раз, в n^2 раз)

Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1? ($\sqrt{3}$)

Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?($2\sqrt{3}$)

Чему равна площадь поверхности икосаэдра с ребром 1? ($5\sqrt{3}$)

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см. (300 см^2)

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы. (132 см^2)

Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см. (248 см^2)

Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота равна 4 см. (60 см^2)

Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см. (18 см^2)

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания 4 см и высотой 2 см. (48 см^2)

Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все её рёбра: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз? (в 4 раза; в 25 раз)

Развёртка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 м^2. Найдите площадь грани пирамиды. (20 м^2)

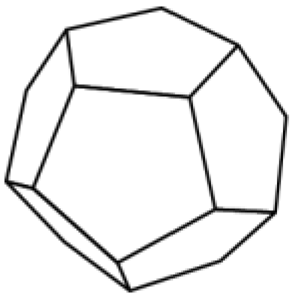
Практическая работа № 10

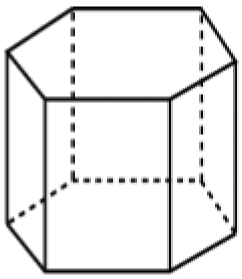
Тема 5.1.2 Вычисление площадей призмы, куба, пирамиды

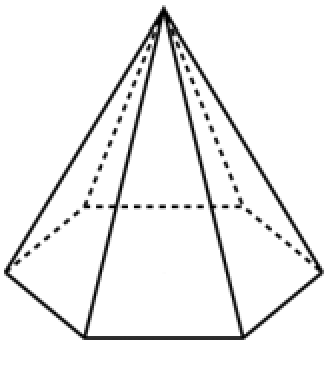
Цель: Научить решать задачи на вычисление площадей поверхностей призмы, куба, пирамиды

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.







$$S_{\text{бок.пов.пр.ппризм}} = P_{\text{осн.}} h, S_{\text{бок.пов.пр.ппирамыд}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} l.$$

Проверочная работа

I уровень

Вариант I

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы - ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Вариант II

1. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 9 см, а диагональ боковой грани равна 15 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы - ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности - 240 см2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

II уровень

Вариант I

1. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы имеет площадь 16 дм2. Диагональ основания призмы равна 4√2 дм. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагонали двух смежных боковых граней, имеющих общую вершину.

Вариант II

1. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и катетом 20 см. Меньшая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Высота правильной четырехугольной призмы равна 1 дм, а площадь боковой поверхности равна 16 дм2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагональ нижнего основания, и противолежащую вершину верхнего основания.

III уровень

Вариант I

1. Основание прямой призмы - равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом при вершине 120°. Диагональ наибольшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 60°. Найдите площадь боковой грани и полной поверхности призмы.

2. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна Q. Сечение призмы, проходящее через диагональ нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, образует с плоскостью основания призмы угол α. Найдите площадь сечения.

Вариант II

1. Основание прямой призмы - равнобедренный треугольник с основанием $6\sqrt{3}$ см и углом при основании 30°. Диагональ меньшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 45°. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Сечение призмы, проходящее через середину бокового ребра и диагональ основания, не пересекающую данное ребро, образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь сечения.

Практическая работа № 11

Тема 5.2: Вычисление объемов многогранников

Цель: Научить решать задачи на вычисление объемов многогранников

Теоретическая часть

Прямоугольный параллелепипед - это объемная фигура, у которой шесть граней, и каждая из них является прямоугольником.

Прямоугольный параллелепипед - параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты.

Формула для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда

$$\mathbf{V = a \cdot b \cdot h}$$

где

где V - объем прямоугольного параллелепипеда

a - длина,

b – ширина,,

h- высота.

Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания:

$$\boldsymbol{V = S \cdot h}$$

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:
где $\boldsymbol{S}$ – площадь основания, $\boldsymbol{H}$ – высота пирамиды.

Формула объема усеченной пирамиды представляет собой одну треть произведения высоты на сумму площадей верхнего и нижнего основания с их средним пропорциональным:

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right)$$

Решение упражнений

1.Существует ли призма, имеющая 50 рёбер? 54 ребра?

Решение: Число ребер n – угольной призмы 3n, поэтому призмы, имеющей 50 ребер, не существует, а 54 ребра имеет 18-угольная призма.

2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 12 см , диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём параллелепипеда.

3. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10, 12. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём призмы.

4. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 2. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро увеличить в 3 раза.

Решение. Пусть ребра данного параллелепипеда равны a, b и c. Тогда имеем: V=abc=2. После увеличения каждого ребра в 3 раза его объём будет равен

V=3a*3b*3c =27 abc=27*2=54.

Ответ: 54.

5. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 30 см. Если в него налить 30 л. воды, то до верхнего края останется 5 см. Сколько литров воды нужно, чтобы наполнить пустой аквариум доверху?

Решение. Пусть V и H соответственно объем и высота параллелепипеда.

V=SH . По условию V=30,H=25, тогда 25*S=30.

После заполнения пустого аквариума доверху H=30. Значит, 30*S=V.

Найдем отношение $\frac{25S}{30S} = \frac{30}{V}$, V=36 л.

Ответ: 36.

6. Кубик весит 10 гр. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала.

Решение. Пусть V- объём данного параллелепипеда. После увеличения каждого ребра в 3 раза, его объём будет равен 27 V.

$\frac{V}{27V} = \frac{10}{x}$, x=270 гр.

Ответ: 270.

7. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 32. Чему будет равен объём параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в 2 раза.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд той же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого. Ответ выразите в сантиметрах.

9. Закрытый сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами 30, 40 и 45 см. стоит на горизонтальной поверхности таким образом, что наименьшая грань является дном. В сосуд налили воду до уровня 36 см. На каком уровне окажется вода, если сосуд поставить на наибольшую грань? Ответ дайте в сантиметрах.

10.Дано: ABCD - правильная пирамида. AB = 3; AD = $2\sqrt{3}$ (рис. 3).
Найти: а) Sосн.; б) AO; в) DO; г) V.

11. Дано: ABCDF - правильная пирамида. $\angle FCO = 45°$; FO = 2 (рис. 4).

Найти: а) Sосн.; б) V.

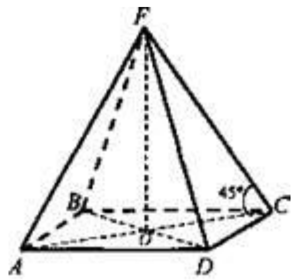


Рис. 4

Решение:

1) Рассмотрим ΔFOC: $\angle O = 90°$, $\angle C = 45°$, значит, $\angle F = 45°$. Следовательно, ΔFOC - равнобедренный, OC ≈ FO = 2.

