МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г.Пятигорске
Колледж Института сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г.Пятигорске

Математика

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Специальность СПО
29.02.04 «Конструирование, моделирование и технология швейных изделий»

Квалификация: технолог - конструктор

Пятигорск 2020

Методические указания для практических занятий по дисциплине «*Математика*» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности: 29.02.04 «Конструирование, моделирование и технология швейных изделий»

Рассмотрено на заседании ПЦК колледжа ИСТиД (филиал) СКФУ в г.Пятигорске

Протокол № 8 от «12» марта 2020 г.

Составитель ________________ И.Б. Иванова

Директор колледжа ИСТиД ________________ З.А. Михалина

Пояснительная записка

Для многих студентов значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данных методических рекомендациях главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры надо добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения на закрепления темы.

Данные методические указания содержат семнадцать практических работ. Выполнение студентами практических работ направленно на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам;
- формирование умений применять полученные знания на практике и реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессиональных качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» обучающийся должен уметь:
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен
знать:
значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;
основы интегрального и дифференциального исчисления;

Практическая работа № 1

Тема: Предел функции
Цель: Научить вычислять пределы функций

Теоретическая часть

Предел функции
Определение. Число называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Определение предела функции можно сформулировать и так: Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к , если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая
$|f(x) - b| < \varepsilon$

окрестность точки , что для любого $x \neq a$ из этой окрестности .
Предел обозначается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Пример 1. Предел постоянной функции в любой точке равен этой же постоянной.
Решение. Пусть для всех . Очевидно, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и для всех
$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$

$x \in (a - \delta, a + \delta)$ справедливы соотношения
Значит, по определению предела
$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k.$
Пример 2. Дана функции. Доказать, что
$\lim_{x \to a} f(x) = a.$
Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ - любое число. Положив $\delta = \varepsilon$, для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ получим $|f(x) - a| = |x - a| < \delta$, т.е. $|f(x) - a| < \varepsilon$, значит

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Теорема. Если функция имеет предел при , стремящемся к , то этот предел единственен.

1. **Теоремы о пределах функции**

Теорема 1. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и пределы их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 2. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.
Действительно,

$$\lim_{x \to a} kf(x) = \lim_{x \to a} k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

Теорема 3. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует также и предел их отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, равный отношению пределов:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю, то она называется бесконечно малой величиной. Если предел функции равен бесконечности, т.е. величине обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной. Следовательно, выполняются равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{0} = \infty, \qquad \lim_{x\to a}\frac{1}{\infty} = 0$$

Вычислите пределы

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3) = \lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 3 = 7 + 3 = 10.$$

.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x) + \lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x) + \lim\limits_{x\to 1}(-7)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 3 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x + 2}{\lim\limits_{x\to 1} 2 \cdot \lim\limits_{x\to 1} x - 7} =$$

$$= \frac{3\cdot 1 + 2}{2\cdot 1 - 7} = 5/(-5) = -1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 =$$

$$= 2 + 2 = 4.$$

Решение упражнений

1. $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-1)(x-3)(x-5)]$

2. $\lim\limits_{x\to 0}[(2x-4)(x-1)(x+2)]$

3.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

9. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$

10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+25}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

13. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$

16. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2-5x+6)$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^3+3x^2)$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x}{x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-8}{2x-2}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-4x^2+2x}$

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-5x+4}{x^2-2x+3}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2-x}-x$

23. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2+5x}-x$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$

25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

27. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

28. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-x}{3-\sqrt{2x-1}}$

Практическая работа № 2

Тема: Непрерывность функции. Точки разрыва функции
Цель: Научить исследовать функции на непрерывность, находить точки разрыва функций и исследовать их характер

Теоретическая часть

Непрерывность функции

Определение 1. Функция $f(x)$называется непрерывной в точке $x = a,$ если предел функции при равен значению функции при, т.е.$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Определение 2. Функцияназывается непрерывной в точке $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно маломо приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$/

Если условие непрерывности функции в точке $x = a$ нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Точки разрыва функции.

Если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$ при $x \to a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) *разрыв 1 рода* – в этом случае существуют конечные пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$;
2) *разрыв 2 рода* – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Примеры :

1. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер
   $$y = \frac{x}{x-3}$$
   Даная функция определена при всех значениях x , кроме $x = 3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 3.$ Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \to 3$:
   $$\lim_{x\to 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty,$$
   $$\lim_{x\to 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty,$$
   Следовательно, функция $\frac{x}{x-3}$ в точке $x = 3$ имеет бесконечный разрыв , т.е. $x = 3$ – точка разрыва 2 рода.
2. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер
   $$y = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$$
   Е динственной точкой разрыва является точка $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции при $x \to 0$:
   $$\lim_{x\to -0} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = 1$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=0$$

Поскольку левый и правый пределы функции при $x=0$ являются конечными, $x=0$ – точка разрыва 1 рода.

Решение упражнений

Найдите точки разрыва функции и исследуйте их характер:

1. $y=\frac{5}{2x-1}$;
2. $y=\frac{1}{x^2}$;
3. $y=\frac{1}{1-x^2}$;
4. $y=\frac{3}{x^2-2x+1}$;
5. $y=\frac{x-1}{x^2-3x-10}$;
6. $y=1+2^{\frac{1}{x-2}}$;
7. $y=\frac{x}{x-2}$
8. $y=3^{\frac{1}{x}}$
9. $y=arctg\frac{1}{x-1}$
10. $y=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3), & x\le 1\\ 6-5x, & 1<x<3\\ x-3, & x\ge 3\end{cases}$
11. $y=\frac{5x^2-3x}{2x}$
12. $y=\frac{1}{x-x^3}$
13. $y=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
14. $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Практическая работа №3

Тема: Вычисление производных высших порядков.

Цель: Научить вычислять производные.

Теоритическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

1. $C' = 0$, где $C - const$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
5. $(f \cdot C)' = f' \cdot C$, где $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y''. Аналогично определяются производные 3-го, 4-го,…, порядка.

