МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Математика

Направление подготовки	08.03.01 Строительство
Профиль	Городское строительство и хозяйство
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	заочная
Учебный план	2021г

Пятигорск, 2021г.

1.ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Математика» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

Формируемая компетенция:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Знания, умения и навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; основы математической статистики; методологию организации, проведения и обработки данных теоретического и экспериментального исследования. **Уметь:** эффективно использовать методы математического анализа и математического моделирования в профессиональной деятельности; конструировать и анализировать математические модели объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности. **Владеть:** навыками использования компьютерных программ для представления и математической обработки информации; навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач.	**ОПК-1**

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ Темы	Наименование работы	Обьем часов	Форма проведения
2 семестр			
19	Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	1,5	Решение разноуровневых задач
21	Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.	1,5	
26	Статистическая проверка гипотез.	1,5	
	Итого за 2 семестр	**4,5**	**1,5**

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Цель: сформировать умение определять вид ДУ и выбирать способ решения ДУ высшего порядка, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

………………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx .... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0; y_0 = 1;$ $y'_0 = -1; \quad y''_0 = 0.$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1=\frac{1}{8}+C_3;\quad -1=\frac{1}{4}+C_2;\quad 0=\frac{1}{2}+C_1;$$

$$C_1=-\frac{1}{2};\quad C_2=-\frac{5}{4};\quad C_3=\frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)})=0$.

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)}=z;\quad y^{(k+1)}=z';\quad ...\quad y^{(n)}=z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z',..., z^{(n-k)})=0$.

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z=\psi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)}=\psi(x, C_1, C_2,..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y=\varphi(x, C_1, C_2,..., C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'''=\frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z=y'';\quad z'=y'''$;

$$z'=\frac{z}{x};\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{z}{x};\qquad \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x};\qquad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|z|=\ln|x|+\ln C_1;\qquad z=C_1x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y''=C_1x;\qquad y'=\int C_1xdx=\frac{C_1}{2}x^2+C_2;$$

$$y=\int\left(\frac{C_1}{2}x^2+C_2\right)dx=\frac{C_1}{6}x^3+C_2x+C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=Cx^3+C_2x+C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x=0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y',..., y^{(n)})=0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y'=p$.

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p;$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy''}{dy}p=\frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p;\ \text{и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy},..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2,..., C_{n-1})=0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$

Замена переменной: $p = y'; \qquad y'' = \frac{dp}{dy}p;$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0;$$

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}.$

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int\frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C;$

2) $p = 0; \qquad y' = 0; \qquad y = C;$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' = 1 - y'^2$.	2. $xy'' + y' = 0$.
3. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.	4. $x^2y'' + xy' = 1$.
5. $xy''' + y'' = 1 + x$.	6. $y'''^2 + y''^2 = 1$.
7. $y'(1 + y'^2) = y''$.	8. $y'' = -x/y'$.
9. $x\,y'' + y' + x = 0$.	10. $y'''^2 = 4y''$.

Задача 2. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1.	$y''\,y^3 = 1,$	$y\,(1/2) = 1,$	$y'\,(1/2) = 1.$
2.	$y\,y'' + y'^2 = 1,$	$y(0) = 1,$	$y'(0) = 1.$
3.	$y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0,$	$y(0) = 2,$	$y'(0) = 2.$
4.	$y^2 + y'^2 - 2y\,y'' = 0,$	$y(0) = 1,$	$y'(0) = 1.$
5.	$3y'\,y'' = y + y'^3 + 1,$	$y(0) = -2,$	$y'(0) = 0.$

Задача 3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y = \cos x$.
2. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.
3. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.
4. $y'' + y = 3\sin x$.
5. $y'' + y = 4x\cos x$.
6. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
7. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$.
8. $y'' - 2y = 2x\,e^x(\cos x - \sin x)$.
9. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
10. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.

Вопросы:

1. Какие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка Вы знаете?
2. Какую замену переменной необходимо провести, если в уравнении явно не содержится искомая функция; независимая переменная?
3. Какое уравнение называют линейным с постоянными коэффициентами?
4. Как строится общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Как найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

Практическое занятие 2. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.

