МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Колледж Пятигорского института (филиала) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

ЕН.01. Математика

Специальность 38.02.04 Коммерция (по отраслям)

Форма обучения очная

Учебный план 2021 года

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

Пятигорск, 2021

Методические указания для самостоятельных работ по ЕН.01 Математика составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 38.02.04 Коммерция (по отраслям).

Рассмотрено на заседании ПЦК Колледж Пятигорского института (филиала) СКФУ
Протокол № 8 от «22» 03. 2021 г.

1. Пояснительная записка

Методические указания призваны оказывать помощь студентам в изучении основных понятий, идей, теорий и положений дисциплины, изучаемых в ходе конкретного занятия, способствовать развитию их умений, навыков и профессиональных компетенций.

В данном учебном пособии согласно специфике дисциплины и прописываются:

Современные требования к учебному процессу ориентируют преподавателя на проверку знаний, умений, навыков через деятельность учащихся.

Практическая работа может быть определена как деятельность, направленная на применение, углубление и развитие теоретических знаний в комплексе с формированием необходимых для этого умений и навыков /самостоятельное использование учебника, наглядных пособий, биологических приборов и материалов и т.д./

Выполнение практических работ направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемых дисциплин;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений: аналитических, проектировочных; конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Дисциплины, по которым планируются практических работы и количество часов, отводимое на их выполнение, определяются рабочим учебным планом.

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности;

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные понятия и методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

Практическая работа № 1

Тема 1.2: Вычисление пределов функции
Цель: Научить вычислять пределы функций

Теоретическая часть

Предел функции

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение предела функции можно сформулировать и так: Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к а, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки а, что для любого $x \neq a$ из этой окрестности $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел обозначается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Пример 1. Предел постоянной функции в любой точке равен этой же постоянной.

Решение. Пусть $f(x) = k$ для всех x. Очевидно, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ справедливы соотношения $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Значит, по определению предела

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k.$$

Пример 2. Дана функциия$f(x) = x$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ - любое число. Положив $\delta = \varepsilon$, для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ получим$|f(x) - a| = |x - a| < \delta$, т.е. $|f(x) - a| < \varepsilon$, значит

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел при x, стремящемся к а, то этот предел единственен.

Теоремы о пределах функции

Теорема 1. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и пределы их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) .$$

Теорема 2. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) .$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

Действительно,

$$\lim_{x\to a}(kf(x) = \lim_{x\to a} k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) .$$

Теорема 3. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует также и предел их отношения $f(x)/g(x)$, равный отношению пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)/ \lim_{x\to a} g(x) .$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю, то она называется бесконечно малой величиной.

Если предел функции равен бесконечности, т.е. величине обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной. Следовательно, выполняются равенства:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{0} = \infty, \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{\infty} = 0$$

Вычислите пределы

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3)=\lim_{x\to 7}x+\lim_{x\to 7}3=7+3=10.$$

.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-7}=$$

$$=\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=5/(-5)=-1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$

$$=2+2=4.$$

Решение упражнений

1 $\lim_{x \to 2}[(x^2-1)(x-3)(x-5)]$

1. $\lim\limits_{x \to 0}[(2x-4)(x-1)(x+2)]$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3}{2x-6}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{3x^2+2x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3+x}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$
8. $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x+3}$
9. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2+25}$
10. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$
11. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$
12. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$
13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
14. $\lim\limits_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$
15. $\lim\limits_{x \to \infty}(x^2-5x+6)$
16. $\lim\limits_{x \to \infty}(x^3+3x^2)$
17. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{x-2}$
18. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-8}{2x-2}$
19. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-4x^2+2x}$

20. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{x^2-2x+3}$

21. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x$

22. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-x$

23. $\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$

24. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9x}$

25. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

26. $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

27. $\lim_{x\to 5}\frac{2-x}{3-\sqrt{2x-1}}$

Практическая работа № 2

Тема 1.3: Производная и дифференциал высших функций.
Цель: Научить вычислять производные и дифференциалы высших функций.
Теоретическая часть

Теоретическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.
Основные правила дифференцирования:

1. $C' = 0,$ где $C - const$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
5. $(f\cdot C)' = f'\cdot C,$ где $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.
Производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной. Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y''. Аналогично определяются производные 3-го, 4-го,…, порядка.

Решение упражнений

1. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
2. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
3. $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$
4. $y = cosln(1-x^2)$
5. $y = sin\sqrt{3} + \frac{1sin^2 3x}{3cos6x}$
6. $y = ctg\sqrt[3]{5}$-$\frac{1cos^2 4x}{8sin8x}$

7. $y = arcsin^3\sqrt{4-5x}$
8. $y = arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$
9. $y = \sqrt{\frac{2}{3}}arctg\frac{3x-1}{\sqrt{6}}$
10. $y = lnsin\frac{2x+4}{x+1}$
11. $y = lntg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$
12. $y = ln^3(1+cos4x)$
13. $y = x+\frac{1}{\sqrt{2}}ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+2^{\pi^{\sqrt{2}}}$
14. $y = \ln arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$
15. $y = e^{-x^2}cos^3(2x+3)$
16. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\cdot arctg^2 2x$
17. $y = \frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$
18. $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$
19. y=$(19)^{x^{19}}x^{19}$
20. $y = (ctgx)^{lntg\frac{x}{4}}$

Практическая работа № 3

Тема 1.6: Неопределенный интеграл. Вычисление неопределенных интегралов.
Цель: Научить вычислять неопределенный интегралы

Теоретическая часть

Неопределенный интеграл

F(x) - **первообразная** для f(x) на множестве X если F'(x) = f(x) для всех x∈X. Если F(x) - первообразная для f(x) на множестве X, то F(x) + c - множество всех первообразных для f(x) на множестве X. Это множестве первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx = F(x)+C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная
$$\int dF(x) = F(x) + C$$
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$d\int f(x)d(x) = f(x)d(x)$$
3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
$$\int [f(x)+\varphi(x)]d(x) = \int f(x)\,d(x) + \int \varphi(x)d(x)$$
4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:
$$\int af(x)d(x) = a\int f(x)d(x)$$

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = lnx + C$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$

6. $\int sinx\,dx = -cosx + C$

7$\int cosx\,dx = sinx + C$

8. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a}$+C

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений:

1. $\int xdx$
2. $\int \frac{x}{5}dx$
3. $\int x^5dx$
4. $\int 7x^6dx$
5. $\int (7x+1)^3dx$
6. $\int 10\sin 5xdx$
7. $\int 3(5x+1)^2dx$
8. $\int (2x-1)^2dx$
9. $\int \frac{dx}{x^3}$
10. $\int \sqrt[4]{x^3dx}$
11. $\int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$.
12. $\int 3\cos 3xdx$
13. $\int 4(5-6x)^3dx$
14. $\int \frac{dx}{x^4}$
15. $\int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$
16. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}$
17. $\int 2^3\sqrt{(7-3x)^2}dx$
18. $\int \frac{dx}{x^2-9}$
19. $\int \frac{dx}{x^2-25}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$
21. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

23. $\int \frac{dx}{25+x^2}$

24. $\int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$

25. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

27. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{cos^2x} - \frac{1}{sin^2x}\right)$

Практическая работа №4.

Тема 1.7: Основные методы вычисления интегралов.
Цель: Применение основных методов при вычислении интегралов.
Теоретическая часть:
Замена переменной
Для интегрирования многих функций применяют метод замены переменной, или *подстановки,* позволяющий приводить интегралы к табличной форме.

