

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о подписи
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор *Института сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске*
федерального университета
Дата подписания: 11.09.2023 17:43:36
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Математика**

Направление подготовки	08.03.01 Строительство
Профиль	Строительство зданий и сооружений
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная

Пятигорск, 2021г.

1.ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Математика» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

Формируемая компетенция:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Знания, умения и навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; основы математической статистики; методологию организации, проведения и обработки данных теоретического и экспериментального исследования. Уметь: эффективно использовать методы математического анализа и математического моделирования в профессиональной деятельности; конструировать и анализировать математические модели объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности. Владеть: навыками использования компьютерных программ для представления и математической обработки информации; навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач.	ОПК-1

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ Темы	Наименование работы	Объем часов	Форма проведения
2 семестр			
10	Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.	1,5	Решение разноуровневых задач
11	Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций	1,5	
12	Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	1,5	Решение разноуровневых задач
13	Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.	1,5	
15	Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.	1,5	Решение разноуровневых задач
16	Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.	1,5	
17	Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.	1,5	
18	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.	1,5	Решение разноуровневых задач
19	Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	1,5	
20	Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.	1,5	
21	Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.	1,5	
22	Знакопередающиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.	1,5	
23	Вариационные ряды и их графическое изображение.	1,5	Решение разноуровневых

			задач
24	Выборочный метод. Точечные оценки.	1,5	
25	Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.	1,5	
26	Статистическая проверка гипотез.	1,5	
Итого за 2 семестр		24	7,5

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1. Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

Цель: сформировать умение непосредственного интегрирования функции с использованием простейших свойств интеграла, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Первообразная функция.

Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

$$1. \left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx; \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$5. \int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$$

Пример: $\int (x^2 - 2 \sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C;$

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$

6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются другие способы интегрирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4) dx$;
- 2) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)(9x^2 + 10x) dx$; 3) $\int \sqrt{x^2 + 6} \cdot 2x dx$;
- 4) $\int (2x^2 + 7)^3 x dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^3 + 8} x^2 dx$; 6) $\int \sqrt{a^2 - x^2} x dx$.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; 3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
- 5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}} dx$; 8) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;
- 9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$.

Задача 3. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

- 2) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$;
- 5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3} dx$;
- 8) $\int \frac{x}{1+x} dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2} dx$.

Вопросы:

1. Что такое первообразная функция?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Запишите по памяти таблицу основных неопределенных интегралов.
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

Практическое занятие 2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл с помощью замены переменной и по частям, интегрировать элементарные дроби и рациональные функции, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: $(uv)' = u'v + v'u$, где u и v – некоторые функции от x . В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int u dv + \int v du$ или $\int u dv = uv - \int v du$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Интегрирование элементарных дробей.

Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax + b}$;

III. $\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$;

$$\text{II. } \frac{1}{(ax+b)^m};$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2, n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t=ax+b$.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \\ &\cdot \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \end{aligned}$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx &= \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=6x-5; \quad du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \arctg \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\ &= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \arctg \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C. \end{aligned}$$

Вообще говоря, если у трехчлена ax^2+bx+c выражение $b^2-4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx &= \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x+3; \quad du=dx; \\ x=u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} - \\ &- 18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx &= \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x-3; \quad du=dx; \\ x=u+3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} + \\ &+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2+6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при $M=0, N=1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата

представить в виде $\int \frac{du}{(u^2 + s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s + u^2 - u^2}{(u^2 + s)^n} du = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{u^2 du}{(u^2 + s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим:
$$\left\{ \begin{aligned} dv_1 &= \frac{u du}{(u^2 + s)^n}; & u_1 &= u; & du_1 &= du; \\ v_1 &= \int \frac{u du}{(u^2 + s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2 + s)^{n-1}}; \end{aligned} \right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2 + s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной**. Если применить ее $n-1$ раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2 + s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= (4a)^n \int \frac{Mx + N}{[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{aligned} u &= 2ax + b; & du &= 2adx; \\ x &= \frac{u - b}{2a}; & s &= 4ac - b^2; \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u - b)}{2a} + N}{(u^2 + s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2 + s)^n} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2 + s)^n} \right] \end{aligned}$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n , а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 5}{(x^2 - 4x + 7)^2} dx &= \int \frac{3x + 5}{((x - 2)^2 + 3)^2} dx = \left\{ \begin{aligned} u &= x - 2; & du &= dx; \\ x &= u + 2; \end{aligned} \right\} = \int \frac{3u + 6 + 5}{(u^2 + 3)^2} du = \\ &= 3 \int \frac{udu}{(u^2 + 3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2 + 3)^2} = \left\{ \begin{aligned} t &= u^2 + 3; \\ dt &= 2udu; \end{aligned} \right\} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[\frac{u}{3 \cdot 2(u^2 + 3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2 + 3} \right] = \\ &= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2 + 3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11(x - 2)}{6(x^2 - 4x + 7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$ которой

представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \dots (x^2+rx+s)^\mu$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ - некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x .

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$$

Т.к. $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2 + 4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2 + 4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2 + 4) + B(x-2)(x^2 + 4) + (Cx+D)(x^2 - 6x + 8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итого:

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx &= 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx = \\ &= 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \arctg \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x dx.$
2. $\int \arcsin x dx.$
3. $\int x^2 \sin x dx.$
4. $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx.$
5. $\int x \ln x dx.$
6. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$
7. $\int e^{2x} \cos x dx.$
8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$
9. $\int \sin \ln x dx.$
10. $\int x^2 e^x dx.$

Задача 2. Вычислить интегралы:

- 1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$);
- 2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ (подстановка $x = \frac{1}{z}$).
- 3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{4 \sin^2 x - 9 \cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Задача 3. Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби:

- 1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}.$
- У к а з а н и е: знаменатель разложить на множители.
- 2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)};$
 - 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)};$
 - 4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)};$
 - 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)};$
 - 6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}.$

Задача 4.

Вычислить:

- 1) $\int \frac{dx}{x-13};$
- 2) $\int \frac{dx}{15-3x};$
- 3) $\int \frac{dx}{4-7x};$
- 4) $\int \frac{dx}{3-8x};$
- 5) $\int \frac{3dx}{4x-9}.$

Задача 5.

Вычислить:

- 1) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4x+14};$
- 2) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+x+1};$
- 3) $I_3 = \int \frac{dx}{x^2+3x+6};$
- 4) $I_4 = \int \frac{dx}{x^2-9x+25};$
- 5) $I_5 = \int \frac{dx}{x^2-7x+14};$
- 6) $I_6 = \int \frac{dx}{x^2-x+14}.$

Задача 6.

Вычислить:

- 1) $\int \frac{dx}{5x^2+9x+10};$
- 2) $\int \frac{dx}{7x^2-3x+5};$
- 3) $\int \frac{dx}{9x^2+x+12};$
- 4) $\int \frac{dx}{6x^2+7x+15};$
- 5) $\int \frac{dx}{3x^2-11x+17}.$

Вопросы:

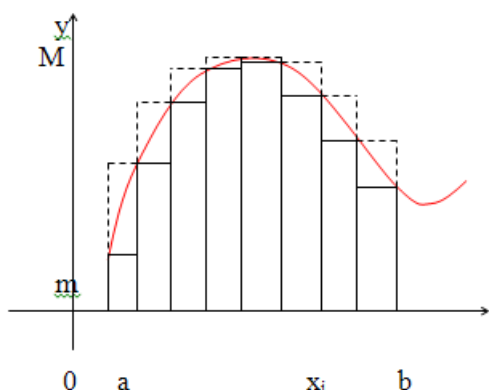
1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?
4. Какие дроби называют простейшими?
5. Какая дробь называется рациональной?
6. Какая рациональная дробь называется правильной?
7. Как разложить правильную дробь на простейшие?
8. В чем сущность метода неопределенных коэффициентов?

Практическое занятие 3. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница, использовать метод замены переменной и интегрирование по частям, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$.



Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2$; ... $[x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1) \Delta x_1 + f(\varepsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

$$\text{Если } S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i, \text{ то } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = S.$$

Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение: $\int_a^b f(x) dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Если для функции $f(x)$ существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b]$.