Решение упражнений

$$y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$$

1. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
2. $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$
3. $y = cosln(1-x^2)$
4. $y = sin\sqrt{3} + \frac{1sin^2 3x}{3cos6x}$
5. $y = ctg\sqrt[3]{5}$.
6. $y = arcsin^3\sqrt{4-5x}$
7. $y = \frac{\arccos(x^2-4)}{\sqrt{x^4+16}}$

8. $y=\sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6}}$

9.

10.

11.

12. $\dfrac{y=x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\sqrt{2}\right)}{x+\sqrt{2}}+2^{\pi^{\sqrt{2}}}$

13. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$

14. $y=e^{-x^2}cos^3(2x+3)$

$y=e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\cdot arctg^2 2x$

15.

16. $y=\dfrac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$

17. $y=(sin\sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$

18. y=$(19)^{x^{19}}x^{19}$

19. $y=(ctgx)^{lntg\frac{x}{4}}$

Практическая работа № 4

Тема: Вычисление неопределенного интеграла
Цель: Научить вычислять неопределенный интеграл

Теоритическая часть

Неопределенный интеграл

F(x) - **первообразная** для f(x) на множестве X если F'(x) = f(x) для всех x∈ X. Если F(x) - первообразная для f(x) на множестве X, то F(x) + c - множество всех первообразных для f(x) на множестве X. Это множестве первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
   $\int dF(x) = F(x) + C$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
   $d\int f(x)d(x) = f(x)d(x)$
3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
   $\int [f(x) + \varphi(x)]d(x) = \int f(x)d(x) + \int \varphi(x)d(x)$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:
   $\int af(x)d(x) = a\int f(x)d(x)$

Основные формулы интегрирования

1.
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = lnx + C$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$
5. $\int e^x\,dx = e^x + C$
6. $\int sinx\,dx = -cosx + C$
7. $\int cosx\,dx = sinx + C$

8. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12.+C

13.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений

1. $\int xdx$
2. $\int \frac{x}{5}dx$
3. $\int x^5 dx$
4. $\int 7x^6 dx$
5. $\int (7x+1)^3 dx$
6. $\int 10\sin 5xdx$
7. $\int 3(5x+1)^2 dx$
8. $\int (2x-1)^2 dx$
9. $\int \frac{dx}{x^3}$
10. $\int \sqrt[4]{x^3}dx$
11. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$.
12. $\int 3\cos 3xdx$
13. $\int 4(5-6x)^3 dx$
14. $\int \frac{dx}{x^4}$
15. $\int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$
16. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}$
17. $\int 2^3\sqrt{(7-3x)^2}dx$
18. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$
19. $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$
21. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$
23.

Практическая работа № 5

Тема: Вычисление определенного интеграла
Цель: Научить вычислять определенный интеграл

Теоритическая часть

Пусть функция *f* (*x*) непрерывна на замкнутом интервале [*a, b*]. Определенный интеграл от функци пределах от *a* до *b* вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое из ко стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta_i x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x = f(x_1)\Delta_1 x + f(x_2)\Delta_2 x + \ldots + f(x_k)\Delta_k x + \ldots + f(x_n)\Delta_n x.$$

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что *f* (*x*) и *g* (*x*) - непрерывные функции на замкнутом интервале [*a, b*].

1. $\int_a^b 1dx = b - a$

2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$ где *k* - константа;

3. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \text{где} \quad a < c < b;$

5. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

6. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

7. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

8. Если $f(x) \geq 0$ в интервале [*a*, *b*], то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция *f* (*x*) непрерывна на замкнутом интервале [*a*, *b*]. Если *F* (*x*) - *первообразная* функции *b*], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1

Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \left(x^3 - x^2\right)dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_0^2 \left(x^3 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right)dt$.

Решение.

$$\int_0^1\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}\right)dt=\int_0^1\left(t^{1/3}-t^{1/2}\right)dt=\left(\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1}-\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{3t^{4/3}}{4}-\frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-0=\frac{1}{12}.$$

Решение упражнений:

1. $\int_{-0}^{3}\frac{dx}{9-x^2}$

5. $\int_{-1}^{1}x^4dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x}$

7. $\int_1^2(21+3x)dx$

1. $\int_{-1}^{1}x^5dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x}$

3. $\int_1^2(4+2x)dx$

Практическое занятие № 6

Тема: Операции над множествами

Цель: Научить решать задачи, используя основные операции над множествами

Теоритическая часть

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством.

Операции над множествами: объединение, пресечение, дополнение, разность, симметрическая разность.

Пример: На фирме работают 40 человек. Из анкетных данных известно, что 20 человек владеют английским языком, 20 человек – компьютером, 14 – делопроизводством. Английским языком и компьютером владеют 9 человек; . английским языком и делопроизводством – 7 человек; компьютером и делопроизводством – 5 человек; английским языком, делопроизводством

И компьютером – 2 человека. Сколько человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством?

Решение: 1) Введем обозначения:

U- множество человек работающих на фирме;

A- множество человек, владеющих английским языком;

B- множество человек, владеющих компьютером;

C- множество человек, владеющих делопроизводством.
Тогда m(U)=40: m(A)=20; m(B)=20; m(C)=14.
Кроме того, известно, что английским языком владеют 9 человек, следовательно, $m(A \cap B) = 9$; английским языком и делопроизводством – 7 человек, следовательно, $m(A \cap C) = 7$; компьютером и делопроизводством – 5 человек, следовательно, $m(B \cap C) = 5$; английским языком, делопроизводством и компьютером – 2 человека, следовательно,
$m(A \cap B \cap C) = 2$.
Необходимо определить

Разобьем множество M=$A \cup B \cup C$ на 7 попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_7$ и найдем мощности каждого из этих множеств:
а) $A_1 = A \cap B \cap C$ – множество человек, владеющих английским языком, делопроизводством и компьютером, $m(A_1 1$)=($A \cap B \cap C) = 2$
б) $A_2 = \bar{A} \cap B \cap C$ – множество человек, не владеющих английским языком и владеющих компьютером и делопроизводством. Заметим, что $B \cap C = A_1 \cup A_2$, следовательно $m(B \cap C) = m(A_1) + m(A_2)$, откуда $m(A_2)=$;
$A \cap \bar{B} \cap C$