Если функция f(z) непрерывна на [a, β], функция z =g (x) имеет на [a,b] непрерывную производную и $\alpha \le g(x) \le \beta$, то

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(z)\, dz, \qquad (1)$$

причем после интегрирования в правой части следует сделать подстановку z=g(x).

Для доказательства достаточно записать исходный интеграл в виде:

$\int f(g(x))\, g(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x)$.

Например:

1) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int (\ln x)' \frac{dx}{\ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$;

2) $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{(\sin x)' dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arctg}\, z + C = \text{arctg}(\sin x) + C$.

Метод интегрирования по частям

Пусть u = f(x) и v = g(x) - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда, по правилу дифференцирования произведения,

$$d(uv) = udv + vdu \text{ или } udv = d(uv) - vdu.$$

Для выражения d(uv) первообразной, очевидно, будет *uv*, поэтому имеет место формула:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2)$$

Эта формула выражает правило *интегрирования по частям*. Оно приводит интегрирование выражения udv=uv'dx к интегрированию выражения vdu=vu'dx.
Пусть, например, требуется найти x cosx dx. Положим u = x, dv = cos x dx, так что du=dx, v=sinx. Тогда

$\int x \cos x\, dx = \int x\, d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$\int x^k \ln^m x\, dx$, $\int x^k \sin bx\, dx$, $\int x^k \cos bx\, dx$, $\int x^k e^{ax}\, dx$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Решение упражнений.

Практическая работа №5

Тема 1.8: Определенный интеграл как предел интегрирования суммы. Вычисление определенного интеграла.
Цель: Научиться решать определенные интегралы

Теоретическая часть.

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке [a, b] определена функция f(x). Разобьем отрезок [a, b] на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 <...<x_n = b$. Из каждого интервала (x_{i-1}, x_i) возьмем произвольную точку x_i и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i$,, где, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма вида $\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i$,, i называется *интегральной суммой*, а ее предел при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции f(x) от *a* до *b* и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda} \sum_{i=n}^{n} f(x_1)dx_1 \quad (1)$$

Функция f(x) в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* [a, b], числа *a* и *b* носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$, (k = const, $k \in \mathbf{R}$);

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$;

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \in a,b]).$$

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.
Пусть f(x) непрерывна на [a, b]. Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x) = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой y= f(x), прямыми x = a и x = b и отрезком оси *Ox*.

Решение упржнений.

1. Вычислить $\int dx/(x+2)$.

2. Найти $\int \mathrm{tg}\, x\, dx$.

3. Найти $\int dx/\sin x$.

4. Найти $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

5. Найти $\int \mathrm{arctg}\, x\, dx$.

6. Вычислить $\int \ln x\, dx$.

7. Вычислить $\int e^x \sin x\, dx$.

Пример 3.37. Вычислить J = $\int \cos(\ln x)dx/x$.

Решение. Так как dx/x = d(ln x), то J= $\int \cos(\ln x)d(\ln x)$. Заменяя ln x через t, приходим к табличному интегралу J = $\int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C$.

8. Вычислить J = $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$.

9. Вычислить интеграл J = $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$.

10. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу $\int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$?

11. Вычислить интеграл $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$.

Практическая работа № 6

Тема 2.1: Множества и операции над ними.
Цель: Научить решать задачи, используя основные операции над множествами

Теоретическая часть

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством.
Операции над множествами: объединение, пресечение, дополнение, разность, симметрическая разность.
Пример: На фирме работают 40 человек. Из анкетных данных известно, что 20 человек владеют английским языком, 20 человек – компьютером, 14 – делопроизводством. Английским языком и компьютером владеют 9 человек; . английским языком и делопроизводством – 7 человек; компьютером и делопроизводством – 5 человек; английским языком, делопроизводством
И компьютером – 2 человека. Сколько человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством?
Решение: 1) Введем обозначения:
U- множество человек работающих на фирме;
A- множество человек, владеющих английским языком;
B- множество человек, владеющих компьютером;
C- множество человек, владеющих делопроизводством.
Тогда m(U)=40: m(A)=20; m(B)=20; m(C)=14.
Кроме того, известно, что английским языком владеют 9 человек, следовательно, $m(A \cap B) = 9$; английским языком и делопроизводством – 7 человек, следовательно, $m(A \cap \mathrm{C}) = 7$; компьютером и делопроизводством – 5 человек, следовательно, $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 5$; английским языком, делопроизводством и компьютером – 2 человека, следовательно, $m(A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 2$.
Необходимо определить

Разобьем множество M=$A \cup B \cup C$ на 7 попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_7$ и найдем мощности каждого из этих множеств:
а) $A_1 = A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, владеющих английским языком, делопроизводством и компьютером, $m(A_1)$= $m(A \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 2$
б) $A_2 = \bar{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, не владеющих английским языком и владеющих компьютером и делопроизводством. Заметим, что $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = A_1 \cup A_2$, следовательно $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = m(A_1) + m(A_2)$, откуда $m(A_2)$= $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - m(A_1) = 5 - 2 = 3$;
в) A_3= $A \cap \bar{B} \cap \mathrm{C}$ – множество человек, владеющих английским языком и делопроизводством и не владеющих компьютером. Заметим, что $A \cap \mathrm{C}$=$A_1 \cup A_3$, следовательно, $m(A \cap \mathrm{C}) = m(A_1) + m(A_3)$, откуда
$m(A_3)$= $m(A \cap \mathrm{C}) - m(A_1)$=7-2=5
г) A_4= $A \cap \mathrm{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком, компьютером и не владеющих делопроизводством. $A \cap \mathrm{B} = A_1 \cup A_4$, следовательно, $m(A \cap B) = m(A_1) + m(A_4)$, откуда
$m(A_4)$= $m(A \cap \mathrm{B}) - m(A_1)$=9-2=7;
д) $A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \mathrm{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком, компьютером и владеющих делопроизводством.
$\mathrm{C} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$, следовательно, m(C)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_3) + m(A_5)$, откуда, $m(A_5)$= , m(C)- $m(A_1) - m(A_2)$- $m(A_3)$=14-2-3-5=4;
е) $A_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком и делопроизводством и владеющих компьютером B=$A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6$,

m(B)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_4) + m(A_6)$, откуда $m(A_6)$= m(B)- $m(A_1) - m(A_2)$+$-m(A_4) - m(A_6) = 20 - 2 - 3 - 7 = 8$;
ж) $A_7 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком и не владеющих делопроизводством и компьютером. A=$A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_7$, следовательно, m(A)= $m(A_1) + m(A_3)$+ $m(A_4) + m(A_7)$, откуда $m(A_7)$= m(A)- $m(A_1) - m(A_3)$+$-m(A_4) = 20 - 2 - 5 - 7 = 6$;
Окончательно,
M= $A \cup B \cup C$=$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, следовательно, m(M)= $m(A_1) + m(A_2)$+ $m(A_3) + m(A_4) + m(A_5)$+ $m(A_6)$+ $m(A_7)$=$2 + 3 + +5 + 7 + 4 + 8 + 6 = 35$

1) Так как U=M+$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, то $m(\mathrm{U}) = \mathrm{m(M)} + \ m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$, откуда

$m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$= $m(\mathrm{U}) - \mathrm{m(M)} = 40 - 35 = 5$
Следовательно, 5 человек не владеют ни английским языком, ни делопроизводством, ни компьютером.