Цель: сформировать умение делать вывод о сходимости ряда на основании необходимого и достаточных признаков сходимости знакопостоянных рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

при этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

<u>Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.</u>

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

<u>Теорема.</u> Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если* $u_n > 0, \quad v_n > 0$ *и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, *где h – число, отличное от нуля, то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ *с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, *то при ρ < 1 ряд сходится, а при ρ > 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5} \right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, *то ряд $\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le 1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+5n+6}$.
2. $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{3}{n^2-5n+6}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30}{25n^2+5n-6}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2+3n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{90}{4n^2+8n-5}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{16n^2-8n-3}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+1)(n+2)}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

Задача 2. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$.
4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}+1}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Задача 3. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n^2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{n/2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}e^{-n}$.

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называют знакопостоянным?
3. Что такое сумма ряда?
4. Какой ряд называют сходящимся?
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Сформулируйте известные Вам достаточные признаки сходимости рядов.

Практическое занятие 3. Статистическая проверка гипотез.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. Обозначим эту величину в целях общности через K.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

После выбора определённого критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

В области статистики и биометрии в частности применяют два вида статистических критериев: *параметрические,* построенные на основании параметров данной совокупности (например, $\bar{x}$ и s^2_x) и представляющие функции этих параметров, и *непараметрические,* представляющие собой функции, зависящие непосредственно от вариант данной совокупности с их частотами. Первые служат для проверки гипотез о параметрах совокупностей, распределяемых по нормальному закону, вторые — для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Применение параметрических критериев связано с необходимостью вычисления выборочных характеристик — средней величины и показателей вариации, тогда как при использовании непараметрических критериев такая необходимость отпадает.

t-критерий Стьюдента (t-распределение). Английский математик В. Госсет (печатавшийся под псевдонимом Стьюдент), в 1908 г. нашел закон распределения величины $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, в которой генеральный параметр σ заменен на его выборочную характеристику s_x, т. е. нашел *закон распределения значений*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Открытый Стьюдентом и теоретически обоснованный Р. Фишером *закон t-распределения* служит основой так называемой теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в нормально распределяющейся совокупности в зависимости от объема выборки. t-распределение зависит только от числа степеней свободы $k = n—1$, причем с увеличением объема выборки n t-распределение быстро приближается к нормальному с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и уже при $n>30$ не отличается от него. Это видно из таблицы ниже, в которой приведены табулированные значения t-распределения и нормального распределения для разных значений t.

Распределение	**Нормированное отклонение t**						
	0,5	**1.0**	**1.5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**
Нормальное	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
Стьюдента при n = 3	0,333	0,577	0,728	0,816	0,870	0,905	0,927
n = 20	0,377	0,670	0,850	0,940	0,978	0,993	0,998
n =30	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995

Оценка разности средних. Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами μ_1 и μ_2. Разность $\mu_1 - \mu_2$ этих параметров обозначим через D, то есть $\mu_1 - \mu_2 = D$, а дисперсию этой разности σ^2_D. Значения генеральных параметров неизвестны, однако по выборкам мы можем найти величины выборочных средних и разность между ними $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, которую обозначим d, то есть $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = d.$

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mu_1 = \mu_2$, то есть $D=0$. Критерием для проверки H_0-гипотезы служит отношение

$$t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{s_d}$$

где t — переменная величина, следующая t-распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 — 2$, а s_D - ошибка указанной разности, а n_1 и n_2 - объемы первой и второй выборок соответственно.

Так как, согласно H_0-гипотезе, $\mu_1 = \mu_2$, то t-критерий выражается в виде отношения разности выборочных средних к своей ошибке, т. е.

$$t = \frac{d}{s_d}.$$

H_0-гипотезу отвергают, если фактически установленная величина t-критерия (обозначаемая $t_ф$) превзойдет или окажется равной критическому значению t_{kp} этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 — 2$, т. е. при условии $t_ф \geq t_{kp}$.