в) $A_3 =$ – множество человек, владеющих английским языком и делопроизводством и не владеющих компьютером. Заметим, что $A \cap C = A_1 \cup A_3$, следовательно, $m(A \cap C) = m(A_1) + m(A_3)$, откуда
$m(A_3)$==7-2=5

г) $A_4 =$ - множество человек, владеющих английским языком, компьютером и не владеющих делопроизводством. $A \cap B = A_1 \cup A_4$, следовательно ,
$m(A \cap B) = m(A_1) + m(A_4)$, откуда
$m(A_4)$==9-2=7;
д) $A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ - множество человек, не владеющих английским языком, компьютером и владеющих делопроизводством.
$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$

, следовательно, m(C)=+, откуда,= , m(C)--=14-2-3-5=4;
е) $A_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком и делопроизводством и владеющих компьютером B=$A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6$,
m(B)=+, откуда $m(A_6)$= m(B)-+$-m(A_4) - m(A_6) = 20 - 2 - 3 - 7 = 8$;
ж) $A_7 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком и не владеющих делопроизводством и компьютером. A=$A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_7$, следовательно, m(A)=+, откуда $m(A_7)$= m(A)-+$-m(A_4) = 20 - 2 - 5 - 7 = 6$;
Окончательно,

M= $A \cup B \cup C$ =$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, следовательно,
m(M)=+++=$2 + 3 + +5 + 7 + 4 + 8 + 6 = 35$

1) Так как U=M+$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, то $m(\mathbf{U}) = \mathbf{m(M)} +\ m(A^{-} \cap B^{-} \cap C^{-}$), откуда

$$m(\mathbf{U}) - \mathbf{m}(\mathrm{M}) = \mathbf{40 - 35 = 5}$$

$m(A^{-} \cap B^{-} \cap C^{-}$)=

Следовательно, 5 человек не владеют ни английским языком, ни делопроизводством, ни компьютером.

Решение упражнений

1.Даны множества: $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}, A = \{a, c, e, p\}, B = \{b, d, f, p\}, C = \quad \{a, d, f, q\}$
Выполните следующие операции:

а) $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$ $/B \cap C)/(C\,)^{--} \ \cup$ A

б) $(A \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap \frac{B}{C}$;

в) $\frac{\dfrac{\bar{A}}{\overline{\overline{B \cap C}}}}{A} \cap \bar{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$;

г) $A \cup B \cap \frac{\overline{B \cup C}}{\bar{B}}$;

д) $(A \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$;

е) $\frac{A \cup B \cap C}{\bar{B} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C} \cup \overline{(A \cup B \cup C)}$;

ж)($A \cup (B/A) \cup A^{-} \cap C) \cap A^{-} \cap C/C$

2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна упростите выражения:

а) $\bar{A} \cup \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \cup \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{B}}$;

б) A$\overline{\bar{A} \cup B}$)$\cup \bar{B}$;

в) $(\bar{A} \cap B) \cup \overline{\bar{A} \cap (B)} \cup \overline{A \cap (B)}$

г) $)[A^{-} \cup (B))^{-} \cap (A^{-} \cup B) \cap (A \cap (B))^{-} \cap (A \cup B)$

3. Из 276 отобранных студентов экономического вуза 83 изучают математику,95-право, 102-финансы. Кроме того, известно, что 27 из них изучают математику и право, 24-математику и финансы, 20-право и финансы 11-изучают все три предмета. Сколько учащихся не изучают ни одного из этих предметов? Сколько из них изучают финансы, но не изучают ни математику, ни право?

4. Проверочный экзамен по математике содержал три задачи: предел, производная и интеграл. Из 800 студентов задачу с пределом решили 250 человек; с пределом или интегралом – 600 человек. По две задачи решили 400 человек, из них две задачи на предел и производную решили 150 человек, на предел и интеграл – 50 человек. Ни один студент не решил все задачи. 20 студентов не решили ни одной задачи. Только задачу на интеграл решили120 человек. Сколько студентов решили только одну задачу? Сколько человек решили задачу на производную?

5. Кафедра математики обслуживает три факультета: Экономический, финансовый, товароведный. Некоторые преподаватели кафедры могут работать сразу на нескольких факультетах. На финансовом факультете работают 22 преподавателя, на экономическом -

23 преподавателя, на экономическом и товароведном – 36 преподавателей. Только на финансовом факультете работают 10 преподавателей, только на экономическом и товароведном -5 преподавателей. Два преподавателя работают на трех факультетах. Число преподавателей, работающих только на экономическом и финансовом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на финансовом и товароведном факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколь преподавателей работает только на одном факультете?

Практическое занятие № 7

Тема: Решение задач на классическое и статистическое определения вероятности случайного события

Цель: Научить решать задачи на классическое и статистическое определения вероятности случайного события

Теоритическая часть

Классическое определение вероятности Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу, всех исходов (несовместных, единственно возможных, равновозможных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы. Невозможному событию соответствует вероятность равная 0, а достоверному – вероятность равна единице.

Примеры:

Из урны в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение: Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев равно 8. Число случаев благоприятствующих появлению события А, равно3. Получим

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

Решение упражнений

1. Герман из повести А.С. Пушкина «Пиковая дама» вынимает 3 карты из колоды в 52 листа. Найдите вероятность того, что это будут: тройка, семерка, туз.
2. В ящике лежат 15 красных, 9 синих, и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих, 3 красных шара.
3. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже.
4. В урне 10 шаров, из которых 2 белых,3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета.
5. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные.
6. Коллектив, включающий четырех женщин и троих мужчин, разыгрывает 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины.
7. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.
8. В урне 6 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажутся 2 белых и 1 черный шар.
9. Юноша забыл две последние цифры телефонного номера своей знакомой и помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что они

различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер будет набран правильно?

Практическое занятие № 8

Тема: Решение задач на теоремы умножения и сложения вероятностей.
Цель: Научить решать задачи на теоремы умножения и сложения вероятностей.

