

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Фурсов Владимир Алексеевич

Должность: И.о. директора Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
федерального университета

Дата подписания: 08.06.2026 11:39:06

Уникальный программный ключ:

1c378726a41fd0143ae5bccc8ba81860b00daa62

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «**Строительная механика**»
для студентов направления подготовки

07.03.03 Дизайн архитектурной среды

Пятигорск, 2026

Содержание

Практическое занятие 1	5
Практическое занятие 2	12
Практическое занятие 3	14
Практическое занятие 4	16
Практическое занятие 5	21
Практическое занятие 6	23
Практическое занятие 7	27
Практическое занятие 8	33
Практическое занятие 9	39
Практическое занятие 10	44
Практическое занятие 11	48
Практическое занятие 12	51
Практическое занятие 13	53
Практическое занятие 14	57
Практическое занятие 15	61
Практическое занятие 16	64
Практическое занятие 17	72
Практическое занятие 18	76
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	80

ВВЕДЕНИЕ

В курсе дисциплины «Строительная механика» рассматривают типичные элементы конструкций: брус, пластинка, оболочка. Внешние нагрузки, действующие на элементы сооружений, подразделяют на сосредоточенные и распределенные, статические и динамические. Все реальные силы - это силы, распределенные по некоторой площади или объему. Однако распределенную нагрузку на небольшой площади, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента, можно заменить сосредоточенной равнодействующей, силой, что упростит расчет. Распределенные нагрузки имеют единицы силы, отнесенной к единице длины, или к единице поверхности или объема.

При воздействии статических и динамических нагрузок на конструкцию все ее части находятся в равновесии; ускорения элементов конструкции отсутствуют или настолько малы, что ими можно пренебречь. Если же эти ускорения значительны, т. е. изменение скорости элементов машины происходит за сравнительно небольшой период времени, то мы имеем дело с приложением динамических нагрузок. Примерами таких нагрузок могут служить внезапно приложенные нагрузки, ударные и повторно-переменные. Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний конструкций или сооружений. Вследствие изменения скорости колеблющихся масс возникают силы инерции, пропорциональные (согласно второму закону Ньютона) колеблющимся массам и ускорениям.

Методы расчета элементов конструкций излагаются на основе следующих упрощений

и допущений: материал тела имеет сплошное (непрерывное) строение, т. е. не принимается во внимание дискретная атомистическая структура вещества; материал тела однороден, т. е. обладает во всех точках одинаковыми свойствами; материал тела изотропен, т. е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами; в теле до приложения нагрузки нет внутренних (начальных) усилий; результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке.

Введение

Целью методических рекомендаций по изучению дисциплины является закрепление и углубление знаний, полученных при изучении теоретического материала по дисциплине «Строительная механика».

Целью проведения практических занятий является:

- Обобщение, систематизация, закрепление полученных теоретических знаний по темам конкретным требованиям дисциплины
- Формирование умений применять полученные знания на практике
- Выработка оптимальных решений при решении практических задач предметной области

Ведущей целью практических занятий по дисциплине Сопротивление материалов является формирование профессиональных компетенций и умений – выполнение определенных действий, необходимых в предметной области.

Методические рекомендации призваны обеспечить эффективность самостоятельной работы студентов с литературой, на основе рациональной организации

ее изучения, облегчить подготовку студентов к сдаче экзамена, сориентировать их в направлении изучения материала по поставленным вопросам, дать возможность отработать навыки составления и оформления различных видов документов, как под контролем преподавателя, так и самостоятельно.

Перед подготовкой к занятию студенты должны ознакомиться с планом практического занятия, а также с учебной программой по данной теме что поможет студенту сориентироваться при проработке вопроса и правильно составить план ответа. Следующий этап – изучение конспекта лекций, разделов учебников, ознакомление с дополнительной литературой, рекомендованной к занятию. Студенты должны готовить краткий конспект ответов на все вопросы, знать определения основных категорий.

Разработано для очной формы обучения.

Практическое занятие 1

Тема 1. Общие понятия и определения.

Сооружения и их элементы;

Цель: дать студенту знания в области основ кинематики.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки;

общие теоремы динамики

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы заключается в применении знаний в области кинематики на практике.

Теоретическая часть:

Классификация движения точки:

1. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} = 0$ и $a_n = 0$, то точка движется равномерно и прямолинейно;

2. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} \neq 0$ и $a_n = 0$, то точка движется неравномерно и прямолинейно;

3. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} = 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется равномерно и криволинейно;

4. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} \neq 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется неравномерно и криволинейно.

Виды движения твердого тела:

1. *Простейшие движения твердого тела:*

а. *Поступательное движение:* любой отрезок тела перемещается параллельно самому себе;

б. *Вращательное движение вокруг неподвижной оси:* две точки, неразрывно связанные с телом, остаются неподвижны;

2. *Плоскопараллельное (плоское) движение:* каждая точка тела движется в одной и той же плоскости;

3. *Сферическое движение:* одна точка, неразрывно связанная с телом, остается неподвижна;

4. *Свободное движение:* любое перемещение тела ничем не ограничено.

Плоскопараллельное (плоское), сферическое и свободное движения являются совокупностью простейших движений.

При **поступательном движении** все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

При поступательном движении кинематическими характеристиками тела являются линейная скорость и линейное ускорение этого тела

При **вращательном движении** для определения положения вращающегося тела используют понятие *угла поворота тела* φ (рисунок 5). Угол поворота связан со временем зависимостью, называемой уравнением вращательного движения

$$\varphi = f(t).$$

Кинематическими характеристиками вращательного движения являются *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε .

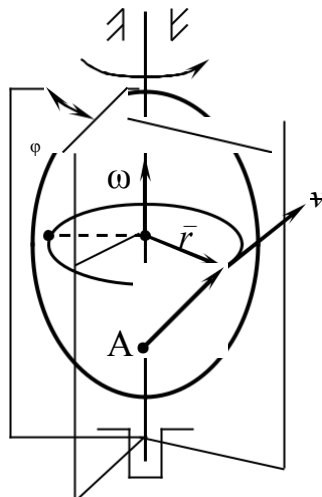


Рисунок 5.

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение тела равно первой производной от его угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор углового ускорения направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, когда вращение ускоренное, и в обратную сторону, когда вращение замедленное.

Величина скорости точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения

$$v = \omega \cdot OM$$

Вектор скорости точки вращающегося тела направлен перпендикулярно прямой, соединяющей эту точку с осью вращения, и перпендикулярно самой оси вращения и определяется по формуле Эйлера

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке твердого тела.

Полное ускорение точки вращающегося тела разлагается на две составляющие: *вращательное* (a_ε) и *осеостремительное* (a_ω), и его величина равна корню квадратному из суммы квадратов этих составляющих

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}.$$

Вращательное ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, когда движение ускоренное и в обратную сторону, когда движение замедленное.

Величина вращательного ускорения точки равна произведению углового ускорения тела на расстояние от точки до оси вращения

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot OM.$$

В векторной форме: $\mathbf{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}.$

Осестремительное ускорение направлено к оси вращения. Величина осестремительного ускорения точки равна произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения

$$a_{\omega} = \omega^2 \cdot OM.$$

В векторной форме: $\vec{a}_{\omega} = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r})$.

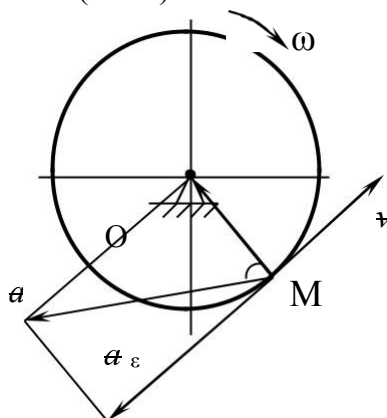


Рисунок 6. Направление векторов скорости и ускорений при замедленном движении вращающегося тела.

Вектор полного ускорения любой точки вращающегося тела направлен под углом φ к прямой, соединяющей эту точку с осью вращения. Тангенс этого угла равен отношению углового ускорения тела к квадрату его угловой скорости

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

При **плоскопараллельном (плоском) движении**:

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть осуществлено как совокупность простейших движений: *поступательного* вместе с выбранной точкой фигуры, называемой полюсом и *вращения* вокруг оси, проходящей через полюс.

Кинематическими характеристиками являются мгновенная угловая скорость ω , мгновенное угловое ускорение ε плоской фигуры, линейная скорость и линейное ускорение, точки выбранной за полюс.

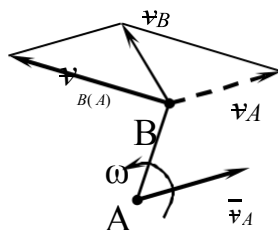


Рисунок 7. Определение скоростей точек плоской фигуры.

Формула распределения скоростей точек при плоском движении (рисунок 7):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B(A)},$$

где $\vec{v}_A$ – скорость полюса A;

$\vec{v}_B$ – скорость любой точки B;

$\vec{v}_{B(A)}$ – скорость, которую получает точка B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A;

$$v_{A(B)} = \omega \cdot AB;$$

Вектор скорости $\vec{v}_{B(A)}$ перпендикулярен прямой AB.

Скорость любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

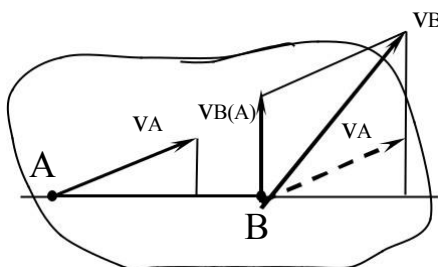


Рисунок 8.

Для определения скоростей плоской фигуры используют наиболее простой и удобный метод, основанный на **теореме о проекциях скоростей двух точек тела**: проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу (рисунок 8)

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Другой простой и наглядный способ определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о *мгновенном центре скоростей*.

Мгновенный центр скоростей – точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Скорость точек плоской фигуры равна произведению мгновенной угловой скорости фигуры (ω , рад/с) на расстояние от точки до МЦС (рисунок 9, а)

$$v_A = \omega \cdot PA,$$

где PA – расстояние от МЦС (т.Р) до точки A .