Решение упражнений

1.Даны множества: $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}, A = \{a, c, e, p\}, B = \{b, d, f, p\}, C = \quad \{a, d, f, q\}$
Выполните следующие операции:
а) $\overline{(A/\bar{B}}/B \cap C)/\overline{\overline{\bar{C}}}\ \cup$ A
б) $(A \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B/C$;
в) $\bar{A}/\overline{B \cap C}/A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$;
г) $A \cup B \cap \overline{B \cup C}/\bar{B}$;
д) $(A \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$;
е) $(A \cup B \cap \mathrm{C})/(\bar{B} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\overline{A \cup B \cup C})$;
ж)($A \cup (B/A) \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap C/C$
2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна упростите выражения:
а) $\bar{A} \cup (A/\overline{B)} \cup (\bar{A}/\overline{B)}$;
б) A$\cup$ $\overline{(\bar{A} \cup B)}$$\cup$ $\bar{B}$;
в) $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{B)} \cup (A \cap \overline{B)}$
г) $)(\bar{A} \cup \overline{B)} \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cap \overline{B)} \cap (A \cup B)$
3. Из 276 отобранных студентов экономического вуза 83 изучают математику,95-право, 102-финансы. Кроме того, известно, что 27 из них изучают математику и право, 24-математику и финансы, 20-право и финансы 11-изучают все три предмета. Сколько учащихся не изучают ни одного из этих предметов? Сколько из них изучают финансы, но не изучают ни математику, ни право?
4. Проверочный экзамен по математике содержал три задачи: предел, производная и интеграл. Из 800 студентов задачу с пределом решили 250 человек; с пределом или интегралом – 600 человек. По две задачи решили 400 человек, из них две задачи на предел и производную решили 150 человек, на предел и интеграл – 50 человек. Ни один студент не решил все задачи. 20 студентов не решили ни одной задачи. Только задачу на интеграл решили120 человек. Сколько студентов решили только одну задачу? Сколько человек решили задачу на производную?
5. Кафедра математики обслуживает три факультета: Экономический, финансовый, товароведный. Некоторые преподаватели кафедры могут работать сразу на нескольких факультетах. На финансовом факультете работают 22 преподавателя, на экономическом - 23 преподавателя, на экономическом и товароведном – 36 преподавателей. Только на финансовом факультете работают 10 преподавателей, только на экономическом и товароведном -5 преподавателей. Два преподавателя работают на трех факультетах. Число преподавателей, работающих только на экономическом и финансовом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на финансовом и товароведном факультетах. Сколько

преподавателей работает на кафедре? Сколь преподавателей работает только на одном факультете?

Практическое занятие №7

Тема 2.2: Основные понятия теории матриц. Определение матрицы.
Цель: Научить решать определять значения матриц.

Теоретическая часть:
Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы
Цель: Освоить способы выполнения операций над матрицами, элементарные преобразования матриц, нахождения обратной матрицы
Теоретическая часть
Операции над матрицами

Сложение матриц. Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одной и той же размерности $m\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ той же размерности такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Итак, можно складывать только матрицы одной и той же размерности. При сложении матриц складываются соответствующие элементы.

Пример 1.

Найдите сумму матриц $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$C=A+B=\begin{pmatrix} 3-3 & 2-2 \\ -1+1 & 0+0 \\ 1-1 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — нуль-матрица размерности 3×2.

Из определения суммы следует, что сложение матриц подчинено:
а) коммутативному закону $A+B=B+A$;
б) ассоциативному закону
$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$;
в) $A_{m\times n}+0_{m\times n}=A_{m\times n}$ — закон поглощения нуля.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ (или λ на матрицу A) называется матрица $B=(b_{ij})$, где $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, т.е. при умножении матрицы на число надо все элементы матрицы умножить на это число.

Пример 2

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число:
а) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ (ассоциативность);
б) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

в) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

г) $1\cdot A=A$.

Пример 3

Найдите $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -2+3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размерности $n\times m$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размерности $m\times p$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размерности $n\times p$ такая, что $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{im}\cdot b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,p$.

Умножать матрицы A и B можно лишь в том случае, когда число столбцов первого сомножителя A (число элементов в каждой строке матрицы A) совпадает с числом строк второго сомножителя B (число элементов в каждом столбце B). В частности для квадратных матриц одинакового порядка определены оба произведения AB и BA, и матрицы произведения являются матрицами того же порядка

Пример 4 Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$. Найдите произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB=\begin{pmatrix}\boxed{1 \quad 2 \quad 3}\\ 1 \quad 0 \quad -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\0\\1\end{matrix} & \begin{matrix}5\\-2\\8\end{matrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{выделяются 1-я строка матрицы } A\\ \text{и первый столбец матрицы } B,\\ \text{соответствующие элементы перемножаются,}\\ \text{а произведения складываются}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3\neq2)$.

Пример 5 Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$. Найдите произведения AB и BA (если это возможно).

$AB=3\cdot(-1)+2\cdot1+(-1)\cdot2=-3+2-2=-3$.

$$BA=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot3 & -1\cdot2 & -1\cdot(-1)\\ 1\cdot3 & 1\cdot2 & 1\cdot(-1)\\ 2\cdot3 & 2\cdot2 & 2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 6 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

Из приведенных выше примеров ясно, что в общем случае $AB\neq BA$..

Коммутирующими называют матрицы A и B, если для них выполнено условие $AB=BA$.

Свойства операции умножения матриц:

а) ассоциативность: если определено одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$, то определено также и второе произведение, и имеет место выше приведённое равенство $(AB)C=A(BC)=A\cdot B\cdot C$;

б) дистрибутивность: если C — такая матрица, что определено произведение AC, то определены произведения BC и $(A+B)C$ и верно равенство $(A+B)C=AC+BC$ (A и B — матрицы одинаковых размеров);

в) дистрибутивность: если A — такая матрица, что определено произведение AB, то определены произведения AC и $A(B+C)$ и верно равенство $A(B+C)=AB+AC$ (B и C — матрицы одинаковых размеров);

г) $A_{m\times n}\cdot E_n=E_m\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}$.

Транспонированная матрица

Транспонированием матрицы называется такое её преобразование, при котором строки этой матрицы становятся её столбцами с теми же номерами.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad A^T_{n\times m}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обозначается A' или A^T.

Если $A^T=A$, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$, то матрица называется *симметрической.*

Пример 6 Транспонируйте матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей.

Определение 1
Определителем матрицы называется некоторая математическая функция элементов квадратной матрицы, результатом которой является число.
Обозначение:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 4 & -1 \\ 12 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

— определитель 3- го порядка (т.к. матрица размера 3 на 3) матрицы А.
Вычисление определителей первого порядка.
Матрица размера 1×1 это просто число. Определителем такой матрицы является само это число.
Пример:
$|3| = 3$

Вычисление определителей второго порядка
Определитель второго порядка (матрицы размера 2 на 2) вычисляется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

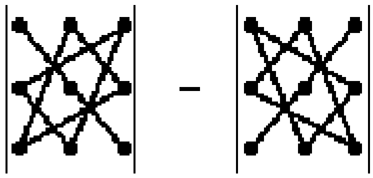
Пример 7:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot1 - 4(-3) = 3 + 12 = 15$$

Вычисление определителей третьего порядка
Определитель третьего порядка (матрицы размера 3 на 3) вычисляется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

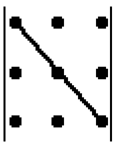
Запомнить порядок сомножителей можно, используя правило треугольников