2) AC = 2OC = 4. d = AC = $AD\sqrt{2}$ (по свойству диагонали квадрата, d2 = 2a2).
Тогда $AD = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

3) ABCD - квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$

4) $V = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot h.$ $V = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \dfrac{16}{3} = 5\dfrac{1}{3}.$

(Ответ: а) 8; б) 5·1/3.)

12. Дано: ABCDEKF - правильная пирамида. FO ⊥ (ABC), FM ⊥ AK, FO = 4, FM = 5 (рис. 5).

Найти: а) Sосн.; б) V.

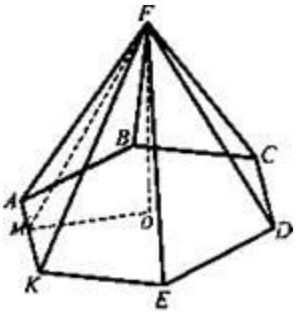


Рис. 5

Решение:

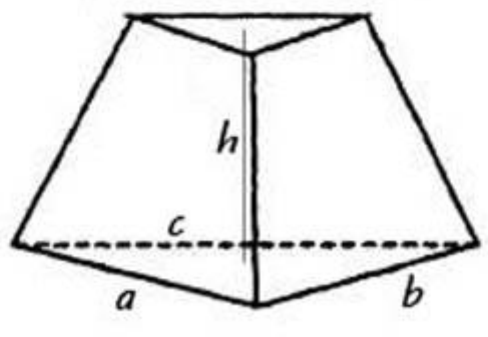
1) Рассмотрим ΔFOM: $\angle O = 90°$ (так как $FO \perp (ABC)$, значит, $FO \perp OM$) $FO = 4$, $FM = 5$. $OM = \sqrt{MF^2 - FO^2}$ (по теореме Пифагора), $OM = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$. $OM = r$ (r - радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник). $AK = 2r \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$

2) $S_{осн.} = 6S_{\Delta AOK}$, $S_{AOK} = \frac{1}{2} AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$. $S_{осн.} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

3) $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$; $V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

(Ответ: а) $18\sqrt{3}$, б) $24\sqrt{3}$.)

13.Задача: Дана треугольная усеченная пирамида. Ее высота ***h*** = 10 см, стороны одного из оснований равны ***a*** = 27 см, ***b*** = 29 см, ***c*** = 52 см. Периметр второго основания равняется ***P2***=72 см. Найдите объем пирамиды.



Для расчета объема нам потребуется площадь оснований. Зная длины сторон одного треугольника, мы можем рассчитать площадь по формуле Герона. Для этого потребуется найти полупериметр:

$$P_1 = 27 + 29 + 52 = 108 cm$$

$$P_1 = \frac{108}{2} = 54 cm$$

Теперь найдем S2:

$$S_1=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_1=\sqrt{54(54-27)(54-29)(54-52)}=\sqrt{54\times27\times25\times2}=\sqrt{72900}=270cm^2$$

Зная, что пирамида усеченная, делаем вывод, что треугольники, лежащие в основаниях подобны. Коэффициент подобия этих треугольников можно найти из соотношения периметров. Отношение площадей треугольников будет равно квадрату этого коэффициента:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{P_1^{\ 2}}{P_2^{\ 2}}=\frac{108^2}{72^2}=\frac{9}{4}$$

$$S_2=\frac{4S_1}{9}$$

$$S_2=\frac{4\times270}{9}=120cm^2$$

Теперь, когда мы нашли площади оснований усеченной пирамиды, можем легко рассчитать ее объем:

$$V=\frac{1}{3}\times10\times\left(270+\sqrt{270\times120}+120\right)=\frac{10}{3}(270+180+120)=\frac{10}{3}\times570=1900cm^3$$

Таким образом, вычислив коэффициент подобия и рассчитав площадь оснований, мы нашли объем заданной усеченной пирамиды.

14. Дано: A1A2A3A4 - ромб, SA1A2A3A4 - пирамида, A1A4 = a, ∠SBO = β, OB ⊥ A3A4, ∠A2A1O = a (рис. 6).

Найти: V - ?

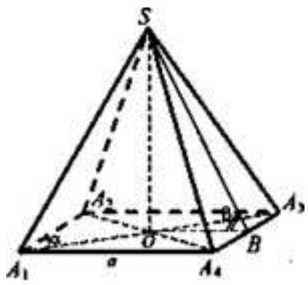


Рис. 6

Решение:

1) Рассмотрим $\Delta OA_3A_4: OA_3=a\cos\alpha,\qquad \Delta OA_3B: OB=a\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}a\sin2\alpha.$

2) ΔSOB: $SO=\frac{1}{2}a\sin2\alpha\operatorname{tg}\beta.$

3) $S_{осн.}=4S_{\Delta A_3OH_4}=4\cdot\frac{1}{2}a\cdot OB=2a\cdot\frac{1}{2}a\sin2\alpha\ =a^2\sin2d$

4) $V_{пир.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot SO,\ V_{пир.}=\frac{1}{3}\cdot a^2\sin2\alpha\cdot\frac{1}{2}a\sin2\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$

(Ответ: $\frac{1}{6}a^3 \sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\beta.$)

Практическая работа № 12

Тема 5.3: Исследования на экстремум в задачах на объемы многогранников

Цель: Научить решать задачи на нахождение экстремума

Теоретическая часть

Уже в глубокой древности возникали ситуации, когда требовалось решать задачи на экстремум. Одна из первых, дошедших до нас, задач подобного рода связана с легендой об основании города Карфагена. Как повествует в «Энеиде» римский поэт Вергилий, давным-давно финикийская царевна Дидона с небольшим отрядом преданных ей людей покинула родной город Тир, спасаясь от преследований своего брата тирана Пигмалиона. Ее корабли отправились на запад по Средиземному морю и плыли, пока Дидона не облюбовала удобное для поселения место на африканском побережье, в нынешнем Тунисском заливе.Высадившиеся финикийцы были встречены не очень гостеприимно местными жителями, нумидийцами. Король нубидийцевЯрб воинственно и презрительно разговаривал с непрошеной гостьей. Он принял драгоценности, предложенные Дидоной для покупки земли, но решительно заявил, что взамен он согласен уступить ей лишь клочок земли, «который можно окружить бычьей шкурой». Царевна безропотно согласилась. Ярб понял хитрость и коварство финикиянки слишком поздно: Дидона приказала разрезать шкуру на очень тонкие ремни и сшить их. Получив, таким образом, тонкий, но очень длинный ремень, она отгородила им от берега значительную территорию. Простодушный, но честный Ярб не стал отказываться от данного слова. А Дидона на этом месте основала город Карфаген. В память об этой истории карфагенская крепость была названа «Бирса», что на языке обитателей Карфагена означает «бычья шкура».