Вектор скорости плоской фигуры *направлен перпендикулярно прямой*, соединяющей эту точку с МЦС, и лежит в плоскости фигуры.

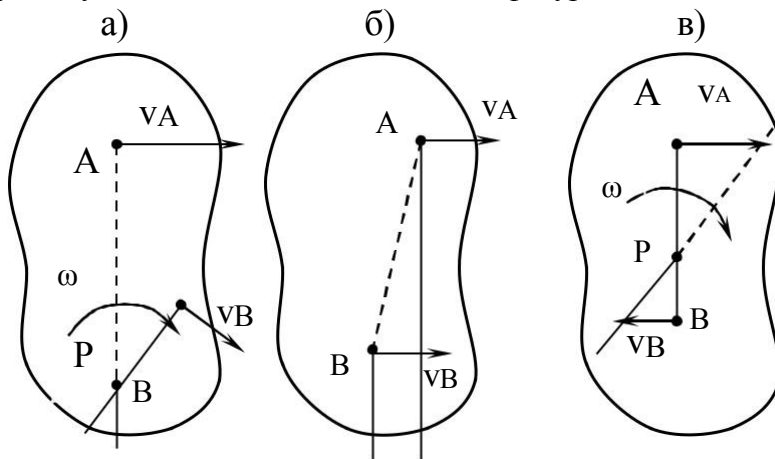


Рисунок 9. Нахождение мгновенного центра скоростей.

Отношение величин скоростей точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦС является величиной постоянной для всех точек плоской фигуры и равно мгновенной угловой скорости фигуры (рисунок 9, а и в)

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \dots = \omega.$$

Для определения МЦС необходимо к известным векторам скоростей двух точек, если они не параллельны, провести перпендикуляры – точка пересечения перпендикуляров будет МЦС (т.Р).

Если векторы скоростей двух точек плоской фигуры равны друг другу и располагаются параллельно, то МЦС находится в бесконечно удаленной точке (рисунок 9, б).

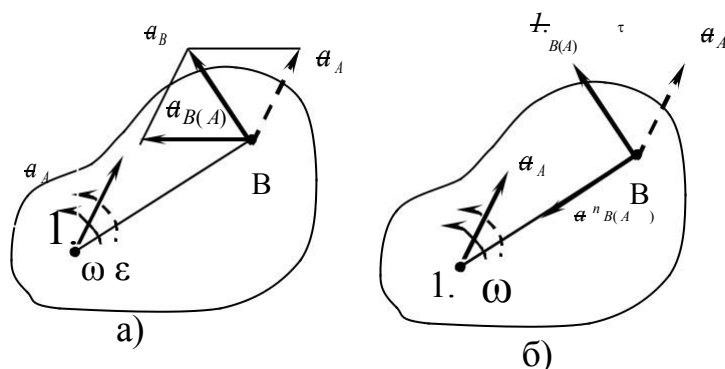


Рисунок 10. Определение ускорений точек плоской фигуры.

1. На рисунке сплошная дуговая стрелка показывает направление угловой скорости ω (направление вращения), а пунктирная – направление углового ускорения ε . При ускоренном вращении обе стрелки будут направлены в одну сторону, а при замедленном – в разные.

Для определения ускорений точек плоской фигуры (рисунок 10, а) используют выражение

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B(A)},$$

где a_A – ускорение полюса A ;

a_B – ускорение любой точки B плоской фигуры;

$a_{B(A)}$ – ускорение, которое получает точка B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A .

Ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

При решении задач более удобно вектор $\vec{a}_{B(A)}$ заменить на его составляющие: касательную $\vec{a}_{\tau B(A)}$ и нормальную $\vec{a}_{n B(A)}$ (рисунок 10, б), получая выражение следующего вида

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{\tau B(A)} + \vec{a}_{n B(A)},$$

где вектор $\vec{a}_{\tau B(A)}$ направлен перпендикулярно AB в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное и определяется

$$\vec{a}_{\tau B(A)} = AB \cdot \varepsilon;$$

вектор $\vec{a}_{n B(A)}$ всегда направлен от точки B к полюсу A и определяется

$$\vec{a}_{n B(A)} = AB \cdot \omega^2.$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно представить как сумму касательной $\vec{a}_{\tau A}$ и нормальной $\vec{a}_{n A}$ составляющих, тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{\tau A} + \vec{a}_{n A} + \vec{a}_{\tau B(A)} + \vec{a}_{n B(A)}.$$

Если точка B движется криволинейно и ее траектория известна, то $\vec{a}_B$ можно представить в виде суммы касательной и нормальной составляющих

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{\tau B} + \vec{a}_{n B}.$$

При непоступательном движении плоской фигуры для определения ускорений используют понятие *мгновенный центр ускорений* (МЦУ).

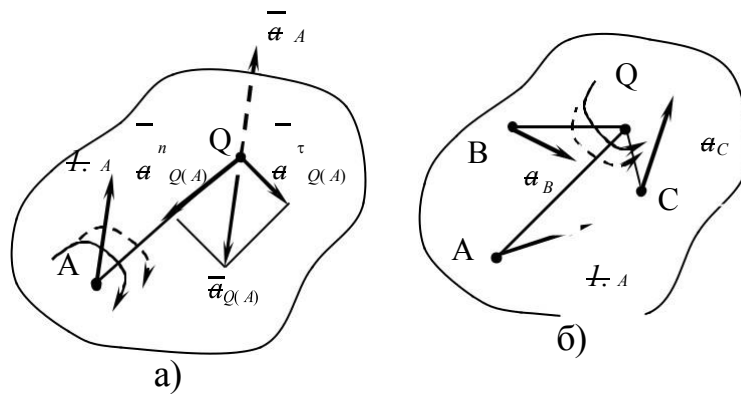


Рисунок 11. Определение мгновенного центра ускорений.

Мгновенный центр ускорений (Q) – точка, ускорение которой в данный момент времени равна нулю.

Положение мгновенного центра ускорений Q (рисунок 11) определяется формулами:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} ;$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} .$$

Откладываем угол α от ускорения a_A (в сторону мгновенного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное), получаем полупрямую, на которой на расстоянии AQ лежит мгновенный центр ускорений Q (рисунок 11, а).

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс, то ускорение любой точки B плоской фигуры (рисунок 11, б) определяется по формуле

$$a_B = BQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q.

Отношение величин ускорений точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦУ определяется отношением

$$\frac{a_B}{BQ} = \frac{a_A}{AQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Вопросы и задания:

1. Что изучает кинематика?
2. Перечислите способы задания движения точки.
3. Запишите формулу определения полного ускорения точки, движущейся вращательно.
4. Дайте определение мгновенного центра ускорения.

Практическое занятие 2

Тема 1. Общие понятия и определения.

Кинематический анализ расчетных схем.

Цель: приобретение умений приводить плоскую произвольную систему сил к заданному центру.

Знать: реакции связей,

условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

Уметь: составлять и решать уравнения равновесия;

Актуальность темы объясняется сведением системы с несколькими силами к заданному центру, тем самым упрощая схему и расчет.

Теоретическая часть:

1. Рассмотрим произвольную систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Выберем

произвольную точку O за центр приведения и, воспользовавшись теоремой о параллельном переносе силы, перенесем все силы системы в данную точку, не забывая при переносе каждой силы добавлять присоединенную пару сил.

Полученную таким образом систему сходящихся сил заменим одной силой R , равной главному вектору исходной системы сил. Образовавшуюся при переносе системы пар сил заменим одной парой с моментом M_O , равным геометрической сумме моментов всех пар сил (т.е. геометрической суммой моментов исходной системы сил относительно центра O).

Такой момент называется **главным моментом системы сил относительно центра O** (рис. 1.30).

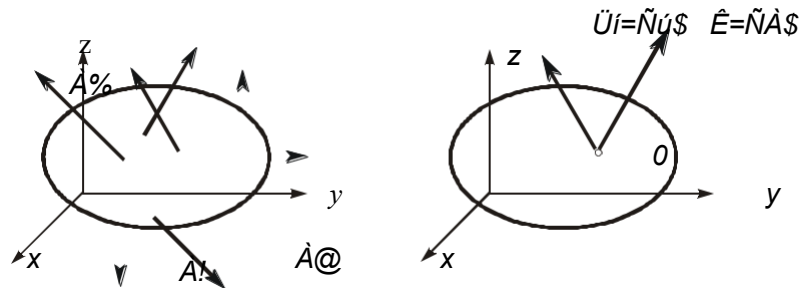


Рис. 1.30. Приведение системы сил к центру

Итак, любую систему сил всегда можно заменить всего двумя силовыми факторами - **главным вектором и главным моментом относительно произвольно выбранного центра приведения**. Очевидно, что главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения (говорят, что главный вектор инвариантен по отношению к выбору центра приведения). Очевидно также, что главный момент таким свойством не обладает, поэтому необходимо всегда указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Вопросы и задания:

1. Что такое главный вектор?
2. Что такое главный момент системы?
3. Приведение системы к заданному центру.
4. Параллельный перенос сил это...?

Практическое занятие 3

Тема 1. Общие понятия и определения.

Кинематический анализ сооружений.

Цель: научиться решать задачи на растяжение - сжатие

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов возникающих в задачах на растяжение – сжатие..

Теоретическая часть:

1. природе различают упругое, упругопластичное и вязкопластичное твердые тела. Упругое тело после снятия внешней нагрузки восстанавливает свои первоначальные размеры и форму. В этом случае деформация тела называется упругой. Упругопластичное тело восстанавливает свои первоначальные размеры и форму не полностью, т. е. имеет место остаточная деформация. В инженерных сооружениях и механических машинах не допустимо появление остаточных деформаций.

От действия внешних нагрузок в поперечных сечениях возникают внутренние силовые факторы, которые определяют, используя метод сечений. Твердое тело, находящееся под действием внешних нагрузок мысленно рассекают на две части и рассматривают равновесие одной из частей. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяют внутренними нагрузками, приложенными в рассматриваемом сечении. Составляя уравнения равновесия оставшейся части от действия внешних и внутренних силовых факторов, находят последние.