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$

3) $\int_a^a f(x) dx = 0$

4) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменя переменную интегрирования, не

забыть изменить соответственно пределы интегрирования. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ –

непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$. Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция $\sin$) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi, \text{ с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,}$$

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} = \{ \tan x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная $\tan x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

3. $\int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) \cos x dx.$

5. $\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx.$

7. $\int_0^{\pi} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$

9. $\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$

11. $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx.$

13. $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$

15. $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx.$

17. $\int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$

2. $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx.$

4. $\int_{-2}^0 (x + 2)^2 \cos 3x dx.$

6. $\int_0^{\pi} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$

8. $\int_0^{\pi} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$

10. $\int_0^{2\pi} (2x^2 - 15) \cos 3x dx.$

12. $\int_0^{2\pi} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$

14. $\int_0^3 (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + 17,5) \sin 2x dx.$

20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^3 (3x - x^2) \sin 2x dx.$

Задача 2.

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$

2. $\int_0^1 \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^2}.$

3. $\int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$

4. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2 + 4}.$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$8. \int_1^4 \frac{1 / ((2\sqrt{x}) + 1)}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$16. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx.$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

Вопросы:

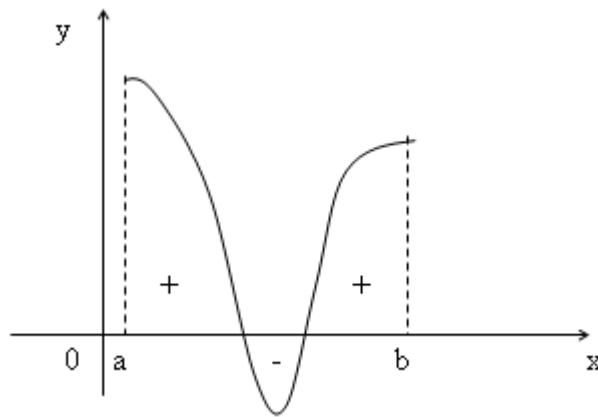
1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.
6. Формула Ньютона – Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Практическое занятие 4. Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.

Цель: сформировать умение вычислять площади плоских фигур, длину дуги кривой, объем тела, объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения при помощи определенного интеграла и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Вычисление площадей плоских фигур.

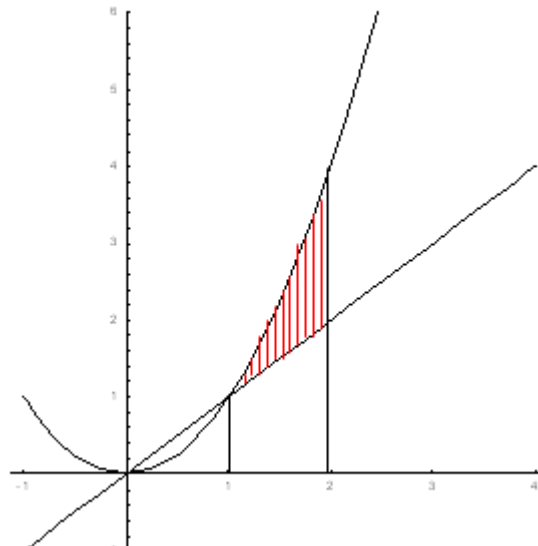


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ox , т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-”, если график расположен выше оси Ox , т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

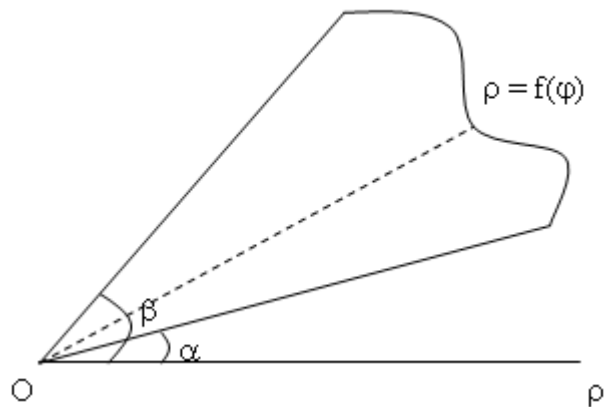
$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} (\text{ед}^2)$$

Нахождение площади криволинейного сектора.

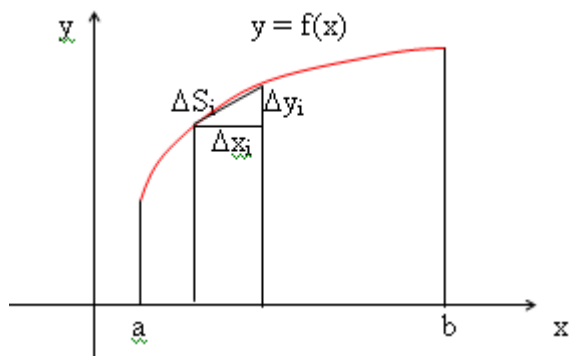
Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$$



Вычисление длины дуги кривой.



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции получаем:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Если задана **пространственная кривая**, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y . $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Найдем производную $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

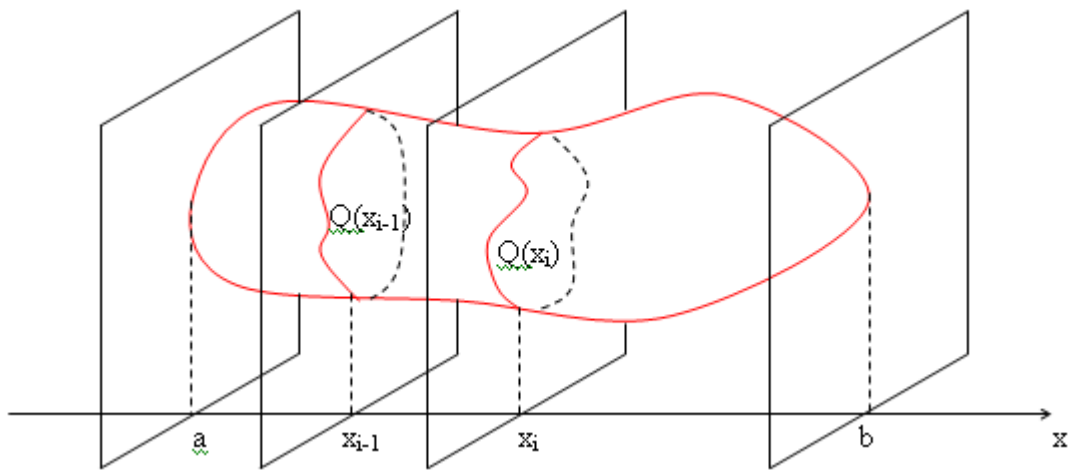
Тогда $\frac{1}{4} S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \cdot \frac{\pi}{2}$. Тогда $S = 2\pi r$. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$,

т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\rho' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда $S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2} d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$.

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V . Площадь любого поперечного сечения тела Q , известна как непрерывная функция $Q = Q(x)$. Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка $[a, b]$. Т.к. на каком-либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция $Q(x)$ непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i .

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x , то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ , эти суммы имеют общий предел:

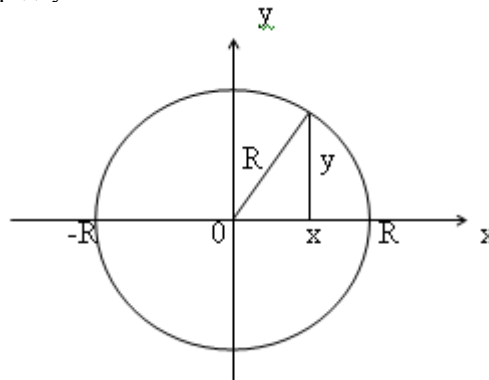
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x) dx.$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x) dx.$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию $Q(x)$, что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R .



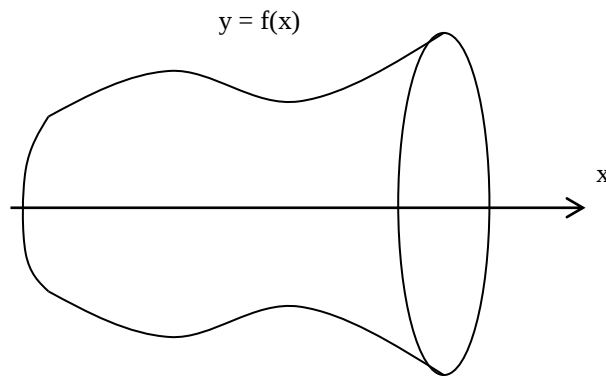
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y . В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда функция площадей сечений имеет вид: $Q(x) = \pi(R^2 - x^2)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Объем тел вращения.