Теоритическая часть

Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P[\![(A]\!]_2)+\cdots+P(A_n)$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Пример 1:

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

1 способ. Очевидно, что одна из взятых деталей окажется стандартной , если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные;
C- две детали стандартные, одна нестандартная;
D – три детали стандартные.
Таким образом, событие A можно представить в виде суммы этих трех событий:
A=B+C+D. По теореме сложения имеем

$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$

Найдем вероятность каждого из этих событий:

$$P(B)=\frac{5}{C_{20}^{3}}=\frac{5}{1}\cdot\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{35}{76}$$

$$P(D)=\frac{5}{C_{20}^{3}}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

$P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$=+ $=\frac{137}{228}$

2 способ. События А(хотя бы одна из трех взятых деталей оказалась стандартной) и $\bar{A}$ (ни одна из взятых деталей не оказалась стандартной) являются противоположными; поэтому $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Вероятность появления события $\bar{A}$ составляет:

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{15}^{3} \cdot}{C_{20}^{3}} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{13}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{91}{228}$$

Тогда, искомая вероятность равна $P(A) = 1 - P(\overline{A})$=1-$\frac{91}{228}$=.

Пример 2. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение: Пусть А – событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3 а В – в том, оно кратно 5. Найдем $P(A + B)$. Так как А и В - совместные события, то воспользуемся формулой.

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10,11,….,98,99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события А); 18 – кратными 5 (благоприятствуют наступлению события В); и 6 – кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события А В). Таким образом,

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(AB) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} +$$

Теоремы умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P[(A]_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Пример 3. В одной урне находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение: Пусть А – появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимые. Найдем

$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Тогда,

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Пример 4. В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу две детали. Вычислить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
Решение: Введем следующие обозначения: А- первая взятая деталь стандартная; В – вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет

$P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т.е. условная вероятность события В, равна

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) == \frac{14}{33}$

Решение упражнений

В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер взял наудачу 3 детали. Вычислите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.

1. Студент сдает экзамен по теории вероятностей. Вероятность получить на экзамен «неуд.» равна 0,1; «уд.» - 0,6; «хор.» - 0,2; «отл.» - 0,1. Какова вероятность того, что студент получит на экзамене положительную оценку?
2. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку – 0,2, в восьмерку – 0,5. Сделан один выстрел. Какова вероятность следующих событий:
   а) выбито не менее 8 очков;
   б) выбито менее 8 очков;
   в) выбито более 8 очков;
   г) выбито не более 8 очков.
4. Производится два выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,6, при втором – 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.
5. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?
6. В урне находятся 7 белых и 3 черных шара. Подряд извлекают два шара. Какова вероятность того, что они оба черные?
7. Монету подбросили два раз. Найти вероятность того,что оба раза выпадет герб.

8. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из каждой урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба вынутых шара белые?
9. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым -0,8; третьим – 0,9. Найти вероятность того, что :

а) все три стрелка попадут в цель;
б) все три стрелка промахнуться;
в) только один стрелок попадет в цель;
г) только два стрелка попадут в цель;
д) не более двух стрелков попадут в цель;
е) хотя бы один стрелок попадет в цель.

Практическое занятие № 9

Тема: Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Цель: Закрепить умения студентов решать задачи на формулу Бернулли

Теоретический блок

Если производятся испытания, при которых вероятность появлений события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми относительно события А.*

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна р (где $0 < p < 1$), событие А наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), находится по формуле Бернулли:

$P_n(k) = \frac{n}{k(n-k)} p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ (1)

(1)

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

а) менее k раз;
б) более k раз;
в) не менее k раз;
г) не более k раз.

Находят соответственно по формулам:

$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$ (2)

$P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$ (3)

$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$ (4)

(5)

Пример 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет p=0,7. Найти вероятность пяти попаданий при восьми выстрелах.

Решение.

Здесь n=8, k=5, p=0,7, q=1-0,7=0,3

$$P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}0{,}7^5 0{,}3^{8-5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}0{,}7^5\cdot 0{,}027 = 0{,}254$$

Пример 2. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что герб выпадет а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Решение.

а) Здесь n=5, k=2, p=1/2, q=1/2

Используя формулу (2) получаем:

б) Здесь воспользуемся формулой

Q=1-$[P_5(0) + P_5(1)]1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

Решение упражнений:

1. Вероятность семян оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет три?
2. Монету бросают семь раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее трех раз; б)не менее трех раз.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найти вероятность четырех попаданий при шести выстрелах

4. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,54.
5. Монету бросают 10 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее четырех раз; б)не менее четырех раз.
6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,9. Найти вероятности трех попаданий при шести выстрелах.
7. найти вероятность того, что событие А появится не менее четырех раз в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.
8. На испытательный стенд поставлено 8 одинаковых изделий, вероятность выхода из строя изделия равна 0,1. Чему равна вероятность того, что откажут два изделия; более двух изделий.
9. Вероятность наступления события А в одном испытании равна 0,7 Найти вероятность того, что событие А произойдет не менее 2 раз в 4 независимых испытаниях.
10. Найти вероятность того, что в семье имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятность рождения мальчика и девочки одинаковые.
11. В ящике сложены детали: 16 деталей с первого участка, 24 – со второго и 20 – с третьего. Вероятность того, что деталь изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

Практическое занятие № 10

Тема: Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Цель: Закрепить умения студентов решать задачи на формулы полной вероятности и Бейеса

Теоретический блок

Пусть события (гипотезы) образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например, событие А может наступить с некоторой условной вероятностью $P_{B_i}(A)$. Тогда вероятность наступления события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) +$

,

где +…+ .

Данная формула называется формулой полной вероятности.

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из

несовместных событий (гипотез) , которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Бейеса

$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i} \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$

Где $P_A(B_i)$- вероятность каждой из гипотез после испытания, в результате которого наступило событие А; $P_{B_i}(A)$- условная вероятность события А после наступления события B_i, а $P(A)$ находится по формуле полной вероятности.

Пример 1. На склад поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 40 % деталей от их общего количества, на втором – 35% и на третьем-25%, причем, на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором – 80% и на третьем – 70%. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта.