Важнейшими понятиями являются напряжения и деформации.

При нагружении тела растягивающими или сжимающими силами определяются напряжения, деформации и удлинения. Внутренняя сила взаимодействия, отнесенная к единице площади, выделенной в окрестности какой-либо точки поперечного сечения тела, называется напряжением в этой точке. Таким образом величина напряжений в каждой точке сечения является мерой внутренних сил, которые возникают в материале в результате воздействия внешних нагрузок. Нормальные напряжения σ при растяжении-сжатии в поперечных сечениях тела определяются из соотношения $\sigma = N/S$, где N - действующее в сечении внутренняя продольная (нормальная) сила; S - площадь поперечного сечения. Напряжения и деформации в пределах упругой деформации связаны между собой законом Гука, т. е. $\sigma = \varepsilon E$, где E - модуль упругости материала (модуль Юнга), ε – относительная продольная деформация.

Расчетные значения напряжений сравнивают с допускаемыми $[\sigma]$, которые определяют путем деления некоторых предельных значений на коэффициент запаса прочности $s([\sigma] = \sigma_{np}/s)$. За предельные значения напряжений принимают предел прочности (для хрупких материалов) или предел текучести (для пластичных материалов), которые

получают при испытаниях стандартных образцов на разрывных машинах. При этом строят 2. координатах напряжение-деформация условную диаграмму растяжения. Условной диаграмму называют потому, что напряжения и деформации вычисляют соответственно по отношению к первоначальной площади сечений и длине образца. Используя условную диаграмму растяжения, необходимо уметь определять механические характеристики материала: предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности и относительное остаточное удлинение при разрыве.

Иногда для изучения значительных пластических деформаций необходимо знать истинную диаграмму растяжения, получаемую путем деления растягивающей силы на истинную площадь поперечного сечения образца (с учетом уменьшения поперечных размеров сечения при растяжении).

Необходимо обратить внимание, что закон Гука, связывающий напряжения и деформации через модуль упругости материала, справедлив только до предела пропорциональности. Продольные деформации при растяжении связаны с поперечными деформациями с помощью коэффициента Пуассона.

При определении напряжений и деформаций в статически неопределимых системах необходимо учитывать, что возникающие при этом в стержнях силы зависят от жесткости стержня, т.е. от площадей поперечных сечений и модулей упругости материала.

Вопросы и задания:

- Какие твердые тела встречаются в природе?
- Какие внутренние силовые факторы возникают в стержнях?
- В чем заключается метод сечений?
- Сформулируйте закон Гука.
- , Что такое истинная диаграмма растяжения?

Практическое занятие 4

Тема 2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.

Нагрузки и внутренние силовые факторы,

Цель: научиться определять внутренние усилия

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов возникающих в задачах на растяжение – сжатие..

Теоретическая часть:

Пример решения задачи на тему «растяжение и сжатие»

Построить по длине бруса, согласно схеме нагружения (рис. 1.1), эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений поперечных сечений. Сделать вывод о прочности бруса, сравнив значения нормальных напряжений в опасном сечении с допустимым, если материал бруса — сталь 3 ($E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 240 \text{ МПа}$).

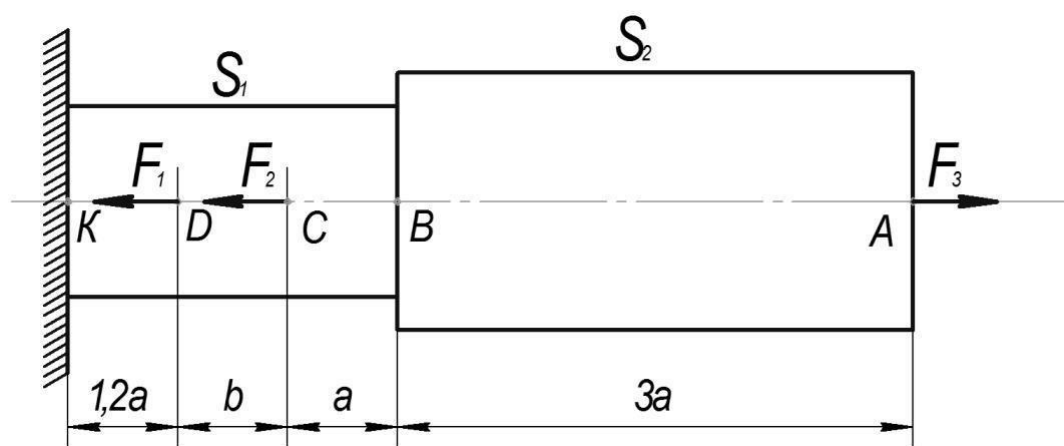


Рисунок 1.1

Дано: $F_1 = 10 \text{ кН}$; $F_2 = 12 \text{ кН}$; $F_3 = 30 \text{ кН}$; $S_1 = 200 \text{ мм}^2$; $S_2 = 300 \text{ мм}^2$;
- $a = 0,3 \text{ м}$, $b = 0,4 \text{ м}$.

Решение:

Имеем четыре участка нагружения (AB , BC , CD , DK), в пределах которых напряжения будут иметь постоянные значения.

Участок 1 (AB). Рассечём, мысленно, стержень в местах, где необходимо определить значения внутренних усилий и внутренних напряжений. Одну из частей (левую) отбросим (рис. 1.2), а для оставшейся составим уравнение равновесия $\sum F_i = N_1 - F_3 = 0$, заменив при этом действие отброшенной части на оставшуюся неизвестной внутренней силой N_1 .

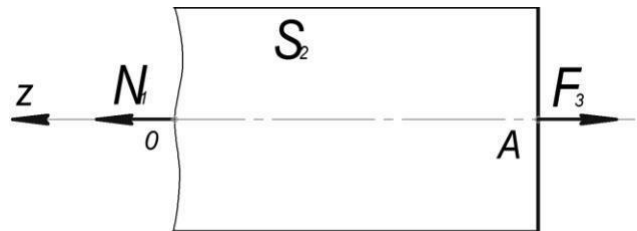


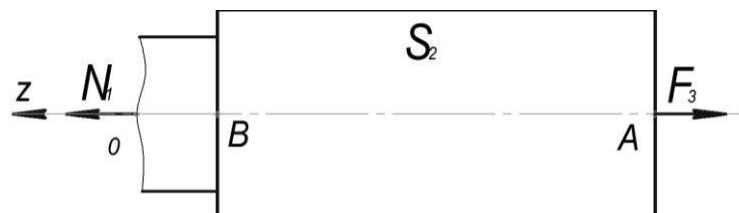
Рисунок 1.2

Тогда, $N_1 = F_3 = 30$ кН.

Значение напряжений на участке: $\sigma_1 = \frac{N_1}{S_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{300} = 100$ МПа.

Абсолютная деформация участка (относительные перемещения концов участка):
 $\Delta l_{AB} = \frac{\sigma_1 \cdot l_{AB}}{E} = \frac{100 \cdot 900}{2,0 \cdot 10^5} = 0,45$ мм.

Участок 2 (BC).



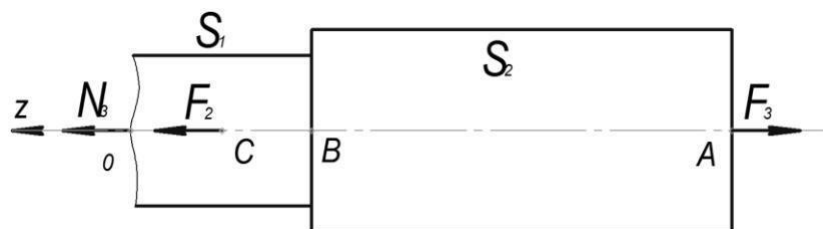
$$N_2 - F_3 = 0,$$

$$N_2 - F_3 = 30 \text{ кН.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{200} = 150 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{\sigma_2 \cdot l_{BC}}{E} = \frac{150 \cdot 300}{2,0 \cdot 10^5} = 0,22 \text{ мм.}$$

Участок 3 (DC).



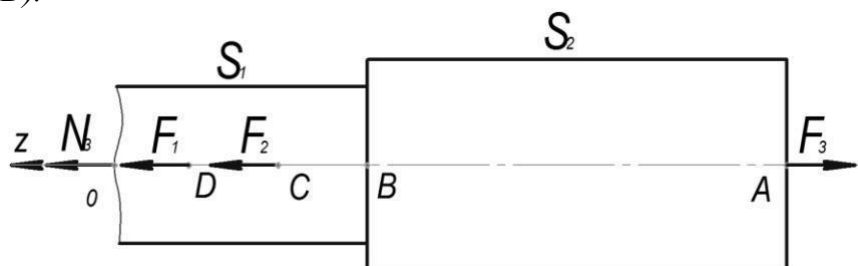
$$N_3 - F_3 + F_2 = 0,$$

$$N_3 = 30 - 12 = 18 \text{ кН.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_1} = \frac{18 \cdot 10^3}{200} = 90 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_{DC} = \frac{\sigma_3 \cdot l_{DC}}{E} = \frac{90 \cdot 400}{2,0 \cdot 10^5} = 0,18 \text{ мм.}$$

Участок 4 (KD).



$$N_4 - F_3 + F_2 + F_1 = 0,$$

$$N_4 = 30 - 12 - 10 = 8 \text{ кН.}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{S_1} = \frac{8 \cdot 10^3}{200} = 40 \text{ МПа.}$$

=

$$\Delta l_{KD} = \frac{\sigma_4 \cdot l_{KD}}{E} = \frac{40 \cdot 360}{2,0 \cdot 10^5} = 0,072 \text{ мм.}$$

Для построения эпюры перемещений поперечных сечений, определим расстояния, на которые переместятся концы участков нагружения относительно жестко заделанного левого конца стержня (точки K).