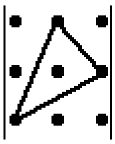


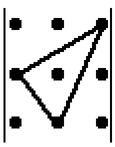
Пример 8.
Вычислить определитель:

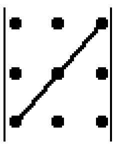
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 11 & 21 & -5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

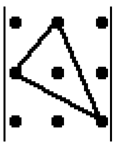
Решение:
Воспользуемся правилом треугольника

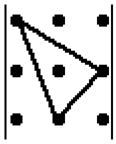
 $= a_{11}a_{22}a_{33} = 2 \cdot 21 \cdot 9 = 378$

 $= a_{12}a_{23}a_{31} = 3 \cdot (-5) \cdot 4 = -60$

 $= a_{13}a_{21}a_{32} = 11 \cdot (-1) \cdot 6 = -66$

 $= a_{13}a_{22}a_{31} = (-1) \cdot 21 \cdot 4 = -84$

 $= a_{12}a_{21}a_{33} = 3 \cdot 11 \cdot 9 = 297$

 $= a_{11}a_{23}a_{32} = 2\cdot(-5)\cdot 6 = -60$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 11 & 21 & -5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 378 - 60 - 66 - (-84 + 297 - 60) = 108$$

Ответ 108

Нахождение обратной матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу A. Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц, матриц «два на два», «три на три» и т.д.

обратная матрица обозначается надстрочным индексом $^{-1}$

Пример 9:

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решаем.

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

В том случае, если определитель матрицы равен НУЛЮ – обратной матрицы не существует.

2) Найдем матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица A, то есть в данном случае $M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

осталось найти четыре числа и поставить их вместо звездочек.

Возвращаемся к нашей матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его минор?

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является минором данного элемента, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Рассматриваем следующий элемент матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \boxed{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \boxed{2} \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений A_*.
Это просто. В матрице миноров нужно поменять знакиу двух чисел:

$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

$A_* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений A_*^T.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

5) Ответ.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Как проверить решение?
Необходимо выполнить матричное умножение AA^{-1} либо $A^{-1}A$
Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-3) & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) & 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Получаем единичную матрицу (с единицами по главной диагонали и нулями в остальных местах).
Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Пример10Найти обратную матрицу для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Алгоритм точно такой же, как и для случая «два на два».

Обратную матрицу найдем по формуле: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T$, где B_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

1) Находим определитель матрицы.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-9+8) - 5\cdot(-18-20) + 7\cdot(-12-15) = -2 + 190 - 189 = -1$$

2) Находим матрицу миноров M.

$$M=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Матрица миноров имеет размерность «три на три» , и нам нужно найти девять чисел.

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B=\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B=\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и является минором данного элемента. Его нужно вычислить:

$$B=\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B=\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 4=-9+8=-1$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

нахождение еще одного минора

$$B=\begin{pmatrix} 2 & \cancel{5} & 7 \\ 6 & \cancel{3} & 4 \\ \cancel{5} & \cancel{-2} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-6\cdot 7=8-42=-34$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Окончательный результат:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

– матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо сменить знаки строго у следующих элементов:

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$$B_* = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_*^T.

$$B_*^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot 27 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 41 + 7 \cdot (-29) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot 24 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot 27 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 41 + 4 \cdot (-29) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-34) + 4 \cdot 24 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-38) - 3 \cdot 27 & 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 41 - 3 \cdot (-29) & 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-34) - 3 \cdot 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Задание для выполнения практической работы

Задание 1. Вычислить 3A+2B
Задание 2. Вычислить AB
Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы A и B

1.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2.	$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Практическое занятие №8

Тема 2.3: Метод Гаусса и метод Крамера при решении систем.
Цель: Освоить способы решения систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса

Теоретическая часть

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = s_1 \\ a_2x + b_2y = s_2 \end{cases}$

Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, его называют *главным определителем системы*.

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$

Корни уравнения находим по формулам:

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

Рассмотрим правилоКрамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если $D = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

Ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Пример 1

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4-2) + 2 \cdot (-3+4) + 4 \cdot (-3-8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

$$D_1=\begin{vmatrix}21 & -2 & 4\\ 9 & 4 & -2\\ 10 & -1 & -1\end{vmatrix}=21\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}9 & -2\\ 10 & -1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}9 & 4\\ 10 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=21\cdot(-4-2)+2\cdot(-9+20)+4\cdot(-9-40)=-126+22-196=-300$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-300}{-60}=5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 21 & 4\\ 3 & 9 & -2\\ 2 & 10 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}9 & -2\\ 10 & -1\end{vmatrix}-21\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & 9\\ 2 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-9+20)-21\cdot(-3+4)+4\cdot(30-18)=33-21+48=60$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-60}=-1$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & 21\\ 3 & 4 & 9\\ 2 & -1 & 10\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4 & 9\\ -1 & 10\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ -1 & 10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 21\\ 4 & 9\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(40+9)-3\cdot(-20+21)+2\cdot(-18-84)=147-3-284=-60$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-60}{-60}=1$$

Ответ: $x_1=5, x_2=-1, x_3=1$.

Пример 2

Решить систему с матричным методом

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=21\\ 3x_1+4x_2-2x_3=9\\ 2x_1-x_2-x_3=10\end{cases}$$

Решение: Запишем систему в матричной форме:

$AX=b$, где $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}21\\ 9\\ 10\end{pmatrix}$

Нужно найти обратную матрицу A^{-1} и выполнить матричное умножение $A^{-1}b$

Обратную матрицу найдем по формуле:

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A_*^T$, где A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Найдем определитель:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(-4-2)+2\cdot(-3+4)+4\cdot(-3-8)=-18+2-44=-60$$

Если $|A| = 0$, то обратной матрицы не существует, и решить систему матричным методом невозможно. В этом случае система решается методом исключения неизвестных (методом Гаусса).
Теперь нужно вычислить 9 миноров и записать их в матрицу миноров

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18$$

Порядок расчета миноров совершенно не важен.

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 6 & -11 & 1 \\ -12 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

$$A_* = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений.

$$A_*^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Теперь записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{T}_{*} = \frac{1}{-60}\begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

Проведем матричное умножение.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6\cdot 21 + 6\cdot 9 + 12\cdot 10 \\ 1\cdot 21 + 11\cdot 9 - 18\cdot 10 \\ 11\cdot 21 + 1\cdot 9 - 18\cdot 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 5,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

Наиболее универсальным способом решения системы является метод исключения неизвестных – метод Гаусса. Суть метода заключается в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду, если система имеет единственное решение, то матрица приведется к треугольному виду

Практическое занятие №9

Тема 2.4: Решение систем линейных уравнений.
Цель: Освоить способы решения систем линейных уравнений

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

1)К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&-1&1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-1\\5&3&-2&2\\3&2&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&1&-1\\0&-2&3&-3\\0&-1&0&-3\end{array}\right)\xrightarrow{(3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&0&3\\0&-2&3&-3\end{array}\right)\xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&0&3\\0&0&3&3\end{array}\right)\xrightarrow{(5)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

5) Третью строку разделили на 3.

Получаем:

$x_3 = 1$

$x_2 = 3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Решить систему уравнений тремя методами

1	$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$	7	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$

5	$\begin{cases} x+5y+z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x-y-2z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+3z=0 \end{cases}$

Практическое занятие №10

Тема 2.5: Различные виды применения линейных уравнений.
Цель: Изучить различные виды применения линейных уравнений.