Легенда относит события к 825 году до н.э. и нам, конечно, судить об их достоверности трудно. Но для нас интересна математическая задача, которую, видимо, пришлось решать Дидоне. Предположим, что длина изготовленного тонкого ремня равна 600м. Тогда на современном языке задача Дидоны формулируется так:

Задача. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу моря, а три другие огораживаются ремнем, длина которого 600м. Каковы должны быть стороны этого участка, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Пусть одна сторона прямоугольника равна x м, тогда другая сторона равна (600 – 2x)м. Площадь прямоугольника будет функцией от переменной x: $y = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$, область определения которой (0; 300).

Найдем наибольшее значение этой функции на промежутке (0; 300). Производная этой функции $y' = 600 - 4x$. Критическая точка найдется из уравнения $600 - 4x = 0$ $x = 150$. Исследуем знак производной на каждом интервале

(0; 150) $y' > 0$
(150; 300) $y' < 0$

Так как при переходе через точку х = 150 производная меняет знак с плюса на минус, то при х = 150 функция имеет максимум. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник со сторонами 150 м и 300 м. Найдем площадь огороженного участка земли S = 45000 м^2.

Мы решили задачу Дидоны, считая, что участок имеет форму прямоугольника. Решение подобных задач, если форма границы – кривая линия вызвало к жизни новый важный раздел математики – вариационное исчисление, в котором основным понятием является не функция, а функционал. В настоящее время этот раздел плодотворно используется во многих областях математики, физики, техники, экономики.

- В повседневной жизни, в практических задачах часто возникает необходимость определения условий, при которых мы получаем наилучшие результаты труда.

Задача. Из прямоугольного листа жести размером 25 х 40 см надо изготовить открытую коробку наибольшего объема. Для изготовления коробки надо вырезать квадратные уголки. В зависимости от длины вырезаемого квадрата получаются коробки, имеющие различные объемы. Поэтому необходимо рассчитать размеры вырезаемых квадратов, при которых коробка имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через х. Дном коробки является прямоугольник, стороны которого равны а = 25 – 2х и в = 40 – 2х. Высота коробки равна х. Следовательно, объем коробки равен V = (25 – 2х)(40 – 2х)х, т.е. является функцией от переменной х.

$y = (25 – 2x)(40 – 2x)x = 4x^3 – 130x^2 + 1000x$

Область определения этой функции промежуток (0; 12,5). Найдем экстремумы этой функции.

$y' = (4x^3 – 130x^2 + 1000x)' = 12x^2 – 260x + 1000$

$12x^2 – 260x + 1000 = 0$

Критические точки функции х1 $\approx$ 16,7 – не входит в область определения функции.

$x^2 = 5$

Определим знак производной в промежутках

(0; 5) $y' > 0$
(5; 12,5) $y' < 0$

Так как при переходе через точку х = 5 производная меняет знак с плюса на минус, то при х = 5 функция $y = (25 – 2x)(40 – 2x)x = 4x^3 – 130x^2 + 1000x$ имеет максимум.

Следовательно, коробка будет иметь наибольший объем при вырезании квадратов со стороной 5 см. Найдем объем полученной при этом коробки: V(5) = 2250см^3.

Задача. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3В, а внутреннее сопротивление равно 2Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, находится по формуле $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$. Обозначим сопротивление прибора R = x. С учетом данных задачи составим функцию $y = P(x) = \frac{9x}{(2+x)^2} = \frac{9x}{x^2+4x+4}$. Область определения этой функции промежуток (0; + ∞). Исследуем полученную функцию на экстремум.

$$y' = P'(x) = \left(\frac{9x}{x^2+4x+4}\right)' = \frac{36-9x^2}{(x^2+4x+4)^2}$$

Критические точки найдутся из уравнения $36 - 9x^2 = 0$.

$x_1 = -2$ точка не входит в область определения функции.
$x_2 = 2$
Найдем знак производной на каждом промежутке

(0; 2) $y' > 0$
(2; $+\infty$) $y' < 0$

Так как при переходе через точку x = 2 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Значит, мощность, потребляемая прибором, будет наибольшей, если сопротивление его равно 2 Ом.

Решение упражнений

1. Из всех прямых параллелепипедов с данной площадью полной поверхности S и квадратным основанием найти тот, который имеет наибольший объем.
2. Из прямоугольного листа жести со сторонами 80и 50 смтребуется изготовит открытый сверху ящик наибольшего объема, отрезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовать боковые стенки. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов?
3. Из всех прямых параллелепипедов с данным объемом и квадратным основанием найдите тот, который имеет наименьшую площадь полной поверхности.
4. Найдите размеры открытого (без крышки) ящика с квадратным дном, имеющего наименьшую площадь полной поверхности при заданном объеме.
5. Вычислите размеры открытого ящика с квадратным дном, имеющего наибольший объем, если общая площадь поверхности боковых стенок и дна равна S.

Практическая работа № 13

Тема 5.4: Исследования на экстремум в задачах на объемы фигур вращения

Цель: Научить решать задачи на нахождение экстремума

Каковы должны быть размеры консервной банки цилиндрической формы, чтобы на её изготовление пошло наименьшее количество материала, если объем банки 0,5 литра?

Во-первых, литр – это единица объёма. $1\,л = 1\,дм^3 = 10 \times 10 \times 10\,см = 1000\,см^3$

А теперь очень важный момент: так как размеры банки, очевидно, выразятся в сантиметрах, то 0,5 литра следует сразу перевести в кубические сантиметры!

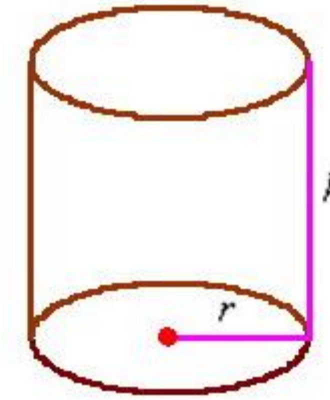
К слову, что это за размеры? Цилиндр стандартно определяется радиусом основания r и высотой h. Во-вторых.