Перемещение точки D относительно точки K:

$$\delta_{DK} = \Delta l_{KD} = 0,072 \text{ мм.}$$

Тогда, перемещение точки C относительно точки K составит:

$$\delta_{CK} = \delta_{DK} + \Delta l_{KD} = 0,072 + 0,18 = 0,252 \text{ мм.}$$

Аналогично определим перемещения остальных концов участков:

$$\delta_{BK} = \delta_{CK} + \Delta l_{BC} = 0,25 + 0,22 = 0,47 \text{ мм},$$

$$\delta_{AK} = \delta_{BK} + \Delta l_{AB} = 0,47 + 0,45 = 0,92 \text{ мм}.$$

Построив и проанализировав эпюры продольных сил N , нормальных напряжений

$\mathfrak{R}$ и перемещений поперечных сечений (рис. 1.3), делаем вывод, что опасным участком вала является участок BC с $\sigma_{\max} = 150 \text{ МПа}$.

Т.к. $\sigma_{\max} < [\sigma]$, то условие прочности выполняется.

Определим степень загруженности стержня:

$$\frac{\sigma_{\max}}{[\sigma]} = \frac{150}{240} = 0,625.$$

Стержень нагружен на 62,5 %.

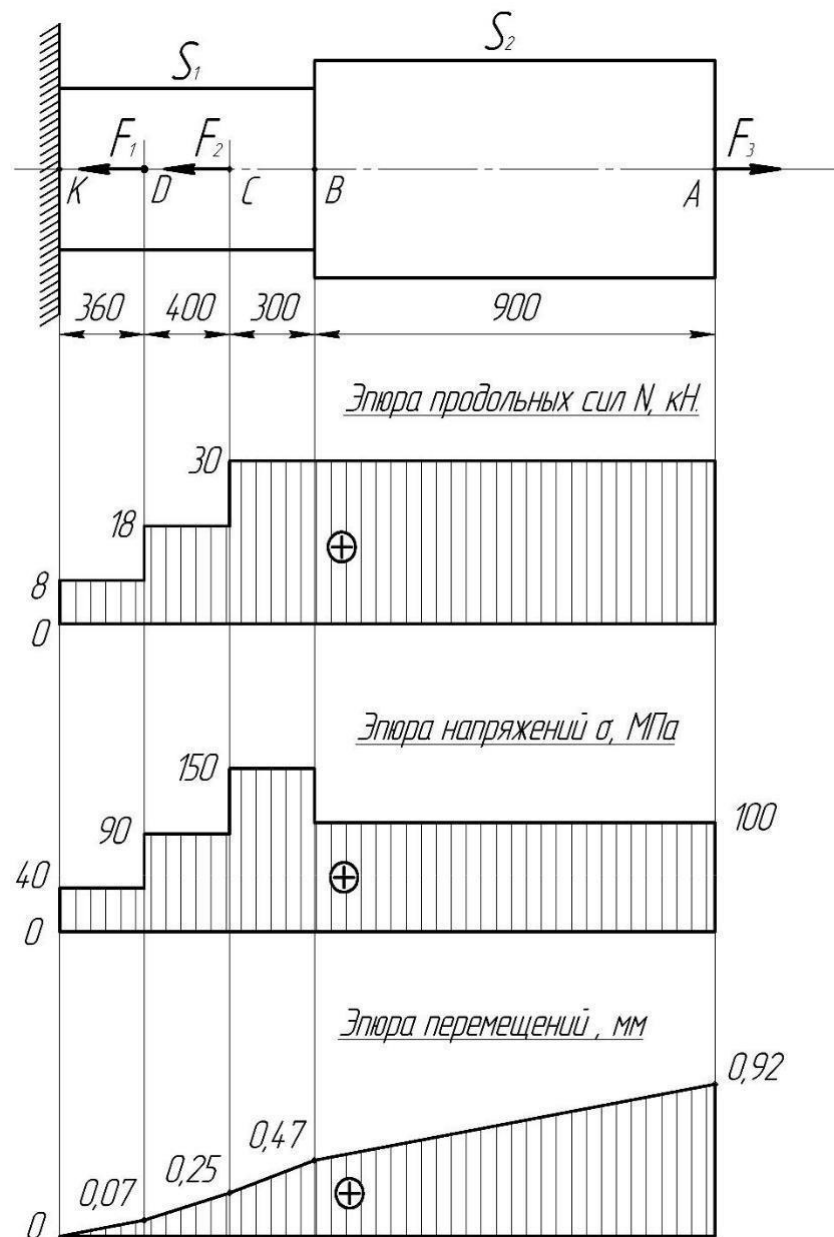


Рисунок 1.3

Вопросы и задания:

- 1) Какие твердые тела встречаются в природе?
Как определяются внутренние силовые факторы?
В чем заключается метод сечений?
Сформулируйте закон Гука.
- в Что такое истинная диаграмма растяжения?

Практическое занятие 5

Тема 2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.

Линии влияния в статически определимых балках,

Цель: научиться решать задачи на сдвиг и кручение

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при сдвиге и кручении.

Теоретическая часть:

Сдвигом называют такой вид напряженного состояния, когда на гранях элемента действуют только касательные напряжения. При этом на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения. Этот закон называется законом парности или взаимности касательных напряжений и имеет силу как для одноосного, так и для объемного напряженного состояний. Деформации, возникающие при сдвиге, называют угловыми деформациями или углом сдвига. Опыты показывают, что между напряжениями и деформациями при сдвиге существует линейная зависимость, аналогичная закону Гука при растяжении. Поэтому закон Гука при сдвиге имеет вид $\tau = \gamma G$, где γ - угловая деформация, а G - модуль сдвига.

Следует обратить внимание на то, что модуль продольной упругости, или модуль упругости первого рода E и модуль упругости при сдвиге, или модуль упругости второго рода G для одного и того же материала связан через коэффициент Пуассона μ зависимостью $G = E/[2(1 + \mu)]$. При расчетах на срез обычно принимают, что касательные напряжения распределены равномерно в поперечном сечении стержня и условие прочности на срез имеет вид $\tau = F/S \leq [\tau]$, где F – внешняя поперечная сила.

Допускаемые напряжения $[\tau]$ на сдвиг (срез) составляют некоторую часть от допускаемых напряжений на растяжение. Рассчитывают на срез соединения заклепочные, болтовые, сварные, шпоночные и некоторые другие типы соединений.

При проведении прочностных расчетов на сдвиг (срез) необходимо научиться правильно определять площади среза для односрезных и многосрезных заклепок, а также для углового сварного шва, в котором срез происходит по биссекторной плоскости прямого угла поперечного сечения шва.

Если в поперечном сечении стержня действует крутящий момент M_k , то стержень испытывает кручение. Необходимо, используя метод сечений, научиться строить эпюры крутящих моментов по длине стержня и определять возникающие касательные напряжения, которые определяются из соотношения $\tau = M_k / W_P$, где W_P - полярный момент сопротивления сечения кручению.

В поперечном сечении стержня касательные напряжения распределены неравномерно. Так, для стержня с круглым поперечным сечением касательные напряжения изменяются по линейному закону - от нуля на оси до максимального значения

1. поверхности. Так как сечения, расположенные у оси стержня, нагружены незначительно, то с целью экономии материала при кручении целесообразно использовать пустотелые профили. Крутящий момент в сечении скручиваемого стержня (вала) численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

Вопросы и задания:

1. Что такое сдвиг?
Что такое кручение?
3. Закон Гука при сдвиге .
4. Определение крутящего момента.

Практическое занятие 6

Тема 2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.

Нахождение усилий по линиям влияния.

Общие сведения,

Цель: научиться решать задачи на сдвиг и кручение

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при сдвиге и кручении.

Теоретическая часть:

Пример Решения Задачи На Тему «Кручение»

С стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное круглое сечение, приложены четыре внешних закручивающих момента (T_1 , T_2 , T_3 и T_4), левый конец вала жестко закреплен в опоре, а правый конец – свободен и его торец имеет угловые перемещения относительно левого конца.

Требуется:

1. построить эпюру крутящих моментов;
2. определить диаметры d_1 и d_2 вала из расчета на прочность, при заданном значении $[\tau]$, округлить величину найденных диаметров до ближайшего большего значения из ряда;
- 3) построить эпюру действительных напряжений кручения по длине вала;
- 4) построить эпюру абсолютных углов закручивания φ , приняв $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

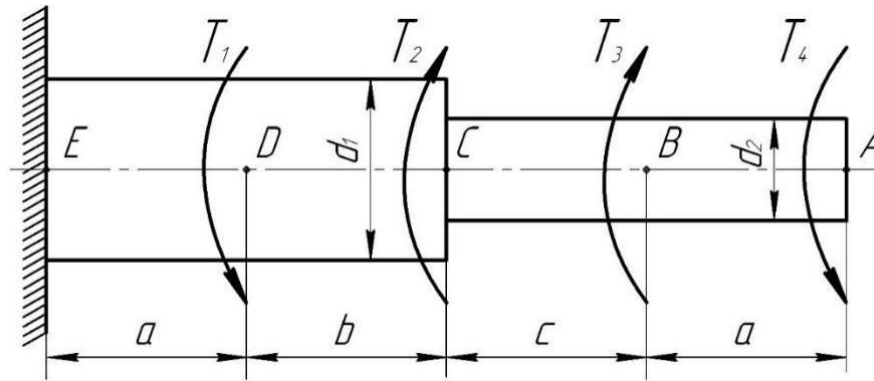


Рисунок 3.1

Исходные данные: $a = b = c = 1,6 \text{ м}$; $T_1 = 5,7 \text{ кНм}$; $T_2 = 2,7 \text{ кНм}$; $T_3 = 1,7 \text{ кНм}$;
 $T_4 = 0,7 \text{ кНм}$; $[\tau] = 45 \text{ МПа}$.

Решение:

1. Определим крутящие моменты (рис. 3.2):

Участок AB:

$$M_{\kappa 1} = T_4 = 0,7 \text{ кНм};$$

Участок BC:

$$M_{\kappa 2} = T_4 - T_3 = 0,7 - 1,7 = -1,0 \text{ кНм};$$

Участок CD:

$$M_{\kappa 3} = T_4 - T_3 - T_2 = 0,7 - 1,7 - 2,7 = -3,7 \text{ кНм};$$

Участок DE:

$$M_{\kappa 4} = T_4 - T_3 - T_2 + T_1 = 0,7 - 1,7 - 2,7 + 5,7 = 2 \text{ кНм}.$$

1. Определим значения диаметров ступеней из условия прочности на опасных участках BC и DC.