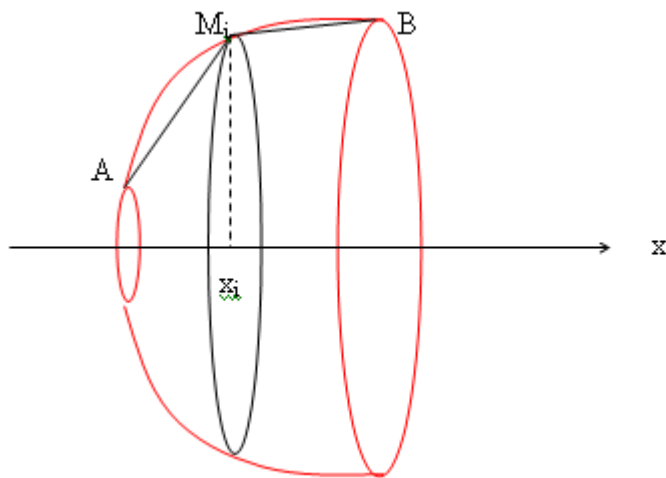
Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox , то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Площадь поверхности тела вращения.



Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + f'^2(\epsilon_i)} \Delta x_i.$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + f'^2(\epsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n 2f(\epsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\epsilon_i)} \Delta x_i.$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения**.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций:

1. $y = 32 - x^2$, $y = -4x$.
2. $y = 3\sqrt{x}$, $y = 3/x$, $x = 4$.
3. $x = 5 - y^2$, $x = -4y$.
4. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 4$.
5. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ ($x \geq 0$).
6. $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$, $x = 16$.
7. $x = 27 - y^2$, $x = -6y$.
8. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ ($x \leq 0$).
9. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3/2$.
10. $y = 2/x$, $y = 5e^x$, $y = 2$, $y = 5$.

Задача 2. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}.$

2. $y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$

3. $y = e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$

4. $y = \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$

5. $y = 2\sqrt{x}, \quad 1/3 \leq x \leq 1/8.$

6. $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$

7. $y = x^2/2, \quad 0 \leq x \leq 1.$

8. $y = 1 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

9. $y = 1 - \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 3.$

10. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$

Задача 3. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$

3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$

4. $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$

Задача 4. Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

1. $z = 4x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$

2. $z = 9x^2 + 4y^2, \quad z = 6.$

3. $z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$

4. $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$

5. $\frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$

6. $\frac{x^2}{9} + y^2 - 3z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$

7. $x^2 + \frac{y^2}{9} - 2z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$

Задача 5. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси ОХ областей, ограниченных графиками заданных функций.

1. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0. \quad 2. \quad y = \sin(\pi x/2), \quad y = x.$

3. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}. \quad 4. \quad y = x^2, \quad y = 2x.$

5. $y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad x = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi/4).$

6. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = \pi/2 \quad (0 \leq x \leq \pi/2).$

7. $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1.$

8. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e.$

9. $y = \frac{2}{x}, \quad y = 1, \quad x = 1.$

10. $y = \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2).$

Вопросы.

1. Запишите известные вам формулы вычисления площадей плоских фигур.
2. Как вычисляется площадь плоской фигуры при помощи определенного интеграла?
3. Что такое криволинейная трапеция?
4. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, заданной параметрически?
5. Что такое криволинейный сектор? Как вычислить площадь криволинейного сектора?
6. Как вычислить длину дуги кривой?

7. Как вычислить объем тела при помощи определенного интеграла?
8. Как найти площадь поверхности вращения?
9. Какие физические (механические) приложения определенного интеграла вы знаете?

Практическое занятие 5. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.

Цель: сформировать умение вычислять частные производные и дифференциал функции нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x . Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x** .

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x . Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x, y)$, $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, то:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial s} ds.$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y) :

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2z-1} dx + 2x^{y^2z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2z} \ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ или } f_{x^2}'' = \left(f_x' \right)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ или } f_{yx}'' = \left(f_y' \right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \text{ или } f_{x^3}''' = \left(f_{x^2}'' \right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \text{ или } f_{x^2 y}''' = \left(f_{x^2}'' \right)'_y, \dots$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^m f = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m f,$$

где $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ - оператор дифференцирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

1. $z = e^{xy}$.
2. $z = x \ln(x/y)$.
3. $z = \sin(xy)$.
4. $z = e^x \cos y$.
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \ln(x^2 + y)$.
7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
8. $z = \ln \sqrt[3]{xy}$.
9. $z = x \cos y + y \sin x$.
10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$.

Задача 2.

Найти производные функции $z=z(u,v)$:

$$z'_x \text{ и } z'_y, \quad u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y).$$

1. $z = u^2 + v^2, \quad u = x + y, \quad v = x - y$.
2. $z = \ln(u^2 + v^2), \quad u = xy, \quad v = x/y$.
3. $z = u^v, \quad u = \sin x, \quad v = \cos y$.
4. $z = u^2 + 2v^3, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = e^{xy}$.
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v), \quad u = x \sin y, \quad v = x \cos y$.
6. $z = \ln(u - v^2), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = y$.
7. $z = u^3 + v^2, \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg}(y/x)$.
8. $z = \sqrt{uv}, \quad u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = xy^2$.
9. $z = e^{uv}, \quad u = \ln x, \quad v = \ln y$.
10. $z = \ln(u/v), \quad u = \sin(x/y), \quad v = \sqrt{x/y}$.

Задача 3.

Найти производные функций, заданных неявно:

1. $y^x = x^y$.
2. $y = 1 + y^x$.
3. $y = x + \ln y$.
4. $x + y = e^{x-y}$.
5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.
6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
7. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.
8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.
9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

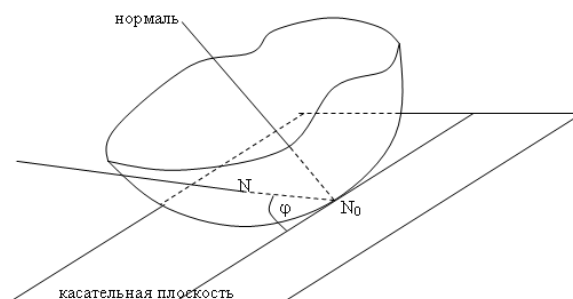
Вопросы:

1. Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.
2. Что такое полное приращение функции?
3. Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?
4. Поясните геометрический смысл частной производной.
5. Что такое дифференциал функции нескольких переменных?
6. Что такое линеаризация функций?
7. Поясните правила дифференцирования сложных и неявных функций.
8. Как найти частные производные второго, третьего, ..., n-го порядка?
9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Практическое занятие 6. Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.

Цель: сформировать умение находить производную по направлению и градиент функции, уравнения касательной и нормали к поверхности, исследовать функцию нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0 . Плоскость, которая проходит через точку N_0 , называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0 .

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, (x_0, y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \quad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Градиент функции вычисляется по формуле:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}.$$

Пример. Найти градиент функции

$$u = x^2 - \arctg(y + z)$$

в точке $M(2, 1, 1)$.

1. Находим частные производные функции $u = x^2 - \arctg(y + z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1 + (y + z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{1 + (y + z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - \arctg(y + z)$ в точке $M(2, 1, 1)$:

$$f'_x(2, 1, 1) = 4, \quad f'_y(2, 1, 1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_z(2, 1, 1) = -\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u = x^2 - \arctg(y + z)$ в точке $M(2, 1, 1)$:

$$\text{grad } f \Big|_{(2,1,1)} = \{f'_x(2, 1, 1), f'_y(2, 1, 1), f'_z(2, 1, 1)\} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$$

$$\text{Ответ. } \text{grad } f \Big|_{(2,1,1)} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$$

Производная по направлению, определяемому вектором:

$$\vec{l} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad } f \cdot \vec{l}.$$

Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой максимума**.

Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой минимума**.

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой**.

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума.

В случае, если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y , входящие в функцию $u = f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x, y) = 0$, которое называется **уравнением связи**.

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ называется **функцией Лагранжа**.

Пример. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \quad x = \frac{5}{4}; \quad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6} \right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа**.

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.

1. $z = x^2 + y^2, \quad M(1, -2, 5).$
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0, \quad M(4, 3, 4).$
3. $z = \sin x \cos y, \quad M(\pi/4, \pi/4, 1/2).$
4. $z = e^{x \cos y}, \quad M(1, \pi, 1/e).$
5. $z = y \operatorname{tg} x, \quad M(\pi/4, 1, 1).$
6. $z = \arctg(x/y), \quad M(1, 1, \pi/4).$
7. $x(y+z)(z-xy) = 8, \quad M(2, 1, 3).$
8. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M(2, 2, 1).$
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad M(2, 2, 2\sqrt{2}).$
10. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M(2, 2, 3).$

Задача 2.