Теоретическая часть
Рассмотрим вначале случай, когда число уравнений равно числу переменных, т.е. m = n. Тогда матрица системы - квадратная, а ее определитель называют определителем системы.

Метод обратной матрицы
Рассмотрим в общем виде систему уравнений AX = B с невырожденной квадратной матрицей A. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Домножим слева обе части на A^{-1}. Получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Отсюда $EX = A^{-1}B$ и

$$X = A^{-1}B.$$

Последнее равенство представляет собой матричную формулу для нахождения решения таких систем уравнений. Использование этой формулы получило название метода обратной матрицы

Например, решим этим методом следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: $AX = B$. Найдем определитель $|A| = 5$. Так как $|A| \neq 0$, то матрица A — невырожденная, и существует обратная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

В конце решения системы можно сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы. При этом они должны обратиться в верные равенства.

Для рассмотренного примера проведем проверку:

$$\begin{cases} 4 - 2 + 1 = 3 \\ 2*4 + 2 + 1 = 11 \\ 4 + 2 + 2*1 = 8 \end{cases}$$

Метод решения систем линейных уравнений с квадратной матрицей по формулам Крамера

Пусть n= 2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Если обе части первого уравнения умножить на a_{22}, а обе части второго – на ($-a_{12}$), и затем сложить полученные уравнения, то мы исключим из системы переменнуюх$_2$. Аналогично можно исключить переменнуюх$_1$(умножив обе части первого уравнения на ($-a_{21}$), а обе части второго – наa_{11}). В результате получим систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_2 \end{cases}$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы 0, то система будет совместной и≠Δ определенной. Ее единственное решение можно вычислить по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Δ= 0, аΔЕсли $_1$Δ0 и/или≠$_2$0, то уравнения системы примут вид 0*x≠$_1$Δ=$_2$и/или0*x$_1$Δ=$_2$. В этом случае система будет несовместной.

Δ=ΔВ случае, когда $_1$Δ=$_2$= 0, система будет совместной и неопределенной (будет иметь бесконечное множество решений), так как примет вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

Теорема Крамера(доказательство опустим). Если определитель не равен нулю, тоΔматрицы системы n уравнений система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n},$$

Δгде $_j$- определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Вышеприведенные формулы называют **формулами Крамера**.

В качестве примера решим этим методом систему, которую до этого решали методом обратной матрицы:

Найдем определитель системы $\Delta = |A| = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матрицы A, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

Теперь по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Недостатки рассмотренных методов:

1) существенная трудоемкость (вычисление определителей и нахождение обратной матрицы);

2) ограниченная область применения (для систем с квадратной матрицей).

Реальных экономические ситуации чаще моделируются системами, в которых число уравнений и переменных довольно значительное, причем уравнений больше, чем переменных Поэтому на практике более распространен следующий метод.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных)

Этот метод используется для решения системы m линейных уравнений с n переменными в общем виде. Его суть заключается в применении к расширенной матрице системы равносильных преобразований, с помощью которых система уравнений преобразуется к виду, когда ее решения становится легко найти (если они есть).

Это такой вид, в котором левая верхняя часть матрицы системы будет представлять собой ступенчатую матрицу. Этого добиваются с помощью тех же приемов, с помощью которых получали ступенчатую матрицу с целью определения ранга. При этом применяют к расширенной матрице элементарные преобразования, которые позволят получить равносильную систему уравнений. После этого расширенная матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

Получение такой матрицы называют **прямым ходом**метода Гаусса.

Нахождение из соответствующей системы уравнений значений переменных называют **обратным ходом** метода Гаусса. Рассмотрим его.

Отметим, что последние (m – r) уравнений примут вид:

$$\left\{ 0*x_1+0*x_2+\ldots+0*x_n=b_i,\ i=\overline{r+1,m} \right.$$

Если хотя бы одно из чисел $b_i,\ i=\overline{r+1,m}$ не равно нулю, то соответствующее равенство будет ложным, а вся система несовместной.

Поэтому для любой совместной системы $b_i=0,\ i=\overline{r+1,m}$. В этом случае последние (m – r) уравнений при любых значениях переменных будут тождествами 0 = 0, и их можно не принимать во внимание при решении системы (просто отбросить соответствующие строки).

После этого система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}*x_1+a_{12}*x_2+\ldots+a_{1r}*x_r+a_{1\,r+1}*x_{r+1}+\ldots+a_{1n}*x_n=b_1 \\ \qquad a_{22}*x_2+\ldots+a_{2r}*x_r+a_{2\,r+1}*x_{r+1}+\ldots+a_{2n}*x_n=b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}*x_r+a_{r\,r+1}*x_{r+1}+\ldots+a_{rn}*x_n=b_r \end{cases}$$

Рассмотрим вначале случай, когда r=n. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}*x_1+a_{12}*x_2+\ldots+a_{1r}*x_r=b_1 \\ \qquad a_{22}*x_2+\ldots+a_{2r}*x_r=b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}*x_r=b_r \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы можно однозначно найти x_r.

Предпоследнее уравнение будет иметь вид:

$$a_{r-1\,r-1}*x_{r-1}+a_{r-1\,r}*x_r=b_{r-1}$$

Зная x_r, из него можно однозначно выразитьx_{r-1}. Затем из предыдущего уравнения, знаяx_rиx_{r-1}, можно выразитьx_{r-2}и т.д. доx_1.

Итак, в этом случае система будет совместной и определенной.

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8 \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

Так как $a_{11} \neq 0$, то умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Так как теперь $a_{22} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right)$$

Учитывая, что $a_{33} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на 13,5/8=27/16, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right)$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14 \\ \quad\quad -8x_3 + x_4 = 6 \\ \quad\quad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8} \end{cases}$$

используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; −1; 2).

Теперь рассмотрим случай, когда $r<n$. Первые r переменных будем называть **базисными** (основными), а все остальные – **небазисными** (неосновными, свободными). Последнее уравнение системы будет иметь вид:

$$a_{rr} * x_r + a_{r\ r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{rn} * x_n = b_r$$

Из этого уравнения можно выразить базисную переменную x_r через небазисные:

$$x_r = \frac{b_r - (a_{r\ r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{rn} * x_n)}{a_{rr}}$$

Предпоследнее уравнение будет иметь вид:

$$a_{r-1\,r-1} * x_{r-1} + a_{r-1\,r} * x_r + a_{r-1\ r+1} * x_{r+1} + \ldots + a_{r-1\,n} * x_n = b_{r-1}$$

Подставив в него вместо x_r полученное выражение, можно будет выразить базисную переменную x_{r-1} через небазисные. И т.д. до переменной x_1. Чтобы получить решение системы, можно приравнять небазисные переменные к произвольным значениям и после этого вычислить базисные переменные по полученным формулам. Таким образом, в этом случае система будет совместной и неопределенной (иметь бесконечное множество решений).

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэф-

фициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен 1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & | & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & | & 17 \end{pmatrix}$$

Оставляем в левой части переменные x_1, x_2, которые берем за основные. Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ \quad\;\; -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad \text{и}$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2\right)$.

Совокупность базисных переменных будем называть **базисом**системы. Совокупность столбцов коэффициентов при них тоже будем называть **базисом**(базисными столбцами), или**базисным минором**матрицы системы. То решение системы, в котором все небазисные переменные равны нулю, будем называть **базисным решением**.