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa 3}}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{3,7 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 45}} = 74,4 \text{ мм},$$

Принимаем $d_1 = 80 \text{ мм}$.

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa 2}}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1,0 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 45}} = 48,1 \text{ мм},$$

Принимаем $d_2 = 50 \text{ мм}$.

2. Для построения эпюр напряжений найдем значения напряжений кручения, действующих на участках.

$$\tau_1 = \frac{M_{\kappa 1}}{W_{p1}} = \frac{0,7 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 50^3} = 28 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{M_{\kappa 2}}{W_{p1}} = \frac{-1,0 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 50^3} = -40 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{M_3}{W_4} = \frac{3,7 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 80^3} = -36,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_4 = \frac{M_{\kappa 4}}{W_{p2}} = \frac{2,0 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 80^3} = 19 \text{ МПа}.$$

4. Относительные угловые перемещения концов участков.

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{\kappa 1} \cdot l_{AB}}{G \cdot J_{p1}} = \frac{0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 50^4} = 0,0224 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{\kappa 2} \cdot l}{G \cdot J_{p1}} = \frac{-1,0 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 50^4} = -0,0320 \text{ рад},$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{\kappa 3} \cdot l}{G \cdot J_{p2}} = \frac{0,0181 \cdot 2,0 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 80^4} = -0,00181 \text{ рад},$$

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{\kappa 4} \cdot l}{G \cdot J_{p2}} = \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 80^4} = 0,0098 \text{ рад}.$$

Абсолютные углы закручивания, относительно жестко заделанного левого конца вала (сечение E).

$$\varphi_{CE} = \varphi_{DE} + \varphi_{CD} = 0,0098 - 0,0181 = -0,0083 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BE} = \varphi_{CE} + \varphi_{BC} = -0,0083 - 0,0320 = -0,0403 \text{ рад},$$

$$\varphi_{AE} = \varphi_{BE} + \varphi_{AB} = -0,0403 + 0,0224 = -0,0179 \text{ рад}.$$

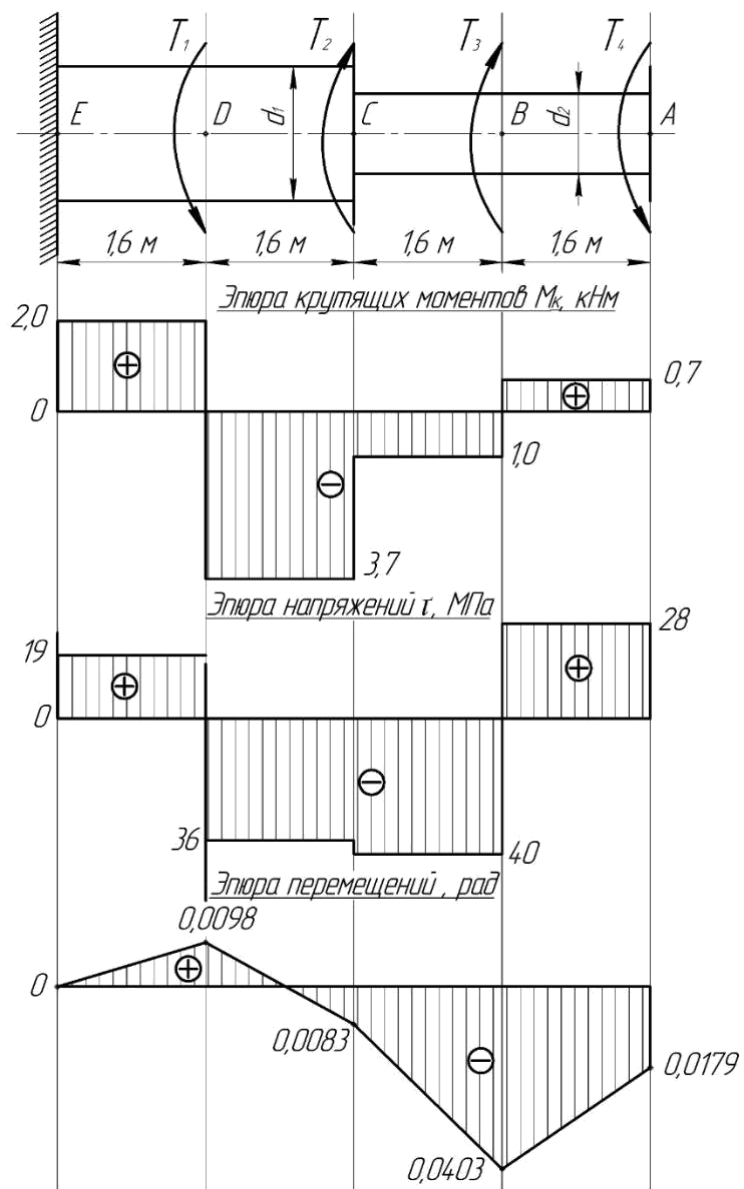


Рисунок 3.2

Вопросы и задания:

1. Что такое сдвиг?
2. Что такое кручение?
3. Закон Гука при сдвиге.
4. Определение крутящего момента.

Практическое занятие 7

Тема 3. Трехшарнирные арки и рамы.

Общие сведения,.

Цель: научиться определять геометрические характеристики поперечных сечений

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения Геометрических характеристик поперечного сечения.

Теоретическая часть:

При расчетах на прочность, жесткость и устойчивость используются геометрические характеристики поперечного сечения бруса: *площадь, осевые и полярный моменты инерции, осевые и полярный моменты сопротивления*. Кроме того, при их определении вспомогательную роль играют *статические моменты и центробежные моменты инерции сечения*.

Напомним определения, свойства и методы вычисления перечисленных характеристик (рис. 2.1).

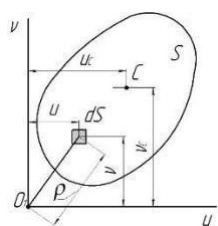


Рисунок 2.1

Площадь сечения . $S = \int_S dS$, где dS – площадь элементарной площадки.

Статический момент площади сечения – сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до данной оси, взятая по всей площади сечения. Статический момент сечения измеряется в единицах длины третьей степени (мм^3 , см^3 , м^3).

Статические моменты сечения относительно осей Ou и Ov :

$$S_u = \int_S v dS = S v_c ,$$

$$S_v = \int_S u dS = S u_c .$$

где u_c и v_c – расстояния от центра тяжести сечения соответственно до осей Ou и Ov .

Статический момент сечения может быть как положительным, так и отрицательным. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, он равен нулю.

Осевой момент инерции сечения – сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до данной оси, взятая по всей площади сечения.

$$J_u = \int_S v^2 dS ;$$

$$J_v = \int_S u^2 dS .$$

Полярный момент инерции – сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до точки (полюса), взятая по всей площади сечения.

$$J_p = \int_S \rho^2 dS .$$

Осевые и полярный моменты инерции – величины существенно положительные. Осевые и полярные моменты инерции сечения измеряются в единицах длины четвертой степени (мм^4 , см^4 , м^4).

Центробежный момент инерции – сумма произведений площадей элементарных площадок на их координаты, взятая по всей площади сечения.

$$J_{uv} = \int_S uv dS .$$

Центробежный момент инерции измеряется в единицах длины четвертой степени (мм^4 , см^4 , м^4), может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Через любую точку, взятую в плоскости сечения, можно провести две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю. Эти оси называются *главными осями* (иногда их называют *главными осями инерции*). Практический интерес представляют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, они называются *главными центральными осями* (для краткости в дальнейшем будем в большинстве случаев называть их просто *главными осями*).

Осевые моменты инерции относительно главных осей (*главные моменты инерции*) экстремальны – относительно одной из них момент инерции максимален, а относительно другой – минимален. Для расчетов на прочность и жесткость при изгибе, сочетании изгиба с растяжением и в ряде других случаев нужно знать положение главных центральных осей и величины соответствующих моментов инерции.

В случае, если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось и ось к ней перпендикулярная, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными центральными осями.

При вычислении главных моментов инерции сечений, составленных из простейших геометрических фигур или стандартных прокатных профилей, широко применяются формулы перехода от центральных к параллельным им нецентральных осям (рис. 2.2).

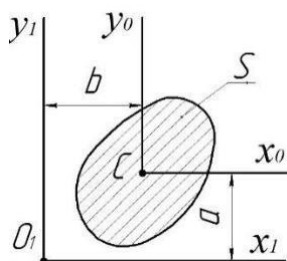


Рисунок 2.2

Эти формулы имеют следующий вид: для осевого момента инерции

$$J_{X_1} = J_{X_0} + a^2 S;$$

для центробежного момента инерции

$$J_{x_1, y_1} = J_{x_0, y_0} + abS.$$

Координаты a и b должны быть подставлены со своими знаками (a и b – координаты начала новой системы координат в старых осях). В частном случае, если исходные оси Ox_0 и Oy_0 главные, $J_{x_0, y_0} = 0$ тогда имеем:

$$J_{x_1, y_1} = abS.$$

Приведем формулы для вычисления моментов инерции прямоугольника, треугольника, круга и кольца.

А. Прямоугольник (рис. 2.3): $J_x = \frac{bh^3}{12}$, где b – сторона, параллельная оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

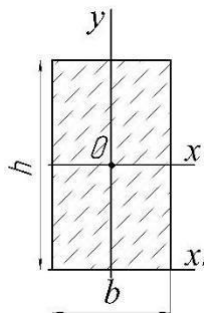


Рисунок 2.3

Для оси, совпадающей с одной из сторон прямоугольника (не главный момент инерции): $J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$.

Б. Равнобедренный треугольник (рис. 2.4).