площадь круга: $S_{кр} = \pi \cdot r^2$

площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi rh$

объём цилиндра: $V = \pi \cdot r^2 h$

***Решение**: составим функцию площади полной поверхности цилиндра $s(r)$, зависящую от его радиуса. Пусть r см – радиус дна (и крышки) консервной банки:*



Тогда площадь дна: $S_{кр} = \pi \cdot r^2\ см^2$*. Столько же и площадь крышки.*

По условию объём консервной банки равен $0{,}5\ л = 500\ см^3$*:*

$$V = \pi \cdot r^2 h = 500 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{500}{\pi r^2}\ см$$

Выразим через r *площадь боковой поверхности банки:*

$$S_{бок} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = \frac{1000}{r}\ см^2$$

Площадь полной поверхности банки равна сумме площадей дна, крышки и боковой поверхности:

$$s(r) = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r} = 2\pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r}$$

Найдём критические точки:

$$s'(r) = \left(2\pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r}\right)'_r = 2\pi \cdot 2r - \frac{1000}{r^2} = \frac{4(\pi \cdot r^3 - 250)}{r^2} = 0$$

$$r^3 = \frac{250}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5^3}{\pi}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$ *– критическая точка.*

Проверим выполнение достаточного условия экстремума:

$$s''(r) = \left(4\pi \cdot r - \frac{1000}{r^2}\right)'_r = 4\pi + \frac{1000 \cdot 3}{r^3}$$

$$s''\left(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1000 \cdot 3}{\frac{250}{\pi}} = 4\pi + 12\pi = 16\pi > 0$$

, значит, функция $s(r)$ *достигает минимума в точке* $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

Высота оптимальной банки:

$$h=\frac{500}{\pi r^2}=\frac{500}{\pi\cdot\left(5\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)^2}=\frac{500\cdot\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi\cdot 25\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}}$$

***Ответ**: радиус основания оптимальной банки:* $r=5\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\ см\approx 4{,}3\ см$ *, её высота:* $h=\frac{20}{\sqrt[3]{4\pi}}\ см\approx 8{,}6\ см$

Практическое занятие № 14

Тема 5.5: Вычисление объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла

Цель: Научить вычислять с помощью определенного интеграла объемы фигур вращения

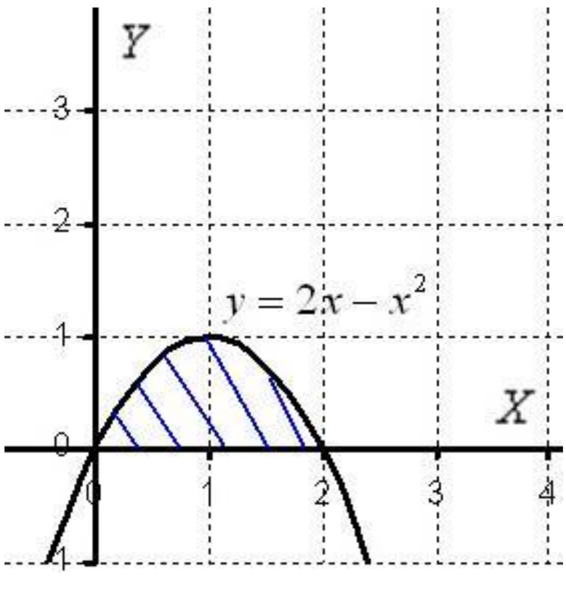
Теоретическая часть

Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX.

<u>Пример 1</u>

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг оси OX.

Решение: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y=2x-x^2$, $y=0$.



Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси OX

Как вычислить объем тела вращения?

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом интеграл всегда неотрицателен, что весьма логично.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

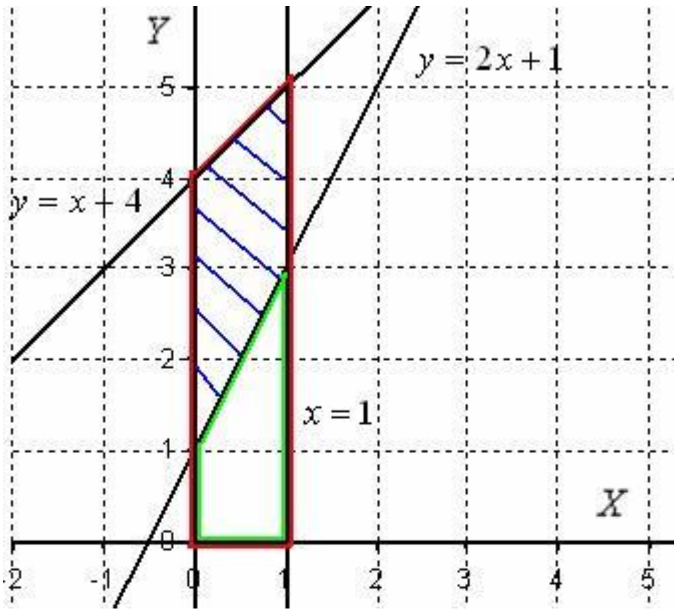
$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15} ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$ и $x = 1$

Решение: Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$, не забывая при этом, что уравнение $x = 0$ задает ось OY:



Искомая фигура заштрихована..

Объем тела вращения вычислим как *разность объемов тел*.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси OX получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси OX, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2.

И, очевидно, разность объемов $V = V_1 - V_2$ – в точности объем нашей фигуры. Используем стандартную формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

1) Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой $y = x + 4$, поэтому:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2 + 8x + 16)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} + 4 + 16\right) = \frac{61\pi}{3}$$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой $y = 2x + 1$, поэтому:

$$V_2 = \pi\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi\int_0^1 (4x^2 + 4x + 1)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{4}{3} + 2 + 1\right) = \frac{13\pi}{3}$$

3) Объем искомого тела вращения: $V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$

Ответ: $V = 16\pi\ ед.^3 \approx 50{,}3\ ед^3.$

Вычисление объема тела, образованного вращением
плоской фигуры вокруг оси Оу

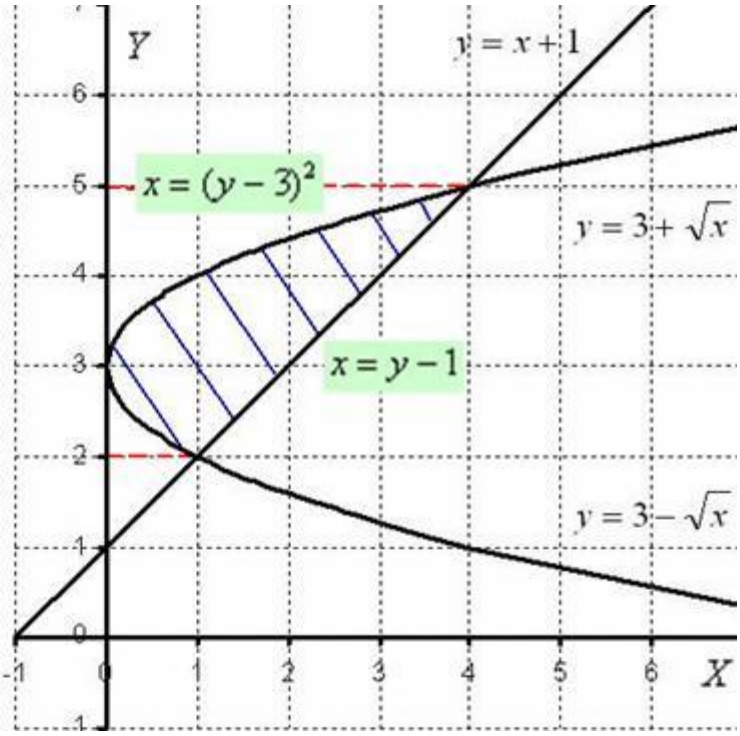
Пример 3

Дана плоская фигура, ограниченная линиями $y = 3 + \sqrt{x}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $y = x + 1$.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси OY.