В предыдущем примере базисным решением будет (4/5; -17/5; 0; 0) (переменные x_3и x_4(c_1и c_2) приравнены к нулю, а базисные переменные x_1и x_2рассчитаны через них). Чтобы привести пример небазисного решения, надо приравнять x_3и x_4(c_1и c_2) к произвольным числам, неравным одновременно нулю, и рассчитать через них остальные переменные. Например, при c_1= 1 и c_2= 0 получим небазисное решение – (4/5; -12/5; 1; 0). Подстановкой легко убедиться, что оба решения – верные.

Очевидно, что в неопределенной системе небазисных решений может быть бесконечно много. Сколько может быть базисных решений? Каждой строке преобразованной матрицы должна соответствовать одна базисная переменная. Всего в задаче nпеременных, а базисных строк –r. Поэтому число всевозможных наборов базисных переменных не может превысить число сочетаний изnпоr[2]. Оно может быть меньше, чем C_n^r, потому что не всегда можно преобразовать систему к такому виду, чтобы именно этот набор переменных был базисным.

Что это за вид? Это такой вид, когда матрица, образованная из столбцов коэффициентов при этих переменных, будет ступенчатой, и при этом будет состоять из rстрок. Т.е. ранг матрицы коэффициентов при этих переменных должен быть равенr. Большеrон быть не может, так как число столбцов равноr. Если он окажется меньшеr, то это говорит о линейной зависимости столбцов при переменных. Такие столбцы не могут составить базис.
Рассмотрим, какие еще базисные решения могут быть найдены в рассмотренном выше примере. Для этого рассмотрим всевозможные сочетания из четырех переменных по две базисных. Таких сочетаний будет $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2*3*4}{2*2} = 6$, причем одно из них ($x_1$и x_2) уже было рассмотрено.
Возьмем переменные x_1и x_3. Найдем ранг матрицы коэффициентов при них:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2{,}5 \\ 0 & -2{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2{,}5 \\ & \end{pmatrix}$$

Так как он равен двум, они могут быть базисными. Приравняем небазисные переменные x_2и x_4к нулю: x_2= x_4= 0. Тогда из формулы x_1= 4/5 – (1/5)*x_4следует, что x_1= 4/5, а из формулы x_2= -17/5 + x_3- - (7/5)*x_4= -17/5 + x_3следует, что x_3=x_2+17/5 = 17/5. Таким образом, мы получим базисное решение (4/5; 0; 17/5; 0).

Аналогично можно получить базисные решения для базисных переменных x_1и x_4– (9/7; 0; 0; -17/7); x_2и x_4– (0; -9; 0; 4); x_3и x_4– (0; 0; 9; 4).

Переменные x_2и x_3 в этом примере нельзя взять в качестве базисных, так как ранг соответствующей матрицы равен единице, т.е. меньше двух:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возможен и другой подход к определению того, можно или нет составить базис из некоторых переменных. При решении примера в итоге преобразования матрицы системы к ступенчатому виду она приняла вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Выбирая пары переменных, можно было рассчитать соответствующие миноры этой матрицы. Легко убедиться, что для всех пар, кроме x_2и x_3, они не равны нулю, т.е. столбцы линейно независимы. И только для столбцов при переменных x_2и x_3 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, что говорит об их линейной зависимости.

Рассмотрим еще один пример. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво - оно привелось к неверному равенству 0 = -1, следовательно, данная система несовместна.

Практическое занятие №11.

Тема 3.1: Комплексные числа. Геометрическая интерпретация. Понятие модуля.

Теоретическая часть.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексные числа изображаются на так называемой комплексной плоскости. Ось, соответствующая в прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, называется действительной осью, а оси ординат - мнимой осью (рис. 1).

Рис. 1

Комплексному числу $z = a + bi$ будет однозначно соответствовать на комплексной плоскости точка $(a; b)$: $z = a + bi \quad \longleftrightarrow \quad (a; b)$ (рис. 2). То есть на действительной оси откладывается действительная часть комплексного числа, а на мнимой - мнимая.

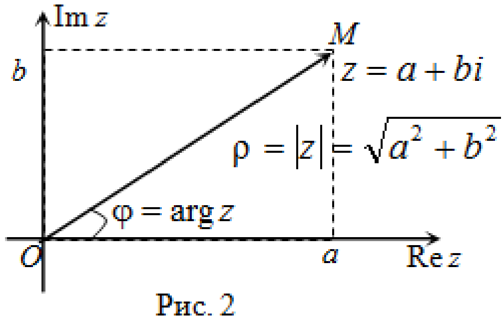


Рис. 2

Например. На рисунке 3 на комплексной плоскости изображены числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = i$ и $z_3 = -2$.

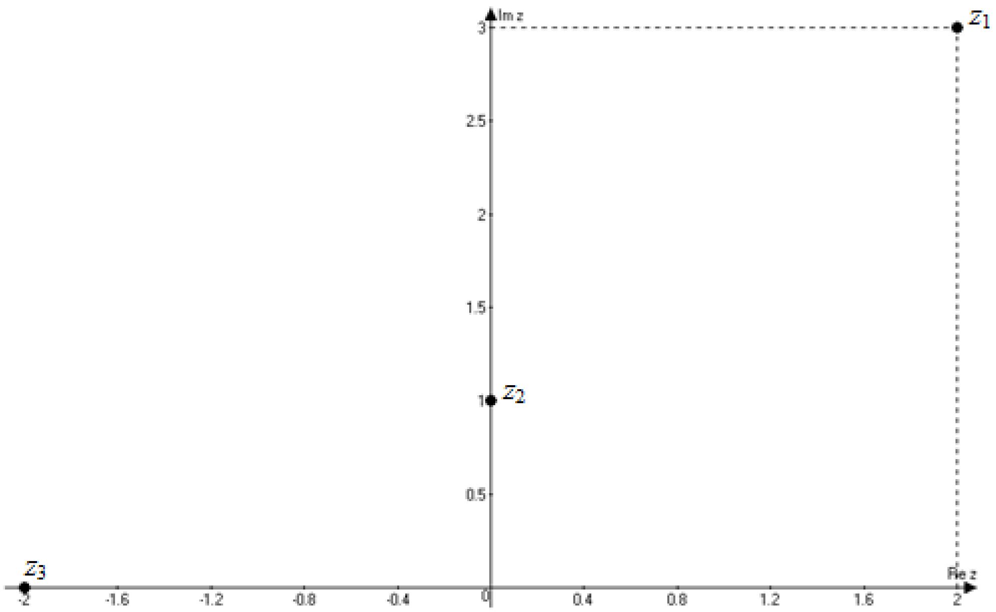


Рис. 3

Модуль комплексного числа

Комплексное число также можно изображать радиус-вектором $\overline{OM}$ (рис. 2). Длина радиус-вектора, изображающего комплексное число $z = a + bi$, называется модулем этого комплексного числа.

Модуль любого ненулевого комплексного числа есть положительное число. Модули комплексно сопряженных чисел равны. Модуль произведения/частного двух комплексных чисел равен произведению/частному модулей каждого из чисел.

Модуль вычисляется по формуле:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

То есть модуль есть сумма квадратов действительной и мнимой частей заданного числа.

Пример

Задание. Найти модуль комплексного числа $z = 5 - 3i$

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = 5$, $\operatorname{Im} z = -3$, то искомое значение

$$|z| = |5 - 3i| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

Ответ. $|z| = \sqrt{34}$

Замечание

Иногда еще модуль комплексного числа обозначается как rили ρ.

Аргумент комплексного числа

Угол ϕмежду положительным направлением действительной оси и радиус-вектора $\overline{OM}$, соответствующим комплексному числу $z = a + bi$, называется аргументом этого числа и обозначается $\arg z$.