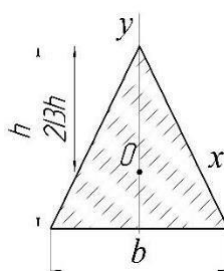


Рисунок 2.4

Главные моменты инерции: $J_x = \frac{bh^3}{36}$; $J_y = \frac{b^3 h}{48}$.

Заметим, что формула J_x дает величину момента инерции любого треугольника относительно оси, параллельной его основанию, но, если треугольник неравнобедренный, указанная ось не будет главной.

В. Круг (рис. 2.5):

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

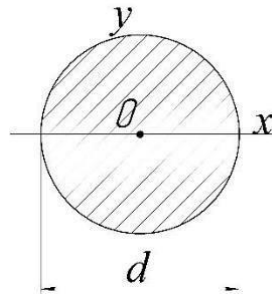


Рисунок 2.5

Г. Кольцо (рис. 2.6): $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4)$, где: $c = \frac{d_0}{d}$, коэффициент трубы.

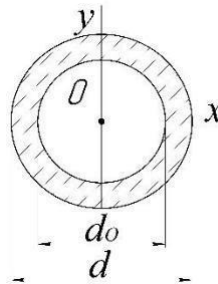


Рисунок 2.6.

Заметим, что для круга и кольца все центральные оси главные и моменты инерции относительно этих осей равны между собой. Этим же свойством обладает любое сечение, у которого два главных центральных момента инерции одинаковы.

При вычислении моментов инерции сложных сечений (составленных из простейших фигур или прокатных профилей) координаты их центра тяжести определяют по формулам:

$$u_c = \frac{S_y}{S} = \frac{\sum S_i u_i}{\sum S_i};$$

$$v_c = \frac{S_u}{S} = - \frac{\sum S_i v_i}{\sum S_i},$$

где: $S_i; u_i; v_i$ – соответственно площадь и координаты центра тяжести каждой из составляющих фигур; $S; S_y; S_u$ – площадь и статические моменты всего сечения.

Моменты инерции (осевые и центробежные) сложных сечений относительно данных осей определяют путем суммирования соответствующих моментов инерции составляющих фигур относительно тех же осей.

При этом используются формулы перехода от центральных к параллельным им нецентральному осям.

В тех случаях, когда сечение не имеет ни одной оси симметрии, сначала вычисляют моменты инерции относительно некоторых целесообразно выбранных центральных осей Ox_0 и Oy_0 (исходные оси), затем определяют угол наклона главных осей по отношению к исходным и величины главных моментов инерции.

Связь между моментами инерции относительно исходных осей (Ox_0, Oy_0) и осей, повернутых на произвольный угол α (рис. 2.7), имеет вид:

$$J_{x_1} = J_{x_0} + J_{y_0} + \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cos 2\alpha - J_{xy_0} \sin 2\alpha ;$$

$$J_{y_1} = J_{y_0} + \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{xy_0} \cos 2\alpha .$$

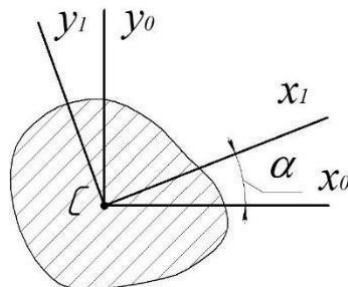


Рисунок 2.7

Угол поворота главных осей по отношению к исходным определяется из зависимости

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2J_{xy_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} .$$

Эта формула дает два значения угла α_0 : α'_0 и $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$. При $J_{x_0} > J_{y_0}$, угол α'_0 дает положение главной оси, относительно которой момент инерции максимален.

Положительный угол α_0 следует откладывать от оси x_0 против хода часовой стрелки.

Для определения положения (угла наклона) главных осей можно применять формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha_{0x} = \frac{2J_{xy_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{0y} = \frac{2J_{xy_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} ,$$

где: α_{0x} , и α_{0y} , – углы, образуемые главными осями x и y соответственно с осью x_0 ; J_{x_0} и J_{y_0} – главные моменты инерции.

Главные моменты инерции можно вычислить, подставляя в нее последовательно $\alpha_0 = \alpha'_0$ и $\alpha_0 = \alpha''_0$, но практически удобнее пользоваться формулами, не содержащими тригонометрических функций. Эти формулы имеют вид:

$$J_{\max} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{xy_0}^2} ;$$

$$J_{\min} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{xy_0}^2} .$$

Вопросы и задания:

1. Определение геометрических характеристик простых сечений?
2. Определение геометрических характеристик сложных сечений?
3. Определение моментов инерции.
4. Что такое сортамент.

Практическое занятие 8

Тема 3. Трехшарнирные арки и рамы.

Расчет трехшарнирных арок и рам

Цель: научиться решать задачи на прямой поперечный изгиб

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при изгибе.

Теоретическая часть:

При изгибе стержни подвергаются воздействию поперечной силы или изгибающего момента. Изгиб называется чистым, если действует только изгибающий момент, и поперечным, если действует нагрузка, перпендикулярная оси стержня. Брус (стержень), работающий на изгиб, обычно называют балкой. Балки являются наиболее часто встречающимися элементами сооружений и машин, воспринимающими нагрузки от других элементов конструкций и, передающими их тем частям, которые поддерживают балку (чаще всего опорам).

В строительных сооружениях и машиностроительных конструкциях чаще всего можно встретить следующие случаи крепления балок: консольные - с одним зашпеленным концом (с жесткой заделкой), двухопорные - с одной шарнирно-неподвижной опорой и с одной шарнирно-подвижной опорой и многоопорные балки. Если опорные реакции могут быть найдены из одних уравнений статики, то балки называют статически определенными. Если же число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики, то такие балки называют статически неопределимыми. Для определения реакций в таких балках приходится составлять дополнительные уравнения - уравнения перемещений. При плоском поперечном изгибе все внешние нагрузки перпендикулярны к оси балки.

Определение внутренних силовых факторов, действующих в поперечных сечениях балки, следует начинать с определения опорных реакций. После этого используем метод сечений, мысленно рассекаем, балку на две части и рассматриваем равновесие одной части. Взаимодействие частей балки заменяем внутренними факторами: изгибающим моментом и поперечной силой.

Поперечная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций всех сил, а изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от сечения. Знаки действующих сил и моментов следует определять в соответствии с принятыми правилами. Необходимо научиться правильно определять

равнодействующую силу и изгибающий момент от равномерно распределенной по длине балки нагрузки.

Следует иметь в виду, что при определении напряжений, возникающих при изгибе, принимают следующие допущения: сечения плоские до изгиба остаются плоскими и после изгиба (гипотеза плоских сечений); продольные соседние волокна не давят одно на другое; зависимость между напряжениями и деформациями линейная.

При изучении изгиба следует обратить внимание на неравномерность распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки. Нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения пропорционально расстоянию от нейтральной оси. Следует уметь определять напряжения изгиба, которые зависят от величины действующего изгибающего момента $M_{из}$ и момента сопротивления сечения при изгибе $W_{из}$ (осевой момент сопротивления сечения).

Условие прочности при изгибе: $\sigma = M_{из} / W_{из} \leq [\sigma]$. Значение $W_{из}$ зависит от размеров, формы и расположения поперечного сечения относительно оси.

Наличие поперечной силы, действующей на балку, связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях, а по закону парности касательных напряжений - и в продольных сечениях. Касательные напряжения определяют по формуле Д. И. Журавского.

Поперечная сила сдвигает рассматриваемое сечение относительно смежного. Изгибающий момент, складывающийся из элементарных нормальных усилий, возникающих в поперечном сечении балки, поворачивает сечение относительно смежного, чем и обусловлено искривление оси балки, т. е. ее изгиб.

Когда балка испытывает чистый изгиб, то по всей длине балки или на отдельном ее участке в каждом сечении действует изгибающий момент постоянной величины, а поперечная сила в любом сечении данного участка равна нулю. При этом в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения.

Для того чтобы глубже разобраться в физических явлениях изгиба и в методике решения задач при расчете на прочность и жесткость, необходимо хорошо усвоить геометрические характеристики плоских сечений, а именно: статические моменты сечений, моменты инерции сечений простейшей формы и сложных сечений, определение центра тяжести фигур, главные моменты инерции сечений и главные оси инерции, центробежный момент инерции, изменение моментов инерции при повороте осей, теоремы о переносе осей.

При изучении этого раздела следует научиться правильно строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, определять опасные сечения и действующие в них напряжения. Помимо определения напряжений следует научиться определять перемещения (прогибы балки) при изгибе. Для этого используется дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (упругой линии), записанное в общем виде.

Для определения прогибов проводится интегрирование уравнения упругой линии. При этом следует правильно определять постоянные интегрирования C и D исходя из условий опирания балки (граничных условий). Зная величины C и D , можно определить угол поворота и прогиб любого сечения балки. Изучение сложного сопротивления обычно начинают с косоугольного изгиба.

Явление косоугольного изгиба особенно опасно для сечений со значительно отличающимися друг от друга главными моментами инерции; балки с таким сечением хорошо работают на изгиб в плоскости наибольшей жесткости, но даже при небольших углах наклона плоскости внешних сил к плоскости наибольшей жесткости в балках возникают значительные дополнительные напряжения и деформации. Для балки круглого сечения косоугольный изгиб невозможен, так как все центральные оси такого сечения являются главными и нейтральный слой всегда будет перпендикулярен плоскости внешних сил. Косоугольный изгиб невозможен и для балки квадратного сечения.

При определении напряжений в случае внецентренного растяжения или сжатия необходимо знать положение главных центральных осей сечения; именно от этих осей отсчитывают расстояния точки приложения силы и точки, в которой определяют напряжения.

Приложенная эксцентрично сжимающая сила может вызвать в поперечном сечении стержня растягивающие напряжения. В связи с этим внецентренное сжатие является особенно опасным для стержней из хрупких материалов, которые слабо сопротивляются растягивающим усилиям.

В заключение следует изучить случай сложного сопротивления, когда тело испытывает одновременно несколько деформаций: например, изгиб совместно с кручением, растяжение-сжатие совместно с изгибом и т. д. При этом следует иметь в виду, что изгибающие моменты, действующие в различных плоскостях, могут складываться как векторы.