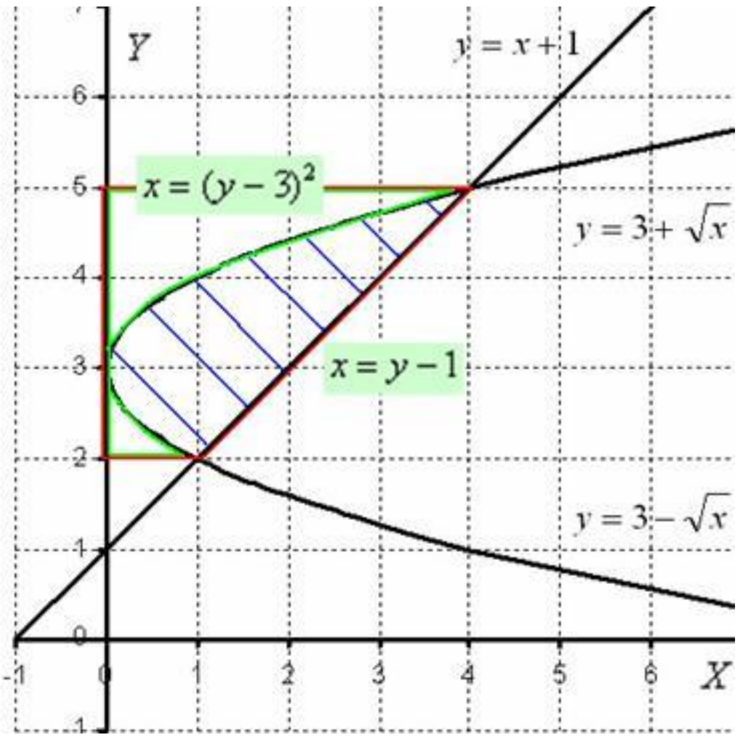
Решение:

1) Выполним чертёж:



2) Вычислим объем тела, образованного вращением данной фигуры, вокруг оси OY .

Перерисуем чертеж немного в другом оформлении:



Итак, фигура, заштрихованная синим цветом, вращается вокруг оси OY . Для нахождения объема тела вращения будем интегрировать по оси OY .

Вращаем фигуру, обведенную красным цветом, вокруг оси OY , в результате получается усеченный конус. Обозначим этот объем через V_1.

Вращаем фигуру, обведенную зеленым цветом, вокруг оси OY и обозначаем через V_2 объем полученного тела вращения.

Объем нашей фигуры равен разности объемов $V = V_1 - V_2$.

Используем формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 ((y-3)^2)^2 dy = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 (y-3)^4 dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(y-1)^3\Big|_2^5 - \frac{\pi}{5}(y-3)^5\Big|_2^5 = \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{5}(32-(-1)) = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}$$

Ответ: $V = \frac{72\pi}{5}$ $ед.^3 \approx 45{,}24\, ед^3.$

Пример 6

Дана плоская фигура, ограниченная линиями $x = 2$, $y = -\ln x$ и осью OX.

1) Перейти к обратным функциям и найти площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями, интегрированием по переменной y.
2) Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси OY.

Это пример для самостоятельного решения. Желающие также могут найти площадь фигуры «обычным» способом, выполнив тем самым проверку пункта 1). А вот если, повторюсь, будете вращать плоскую фигуру вокруг оси OX, то получится совершенно другое тело вращения с другим объемом, кстати, правильный ответ $(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2)\pi\, ед.^3 \approx 0{,}59\, ед^3.$ (тоже для любителей порешать).

Полное же решение двух предложенных пунктов задания в конце урока.

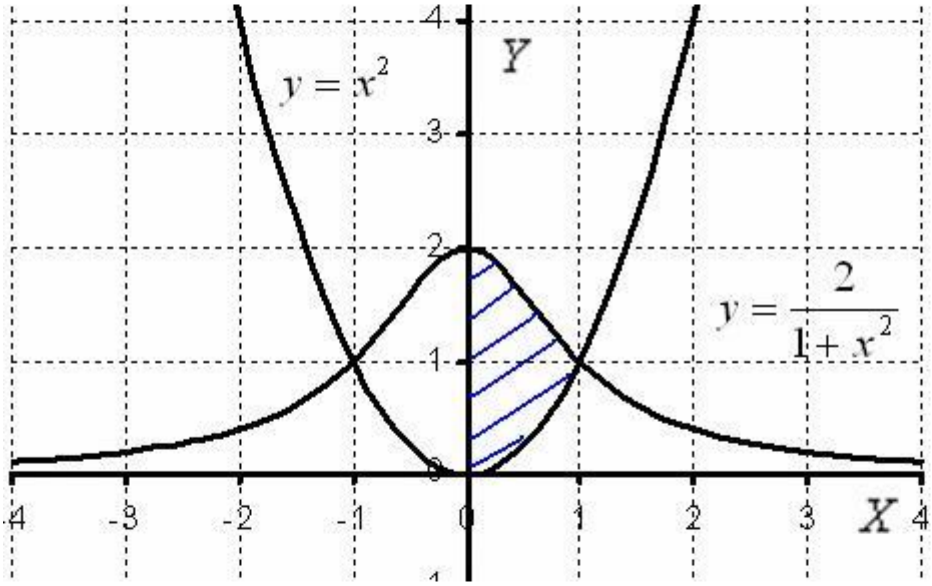
Да, и не забывайте наклонять голову направо, чтобы разобраться в телах вращения и в пределах интегрирования!

Хотел, было уже, закончить статью, но сегодня принесли интересный пример как раз на нахождение объема тела вращения вокруг оси ординат. Свежачок:

Пример 7

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.

Решение: Выполним чертеж:



Для цели нахождения объема тела вращения достаточно использовать правую половину фигуры. Обе функции являются четными, их графики симметричны относительно оси OY , симметрична и наша фигура. Таким образом, заштрихованная правая часть, вращаясь вокруг оси OY , непременно совпадёт с левой нештрихованной частью.

Перейдем к обратным функциям, то есть, выразим «иксы» через «игреки»:

$$y = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

Обратите внимание, что правой ветке параболы $y = x^2$ соответствует обратная функция $x = \sqrt{y}$. Левой неиспользуемой ветке параболы соответствует обратная функция $x = -\sqrt{y}$. В таких случаях нередко возникают сомнения, какую же функцию выбрать? Сомнения легко, развеиваются, возьмите любую точку правой ветки и подставьте ее координаты в функцию $x = \sqrt{y}$. Координаты подошли, значит, функция $x = \sqrt{y}$ задает именно правую ветку, а не левую.