Найти градиент функции в точке.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \quad M(2, 1, 1).$
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad M(1, 5, -2).$
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad M(\pi/2, 3\pi/2, 3).$
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1, 1, 0).$
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1, 1, 0).$
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad M(1, 3, 2).$
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1), \quad M(1, 1, 2).$
8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1, -1, 2).$
9. $u = xy - x/z, \quad M(-4, 3, -1).$
10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1, -3, 4).$

Задача 3.

Найти производную функции u в точке A по направлению к точке B .

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \quad A(2, 1, 1), \quad B(0, 2, 0).$
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad A(1, 5, -2), \quad B(1, 7, -4).$
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right), \quad B\left(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 3\right).$
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad A(1, 1, 0), \quad B(1, 2, -1).$
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad A(1, 1, 0), \quad B(3, 3, -1).$
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad A(1, 3, 2), \quad B(0, 5, 0).$
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1), \quad A(1, 1, 2), \quad B(6, -5, 2\sqrt{5} + 2).$
8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad A(1, -1, 2), \quad B(2, -2, 3).$
9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad A(1, -3, 4), \quad B(-1, -4, 5).$
10. $u = xy - \frac{x}{z}, \quad A(-4, 3, -1), \quad B(1, 4, -2).$

Задача 4. Найти экстремум функции:

1. $z = x^2 - xy + y^2.$
2. $z = x^2 - xy - y^2.$
3. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x.$
4. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2.$
5. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$
6. $z = 4x + 2y - x^2 - y^2.$
7. $z = x^3 + y^3 - 15xy.$
8. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$
9. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4.$
10. $z = x/y + 1/x + y.$

Задача 5. Найти условный экстремум функций:

- 1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 3 = 0$ при $x + y + 3 = 0$;

2) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12 (x > 0, y > 0, z > 0)$;

3) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Вопросы:

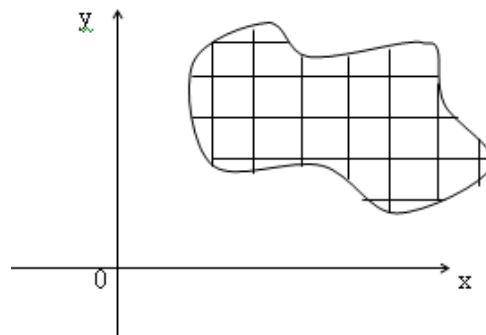
1. Дайте определение локального максимума (минимума) функции в точке.
2. Сформулируйте необходимые условия экстремума.
3. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
4. Объясните понятие экстремума функции в области.
5. Что такое касательная плоскость к поверхности?
6. Что такое нормаль?
7. Как составить уравнение касательной плоскости и нормали?
8. Дайте определение градиента функции.
9. Дайте определение производной по направлению для функции нескольких переменных. Запишите соответствующие формулы.

Практическое занятие 7. Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять двойной интеграл и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ . Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называться незамкнутой областью Δ . С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i , а по оси y – на Δy_i . Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ .

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i , тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области Δ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} f(x_i, y_j) \Delta y_j \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ , т.к. суммирование производится по двум переменным x и y .

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i , то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x.$$

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y) d\Delta$ существует.
2. Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y) d\Delta$ существует.

Свойства двойного интеграла.

$$1) \iint_{\Delta} [f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)] dy dx = \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx + \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx - \iint_{\Delta} f_3(x, y) dy dx.$$

$$2) \iint_{\Delta} k f(x, y) dy dx = k \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx.$$

- 3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \iint_{\Delta_1} f(x, y) dy dx + \iint_{\Delta_2} f(x, y) dy dx.$$

- 4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = f(x_0, y_0) \cdot S$$

- 5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ , то $\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx \geq 0$.

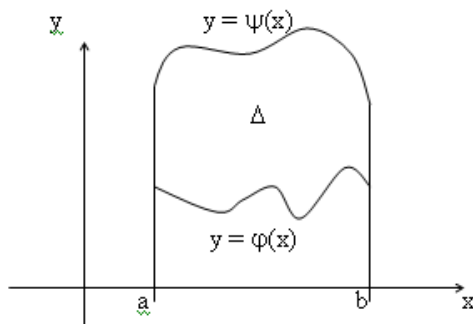
- 6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx$.

$$7) \left| \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dy dx.$$

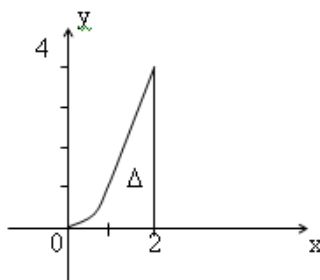
Вычисление двойного интеграла.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, ($a < b$), $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, где φ и ψ - непрерывные функции и $\varphi \leq \psi$, тогда

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$



Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (x - y) dx dy$, если область Δ ограничена линиями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.



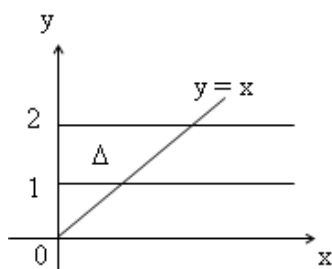
$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x - y) dy = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 3,2 = 0,8$$

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , ограниченной линиями $y = c$, $y = d$ ($c < d$), $x = \Phi(y)$, $x = \Psi(y)$ ($\Phi(y) \leq \Psi(y)$), то

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy$, если область Δ ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.



$$\iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dx dy = \int_1^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_0^y dy = \int_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

$$\iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y) dx dy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) dx = \int_0^2 \left(x^3 - yx^2 + yx \right) \Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3) dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

1. $\int_0^1 dx \int_1^{2^x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_1^{2/x} f(x, y) dy.$
2. $\int_{1/4}^1 dy \int_{1/y}^4 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dy.$
3. $\int_{-6}^{-3} dy \int_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-3}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x, y) dy.$
4. $\int_0^{16} dy \int_{-y/4}^0 f(x, y) dx + \int_{16}^{32} dy \int_{-\sqrt{32-y}}^0 f(x, y) dx.$
5. $\int_0^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt[4]{6x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{12-x^2}} f(x, y) dy.$
6. $\int_0^1 dy \int_{-y^2}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x, y) dx.$

Задача 2. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями:

1. $\iint_D (2x - y) dx dy, \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$
2. $\iint_D (x - y) dx dy, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 2x - 1.$
3. $\iint_D (y \ln x) dx dy, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 2.$
4. $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy, \quad y = \frac{\pi}{4} - x, \quad y = 0, \quad x = 0.$
5. $\iint_D \sin(x + y) dx dy, \quad y = x, \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad x = 0.$
6. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad x = 2.$
7. $\iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

Вопросы:

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Поясните геометрический смысл двойного интеграла.
3. Перечислите свойства двойного интеграла.
4. Что такое повторный интеграл?
5. Опишите процесс вычисления двойного интеграла в декартовых координатах.

Практическое занятие 8. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.

Цель: сформировать умение определять и решать ДУ с разделяющимися переменными, однородные ДУ, линейные ДУ и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y \cos y dy = -2x dx$$

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

$$\int y \cos y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad dv = \cos y dy; \\ du = dy; \quad v = \sin y \end{array} \right\} = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения**.

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3} dy = dx$$

$$\int y^{-2/3} dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$$27y = (x + C)^3 - \text{общий интеграл}$$

$$y = \frac{1}{27} (x + C)^3 - \text{общее решение}$$

Линейные уравнения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть $Q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x) \neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведения функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$. Таким образом, возможно получить функцию u , проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \quad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \quad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим полученное выражение для функции u в исходное уравнение $u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x); \quad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v :

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1; \quad v = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right), \quad C_2 - \text{произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений:

1. $y dx + (1 + x^2) dy = 0$.
2. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.
3. $y' y = -2x \sec y$.
4. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.
5. $y(1 + x^2) y' + x(1 + y^2) = 0$.
6. $e^x dx - (1 + e^x) y dy = 0$.
7. $y' = 2e^x \cos x$.
8. $y' = y \ln y$.
9. $y' = \frac{2x}{1 + x^2}$.
10. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$.
2. $y' = \frac{y}{x} - 1$.
3. $x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}$.
4. $x \cos \frac{y}{x} dy + \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx = 0$.
5. $(x^2 + 2xy) dx + xy dy = 0$.
6. $xy' \ln \left(\frac{y}{x}\right) = x + y \ln \left(\frac{y}{x}\right)$.
7. $y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$.
8. $(4y^2 + x^2) y' = xy$.
9. $xy' \sin \left(\frac{y}{x}\right) + x = y \sin \left(\frac{y}{x}\right)$.
10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'$.