Пример решения задачи на тему «прямой поперечный изгиб»

Для заданной схемы балки (рис. 4.1) требуется написать выражения внутренних поперечных сил Q и изгибающих моментов M_u для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M_u , найти $M_u^{\max}$ и подобрать стальную двутавровую балку с указанием её номера. Допускаемое напряжение на изгиб принять $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$. Значения моментов сопротивления сечения при изгибе W_x для балок двутаврового сечения (ГОСТ 8239–89).

Исходные данные: $a = 3,2 \text{ м}, b = 4,4 \text{ м}, c = 2,4 \text{ м}, l = 13 \text{ м},$
 $M = 10 \text{ кНм}, F = 13 \text{ кН}, q = 16 \text{ кН/м}.$

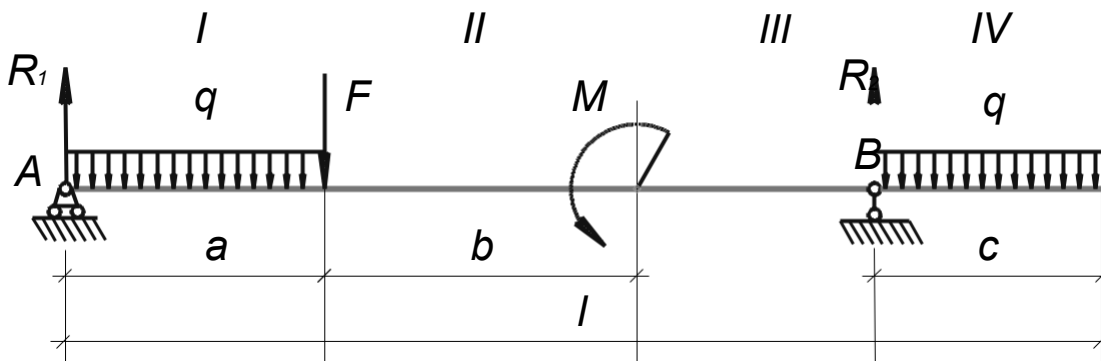


Рисунок 4.1

Решение:

1. Определим опорные реакции R_1 и R_2 :

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0, R_1 - q \cdot a - F + R_2 - q \cdot c = 0 ; \\ \sum m_A (F_i) &= 0; \\ R_2 &= \frac{0,5qa^2 + Fa - M + qc(l - 0,5c)}{l - c} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 3,2^2 + 13 \cdot 3,2 - 10 + 16 \cdot 2,4(13 - 0,5 \cdot 2,4)}{13 - 2,4} = 53,5 \text{ кН}. \\ R_1 &= qa + F - R_2 + qc = 16 \cdot (3,2 + 2,4) + 13 - 53,5 = 49,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка: $\sum m_B (F_i) = 0$,

$$-R_1(l-c) + qa(l-c-0,5a) + F(l-c-a) + M - 0,5qc^2 =$$

$$= -49,1(13-2,4) + 16 \cdot 3,2(13-2,4-0,5 \cdot 3,2) + 16(13-2,4-3,2) + 10 - 0,5 \cdot 16 \cdot 2,4^2 = 0$$

Опорные реакции найдены верно.

2. Найдем значения изгибающих моментов M_u и поперечных сил Q на концах участков нагружения методом сечения.

I Участок (рис. 4.2): $0 \leq z_1 \leq a$,

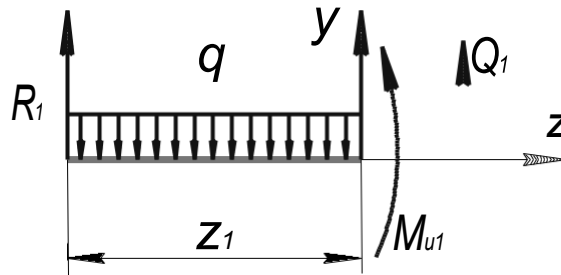


Рисунок 4.2

$$Q_1 = R_1 - qz_1,$$

$$M_{u1} = R_1 z_1 - 0,5qz_1^2,$$

при $z_1 = 0$, $Q_1 = R_1 = 49,1 \text{ кН}$; $M_{u1} = 0$

при $z_1 = a = 3,2 \text{ м}$, $Q_1 = R_1 - qa = 49,1 - 16 \cdot 3,2 = -2,1 \text{ кН}$;

$M_{u1} = R_1 \cdot a - 0,5qa^2 = 49,1 \cdot 3,2 - 0,5 \cdot 16 \cdot 3,2^2 = 75,2 \text{ кНм}$.

II Участок (рис. 4.3): $0 \leq z_2 \leq a + b$,

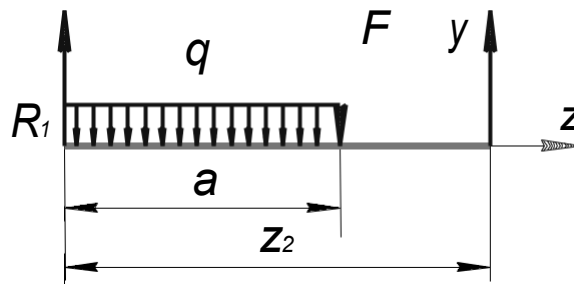


Рисунок 4.3

$Q_2 = R_1 - qa - F = 49,1 - 16 \cdot 3,2 - 13 = -15,1 \text{ кН}$;

$M_{u2} = R_1 \cdot z_2 - qa(z_2 - 0,5a) - F(z_2 - a)$

при $z_2 = 3,2 \text{ м}$,

$M_{u2} = R_1 \cdot a - qa(a - 0,5a) - F(a - a) = 49,1 \cdot 3,2 - 16 \cdot 3,2(3,2 - 0,5 \cdot 3,2) = 75,2$

кНм,

при $z_2 = 7,6 \text{ м}$,

$M_{u2} = 49,1 \cdot 7,6 - 16 \cdot 3,2(7,6 - 0,5 \cdot 3,2) - 13(7,6 - 3,2) = 8,76 \text{ кНм}$.

IV Участок (рис. 4.4): $0 \leq z_4 \leq c$

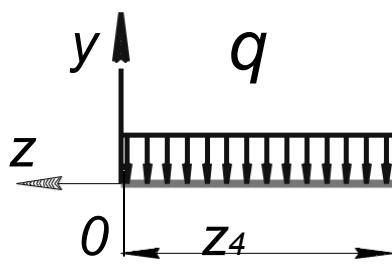


Рисунок 4.4

$$Q_4 = qz_4,$$

$$M_{u4} = -0,5qz_4^2,$$

при $z_4 = 0$, $Q_4 = 0$, $M_{u4} = 0$,

при $z_4 = 2,4$ м, $Q_4 = 16 \cdot 2,4 = 38,4$ кН;

$$M_{u4} = -0,5 \cdot 16 \cdot 2,4^2 = -46,08 \text{ кНм}.$$

III Участок (рис. 4.5) : $c \leq z_3 \leq l - a - b$ ($2,4 \leq z_3 \leq 5,4$)

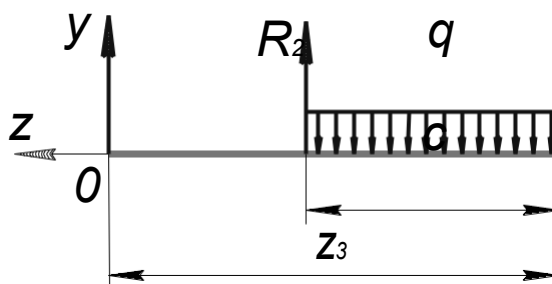


Рисунок 4.5

$$Q_3 = qc - R = 16 \cdot 2,4 - 53,5 = -15,1 \text{ кН},$$

$$M_{u3} = -qc(z_3 - 0,5c) + R_2(z_3 - c).$$

при $z_3 = 2,4$, $M_{u3} = -16 \cdot 2,4(2,4 - 0,5 \cdot 2,4) + 53,5 \cdot 0 = -46,08 \text{ кНм}.$

при $z_3 = 5,4$ м, $M_{u3} = -16 \cdot 2,4(5,4 - 0,5 \cdot 2,4) + 53,5(5,4 - 2,4) = -0,78 \text{ кНм}.$

Определим координату сечения $z_1^{\max}$, при которой $Q = 0$ и $M_{u1} = \max$.

$$R_1 - qz_1^{\max} = 0$$

$$z_1^{\max} = \frac{R_1}{q_1} = \frac{49,1}{16} = 3,07 \text{ м}.$$

$$M_{u1}^{\max} = R_1 \cdot z_1^{\max} - 0,5q(z_1^{\max})^2 = 49,1 \cdot 3,07 - 0,5 \cdot 16 \cdot 3,07^2 = 75,3 \text{ кНм}.$$

Из построенных эпюр (рис. 4.6) видно, что опасным является сечение, расположенное на 3,07 м от левого конца балки с $M_{u1}^{\max} = 75,3 \text{ кНм}.$

Определим минимально необходимый момент сопротивления сечения балки при изгибе $W_x^{\min}$, из условия прочности по нормальным напряжениям.

$$W_{x \min} = \frac{M_{u1}^{\max}}{[\sigma]} = \frac{75,3 \cdot 10^6}{150} = 502252 \text{ мм}^3.$$

Назначаем двутавр №33 (ГОСТ 8239-89) с осевым моментом сопротивления сечения $W_x = 597 \text{ см}^3.$