Аргумент ϕкомплексного числа $z = a + bi$связан с его действительной и мнимой частями соотношениями:

$$\phi = \operatorname{tg}\frac{b}{a}\ ,\ \ \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ ,\ \ \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

На практике для вычисления аргумента комплексного числа обычно пользуются формулой:

$$\phi = \arg z = \arg\,(a + bi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\ ,\ \ a \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi\ ,\ \ a < 0 \end{cases}$$

Пример

Задание. Найти аргумент комплексного числа $z = -3 - 3i$

Решение. Так как $a = \operatorname{Re} z = -3 < 0$, то в выше приведенной формуле будем рассматривать вторую строку, то есть

$$\phi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{-3}{-3} + \pi = \operatorname{arctg}1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Ответ. $\phi = \arg z = \frac{5\pi}{4}$

Аргумент действительного положительного числа равен 0°, действительного отрицательного - π или 180°. Чисто мнимые числа с положительной мнимой частью имеют аргумент равный $\frac{\pi}{2}$, с отрицательной мнимой частью - $\frac{3\pi}{2}$.

У комплексно сопряженных чисел аргументы отличаются знаком (рис. 3).

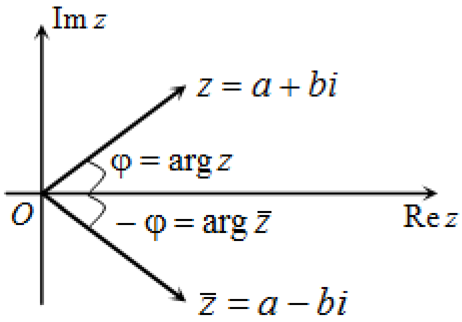


Рис. 3

Комплексно сопряженные числа

Определение

Если $z=a+bi$, то число $\bar{z}=a-bi$называется **комплексным сопряженным** к числу z.

$$\bar{z}=a-bi$$

То есть у комплексно сопряженных чисел действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

Например. Комплексно сопряженным к числу $z=2-i$есть число $\bar{z}=2+i$.

На комплексной плоскости комплексно сопряжённые числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно действительной оси.

Свойства комплексно сопряженных чисел

1) Если $z=\bar{z}$, то можно сделать вывод, что рассматриваемое число zявляется действительным.

Например. $z=2\in R \;\Rightarrow\; \bar{z}=2$и $z=\bar{z}$

2) Для любого комплексного числа zсумма $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\ z$- действительное число.

Например. Пусть $z=2-3i$, тогда $\bar{z}=2+3i$, а тогда

$$z+\bar{z}=2-3i+(2+3i)=2-3i+2+3i=2+2=4\in R$$

3) Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$произведение $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in R$.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, комплексно сопряженное к нему число $\bar{z} = 2 + 3i$, тогда произведение

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 =$$

$$= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R$$

4) Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$, а аргументы отличаются знаком (рис. 1).

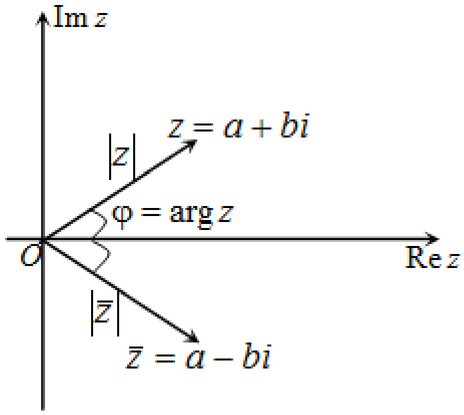


Рис. 1

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

8) $\overline{(\bar{z})} = z$

9) Если $z = a + bi$и $\bar{z} = a - bi$- комплексно сопряженные числа, то

$$a = \mathrm{Re}\ z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \mathrm{Im}\ z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Комплексно сопряженные числа

Определение

Если $z = a + bi$, то число $\bar{z} = a - bi$называется **комплексным сопряженным** к числу z.

$$\bar{z} = a - bi$$

То есть у комплексно сопряженных чисел действительные части равны, а мнимые отличаются знаком.

Например. Комплексно сопряженным к числу $z = 2 - i$есть число $\bar{z} = 2 + i$.

На комплексной плоскости комплексно сопряжённые числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно действительной оси.

Свойства комплексно сопряженных чисел

1) Если $z = \bar{z}$, то можно сделать вывод, что рассматриваемое число zявляется действительным.

Например. $z = 2 \in R \Rightarrow \bar{z} = 2$и $z = \bar{z}$

2) Для любого комплексного числа zсумма $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\ z$- действительное число.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, тогда $\bar{z} = 2 + 3i$, а тогда

$$z + \bar{z} = 2 - 3i + (2 + 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 2 + 2 = 4 \in R$$

3) Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$произведение $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in R$.

Например. Пусть $z = 2 - 3i$, комплексно сопряженное к нему число $\bar{z} = 2 + 3i$, тогда произведение

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 \cdot i^2 =$$

$$= 2^2 - 3^2 \cdot (-1) = 2^2 + 3^2 = \sqrt{2^2 + 3^2}^2 = |z|^2 = 13 \in R$$

4) Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\bar{z}|$, а аргументы отличаются знаком (рис. 1).

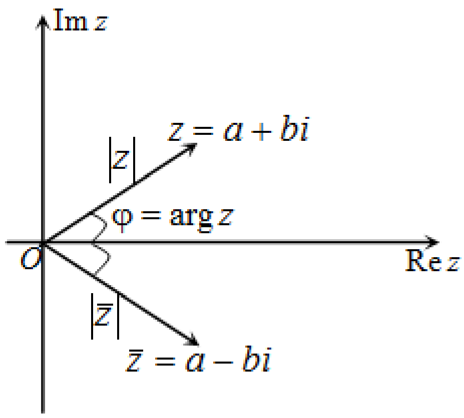


Рис. 1

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

8) $\overline{(\bar{z})} = z$

9) Если $z = a + bi$и $\bar{z} = a - bi$- комплексно сопряженные числа, то

$$a = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}\ ,\ b = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Практическая работа №12

Тема 3.2: Арифметические операции над комплексными числами.

Цель: научиться проводить арифметические операции над комплексными числами.

Сумма и произведение комплексных чисел могут быть вычислены непосредственным суммированием и перемножением комплексных чисел в алгебраической форме, как обычно раскрывая скобки и приводя подобные (как операции над алгебраическими двучленами), при этом надо учесть, что $i^2 = -1$.

Пример

Задание. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$и $z_2 = 3 + i$.

Решение. Чтобы найти сумму заданных комплексных чисел, складываем соответственно их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = 2 - 3i + (3 + i) = (2 + 3) + (-3i + i) = 5 - 2i$$

Произведение равно

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 9i - 3i^2 =$$

$$= 6 - 7i - 3 \cdot (-1) = 9 - 7i$$

Ответ. $z_1 + z_2 = 5 - 2i$, $z_1 \cdot z_2 = 9 - 7i$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть задано комплексное число $z = a + bi$. Как известно, его можно изобразить на комплексной плоскости точкой, абсцисса которой равна действительной части этого числа, то есть a, а ордината - мнимой части b(рис. 1).