Задача 3. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(1) = 0$.
2. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$.
3. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0$.
4. $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x, \quad y(0) = 0$.
5. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e) = \frac{e^2}{2}$.
6. $y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
7. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x, \quad y(0) = 0$.

Вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Что называют общим (частным) решением дифференциального уравнения?
4. В чем сущность задачи Коши?
5. Приведите пример дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6. Опишите ход решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение называют однородным?
8. Какое дифференциальное уравнение называют линейным?
9. Опишите метод Бернулли решения линейных дифференциальных уравнений.

Практическое занятие 9. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Цель: сформировать умение определять вид ДУ и выбирать способ решения ДУ высшего порядка, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$\begin{aligned}
 y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\
 y^{(n-2)} &= \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2; \\
 &\dots \dots \dots \\
 y &= \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n;
 \end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0; y_0 = 1$;

$$y'_0 = -1; \quad y''_0 = 0.$$

$$y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменных:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \dots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \quad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x=0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной: $p = y'$; $y'' = \frac{dp}{dy} p$;

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \quad p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

$$1) \quad y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \quad du = 4 \frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4 \int \frac{dy}{y}; \quad u = 4 \ln|y| + 4 \ln C_1; \quad u = 4 \ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y \ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y \ln|C_1 y|; \quad \int \frac{dy}{4y \ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C;$

$$2) \quad p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C;$$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, \dots, p_n$ – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

Теорема. (Теорема Коши). Если в некоторой области $(n-1)$ -мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \dots, y_n$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ этой области существует единственное решение

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$.

Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, ... $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которые при подстановке в систему обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений ($n = 3$). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \frac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases}$$

Решения системы обладают следующими свойствами:

- 1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где $C = \text{const}$ – тоже являются решениями этой системы.
- 2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}$; $z = \beta e^{kx}$; $u = \gamma e^{kx}$, $\alpha, \beta, \gamma, k = \text{const}$

Подставляя эти значения в систему и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx} , получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k . Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3 . Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы:

$$\begin{aligned} y &= C_1 \alpha_1 e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 x} + C_3 \alpha_3 e^{k_3 x}; \\ z &= C_1 \beta_1 e^{k_1 x} + C_2 \beta_2 e^{k_2 x} + C_3 \beta_3 e^{k_3 x}; \\ u &= C_1 \gamma_1 e^{k_1 x} + C_2 \gamma_2 e^{k_2 x} + C_3 \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5 - k & 2 \\ 2 & 2 - k \end{vmatrix} = 0; \quad (5 - k)(2 - k) - 4 = 0; \quad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Для } k_1: \begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

$$\text{Для } k_2: \begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

$$\text{Общее решение системы: } \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$;

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Подставим сюда y , выраженное из первого уравнения:

$$\begin{aligned} x'' &= 5x' + 4x + 2x' - 10x \\ x'' - 7x' + 6x &= 0 \\ k_1 &= 6; \quad k_2 = 1 \\ x &= Ae^t + Be^{6t}; \quad x' = Ae^t + 6Be^{6t}; \\ 2y = x' - 5x &= Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t}; \\ y &= -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t}; \end{aligned}$$

$$\text{Обозначив } A = C_1; \quad \frac{1}{2}B = C_2, \text{ получаем решение системы: } \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + 2 \sin t - 3 \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -6x + 4y + 7 \sin t - 20 \cos t \end{aligned} \right\}.$$

Задача 2. Найти решения систем, удовлетворяющие заданным условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 2; \\ z(0) = 3. \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} x' = 6x - 72y + 44z \\ y' = -4x + 40y - 22z \\ z' = -6x + 57y - 31z \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 9; \\ y(0) = 5; \\ z(0) = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Вопросы:

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Что называют общим решением системы дифференциальных уравнений?
4. Какая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется линейной однородной?
5. Как составляется характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений?
6. Какими свойствами обладают решения системы дифференциальных уравнений?

Практическое занятие 11. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.

Цель: сформировать умение делать вывод о сходимости ряда на основании необходимого и достаточных признаков сходимости знакопостоянных рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

при этом числа $u_1, u_2, \dots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n = 1, 2, \dots$ называются **частными (частичными) суммами**

ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм.

Сумма сходящегося ряда – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n , то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. Если $u_n > 0$, $v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$,

то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствие. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1; \infty)$, то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) +$

$\dots + \varphi(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Пример. Ряд $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится $\alpha \leq 1$ т.к. соответствующий

несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится $\alpha \leq 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале $(a, b]$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h \neq 0,$ то

интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^2 + 5n + 6}.$
2. $\sum_{n=6}^\infty \frac{3}{n^2 - 5n + 6}.$
3. $\sum_{n=1}^\infty \frac{30}{25n^2 + 5n - 6}.$
4. $\sum_{n=1}^\infty \frac{4}{4n^2 - 1}.$
5. $\sum_{n=1}^\infty \frac{18}{n^2 + 3n}.$
6. $\sum_{n=1}^\infty \frac{90}{4n^2 + 8n - 5}.$
7. $\sum_{n=1}^\infty \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$
8. $\sum_{n=1}^\infty \frac{16}{16n^2 - 8n - 3}.$
9. $\sum_{n=1}^\infty \frac{8}{n(n+1)(n+2)}.$
10. $\sum_{n=1}^\infty \frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$

Задача 2. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctg(n^3)}{n(n+2)(n+3)}.$
2. $\sum_{n=1}^\infty \frac{4 - 2 \sin n}{n - \ln n}.$
3. $\sum_{n=1}^\infty \frac{2 + \cos n}{n^2 + 3}.$
4. $\sum_{n=2}^\infty \frac{n^2 \ln n}{n^3 - 2}.$
5. $\sum_{n=1}^\infty \frac{5 - 2 \cos n}{\sqrt[5]{n^3}}.$
6. $\sum_{n=1}^\infty \frac{2 + \sin n}{n(n^2 + 3)}.$
7. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}.$
8. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}.$
9. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11} + 1}}.$
10. $\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n + 3}}.$

Задача 3. Исследовать сходимость рядов:

$$\begin{array}{ll}
1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^n(n+1)!} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3} \\
3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!} & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!} \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n + 2} \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(3n)!} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \\
1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1} \right)^{n^2} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1} \right)^{n^2} \\
3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1} \right)^{n^3} & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3} \right)^{n^2} \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1} \right)^{n^2} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3} \right)^n \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{2n} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{9n+1} \right)^{n/2} \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} e^{-n}
\end{array}$$

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называют знакостоянным?
3. Что такое сумма ряда?
4. Какой ряд называют сходящимся?
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Сформулируйте известные Вам достаточные признаки сходимости рядов.

Практическое занятие 12. Знакопередающие и знакпеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакпеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Цель: сформировать умение делать вывод об абсолютной или условной сходимости числовых рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Знакопередающий ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

где $u_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Признак Лейбница.

Если у знакопередающегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ и общий член стремится к нулю $u_n \rightarrow 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимости рядов.

Рассмотрим некоторый знакпеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (2)$$

Теорема. Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакпеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакпеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно

сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно

сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1, 2, \dots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5 + n^2 + 1}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2 \sqrt{n})}{n^2 \sqrt{n}}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{\sqrt{n^5}}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{n^2}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n} \right)^n.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{3^n}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}.$

Вопросы:

1. Какой ряд называется знакопеременным (знакопеременным)?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какой ряд называется абсолютно сходящимся (условно сходящимся)?
4. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.
5. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Практическое занятие 13. Вариационные ряды и их графическое изображение.

Цель: формирование основных понятий математической статистики.

Теоретическая часть:

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики являются:

- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;

- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и **объем выборки** n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была *репрезентативной* (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, ..., x_k – n_k раз, причем $\sum_{i=1}^k n_i = n$, где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ называют вариантами, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим *относительные частоты* $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариантов, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом.

Пример 1:

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 5, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 1.

Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h , а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариантов, попавших в i -й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется *группированным статистическим рядом*.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$, где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот.

Этапы первичной обработки выборки:

1. Ранжирование опытных данных (расположение значений признака по убыванию или возрастанию).
2. Частотный анализ (построение статистического ряда, определение относительных частот).
3. Группировка (частотная таблица выборки).

Вопросы и задачи:

1. Имеются следующие данные об успеваемости 20 студентов группы по статистике в летнюю сессию: 4, 4, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4. Постройте: ряд распределения студентов по баллам оценок; ряд распределения студентов по уровню успеваемости, выделив в нем две группы студентов: неуспевающие и успевающие. Изобразите каждый из рядов графически.

2. Построить кривую и гистограмму суммы налоговых неуплат, зафиксированных по условным регионам страны, данные по которым приведены в таблице (в млн. руб.):

21	43	72	84
22	54	75	32
26	49	77	45
27	53	78	65
28	54	81	12
32	58	83	34
34	61	84	54
37	65	84	34

39	68	88	41
----	----	----	----

3. Дана исходная выборка по росту и весу студентов группы:

Рост	160	168	175	169	170	169	162	166	163	160	158	173	162	173	156
Вес	48	58	69	64	69	70	51	60	67	54	48	58	44	50	56

Определите объем выборки. Составьте ранжированный и вариационный ряды по каждому из признаков.

4. Построить гистограмму нагрузки на одного следователя по расследованным уголовным делам по данным таблицы:

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2001	2003
По линии МВД	63,2	49,6	41	31,5	32,3	32,4	37,9	34,2	36,2
По линии прокуратуры	17,2	16,9	15,5	15,1	16	17,7	18,2	18,3	19,7

5. Три варианта исходных данных таблицы ниже – результаты телефонных переговоров в минутах сотрудников трех отдельных служб в течение рабочего дня. Требуется составить интервальный ряд распределения.

№ выборки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Служба 1	1,9	2,6	3,1	3,3	2,1	2,0	4,7	0,9	2,8
Служба 2	6,9	1,1	3,6	1,0	7,0	2,1	8,7	1,0	8,0
Служба 3	4,7	6,8	3,8	3,1	1,8	7,1	9,2	8,1	4,0

6. Дана выборка 7,3,3,6,4,3,5,1,2,1,3. Построить вариационный ряд. Определить размах выборки.

Практическое занятие 14. Выборочный метод. Точечные оценки.

Цель: формирование основных понятий математической статистики при обработке результатов эксперимента.

Теоретическая часть:

Числовые показатели, характеризующие генеральную совокупность, называют *параметрами*, а числовые показатели, характеризующие выборку, — *выборочными характеристиками* или *статистиками*. Выборочные характеристики являются приближенными оценками генеральных параметров. Это величины случайные, варьирующие вокруг своих параметров. Оценки генеральных параметров по выборочным характеристикам могут быть точечными и интервальными.

Генеральные характеристики, или параметры, принято обозначать буквами греческого алфавита, а выборочные характеристики – латинского. Выборочная средняя $\bar{X}$ является оценкой генеральной средней μ , выборочная дисперсия s_x^2 — оценкой генеральной дисперсии σ_x^2 , а среднее квадратическое отклонение s_x — оценкой стандартного отклонения σ_x , характеризующего генеральную совокупность. Это *точечные оценки*, представляющие собой не интервалы, а числа («точки»), вычисляемые по случайной выборке.

Требования, предъявляемые к точечным оценкам.

Выборочные характеристики как величины случайные, варьирующие вокруг своих генеральных параметров, в основном не совпадают с ними по абсолютной величине. Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Оценки должны удовлетворять по меньшей мере следующим требованиям: быть состоятельными, эффективными и несмещенными.

Точечная оценка статистики называется *состоятельной*, если при увеличении объема выборки она стремится к величине генерального параметра. Так, для генеральной средней состоятельной оценкой является выборочная средняя, для генеральной дисперсии состоятельной оценкой будет выборочная дисперсия.

Точечная оценка называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию выборочного распределения по сравнению с другими аналогичными оценками, т. е. обнаруживает наименьшую случайную вариацию.

Оценка называется *несмещенной*, если математическое ожидание ее выборочного распределения совпадает со значением генерального параметра.

Выборочная средняя

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n .

Выборочной средней $\bar{X}_g$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $X_1, X_2, \dots, X_n$ признака выборки объема n различны, то $\bar{X}_g = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Если же значения признака $X_1, X_2, \dots, X_k$ имеют соответственно частоты $f_1, f_2, \dots, f_k$, то

$$\bar{X}_e = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n}.$$

Замечание. Выборочная средняя, найденная по данным одной выборки, есть, очевидно, определённое число. Если же извлекать другие выборки того же объёма из той же генеральной совокупности, то выборочная средняя будет изменяться от выборки к выборке. Таким образом, выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину, а, следовательно, можно говорить о распределениях выборочной средней и о числовых характеристиках этого распределения (его называют выборочным), в частности, о математическом ожидании и дисперсии выборочного распределения.

Выборочная дисперсия

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{X}_e$, вводят сводную характеристику – выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией D_e называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{X}_e$.

Если все значения $X_1, X_2, \dots, X_n$ признака выборки объёма n различны, то

$$D_e = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_e)^2}{n}.$$

Если значения признака $X_1, X_2, \dots, X_k$ имеют соответственно частоты $f_1, f_2, \dots, f_k$, причём $f_1 + f_2 + \dots + f_k = n$, то

$$D_e = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n}.$$

Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы её математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить D_e на дробь $\frac{n}{n-1}$. Сделав это, получим исправленную

дисперсию, которую обычно обозначают через S^2 :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n-1}.$$

Исправленная дисперсия является, несмещённой оценкой генеральной дисперсии.

Итак, в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n-1}.$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартным) называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\sigma_e = \sqrt{D_e}$.

Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной

дисперсии: $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n-1}}.$

Замечание. Сравнивая формулы $D_e = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n}$ и $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X}_e)^2 f_i}{n-1}$, видим, что они

отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях n объёма выборки выборочная и

исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

Пример. Среди свиноматок хозяйства было выбрано 64 свиноматки, данные по опоросам среди которых следующие:

8; 10; 6; 10; 8; 5; 11; 7; 10; 6; 9; 7; 8; 7; 9; 11; 8; 9; 10; 8; 7; 8; 11; 8; 7; 10; 8; 8; 5; 11; 8; 10; 12; 7; 5; 7; 9; 7; 10; 5; 8; 9; 7; 12; 8; 9; 6; 7; 8; 7; 11; 8; 6; 7; 9; 10.

Определим среднее выборочное число поросят в пометах 64 свиноматок и вычислим показатели вариации для этой выборки.

Решение:

Выборочная средняя числа поросят в опоросах:

$$\bar{x}_g = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 528/64 = 8,25$$

Выборочная дисперсия числа поросят:

$$D_g = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_g)^2 f_i}{n} = 218/64 = 3,41.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение числа поросят в опоросах:

$$\sigma_g = \sqrt{D_g} = \sqrt{3,41} = 1,85 \text{ поросят.}$$

Исправленная выборочная дисперсия числа поросят:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_g = 64/63 * 218 = 3,46.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение числа поросят в опоросах:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,46} = 1,86 \text{ поросят.}$$

Итак, нами найдены следующие точечные оценки по данной выборке:

точная оценка среднего числа поросят в опоросах для генеральной совокупности (то есть по всему хозяйству): 8,25 поросят;

точная оценка среднего квадратического отклонения числа поросят в генеральной совокупности: 1,86 поросят.

Вопросы и задачи:

По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения, вычислить:

1) выборочное среднее;

2) исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

А) 8.0 -1.1 13.5 10.0 2.4 4.1 20.0 12.4 13.4 4.8 7.8 0.0 10.9 13.7 6.6

Б) 31.6 34.9 46.9 42.8 36.0 26.2 28.6 48.5 27.7 45.8 32.0 41.2 39.8 33.1 36.3 53.5 43.9 35.8 32.9 34.4

В) 25.4 31.1 13.2 23.0 19.1 26.5 23.2 29.2 24.8 26.6 29.3 21.4 28.2 38.2 19.9 30.6 24.5 23.2

Г) 10.5 5.5 12.6 27.0 25.0 31.2 15.9 15.3 17.4 32.8 30.3 9.5 17.7 16.4 15.9.

Практическое занятие 15. Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.