Решение:

Введем следующие обозначения: - деталь изготовлена на первом станке, - на втором станке, - на третьем станке; событие А – деталь оказалась первого сорта. Из условия

следует, что

$P_{B_3}(A) =$

=0,25, $P_{B_1}(A) = 0,9$, $P_{B_2}(A) = 0,8$, 0,7. Следовательно,
$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$+

,

Пример 2. В первом ящике имеется 8 белых и 6 черных шаров, а во втором – 10 белых и 4 черных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар – черный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

Решение:

Введем следующие обозначения: - был выбран первый ящик; –был выбран второй ящик; А – при проведении двух испытаний выбора ящика и выбора шара был

вынут черный шар. Тогда ,
Вероятность извлечения черного шара после того, как выбран первый ящик,

составляет $P_{B_1}(A)$= Вероятность извлечения черного шара после того, как выбран второй ящик, равна $P_{B_2}(A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что вынутый шар

оказался черным:+ = +
Искомая вероятность того, что черный шар был вынут из первого ящика, вычисляется по формуле Бейеса:
$P_1 A$ $(B_{\downarrow}1$)=

Решение упражнений:

1. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает в среднем 0,2 % брака, второй – 0,1 % брака, , продукция, поступающая с третьего автомата, не содержит бракованных изделий. На сборку поступило 2000 изделий с первого автомата, 3000 деталей со второго автомата и 5000 изделий с третьего автомата. Какова вероятность того, что деталь, выбранная наугад из данных деталей, поступила с первого автомата, если известно, что она является не бракованной?
2. Из первой урны, содержащей 8 белых и 4 черных шара, наугад переложили один шар во вторую урну, содержащую 2 белых и 3 черных шара. Затем из второй урны наугад извлекли один шар. Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Вычислить вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен белый шар.
3. В специализированную клинику поступают в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% - с заболеванием Д, 20% - с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7, для болезней Д и М соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в клинику, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.
4. В специализированную клинику поступают больные с одним из заболеваний А, В и С: в среднем 50% больные с заболеванием А, 30% с заболеванием В и 20 % с заболеванием С, Вероятности полного излечения от этих заболеваний равны соответственно 0,95, 0,90 и 0,85. Больной, поступивший в клинику, был полностью вылечен. Какова вероятность, что он страдал заболеванием В?
5. Из первой урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад переложили один шар во вторую урну, содержащую 2 белых и 6 черных шаров. Затем из этой урны извлекли один шар. Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Вычислите вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен шар белого цвета.
6. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05, для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт

была обнаружена ошибка, Найти вероятность того, что , что ошиблась первая перфораторщица.

7. В двух цехах изготавливается однотипная продукция. Производительность первого цеха вдвое выше, чем производительность второго цеха. Изделия высшего качества составляют в среднем для первого цеха 92%, для второго 87%. Из общей продукции этих цехов наугад берется одно изделие. Какова вероятность того, что выбранное изделие изготовлено во втором цехе, если известно, что оно оказалось изделием высшего качества

8. В двух ящиках имеются электрические лампочки. В первом ящике их 12 штук, среди них 1 нестандартная, во втором ящике 10 лампочек, из которых 1 нестандартная. Из первого ящика наугад взята лампочка и переложена во второй ящик. Наудачу извлеченная лампочка оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что из первого ящика во второй была переложена стандартная лампочка?

9. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов.. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55., а ко второму - 0,45. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым - 0,98. Изделие при проверке было признано стандартным . Найти вероятность того, что это изделие было проверено вторым товароведом.

10. Легковых автомобилей у бензоколонки проезжает вчетверо больше, чем грузовых машин. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку, составляет для грузовой машины 0,05, для легковой - 0,15. Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Какова вероятность того, что это был грузовик?

Практическое занятие № 11

Тема: Выборочный метод.

Цель: Научить вычислять числовые характеристики

Теоретический блок

Пусть выборка задана вариационным рядом

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$, где
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_k	

$$x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i.$$

Выборочным средним называется величина

$$D^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x^*)^2 \cdot m_i,$$

Выборочная дисперсия а корень квадратный из выборочной дисперсии называется **выборочным средним квадратическим**

$$\sigma^*[X] = \sqrt{D^*[X]}.$$

отклонением

Выборочные начальные и центральные моменты порядка s определяются соответственно формулами:

$$\alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^s \cdot m_i; \quad \mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x^*)^s \cdot m_i.$$

Важность эмпирических характеристик заключается в том, что они близки (при достаточно большом n) к соответствующим теоретическим значениям. Поскольку выборочные характеристики являются случайными величинами, а теоретические - числа, то близость понимается в смысле сходимости по вероятностям.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Известно распределение золотых медалистов, окончивших в 2001 году школы Ярославской области, по районам:

Кол-во золотых медалистов	0	1	3	4	6	8	20
Кол-во районов	6	1	4	2	1	3	1

Дайте характеристику распределения признака (число золотых медалистов по районам), вычислив для этого:

а) выборочную среднюю, Решение.

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{18}(0\cdot 6 + 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 6\cdot 1 + 8\cdot 3 + 20\cdot 1) \approx 4;$$

а)

Пример 2. Измерение роста (в см) 100 студентов-первокурсников университета дало следующие результаты:

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студ-ов	10	14	26	28	12	8	2

Найдите выборочную среднюю

Решение. В качестве вариант x_i примем середины интервалов и найдем выборочную среднюю роста студентов.

$$x^* = 0{,}01 \cdot (156 \cdot 10 + 160 \cdot 14 + 164 \cdot 26 + 168 \cdot 28 + 172 \cdot 12 + 176 \cdot 8 + 180 \cdot 2) = 166$$

(см).

Пример 4. Найти выборочные среднюю

x_i	20,0	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0
m_i	2	3	7	11	17	20	16	13	6	4	1

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего

1. запишем варианты в первый столбец;
2. запишем частоты во второй столбец, сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;
3. в качестве ложного нуля выберем варианту 21,0 (в середине ряда) и записываем условные варианты $u_i = (x_i - 21))/0,2$;
4. произведения частот на условные варианты записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму отрицательных (-82) и отдельно сумму положительных (81) чисел, а их сумму (-1) помещаем в нижнюю клетку столбца;
5. произведения частот на квадраты условных вариант записываем в пятый столбец, а их сумму (433) помещаем в нижнюю клетку столбца;
6. произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец, а их сумму помещаем в нижнюю клетку столбца.