Теперь замечаем что:

– на отрезке $[0;1]$ над осью OY расположен график функции $x = \sqrt{y}$;

– на отрезке $[1;2]$ над осью OY расположен график функции $x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$;

Логично предположить, что объем тела вращения нужно искать уже как сумму объемов тел вращений!

Используем формулу:

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy$$

В данном случае:

$$V = V_1 + V_2 = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy + \pi\int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2}{y} - 1}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 ydy + \pi\int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1\right)dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}(y^2)\Big|_0^1 + \pi(2\ln y - y)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(1-0) + \pi(2\ln 2 - 2 - 0 + 1) = \frac{\pi}{2} + \pi(2\ln 2 - 1) = \pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $V = \pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ *ед.*$^3 \approx 2,78$ *ед.*^{3}

Решение упражнений

Вычислите объемы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями:

1. $y^2 = 4x, y = 0, x = 4$ вокруг оси Оx
2. $y = x^2 - 9, y = 0$ вокруг оси 0x
3. $x - 2y + 6 = 0, y = 0, x = 2$ вокруг оси 0x
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0$ вокруг оси 0x
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0\ x = a, x = 2a$ вокруг оси 0x
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x = 0$ вокруг оси 0y
7. $x + 2y - 4 = 0, y = 0, x = 2$ вокруг оси 0x
8. $y^2 = x, y = 0, x = 1, x = 4$ вокруг оси Оx
9. $y^2 = 2(x + 2), y = 0, x = 4$ вокруг оси Оx
10. $y = x^2 - 1, y = 0$ вокруг оси 0x

Практическая работа № 15

Тема 5.6 Исследования на экстремум в задачах на площади поверхностей фигур вращения

Цель: Научить решать задачи на нахождение экстремума

При решении задач на экстремум учащиеся нередко испытывают трудности в составлении аналитической записи функции, описывающей условие задачи. Причиной этому часто бывает нерациональный выбор независимой переменной. Ее желательно выбрать так, чтобы более коротким путем получить аналитическое выражение данной функции и чтобы выражение было более простым.

Решение задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения геометрической величины с помощью общего метода, основанного на применении производной, не всегда является рациональным. Иногда к цели можно прийти быстрее и более коротким путем, используя элементарные методы и приёмы.

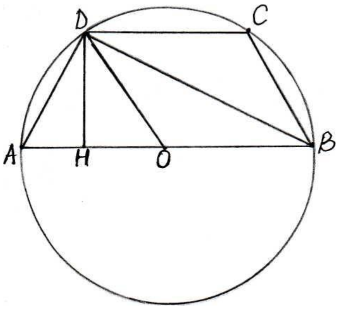
Задача № 1.

В окружность радиуса R вписана трапеция ABCD, основание AB которой является диаметром окружности. Какова должна быть длина боковой стороны трапеции, чтобы трапеция имела наибольшую площадь?

Решение:

1 способ.

В задаче требуется найти длину боковой стороны трапеции, при которой площадь трапеции будет наибольшей. Ее можно принять за независимую переменную, затем через неё и радиус R окружности выразить площадь трапеции. Обычно учащиеся решают таким способом.



2 способ.

Пусть высота трапеции DH = x. Из прямоугольного $\triangle$ODH

(O – центр окружности) находим: $OH = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Значит, $BH = R + \sqrt{R^2 - x^2}$, и получим:

$S = (R + \sqrt{R^2 - x^2})x$, где 0 < x < R – простое по форме выражение для функции S. Однако вычисление производной требует более сложных выкладок, чем при решении задачи первым способом.

3 способ.

Пусть BH = x, тогда AH=2R - x. Из свойства высоты прямоугольного ?ABD имеем: $DH = \sqrt{x(2R - x)}$ и, следовательно,

$S = x\sqrt{x(2R - x)}$, R< x <2R.

Производная функции $S^2 = 2Rx^3 - x^4$ находится проще, чем при решении задачи первым и вторым способом. Задачу можно решить и без использования производной.

Так как $3S^2 = (6R - 3x) \cdot x \cdot x \cdot x$. В правой части - произведение переменных, сумма которых постоянна и равна 6R. Это произведение принимает наибольшее значение в случае их равенства, т.е. $x = 6R - 3x$, откуда

$x = 3/2R$. При этом AH=1/2R и AD=OD=R.

4 способ.

Пусть $\angle BAD = x$. Тогда $BD=2R\sin^2 x$, $DH=2R\sin x\cos x$.

Находим:

$S=4R^2\sin^3 x\cos x$, $45^0 < x < 90^0$,

$S' = 0$ при $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, т.е. при $x = 60^0$. Остаётся сравнить значение функции S в критической точке со значениями на концах промежутка $[45^0, 90^0]$.

5 способ.

Введем независимую переменную $\angle AOD = x$, площадь трапеции, равна сумме площадей треугольников AOD,BOC и COD. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}R^2(2\sin x + \sin(180^0 - 2x)), 0^0 < x < 90^0.$$

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции:

$$f(x) = 2\sin x + \sin 2x.$$

Ее производная $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x.$

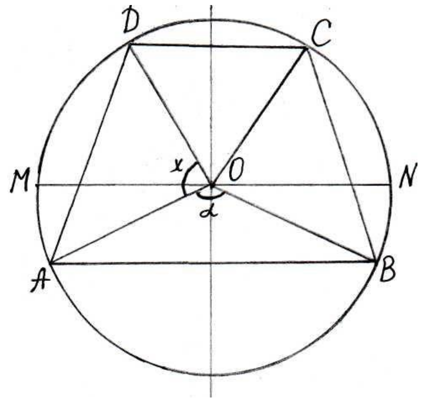
Критические точки получим, решив уравнение: $\begin{array}{l}\cos x + \cos 2x = 0\\ при\, 0^0 < x < 90^0.\end{array}$

Задача № 2.

В окружность радиуса R вписана трапеция ABCD с основанием AB. При какой длине стороны AD площадь трапеции будет наибольшей, если

$\angle AOB = \alpha$, где O – центр окружности?

Решение:



пусть $\angle AOD = \angle BOC = x$. Площадь $\triangle$AOD:

$S(AOD) = \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha.$ Найдём площади треугольников: AOD, BOC и COD.