Цель: формирование основных понятий интервального оценивания и методов оценки характеристик генеральной совокупности по малой выборке.

Теоретическая часть:

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ . Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ^* тем точнее определяет параметр Θ , чем меньше абсолютная величина разности $|\Theta - \Theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, то чем меньше δ , тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta - \Theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ , с которой это неравенство осуществляется.

Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ , с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Обычно надёжность оценки задаётся наперёд, причём в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, равна γ : $P[|\Theta - \Theta^*| < \delta] = \gamma$.

Заменив неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta, \text{ или } \Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta, \text{ имеем } P[\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta] = \gamma.$$

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ , равна γ . Доверительным называют интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ .

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ .

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{X}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надёжностью γ .

Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы:

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Приняв во внимание, что по условию нам задана вероятность γ , получаем следующую формулу (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через $\bar{X}$)

$$P\left(\bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надёжностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a ; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Укажем ещё, что число t определяется из равенства $2\Phi_0(t) = \gamma$, или $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$; по таблице функции Лапласа находят аргумент t , которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Надёжность $\gamma = 0,95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключён; лишь в 5 % случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно воспользоваться результатами предыдущего параграфа, в котором σ предполагалось известным.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину $T = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}}$, которая

имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы; здесь $\bar{X}$ - выборочная средняя, S - «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n - объём выборки.

Пользуясь распределением Стьюдента, находим:

$$P\left(\bar{X} - \frac{t_{\gamma} S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t_{\gamma} S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Значит, доверительный интервал $\left(\bar{X} - \frac{t_{\gamma} S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{t_{\gamma} S}{\sqrt{n}}\right)$, покрывает неизвестный параметр a с

надёжностью γ .

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве (то есть в генеральной совокупности) – распределена нормально. По выборке объёма $n = 16$ найдены выборочная средняя $\bar{X} = 20,2$ кг и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$ кг. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надёжностью 0,95.

Решение: Найдём t_{γ} . Пользуясь таблицей, по $\gamma = 0,95$ и $n = 16$ находим $t_{\gamma} = 2,13$.

Найдём доверительные границы:

$$\bar{X} - \frac{t_{\gamma} s}{\sqrt{n}} = 20,2 - \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 19,774 \text{ кг},$$

$$\bar{X} + \frac{t_{\gamma} s}{\sqrt{n}} = 20,2 + \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 20,626 \text{ кг}.$$

Итак, с надёжностью 0,95 неизвестный параметр a заключён в доверительном интервале $19,774 < a < 20,626$ (кг).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s .

Доверительный интервал, покрывающий параметр σ с заданной надёжностью γ находят по следующей формуле:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q).$$

Здесь параметр q определяют, пользуются таблицей приложения 2, а s находят по выборке.

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве – (то есть в генеральной совокупности) распределён нормально. По выборке объёма $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$ кг. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью 0,95.

Решение: По таблице по данным $\gamma = 0,95$ и $n = 25$ найдём $q = 0,32$.

Искомый доверительный интервал таков:

$$0,8(1 - 0,32) < \sigma < 0,8(1 + 0,32), \text{ или}$$

$$0,544 < \sigma < 1,056 \text{ (кг)}.$$

Замечание. Если $q > 1$, то неравенство примет вид

$$0 < \sigma < s(1 + q).$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения, вычислить:

- 1) доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ ;
- 2) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения для того же значения γ .

А) $\gamma = 0,999$

8.0 -1.1 13.5 10.0 2.4 4.1 20.0 12.4 13.4 4.8 7.8 0.0 10.9 13.7 6.6

Б) $\gamma = 0,95$

31.6 34.9 46.9 42.8 36.0 26.2 28.6 48.5 27.7 45.8 32.0 41.2 39.8 33.1 36.3 53.5 43.9 35.8 32.9 34.4

В) $\gamma = 0,999$

25.4 31.1 13.2 23.0 19.1 26.5 23.2 29.2 24.8 26.6 29.3 21.4 28.2 38.2 19.9 30.6 24.5 23.2.

Задача 2. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением s , вычислить доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ .

$s = 7, \gamma = 0,99$

13.4 8.6 22.1 2.3 14.6 13.0 11.1 29.4 23.3 1.7 13.6 2.1 21.6 6.1 8.6 6.6 16.0 11.6 16.6 1.6 15.8 18.9 10.6
 11.9 0.1 10.7 3.8 -3.6 15.4 7.9
 4.5 17.7 10.8 19.6 18.5 15.5 9.3 21.7 6.6 10.5 10.4 8.2 16.0 22.6 20.5 11.6 23.2 23.0 9.5 11.3 14.9 19.9
 13.4 13.9 19.5 19.8 21.0 3.2 14.0 19.1
 17.9 8.6 11.2 16.2 13.9 16.2 17.1 7.7 12.5 2.7 16.5 20.2 15.5 14.5 5.6 16.5 12.3 9.9 11.9 17.6 6.6 20.3 9.7
 13.2 17.4 5.1 13.0 23.3 6.8 9.8
 15.5 16.2 18.4 9.2 5.7 10.9 8.8 7.4 16.2 9.9

Практическое занятие 16. Статистическая проверка гипотез.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0 .

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. Обозначим эту величину в целях общности через K .

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K , которая служит для проверки нулевой гипотезы.

После выбора определённого критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

В области статистики и биометрии в частности применяют два вида статистических критериев: *параметрические*, построенные на основании параметров данной совокупности (например, $\bar{X}$ и s^2_x) и представляющие функции этих параметров, и *непараметрические*, представляющие собой функции, зависящие непосредственно от вариантов данной совокупности с их частотами. Первые служат для проверки гипотез о параметрах совокупностей, распределяемых по нормальному закону, вторые — для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Применение параметрических критериев связано с необходимостью вычисления выборочных характеристик — средней величины и показателей вариации, тогда как при использовании непараметрических критериев такая необходимость отпадает.

t-критерий Стьюдента (t-распределение). Английский математик В. Госсет (печатавшийся под псевдонимом Стьюдент), в 1908 г. нашел закон распределения величины $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, в которой генеральный параметр σ заменен на его выборочную характеристику s_x , т. е. нашел закон распределения значений

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Открытый Стьюдентом и теоретически обоснованный Р. Фишером закон *t-распределения* служит основой так называемой теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в нормально распределяющейся совокупности в зависимости от объема выборки. t-распределение зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$, причем с увеличением объема выборки n t-распределение быстро приближается к нормальному с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и уже при $n > 30$ не отличается от него. Это видно из таблицы ниже, в которой приведены табулированные значения t-распределения и нормального распределения для разных значений t .

Распределение	Нормированное отклонение t						
	0,5	1.0	1.5	2,0	2,5	3,0	3,5
Нормальное	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
Стьюдента при $n = 3$	0,333	0,577	0,728	0,816	0,870	0,905	0,927
$n = 20$	0,377	0,670	0,850	0,940	0,978	0,993	0,998
$n = 30$	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995

Оценка разности средних. Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами μ_1 и μ_2 . Разность $\mu_1 - \mu_2$ этих параметров обозначим через D , то есть $\mu_1 - \mu_2 = D$, а дисперсию этой разности σ_D^2 . Значения генеральных параметров неизвестны, однако по выборкам мы можем найти величины выборочных средних и разность между ними

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2, \text{ которую обозначим } d, \text{ то есть } \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = d.$$

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mu_1 = \mu_2$, то есть $D = 0$. Критерием для проверки H_0 -гипотезы служит отношение

$$t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{S_d}$$

где t — переменная величина, следующая t -распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, а S_d — ошибка указанной разности, а n_1 и n_2 — объемы первой и второй выборок соответственно.

Так как, согласно H_0 -гипотезе, $\mu_1 = \mu_2$, то t -критерий выражается в виде отношения разности выборочных средних к своей ошибке, т. е.

$$t = \frac{d}{S_d}.$$

H_0 -гипотезу отвергают, если фактически установленная величина t -критерия (обозначаемая t_{ϕ}) превзойдет или окажется равной критическому значению t_{kp} этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, т. е. при условии $t_{\phi} \geq t_{kp}$.