Ошибку разности средних s_D определяют по формуле:

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Пример. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводили на двух группах животных: опытной и контрольной. Были исследованы кролики в возрасте от полутора до двух месяцев, массой тела 500—600 г. Опыт продолжался полтора месяца. Животных обеих групп содержали на одном и том же кормовом рационе. Однако опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0,06 г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела:

Привесы, г		Отклонения от средней арифметической		Квадраты отклонений	
опыт	контроль	опыт $(x_i - \overline{x_1})$	контроль $(x_j - \overline{x_2})$	опыт $(x_i - \overline{x_1})^2$	контроль $(x_j - \overline{x_2})^2$
580	504	58	22	3364	484
692	560	54	34	2916	1156
700	420	62	106	3844	11236
621	600	17	74	289	5476
640	580	2	54	4	2916
561	530	77	4	5929	16
680	490	42	36	1764	1296
630	580	8	54	64	2916
	470		56	ч	3136
$\Sigma = 5104$	$\Sigma = 4734$	—	—	$\Sigma = 18\ 174$	$\Sigma = 28\ 632$
$\overline{x_1} = 638$	$\overline{x_2} = 526$	—	—	$\Sigma = 46806$	

Средние арифметические привесов:

в опыте $\overline{x_1}$ = 5104/8= 638 г,

в контроле $\overline{x_2}$ =4734/9 = 526 г. Разница $\overline{x_1} - \overline{x_2} = d$ = 112 г. Чтобы установить, достоверна или случайна эта разница, нужно определить ошибку разности средних:

$$s_D = \sqrt{\frac{46806}{8+9-2} \cdot \left(\frac{8+9}{8 \cdot 9}\right)} = \sqrt{736{,}8} = 27{,}14.$$

Отсюда $t_ф$ = 112/27,14= 4,1.

По таблице для уровня значимости α = 0,01 и числа степеней свободы k = 9+8—2= 15 находим t_{kp} = 2,95. Так как $t_ф > t_{kp}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости (P<0,01). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась в высшей степени достоверной.

Правильное применение параметрических критериев для проверки статистических гипотез основано на предположении о нормальном распределении совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Однако это не всегда имеет место, так как не все биологические признаки распределяются нормально. Немаловажным является и то обстоятельство, что исследователю приходится иметь дело не только с количественными, но и с качественными признаками, многие из которых выражаются порядковыми номерами, индексами и другими условными знаками. В таких случаях необходимо использовать *непараметрические критерии.*

Известен целый ряд непараметрических критериев, среди которых видное место занимают так называемые *ранговые критерии,* применение которых основано на ранжировании членов сравниваемых групп. При этом сравниваются не сами по себе члены ранжированных рядов, а их порядковые номера, или ранги. Далее мы рассмотрим некоторые непараметрические критерии, применяемые для проверки нулевой гипотезы при сравнении как независимых, так и зависимых выборочных групп.

U **- критерий Уилкоксона (Манна—Уитни).** Гипотезу о принадлежности сравниваемых независимых выборок к одной и той же генеральной совокупности или к совокупностям с одинаковыми параметрами, т. е. H_0-гипотезу, можно проверить с помощью *рангового критерия Уилкоксона (Манна—Уитни).*

Для расчета U -критерия необходимо:

1. Расположить числовые значения сравниваемых выборок в возрастающем порядке в один общий ряд и пронумеровать члены общего ряда от 1 до $N = n_1 + n_2$. (Эти номера и будут «рангами» членов ряда.)

2. Отдельно для каждой выборки найти суммы рангов и определить величины,

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

и

$$U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

которые отображают связь между суммами рангов первой и второй выборки.

3. В качестве U -критерия использовать меньшую величину $U_ф$, которую сравнить с табличным значением U_{kp} Условием для сохранения принятой H_0-гипотезы служит неравенство $U_ф > U_{kp}$. Критические точки U -критерия U_{kp} для n_1, n_2 и принимаемого уровня значимости α содержатся в таблице 3 Приложения.

Пример. На двух группах лабораторных мышей – опытной ($n_1 = 9$) и контрольной ($n_2 = 11$) – изучали воздействие на организм нового препарата. Испытание продолжалось один месяц. После этого масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

В опытной группе *80, 76, 75, 64, 70, 68, 72, 79, 83.*

В контрольной группе 70,78, 60, 80, 62, 68, 73, 60, 71, 66, 69.