Контроль:
$\sum m_i \cdot u_i^2 + 2\sum m_i \cdot u_i + n = 433 + 2 \cdot (-1) + 100 = 531 = \sum m_i \cdot (u_i + 1)^2$, и вычисления произведены правильно.

1	2	3	4	5	6
x_i	m_i	u_i	$m_i \cdot u_i$	$m_i \cdot u_i^2$	$m_i \cdot (u_i+1)^2$
20,0	2	-5	-10	50	32
20,2	3	-4	-12	48	27
20,4	7	-3	-21	63	28
20,6	11	-2	-22	44	11
20,8	17	-1	-17	17	0
21,0	20	0	$A_1 = -82$		20
21,2	160	1	16	16	64
21,4	13	2	26	52	117
21,6	6	3	18	54	96
21,8	4	4	16	64	100
22,0	1	5	5	25	36
	100		$A_2 = 81$		
			$\Sigma m_i \cdot u_i = -1$	$\Sigma m_i \cdot u_i^2 = 433$	$\Sigma m_i \cdot (u_i+1)^2 = 531$

Вычислим теперь условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \left(\sum m_i u_i\right)/n = -1/100 = -0,01;$$
$$M_2^* = \left(\sum m_i u_i^2\right)/n = 433/100 = 4,33.$$

Найдем искомые выборочные среднюю

$$x^* = M_1^* \cdot h + C = (-0,01) \cdot 0,2 + 21,0 = 20,8;$$
$$D^*[X] = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] \cdot h^2 = \left[4,33 - (-0,01)^2\right] \cdot 0,2^2 \approx 0,173.$$

Если первоначальные варианты не являются равноотстоящими, то интервал, в котором заключены все варианты выборки, делят на несколько равных частичных интервалов.

Пример 5. Найти выборочную среднюю

x_i	1	1,03	1,05	1,06	1,08	1,10	1,12	1,13	1,16	1,19	1,20	1,21	1,25	1,26	1,28
m_i	1	3	6	4	2	4	3	6	5	2	4	4	8	4	4

1,30	1,32	1,35	1,37	1,38	1,39	1,40	1,44	1,46	1,47	1,49	1,50				
6	4	6	5	1	2	2	3	3	4	3	2				

Решение. Выделим пять частичных интервалов:

$1-1,0$	$m_1 = 1+3+6+4+2+4:2 = 18$,
$1,1-1,2$	$m_2 = 4:2+3+6+5+2+4:2 = 20$,
$1,2-1,3$	$m_3 = 4:2+4+8+4+4+6:2 = 25$,
$1,3-1,4$	$m_4 = 6:2+4+6+5+1+2+2:2 = 22$,
$1,4-1,5$	$m_5 = 2:2+3+3+4+3+2:2 = 15$.

Составим новый вариационный ряд из середин выбранных частичных интервалов:

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
m_i	18	20	25	22	15

$y^* = 1,246, \quad D_y^* = 0,017$ и сравнивая с $\bar{x}^* = 1,25, \quad D_x^* = 0,018$, замечаем, что $y^* \approx x^*, \quad D_y^* \approx D_x^*$, а вычислений значительно меньше.

Задания для практического занятия:

1. α - частицы, достигающие счетчика в некотором опыте, образуют следующую выборку:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	21	81	156	200	195	152	97	54	26	11	7

Найдите выборочную среднюю

2. Распределение рабочих цеха по проценту выполнения норм выработки выглядит следующим образом:

% выполнения норм	50 - 70	70 - 90	90 - 110	110 - 130	130 - 150	150 - 170
Число рабочих	20	25	35	30	20	10

Найдите средний процент выполнения норм выработки рабочими цеха.

3. Для определения "общего интеллекта" школьникам предлагалось раскрыть геометрические закономерности. Оценка осуществлялась по количеству правильно решенных задач и дала следующие результаты:

Кол-во баллов	14	15	16	17	18	19	20
Кол-во школьников	4	11	15	16	19	15	5

4. Какой вывод можно сделать об эффективности интерактивного обучения по выраженности базовых ценностей и экологических ориентаций в экспериментальной и контрольной группах в конце обучения? Количества выборов представлены в таблице:

Наименование показателя	Признание и уважение людей	Природа как среда сущ. любимых животных и растений	Природа как условие благополучия будущего поколения	Природа как объект заботы
среднее по эксп. группе	6,64	2,24	4,4	3,92
среднее по контр. группе	4,95	3,53	3,53	2,88

Практическое занятие № 12

Тема: Вычисление числовых характеристик.

Цель: Научить вычислять числовые характеристики

Теоретический блок

Модой (M_o) называется вариант, наиболее часто встречающийся в данном вариационном ряду.

Медианой (M_e) называется вариант x_l такой, что $\sum_{i=1}^{l} m_i \geq \frac{n}{2}$ и $\sum_{i=l}^{k} m_i \geq \frac{n}{2}.$ Медиана обладает тем свойством, что сумма абсолютных величин отклонений вариантов от медианы меньше, чем от любой другой величины (в том числе и от выборочной средней).

Важность эмпирических характеристик заключается в том, что они близки (при достаточно большом n) к соответствующим теоретическим значениям. Поскольку выборочные характеристики являются случайными величинами, а теоретические - числа, то близость понимается в смысле сходимости по вероятностям.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Известно распределение золотых медалистов, окончивших в 2001 году школы Ярославской области, по районам:

Кол-во золотых медалистов	0	1	3	4	6	8	20
Кол-во районов	6	1	4	2	1	3	1

Дайте характеристику распределения признака (число золотых медалистов по районам), вычислив для этого:

а) моду и медиану, б) показатели вариации (дисперсию, среднее квадратическое отклонение, размах варьирования).

Решение.

а) $M = 0$, т.к. $6 = \max\{6, 1, 4, 2, 3\}$.