Ошибку разности средних S_D определяют по формуле:

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Пример. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводили на двух группах животных: опытной и контрольной. Были исследованы кролики в возрасте от полутора до двух месяцев, массой тела 500—600 г. Опыт продолжался полтора месяца. Животных обеих групп содержали на одном и том же кормовом рационе. Однако опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0,06 г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела:

Привесы, г		Отклонения от средней арифметической		Квадраты отклонений	
опыт	контроль	опыт $(x_i - \bar{x}_1)$	контроль $(x_j - \bar{x}_2)$	опыт $(x_i - \bar{x}_1)^2$	контроль $(x_j - \bar{x}_2)^2$
580	504	58	22	3364	484
692	560	54	34	2916	1156
700	420	62	106	3844	11236
621	600	17	74	289	5476
640	580	2	54	4	2916
561	530	77	4	5929	16
680	490	42	36	1764	1296
630	580	8	54	64	2916
	470		56		3136

$\Sigma = 5104$	$\Sigma = 4734$	—	—	$\Sigma = 18\ 174$	$\Sigma = 28\ 632$
$\overline{x_1} = 638$	$\overline{x_2} = 526$	—	—	$\Sigma = 46806$	

Средние арифметические привесов:

в опыте $\overline{x_1} = 5104/8 = 638$ г,

в контроле $\overline{x_2} = 4734/9 = 526$ г. Разница $\overline{x_1} - \overline{x_2} = d = 112$ г. Чтобы установить, достоверна или случайна эта разница, нужно определить ошибку разности средних:

$$s_D = \sqrt{\frac{46806}{8+9-2} \cdot \left(\frac{8+9}{8 \cdot 9} \right)} = \sqrt{736,8} = 27,14.$$

Отсюда $t_{\phi} = 112/27,14 = 4,1$.

По таблице для уровня значимости $\alpha = 0,01$ и числа степеней свободы $k = 9+8-2 = 15$ находим $t_{kp} = 2,95$. Так как $t_{\phi} > t_{kp}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости ($P < 0,01$). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась в высшей степени достоверной.

Правильное применение параметрических критериев для проверки статистических гипотез основано на предположении о нормальном распределении совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Однако это не всегда имеет место, так как не все биологические признаки распределяются нормально. Немаловажным является и то обстоятельство, что исследователю приходится иметь дело не только с количественными, но и с качественными признаками, многие из которых выражаются порядковыми номерами, индексами и другими условными знаками. В таких случаях необходимо использовать *непараметрические критерии*.

Известен целый ряд непараметрических критериев, среди которых видное место занимают так называемые *ранговые критерии*, применение которых основано на ранжировании членов сравниваемых групп. При этом сравниваются не сами по себе члены ранжированных рядов, а их порядковые номера, или ранги. Далее мы рассмотрим некоторые непараметрические критерии, применяемые для проверки нулевой гипотезы при сравнении как независимых, так и зависимых выборочных групп.

U - критерий Уилкоксона (Манна—Уитни). Гипотезу о принадлежности сравниваемых независимых выборок к одной и той же генеральной совокупности или к совокупностям с одинаковыми параметрами, т. е. H_0 -гипотезу, можно проверить с помощью *рангового критерия Уилкоксона (Манна—Уитни)*.

Для расчета *U*-критерия необходимо:

1. Расположить числовые значения сравниваемых выборок в возрастающем порядке в один общий ряд и пронумеровать члены общего ряда от 1 до $N = n_1 + n_2$. (Эти номера и будут «рангами» членов ряда.)

2. Отдельно для каждой выборки найти суммы рангов и определить величины,

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

и

$$U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

которые отображают связь между суммами рангов первой и второй выборки.

3. В качестве *U*-критерия использовать меньшую величину U_{ϕ} , которую сравнить с табличным значением U_{kp} . Условием для сохранения принятой H_0 -гипотезы служит неравенство $U_{\phi} > U_{kp}$.

Критические точки *U*-критерия U_{kp} для n_1 , n_2 и принимаемого уровня значимости α содержатся в таблице 3 Приложения.

Пример. На двух группах лабораторных мышей – опытной ($n_1 = 9$) и контрольной ($n_2 = 11$) – изучали воздействие на организм нового препарата. Испытание продолжалось один месяц. После этого масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

В опытной группе 80, 76, 75, 64, 70, 68, 72, 79, 83.

В контрольной группе 70, 78, 60, 80, 62, 68, 73, 60, 71, 66, 69.

Вычислим по выборкам: $\overline{x_1} = 74,1$ и $\overline{x_2} = 68,8$.

Проверим с помощью U -критерия, является ли разность в массе тела между опытной и контрольной группами мышей статистически достоверной.

Суммируя ранги отдельно для каждой группы, находим:

$$R_1 = 4+6+9+12+14+15+17+19+20=112;$$

$$R_2 = 1+2+3+5+7+8+10+11+13+16+18=94.$$

Подставляем эти данные в формулы:

$$U_1 = 112 - \frac{9 \cdot 10}{2} = 67; \quad U_2 = 94 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 22$$

Меньшую величину $U_2 = 22$ сравниваем с табличным $U_{кр}$ значением для $n_1=9$, $n_2=11$ и уровня значимости $\alpha=0,01$, которое равно $U_{кр}=19$.

Поскольку $U_{ф} > U_{кр}$, отвергнуть проверяемую H_0 -гипотезу нельзя. Следовательно, различия, наблюдаемые между этими выборками, статистически недостоверны. Выборки не имеют значимых отличий.

Критерий знаков z. В тех случаях, когда результаты наблюдений выражаются не числами, а качественными признаками, принимающими два различных значения (помечаем их знаками плюс (+) и минус (—)), различия между попарно связанными членами сравниваемых выборок оценивают с помощью *критерия знаков z*. Конструкция этого критерия базируется на весьма простых соображениях: если попарно сравниваемые значения двух зависимых выборок существенно не отличаются друг от друга, то число плюсовых и минусовых разностей окажется совершенно одинаковым; если же заметно преобладают плюсы или минусы, это будет указывать на положительное или отрицательное действие изучаемого фактора на результативный признак. Большое число однозначных разностей служит в качестве фактически найденной величины z-критерия знаков. При этом нулевые разности, т. е. случаи, не давшие ни положительного, ни отрицательного результата, обозначаемые цифрой 0, в расчет не принимают и число парных наблюдений соответственно уменьшается.

Как и всякий другой выборочный показатель, z-критерий знаков является величиной случайной; он служит для проверки H_0 -гипотезы, т. е. предположения о том, что совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одинаковые функции распределения. H_0 -гипотеза отвергается, если $z_{ф} \geq z_{кр}$ для принятого уровня значимости α и числа парных наблюдений n , взятых без нулевых разностей. Критические точки $z_{кр}$ для двух уровней значимости и числа парных наблюдений содержатся в таблице.

Вопросы и задачи:

1. Для изучения эффективности нового препарата железа были выбраны две группы пациентов с анемией. В первой группе пациенты в течение двух недель получали новый препарат, а во второй группе - получали плацебо. После этого было проведено измерение уровня гемоглобина в периферической крови. В первой группе средний уровень гемоглобина составил $115,4 \pm 1,2$ г/л, а во второй - $103,7 \pm 2,3$ г/л (данные представлены в формате $M \pm m$), сравниваемые совокупности имеют нормальное распределение. При этом численность первой группы составила 34, а второй - 40 пациентов. Необходимо сделать вывод о статистической значимости полученных различий и эффективности нового препарата железа.

2. После проведения вакцинации от гриппа среди студентов медицинского университета были подведены результаты: из 500 вакцинированных в период эпидемии заболели гриппом 20 человек, из 1600 отказавшихся от вакцинации гриппом заболели 200 человек. Оцените эффективность вакцинации от гриппа.

3. Учебной частью одной из кафедр медицинского университета было проведено исследование успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций. Для студентов, посетивших менее половины лекционного курса ($n=36$), средняя оценка на экзамене составила 3,2, $\sigma_1=0,2$. Для студентов, посетивших более 90% лекций по предмету ($n=150$), средняя оценка на экзамене составила 4,5, $\sigma^2=0,5$. Сделайте вывод о достоверности различий успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций по предмету.

4. Результаты тестирования по 30-бальной шкале для группы X и группы Y представлены в таблице. Сравните эффективность двух методов обучения студентов в двух группах для уровня статистической значимости $\beta = 5\%$.

X	18	10	7	15	14	11	13				
Y	15	20	10	8	16	10	19	7	15	14	29

3.ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Перечень основной литературы

- 1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с.
— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>
- 2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с.
— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28060.html>

Перечень дополнительной литературы

- 1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с.
— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20266.html>.
- 2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>.
- 3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20211.html>.