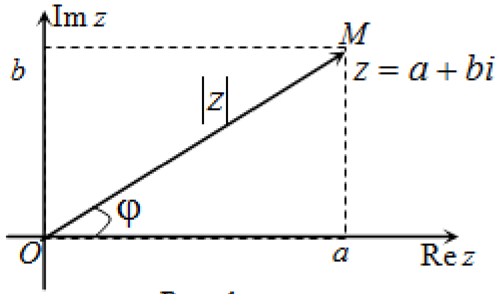


Рис. 1

Абсциссу aи ординату bкомплексного числа $z = a + bi$можно выразить через модуль $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$и аргумент ϕследующим образом:

$$a = |z|\cos\phi\ ,\ \ b = |z|\sin\phi$$

В данном случае ϕи $|z|$удовлетворяют соотношениям:

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\ \ \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\ \ \phi \in [0; 2\pi)$$

Тогда

$$a = |z|\cos\phi\ ,\ \ b = |z|\sin\phi$$

$$z = a + bi = |z|\cos\phi + i \cdot |z|\sin\phi = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Таким образом, для всякого комплексного числа $z = a + bi$справедливо равенство

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

которое называется **тригонометрической формой комплексного числа** z.

Пример

Задание. Комплексное число $z = -i$представить в тригонометрической форме.

Решение. Для заданного числа действительная часть $a = 0$, а мнимая часть $b = -1$. Тогда модуль этого числа

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

а аргумент

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{0} = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Отсюда получаем, что

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

Ответ. $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

Показательная форма записи комплексного числа

Рассмотрим произвольное комплексное число, записанное в тригонометрической форме: $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$. По формуле Эйлера

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$$

а тогда

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z| e^{i\phi}$$

Следовательно, любое комплексное число можно представить в так называемой **показательной форме**:

$$z = |z| e^{i\phi}$$

Пример

Задание. Записать комплексное число $z = 3 - 4i$в показательной форме.

Решение. Найдем модуль и аргумент заданного комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{-4}{3} = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

Тогда

$$z = |z| e^{i\phi} = 5 e^{-i \operatorname{arctg} \frac{4}{3}}$$

Ответ. $z = 5 e^{-i \operatorname{arctg} \frac{4}{3}}$

Операции с комплексными числами в показательной форме

Такая форма представления позволяет дать наглядную интерпретацию операциям

умножения комплексных чисел, их деления и возведения комплексного числа в степень.

Например, умножение комплексного числа $z_1 = |z_1|e^{i\phi_1}$ на комплексное число

$z_2 = |z_2|e^{i\phi_2}$ выглядит следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i\phi_1 + i\phi_2} =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

То есть, чтобы найти произведение комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы.

Аналогично можно довольно легко найти частное от деления комплексного числа $z_1 = |z_1|e^{i\phi_1}$ на комплексное число $z_2 = |z_2|e^{i\phi_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\phi_1}}{|z_2|e^{i\phi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i\phi_1 - i\phi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Отсюда получаем правило, что для того чтобы найти частное двух комплексных чисел, надо поделить их модули и отнять аргументы.

Выполнить упражнения.

Практическое занятие №13

Тема 4.1: Основные определения теории вероятностей
Цель: Научить решать задачи на классическое и статистическое определения вероятности случайного события

Теоретическая часть

Классическое определение вероятности Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу, всех исходов (несовместных, единственно возможных, равновозможных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы. Невозможному событию соответствует вероятность равная 0, а достоверному – вероятность равна единице.
Примеры:

Из урны в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение: Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев равно 8. Число случаев благоприятствующих появлению события А, равно3. Получим

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

Решение упражнений

1. Герман из повести А.С. Пушкина «Пиковая дама» вынимает 3 карты из колоды в 52 листа. Найдите вероятность того, что это будут: тройка, семерка, туз.
2. В ящике лежат 15 красных, 9 синих, и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих, 3 красных шара.
3. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже.
4. В урне 10 шаров, из которых 2 белых,3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета.
5. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные.
6. Коллектив, включающий четырех женщин и троих мужчин, разыгрывает 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины.
7. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.
8. В урне 6 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажутся 2 белых и 1 черный шар.
9. Юноша забыл две последние цифры телефонного номера своей знакомой и помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер будет набран правильно?

Практическая работа № 14

Тема 4.2: Математическое ожидание

Цель:

Теоретическая часть

Закон равномерного распределения вероятностей.

Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция имеет постоянное значение.

Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ C, a < x < b, \\ 0, b \le x, \end{cases}$ т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$ то $C = \frac{1}{b-a},$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x < b, \\ 0, x \ge b. \end{cases}$$

Пример. Показательное распределение.

Решение. Показательное распределение задается своей дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda\_\_.$$

Проверим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda^{-\lambda} dx = \left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1.$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0. \end{cases}$$

Продолжительность существования радиоактивных частиц описывается показательным распределением.

Характеристиками положения н.с.в., так же как и дискретной, являются математическое ожидание, мода и медиана.

Математическим ожиданием н.с.в. называют число

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

где $f(x)$ - плотность вероятности, и предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Модой н.с.в. называется значение с.в., при котором плотность вероятности максимальна.

Медианой н.с.в. X называется такое ее значение М , что

P{ X ϵ} = P{ X М ϵ}.

Основными характеристиками рассеивания н.с.в. являются дисперсия, асимметрия и эксцесс.

Дисперсия н.с.в. D[X] находится следующим образом:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)dx \quad D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2[X].$$

Асимметрия - это число $A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M[(X-\bar{x})^3]}{\sigma^3},$ где σ - среднее квадратичное отклонение с.в. X. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то А $_s$ = 0.

Эксцессом с.в. X называется число $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M[(X-\bar{x})^4]}{\sigma^4} - 3.$ Число Е $_k$ характеризует "крутость" кривой плотности вероятности по сравнению с кривой Гаусса.

Для нормального закона распределения Е $_k$ = 0, для островершинных Е $_k$ 0, для пологих Е $_k$

1) **Выполнить упражнения**
2) Дано следующее распределение дискретной случайной величины:

X	1	2	4	5
p	0,2	0,1	0,4	0,3

1. Найти ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2. В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

3) Случайная величина X задана плотностью вероятности 2x в интервале (О, 1), «не этого интервала/(x) = 0. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

1. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 12, а среднее квадратичное отклонение равно 3, Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (9, 11).

2. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 15, а вероятность ее попадания в интервал (16, 21) равна 0,98. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины

Литература:

Основная литература:

1. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html

2. Дадаян, А. А. Математика : [учебник] / А.А. Дадаян. - М. : ФОРУМ, 2015. - 544 с. - (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-460-3

3. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике : [учеб. пособие] / А.А. Дадаян. - М. : ФОРУМ, 2016. - 352 с. : ил. - (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-803-8

Дополнительная литература:

1. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Н.Б. Карбачинская [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский государственный университет правосудия, 2015.— 342 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.html.— ЭБС «IPRbooks»

2. Балдин, К.В. Математика : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. - М. : Юнити-Дана, 2015. - 543 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00980-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114423

3. Ахметгалиева В.Р. Математика. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.Р. Ахметгалиева, Л.Р. Галяутдинова, М.И. Галяутдинов— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский государственный университет правосудия, 2017.— 60 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65863.html.— ЭБС «IPRbooks»

Интернет-ресурсы:

- Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября»http://www.mat/septemba.ru
- Математика в открытом колледже http://www.mathematics.ru
- Образовательный математический сайт Exponenta.mhtto://www/ exponent/ru
- Общероссийский математический портал Mati-Net/Ru http://www/mathnet/ru
- Портал Alhnath.ni –вся математика в одном месте.