$M = 3$, т.к. $6 + 1 + 4 = 11 \geq \frac{18}{2}$ и $4 + 2 + 1 + 3 + 1 = 11 \geq \frac{18}{2}$;

б) $D^*[X] = \frac{1}{18}(16 \cdot 6 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 3 + 256 \cdot 1) \approx 23,2$;

$$\sigma^*[X] = +\sqrt{23,2} \approx 4,8;$$

$R = 20 - 0 = 20$.

Пример 2. Измерение роста (в см) 100 студентов-первокурсников университета дало следующие результаты:

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студ-ов	10	14	26	28	12	8	2

Найдите выборочное среднее квадратическое отклонение роста первокурсников.

Решение. В качестве вариант x_i примем середины

Вычислим выборочную дисперсию

$$D^* = 0,01\cdot\left[(-10)^2\cdot 10 + (-6)^2\cdot 14 + (-2)^2\cdot 26 + 2^2\cdot 28 + 6^2\cdot 12 + 10^2\cdot 8 + 14^2\cdot 2\right] = 33,44$$

и, извлекая из полученного числа корень квадратный, находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma^*[X] = \sqrt{D^*[X]} = \sqrt{33,44} \approx 5,78$$ (см).

Допустим, что все значения количественного признака $\mathbf{X}$ разбиты на k групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти **групповые средние и дисперсии**. **Внутригрупповой дисперсией** называют среднюю арифметическую дисперсий, взвешенную по объемам групп:

$D_{\text{внгр}} = \left(\sum N_j \cdot D_{j\text{гр}}\right)/n$ $(N_j$ - объем группы j, $n = \sum N_j)$.

Межгрупповой дисперсией называют дисперсию групповых средних относительно общей средней:

$D_{\text{межгр}} = \left(\sum N_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x})^2\right)/n$ $(\bar{x}, \bar{x}_j -$ **общая и групповые средние**$)$.

Пример 3. Найти групповые, внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из следующих двух групп:

Первая группа					Вторая группа				
x_i	2	4	7		x_i	3	5	6	10
m_i	3	5	2		m_i	4	4	3	4

N_1 = 10		N_2 = 15

Решение. 1). Найдем общую и групповые средние:

$$x^* = \frac{1}{25}\cdot(2\cdot 3+4\cdot 5+7\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 4+6\cdot 3+10\cdot 4)=4,8;$$

$$x_1^* = \frac{1}{10}\cdot(2\cdot 3+4\cdot 5+7\cdot 2)=4; \quad x_2^* = \frac{1}{15}\cdot(3\cdot 4+5\cdot 4+6\cdot 3+10\cdot 4)=6,$$

и, используя их, - групповые дисперсии:

$$D_1 = \frac{1}{10}\cdot\left((2-4)^2\cdot 3+(4-4)^2\cdot 5+(7-4)^2\cdot 2\right)=3;$$

$$D_2 = \frac{1}{15}\cdot\left((3-6)^2\cdot 4+(5-6)^2\cdot 4+(6-6)^2\cdot 3+(10-6)^2\cdot 4)\right)=\frac{154}{15}.$$

2). Найдем внутригрупповую и межгрупповую дисперсии

$$D = \frac{1}{25}\cdot\left(10\cdot 3+\frac{154}{15}\cdot 5\right)=\frac{184}{25}=7,36; D = \frac{1}{25}\cdot\left(10\cdot(3-4,8)^2+15\cdot(6-4,8)^2\right)=2,16.$$

3). Найдем общую дисперсию

$$D = \frac{1}{25}\cdot\left((2-4,8)^2\cdot 3+(4-4,8)^2\cdot 5+(7-4,8)^2\cdot 2+(3-4,8)^2\cdot 4+\right.$$
$$\left.+(5-4,8)^2\cdot 4+(6-4,8)^2\cdot 3+(10-4,8)^2\cdot 4\right)=9,52=D+D.$$

Для вычисления выборочных характеристик при больших выборках используют метод произведений, который продемонстрируем на следующем примере.

Пример 4. Найти выборочные среднюю и дисперсию следующего статистического распределения:

x_i	20,0	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0
m_i	2	3	7	11	17	20	16	13	6	4	1

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего

7. запишем варианты в первый столбец;
8. запишем частоты во второй столбец, сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;
9. в качестве ложного нуля выберем варианту 21,0 (в середине ряда) и записываем условные варианты $u_i = (x_i - 21))/0,2$;
10. произведения частот на условные варианты записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму отрицательных (-82) и отдельно сумму положительных (81) чисел, а их сумму (-1) помещаем в нижнюю клетку столбца;
11. произведения частот на квадраты условных вариант записываем в пятый столбец, а их сумму (433) помещаем в нижнюю клетку столбца;
12. произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец, а их сумму помещаем в нижнюю клетку столбца.

Контроль:
$\sum m_i \cdot u_i^2 + 2\sum m_i \cdot u_i + n = 433 + 2 \cdot (-1) + 100 = 531 = \sum m_i \cdot (u_i + 1)^2$, и вычисления произведены правильно.

1	2	3	4	5	6
x_i	m_i	u_i	$m_i \cdot u_i$	$m_i \cdot u_i^2$	$m_i \cdot (u_i+1)^2$
20,0	2	-5	-10	50	32
20,2	3	-4	-12	48	27
20,4	7	-3	-21	63	28
20,6	11	-2	-22	44	11
20,8	17	-1	-17	17	0

21,0	20	0	$A_1 = -82$		20
21,2	160	1	16	16	64
21,4	13	2	26	52	117
21,6	6	3	18	54	96
21,8	4	4	16	64	100
22,0	1	5	5	25	36
	100		$A_2 = 81$		
			$\Sigma m_i \cdot u_i = -1$	$\Sigma m_i \cdot u_i^2 = 433$	$\Sigma m_i \cdot (u_i + 1)^2 = 531$

Вычислим теперь условные моменты первого и второго порядков:

$$\mathrm{M}_1^* = \left(\sum m_i u_i\right)/n = -1/100 = -0,01;$$
$$\mathrm{M}_2^* = \left(\sum m_i u_i^2\right)/n = 433/100 = 4,33.$$

Найдем искомые выборочные среднюю и дисперсию:

$$x^* = M_1^* \cdot h + C = (-0,01) \cdot 0,2 + 21,0 = 20,8;$$
$$D^*[X] = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] \cdot h^2 = \left[4,33 - (-0,01)^2\right] \cdot 0,2^2 \approx 0,173.$$

Если первоначальные варианты не являются равноотстоящими, то интервал, в котором заключены все варианты выборки, делят на несколько равных частичных интервалов.