Учитывая, что $\angle COD = 360^0 - (\alpha + 2x),$ получим:

$$S = \frac{1}{2}R^2(2\sin x - \sin(\alpha + 2x) + \sin\alpha).$$

Проведём диаметр M? окружности параллельно основанию AB трапеции. Площадь трапеции не может быть наибольшей, если хорды AB и CD будут лежать по одну сторону от M?. Поэтому следует считать, что $90^0 \le x + \frac{\alpha}{2} \le 180^0, где\, 0^0 < \alpha \le 180^0.$

Функция S имеет наибольшее значение одновременно с функцией

$$f(x) = 2\sin x - \sin(\alpha + 2x),$$
$$90^0 - \frac{\alpha}{2} \le x \le 180^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Найдём производную этой функции:

$$f'(x) = 2(\cos x - \cos(\alpha + 2x)) = 4\sin\frac{\alpha + x}{2}\sin\frac{\alpha + 3x}{2}.$$

С учётом границ изменения x, получим:

$$45^0 + \frac{\alpha}{4} \le \frac{\alpha + x}{2} \le 90^0 + \frac{\alpha}{4},$$
$$135^0 - \frac{\alpha}{4} \le \frac{\alpha + 3x}{2} \le 270^0 - \frac{\alpha}{4},$$

или, несколько расширяя границы этих промежутков:

$$45^0 \le \frac{\alpha + x}{2} \le 135^0, 90^0 \le \frac{\alpha + 3x}{2} \le 270^0.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях x имеем: $\sin\frac{\alpha + x}{2} > 0,$ и $f'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha + 3x}{2} = 180^0,$ откуда $x_0 = \frac{360^0 - \alpha}{3}.$

Итак, в промежутке $\left[90^0 - \alpha/2, 180^0 - \alpha/2\right]$ функция f(x) имеет единственную критическую точку x_0, в которой, производная меняет знак с плюса на минус. Значит, в этой точке функция имеет максимум, а значит и искомое наибольшее значение. Таким образом, площадь трапеции ABCD будет наибольшей в том случае, когда дуги BC, CD и AD равны и $AD = 2R\sin(60^0 - \alpha/6).$

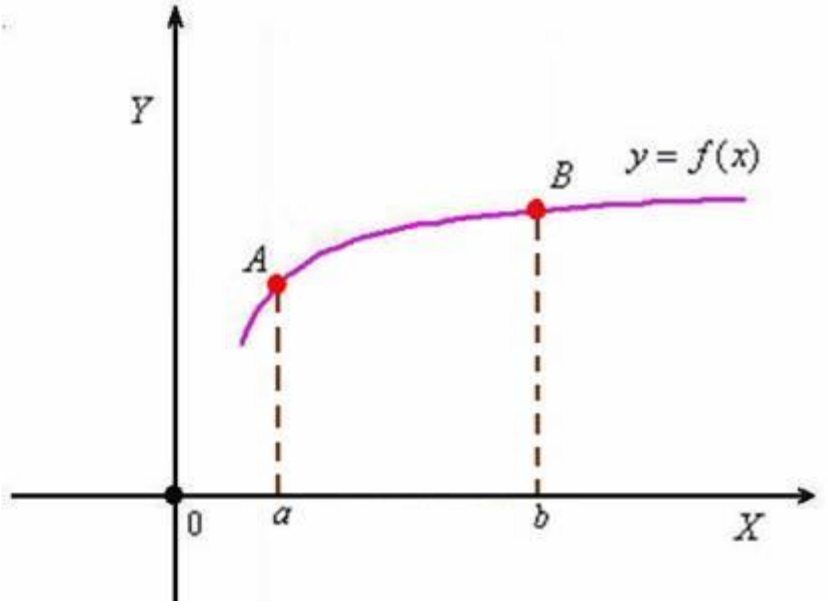
Практическая работа № 16

Тема 5.7.1: Вычисление площадей поверхностей фигур вращения с помощью определенного интеграла

Цель: Научить вычислять с помощью определенного интеграла площади поверхностей фигур вращения

Теоретическая часть

Рассмотрим рисунок



Что можно вычислить с помощью определённого интеграла?

В первую очередь, конечно, площадь криволинейной трапеции.

Если же данная фигура вращается вокруг координатной оси, то речь уже идёт о нахождении объёма тела вращения..

На данном занятии мы научимся рассчитывать ещё одну характеристику – ещё одну площадь. Представьте, что линия AB *вращается* вокруг оси OX. В результате этого действия получается геометрическая фигура, называемая *поверхностью вращения*. В данном случае она напоминает такой горшок без дна т.е. с геометрической точки зрения наш «горшок» имеет *бесконечно тонкую* стенку и две поверхности с одинаковыми площадями – внешнюю и внутреннюю. Так вот, все дальнейшие выкладки подразумевают площадь только внешней поверхности.

В прямоугольной системе координат площадь поверхности вращения рассчитывается по формуле:

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$ или, если компактнее: $$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$.

К функции и её производной предъявляются те же требования, что и при нахождении длины дуги кривой, но, кроме того, кривая AB должна располагаться выше оси OX. Это существенно! Нетрудно понять, что если линия располагается под осью $(f(x)<0)$, топодынтегральная функция будет отрицательной: $f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}<0$, и поэтому к формуле придётся добавить знак «минус» дабы сохранить геометрический смысл задачи.

Рассмотрим фигуру:

Площадь поверхности тора

В двух словах, тор – это бублик.

<u>Пример 1</u>

Вычислить площадь поверхности тора, полученного вращением окружности $x^2+(y-3)^2=1$ вокруг оси OX.

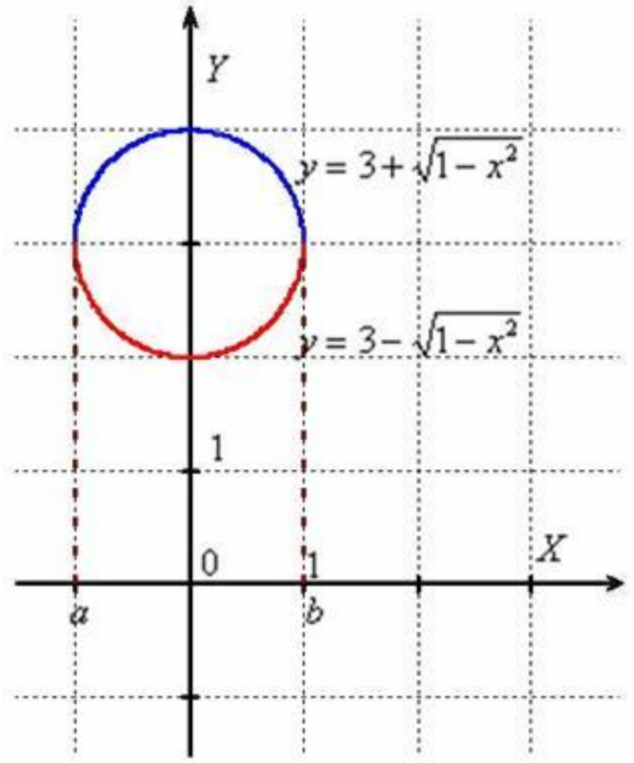
Решение: уравнение $x^2+(y-3)^2=1$ задаёт окружность единичного радиуса с центром в точке $(0;3)$. При этом легко получить две функции:

$(y-3)^2=1-x^2$

$y-3=\pm\sqrt{1-x^2}$

$y=3+\sqrt{1-x^2}$ – задаёт верхнюю полуокружность;

$y=3-\sqrt{1-x^2}$ – задаёт нижнюю полуокружность:



Суть кристально прозрачна: окружность вращается вокруг оси абсцисс и образует *поверхность* бублика. Единственное, здесь во избежание грубых оговорок следует проявить аккуратность в терминологии: если вращать круг, ограниченный окружностью $x^2+(y-3)^2=1$, то получится геометрическое тело, то есть сам бублик. И сейчас разговор о площади его поверхности, которую, нужно рассчитать как сумму площадей:

Найдём площадь поверхности, которая получается вращением «верхней» дуги $y=3+\sqrt{1-x^2}$ вокруг оси абсцисс. Используем формулу $P_1=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Берём функцию $y=3+\sqrt{1-x^2}$ и находим её производную:

$$y'=(3+\sqrt{1-x^2})'=0+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(0-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Далее максимально упрощаем корень:

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

И, наконец, заряжаем результат в формулу:

$$P_1 = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3+\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\cdot 2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)dx =$$

$$= 4\pi(3\arcsin x + x)\Big|_0^1 = 4\pi(3\arcsin 1 + 1 - (0+0)) = 4\pi\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+1\right) = 6\pi^2 + 4\pi$$

2) Найдём площадь поверхности, которая получается вращением «нижней» дуги $y = 3-\sqrt{1-x^2}$ вокруг оси абсцисс. Все действия будут отличаться фактически только одним знаком.

$$P_2 = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+((3-\sqrt{1-x^2})')^2}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+\left(0-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(0-2x)\right)^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}(3-\sqrt{1-x^2})\cdot\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}dx = 2\cdot 2\pi\int_0^1\frac{(3-\sqrt{1-x^2})dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 4\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx = 4\pi(3\arcsin x - x)\Big|_0^1 = 4\pi(3\arcsin 1 - 1 - (0-0)) = 4\pi\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-1\right) = 6\pi^2 - 4\pi$$

3) Таким образом, площадь поверхности тора:

$P = P_1 + P_2 = 6\pi^2 + 4\pi + 6\pi^2 - 4\pi = 12\pi^2$ **Ответ**: $P = 12\pi^2\ ед^2. \approx 118{,}44\ ед^2$. Пример 2

Вычислить площадь поверхности тела, полученного вращением параболы $y^2 = x$ вокруг оси OX на промежутке $0 \le x \le 4$.

***Решение**: вычислим площадь поверхности, образованной вращением верхней ветви* $y=\sqrt{x}$ *вокруг оси абсцисс. Используем формулу* $P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$.

В данном случае: $y' = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4x}} = \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} = \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$$

Таким образом:

$$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_0^4\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx = \pi\int_0^4\sqrt{4x+1}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^4(4x+1)^{\frac{1}{2}}d(4x+1) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{(4x+1)^3}\Big|_0^4 = \frac{\pi}{6}\cdot(\sqrt{17^3}-\sqrt{1^3}) = \frac{\pi}{6}\cdot(17\sqrt{17}-1)$$

Ответ: $P = \dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)\ ед^2. \approx 36{,}18\ ед^2.$

Практическая работа № 17

Тема 5.7.2: Вычисление площадей поверхностей шара с помощью определенного интеграла

Цель: Научить вычислять с помощью определенного интеграла площади поверхности шара

Пример 1. Найдем площадь поверхности шара радиуса R.

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Будем рассматривать поверхность шара как поверхность, полученную в результате вращения полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox. Тогда площадь поверхности шара найдется по формуле

$$P = 2\pi \int_{-R}^{R} y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx\ .$$

Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ — функция четная, то

$$P = 4\pi \int_{0}^{R} y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx\ .$$

Найдя $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ и вычислив сумму $1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$, получим:

Решение упражнений

1.Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением дуги параболы = вокруг оси Ох от x = 0 до x = 2.

2.Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги окружности $(x-4)^2 + y^2 = 36$? Заключенной между точками

$A(2; 4\sqrt{2})$, B(4;6)

3.Найти площадь поверхности шарового пояса, образованной вращением вокруг оси Ох дуги окружности $x^2 + y^2 = 16$. Заключенной между точками $A(2; 2\sqrt{3})$, B$(3; \sqrt{7})$

4.Найти площадь поверхности шарового пояса, образованной вращением вокруг оси Оу дуги окружности $x^2 + y^2 = 25$. Заключенной между точками $A(4; -3)$, B$(3; 4)$

5.Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги окружности $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Заключенной между точками $A(2\sqrt{6}; 1)$, B$(4; 5)$

6.Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы$y^2 = 4x$, ограниченной точками $O(0; 0))$ $A(3; 2\sqrt{3})$

7.Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы$y^2 = 9x$, ограниченной точками $O(0; 0))$ $A(4; 6)$

Практическая работа № 18

Тема: Итоговая контрольная работа
Цель: Проверить уровень усвоения студентами материала

1 вариант

I. Вычислите производную:

1. $f(x) = 2x^2 + 4x^4 + 6x + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$
3. $f(x) = (8x - 10)^3$
4. $f(x) = \cos\frac{x}{5}$
5. $f(x) = \frac{1}{(5-4x)^5}$

II. Найдите общий вид первообразных для функции:

1. $f(x) = 3x + 5x^5 + 6x^6 - 2$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \sqrt{x}$
3. $f(x) = (5x - 3)^5$
4. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
5. $f(x) = \frac{2}{(4x+3)^4}$

III.Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{1} x^3 dx$
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
3. $\int_{1}^{2} (1 + 2x) dx$

2 вариант

I. Вычислите производную

1. $f(x) = 3x^2 + 6x^4 + 8x + 100$
2. $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^8}$
3. $f(x) = (4x - 5)^6$
4. $f(x) = \sin 10x$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - 2x)^3}$

II. Найдите общий вид первообразных для функции:

1. $f(x) = 6x + 3x^3 + 2x^4 - 9$
2. $f(x) = \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{8}{x^5} - 2\sqrt{x}$
3. $f(x) = (4x - 13)^6$
4. $f(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{4}{(2x + 10)^6}$

III.Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{1} x^5 dx$
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\sin^2 x}$
3. $\int_{1}^{2} (4 + 2x)dx$

Литература:

Основные источники:

1) Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: ЮНИТИ, 2014. – 471 с.

2) Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред.проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 384 с.:

3) Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 573 с.

4.1.2. Дополнительная литература:

1) Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 352 с.

2) Спирина. М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 352 с.

3) Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие, 7-е изд., доп.- СПб.: Издательство «Лань», 2012. – 432 с. – (Учебники для вузов.Специальная литература).

4) Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб.пособие для вузов / Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др.; Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 423 с.