Вычислим по выборкам: $\overline{x_1}$ =74,1 и $\overline{x_2}$ =68,8.

Проверим с помощью U -критерия, является ли разность в массе тела между опытной и контрольной группами мышей статистически достоверной.

Суммируя ранги отдельно для каждой группы, находим:

R_1= 4+6+9+12+14+15+17+19+20=112;

R_2= 1+2+3+5+7+8+10+11+13+16+18=94.

Подставляем эти данные в формулы:

$$U_1 = 112 - \frac{9 \cdot 10}{2} = 67; \qquad U_2 = 94 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 22$$

Меньшую величину U_2 = 22 сравниваем с табличным U_{kp} значением для $n_1=9$, $n_2=11$ и уровня значимости $\alpha=0,01$, которое равно $U_{kp} =19$.

Поскольку $U_ф > U_{kp}$, отвергнуть проверяемую H_0-гипотезу нельзя. Следовательно, различия, наблюдаемые между этими выборками, статистически недостоверны. Выборки не имеют значимых отличий.

Критерий знаков z. В тех случаях, когда результаты наблюдений выражаются не числами, а качественными признаками, принимающими два различных значения (помечаем их знаками плюс (+) и минус (—)), различия между попарно связанными членами сравниваемых выборок оценивают с помощью *критерия знаков z*. Конструкция этого критерия базируется на весьма простых соображениях: если попарно сравниваемые значения двух зависимых выборок существенно не отличаются друг от друга, то число плюсовых и минусовых разностей окажется совершенно одинаковым; если же заметно преобладают плюсы или минусы, это будет указывать на положительное или отрицательное действие изучаемого фактора на результативный признак. Большее число однозначных разностей служит в качестве фактически найденной величины z-критерия знаков. При этом нулевые разности, т. е. случаи, не давшие ни положительного, ни отрицательного результата, обозначаемые цифрой 0, в расчет не принимают и число парных наблюдений соответственно уменьшается.

Как и всякий другой выборочный показатель, z-критерий знаков является величиной случайной; он служит для проверки H_0-гипотезы, т. е. предположения о том, что совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одинаковые функции распределения. H_0-гипотеза отвергается, если $z_ф \geq z_{kp}$ для принятого уровня значимости α и числа парных наблюдений n, взятых без нулевых разностей. Критические точки z_{kp} для двух уровней значимость и числа парных наблюдений содержатся в таблице.

Вопросы и задачи:

1.Для изучения эффективности нового препарата железа были выбраны две группы пациентов с анемией. В первой группе пациенты в течение двух недель получали новый препарат, а во второй группе - получали плацебо. После этого было проведено измерение уровня гемоглобина в периферической крови. В первой группе средний уровень гемоглобина составил 115,4±1,2 г/л, а во второй - 103,7±2,3 г/л (данные представлены в формате $M \pm m$), сравниваемые совокупности имеют нормальное распределение. При этом численность первой группы составила 34, а второй - 40 пациентов. Необходимо сделать вывод о статистической значимости полученных различий и эффективности нового препарата железа.

2. После проведения вакцинации от гриппа среди студентов медицинского университета были подведены результаты: из 500 вакцинированных в период эпидемии заболели гриппом 20 человек, из 1600 отказавшихся от вакцинации гриппом заболели 200 человек. Оцените эффективность вакцинации от гриппа.

3. Учебной частью одной из кафедр медицинского университета было проведено исследование успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций. Для студентов, посетивших менее половины лекционного курса (n=36), средняя оценка на экзамене составила 3,2, $\sigma 1=0,2$. Для студентов, посетивших более 90% лекций по предмету (n=150), средняя оценка на экзамене составила 4,5, $\sigma^2=0,5$.Сделайте вывод о достоверности различий успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций по предмету.
4. Результаты тестирования по 30-бальной шкале для группы X и группы Y представлены в таблице. Сравнить эффективность двух методов обучения студентов в двух группах для уровня статистической значимости $\beta = 5\%$.

X	18	10	7	15	14	11	13				
Y	15	20	10	8	16	10	19	7	15	14	29

4.ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.