Пример 5. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию для следующего вариационного ряда:

x_i	1	1,03	1,05	1,06	1,08	1,10	1,12	1,13	1,16	1,19	1,20	1,21	1,25	1,26	1,28
m_i	1	3	6	4	2	4	3	6	5	2	4	4	8	4	4

1,30	1,32	1,35	1,37	1,38	1,39	1,40	1,44	1,46	1,47	1,49	1,50					
6	4	6	5	1	2	2	3	3	4	3	2					

Решение. Выделим пять частичных интервалов:

$1-1{,}0$	$m_1 = 1+3+6+4+2+4:2 = 18$,
$1{,}1-1{,}2$	$m_2 = 4:2+3+6+5+2+4:2 = 20$,
$1{,}2-1{,}3$	$m_3 = 4:2+4+8+4+4+6:2 = 25$,
$1{,}3-1{,}4$	$m_4 = 6:2+4+6+5+1+2+2:2 = 22$,
$1{,}4-1{,}5$	$m_5 = 2:2+3+3+4+3+2:2 = 15$.

Составим новый вариационный ряд из середин выбранных частичных интервалов:

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
m_i	18	20	25	22	15

$y^* = 1,246, \quad D_y^* = 0,017$ и сравнивая с $\bar{x}^* = 1,25, \quad D_x^* = 0,018$, замечаем, что $y^* \approx x^*, \quad D_y^* \approx D_x^*$, а вычислений значительно меньше.

Задания для практического занятия:

1. α - частицы, достигающие счетчика в некотором опыте, образуют следующую выборку:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	21	81	156	200	195	152	97	54	26	11	7

Найдите выборочную среднюю, моду и медиану для числа α - частиц, достигающих счетчика.

2. Распределение рабочих цеха по проценту выполнения норм выработки выглядит следующим образом:

% выполнения норм	50 - 70	70 - 90	90 - 110	110 - 130	130 - 150	150 - 170
Число рабочих	20	25	35	30	20	10

Найдите средний процент выполнения норм выработки рабочими цеха.

3. Для определения "общего интеллекта" школьникам предлагалось раскрыть геометрические закономерности. Оценка осуществлялась по количеству правильно решенных задач и дала следующие результаты:

Кол-во баллов	14	15	16	17	18	19	20
Кол-во школьников	4	11	15	16	19	15	5

Найдите моду и медиану данного вариационного ряда.

4. Дайте характеристику изменений показателей психологической защищенности младших подростков до и после эксперимента, в ходе которого получены следующие результаты:

Показатели психологической защищенности	от публичного унижения	от оскорблений	от высмеиваний	от угроз	от обзываний	от непр. отношений	от игнорирования	от недобрых отношений
до эксперимента	2,4	2,1	2,2	2,5	2,2	2,2	2,4	2,2
после эксперимента	2,6	2,2	2,4	2,8	2,3	2,6	2,8	2,4

5. Какой вывод можно сделать об эффективности интерактивного обучения по выраженности базовых ценностей и экологических ориентаций в экспериментальной и контрольной группах в конце обучения? Количества выборов представлены в таблице:

Наименование показателя	Признание и уважение людей	Природа как среда сущ. любимых животных и растений	Природа как условие благополучия будущего поколения	Природа как объект заботы
среднее по эксп. группе	6,64	2,24	4,4	3,92
среднее по контр. группе	4,95	3,53	3,53	2,88

6. Найдите внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсию выборки, состоящей из трех групп:

первая группа

x_i	2	3	8
m_i	30	20	10

вторая группа

x_i	1	6
m_i	10	20

третья группа

x_i	3	5	7
m_i	8	12	10

7. Найдите методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема n = 100:

варианты	22	24	26	28	30	32
частота	5	15	50	18	10	4

8. Найдите методом произведений выборочные среднюю и дисперсию вариационного ряда:

x_i	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
m_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

9. Вычислите выборочные средние и дисперсии по первоначальным и равностоящим вариантам (и сравните их) для вариационного ряда:

x_i	m_i	x_i	m_i	x_i	m_i
1,00	1	1,12	3	1,25	8
1,03	3	1,15	6	1,26	4
1,05	6	1,16	5	1,29	4
1,06	4	1,19	2	1,30	6
1,08	2	1,20	4	1,32	4

1,10	4	1,23	4	1,33	5

10.Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию по первоначальным и равностоящим вариантам для следующего вариационного ряда:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18,5	23	25	26
m_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Литература

Основная литература:

1. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html

2. Тетруашвили Е.В. Математика [Электронный ресурс] : практикум / Е.В. Тетруашвили, В.В. Ершов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 159 c. — 978-5-4486-0220-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71567.html

3. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / О.В. Бондрова [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 194 c. — 978-5-4486-0107-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70267.html

Дополнительная литература:

1. Ахметгалиева В.Р. Математика. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.Р. Ахметгалиева, Л.Р. Галяутдинова, М.И. Галяутдинов— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский государственный университет правосудия, 2017.— 60 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65863.html.— ЭБС «IPRbooks»

2. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике : [учеб. пособие] / А.А. Дадаян. - М. : ФОРУМ, 2016. - 352 с. : ил. - (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-803-8

Интернет-ресурсы:

- Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября»http://www.mat/septemba.ru
- Математика в открытом колледже http://www.mathematics.ru
- Образовательный математический сайт Exponenta.mhtto://www/ exponent/ru
- Общероссийский математический портал Mati-Net/Ru http://www/mathnet/ru
- Портал Alhnath.ni –вся математика в одном месте.