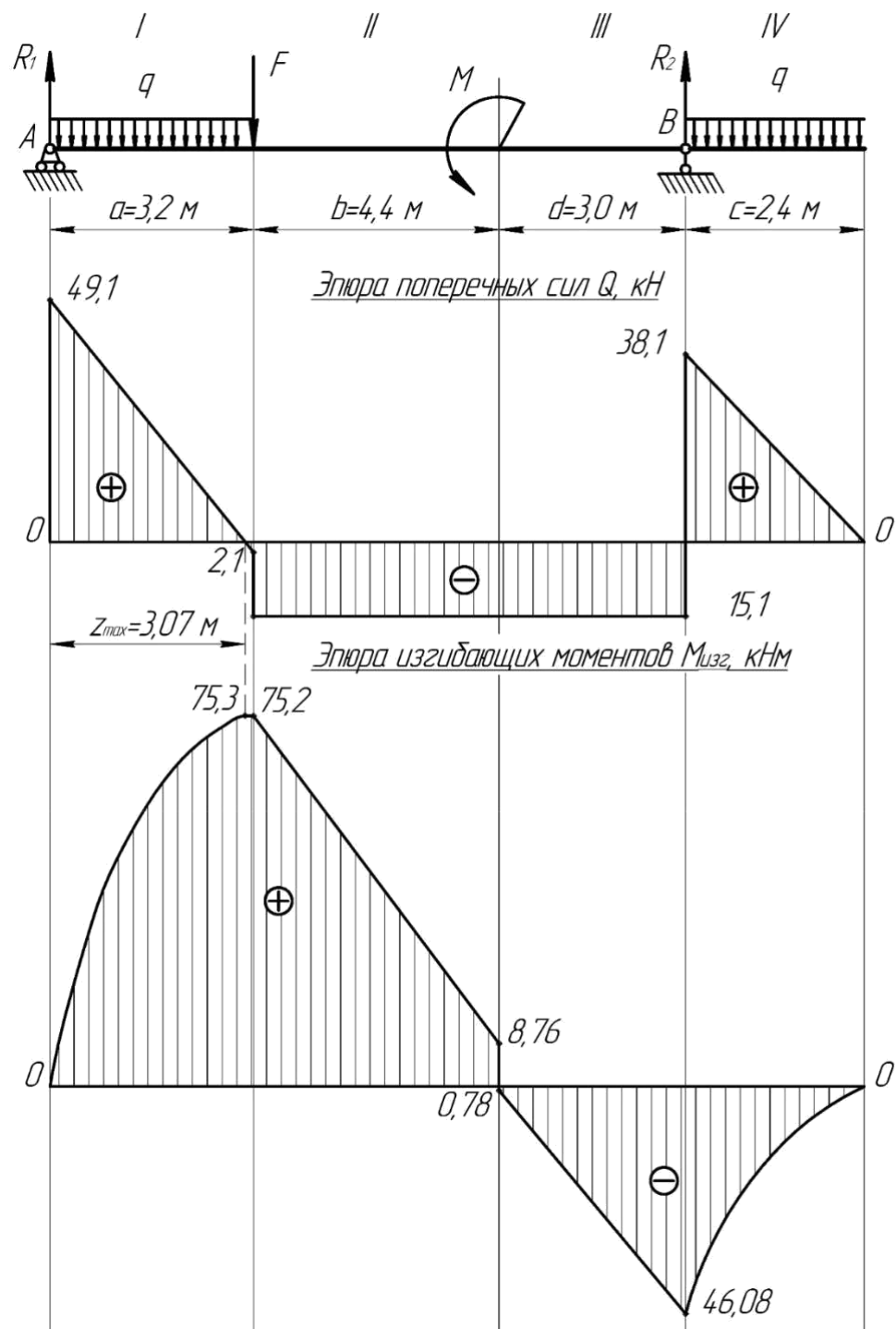


Рисунок 4.6

Вопросы и задания:

1. Что такое изгиб?
2. Построение эюр при изгибе.
3. Внутренние силовые факторы .
4. Определение изгибающего момента.

Практическое занятие 9

Тема 3. Трехшарнирные арки и рамы.

Расчет трехшарнирных арок на подвижную нагрузку,

Цель: научиться решать задачи на изгиб с кручением

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при изгибе с кручением.

Теоретическая часть:

Для решения задач необходимо усвоить тему «Гипотезы прочности и их применение», так как в них рассматривается совместное действие изгиба и кручения и расчет производится с применением гипотез прочности.

Условие прочности в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где: $M_{\text{экв}}$ - так называемый эквивалентный момент.

При гипотезе наибольших касательных напряжений (иначе - третья гипотеза):

$$M_{\text{эквIII}} = \sqrt{M_u^2 + M_k^2}.$$

При гипотезе потенциальной энергии формоизменения (иначе - пятая гипотеза):

$$M_{\text{эквV}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_k^2}.$$

В обеих формулах M_k и M_u - соответственно крутящий и суммарный изгибающий моменты в рассматриваемом сечении вала. Числовое значение суммарного изгибающего момента равно геометрической сумме изгибающих моментов, возникающих в данном сечении от вертикально и горизонтально действующих внешних сил, т.е.:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Последовательность решения задачи:

1. Привести действующие на вал нагрузки к его оси, освободить вал от опор, заменив их действие реакциями в вертикальной и горизонтальной плоскостях.
2. По заданной мощности P и угловой скорости ω определить вращающие моменты, действующие на вал.
3. Вычислить нагрузки F_l, F_{rl}, F_2, F_{r2} , приложенные к валу.

4. Составить уравнения равновесия всех сил, действующих на вал, отдельно в вертикальной плоскости и отдельно в горизонтальной плоскости и определить реакции опор в обеих плоскостях
5. Построить эпюру крутящих моментов,
6. Построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях (эпюры M_x и M_y).
7. Определить наибольшее значение эквивалентного момента:

$$M_{\text{эквIII}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

или

$$M_{\text{эквV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}$$

8. Считая, что $\sigma_{\text{экв}} = [\sigma]$, определить требуемый осевой момент сопротивления:

$$W_x = \frac{M_{\text{экв}}}{[\sigma]}.$$

Учитывая, что для сплошного круглого сечения:

$$W_u = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3,$$

определяем d по следующей формуле:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{экв}}}{\pi [\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1 [\sigma]}}.$$

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ НА ТЕМУ «ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ»

Для стального вала постоянного поперечного сечения с двумя зубчатыми колесами (рис. 5.1, а), передающего мощность $P = 15 \text{ кВт}$ при угловой скорости $\omega = 30 \text{ рад/с}$, определить диаметр вала по двум вариантам: а) используя третью гипотезу прочности; б) используя пятую гипотезу прочности. Принять: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $F_{r1} = 0,4 F_1$; $F_{r2} = 0,4 F_2$.

Решение:

1. Составляем расчетную схему вала, приводя действующие на вал нагрузки к оси (рис. 5.1, б). При равномерном вращении вала $M_1 = M_2$, где M_1 и M_2 - скручивающие пары, которые добавляются при переносе сил F_1 и F_2 на ось вала.

2. Определяем вращающий момент, действующий на вал:

$$M_1 = M_2 = \frac{P}{\omega} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Вычислим нагрузки, приложенные к валу:

$$F_1 = \frac{2M_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{0,1} = 10^4 \text{ Н} = 10 \text{ кН}; \quad F_{r1} = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2M_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{0,1} = 4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 4 \text{ кН}; \quad F_{r2} = 0,4 \cdot 4 = 1,6 \text{ кН}.$$

4. Определяем реакции опор в вертикальной плоскости (рис. 5.1, б):

$$\sum M_A = F_{r1} \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_B \cdot AB = 0 ;$$

$$R_{B_y} = \frac{F_{r1} \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{4 \cdot 0,05 + 1,6 \cdot 0,25}{0,3} = 2 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_B = R_{A_y} \cdot AB - F_{r1} \cdot BC - F_{r2} \cdot DB = 0 ;$$

$$R_{A_y} = \frac{F_{r1} \cdot BC + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{4 \cdot 0,25 + 1,6 \cdot 0,05}{0,3} = 3,6 \text{ кН} ;$$

$$\sum Y = R_{A_y} - F_{r1} - F_{r2} + R_{B_y} = 2 - 4 - 1,6 + 3,6 = 0 .$$

$\sum Y = 0$, следовательно, R_{A_y} , и R_{B_y} найдены правильно.

Определяем реакции опор в горизонтальной плоскости (рис. 5.1, б):

$$\sum M_A = \frac{F_1 \cdot AC - F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{10 \cdot 0,05 - 4 \cdot 0,25}{0,3} = -1,66 \text{ кН} .$$

Знак минус указывает, на то, что истинное направление реакции противоположно выбранному:

$$\sum M_B = R_{A_x} \cdot AB - F_1 \cdot CB + F_2 \cdot DB = 0$$

$\sum X = 0$, следовательно, R_{A_x} и R_{B_x} найдены верно.

5. Строим эпюру крутящих моментов M_z (рис. 5.1, в).

6. Определяем в характерных сечениях значения изгибающих моментов M_x в вертикальной плоскости и M_y в горизонтальной плоскости и строим эпюры (рис. 5.1, г, д):

$$M_{C_x} = R_{A_y} \cdot AC = 3,6 \cdot 0,05 = 0,18 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_{D_x} = R_{A_y} \cdot AD - F_{r1} \cdot CD = 3,6 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_{C_y} = R_{A_x} \cdot AC = 7,66 \cdot 0,05 = 0,383 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_{D_y} = R_{A_x} \cdot AD - F_1 \cdot CD = 7,66 \cdot 0,25 - 10 \cdot 0,2 = -0,085 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

7. Вычисляем наибольшее значение эквивалентного момента по заданным гипотезам прочности. Так как в данном примере значение суммарного изгибающего момента в сечении С больше, чем в сечении D,

$$M_{uC} = \sqrt{M_{C_x}^2 + M_{C_y}^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,383^2} = 0,423 \text{ кН} \cdot \text{м} ;$$

$$M_{uD} = \sqrt{M_{D_x}^2 + M_{D_y}^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,085^2} = 0,13 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

то сечение С и является опасным. Определяем эквивалентный момент в сечении С.

Вариант а):

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,383^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,429} = 0,655 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Вариант б):

$$M_{\text{экв V}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 M_z^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,383^2 + 0,75 \cdot 0,5^2} = \sqrt{0,366} = 0,605 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

8. Определяем требуемые размеры вала по вариантам а и б. По варианту а

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0,655 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 160}} = 34,5 \text{ мм}.$$

По варианту б

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0,605 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 160}} = 33,6 \text{ мм}$$

Принимаем $d_{\text{вала}} = 34 \text{ мм}.$

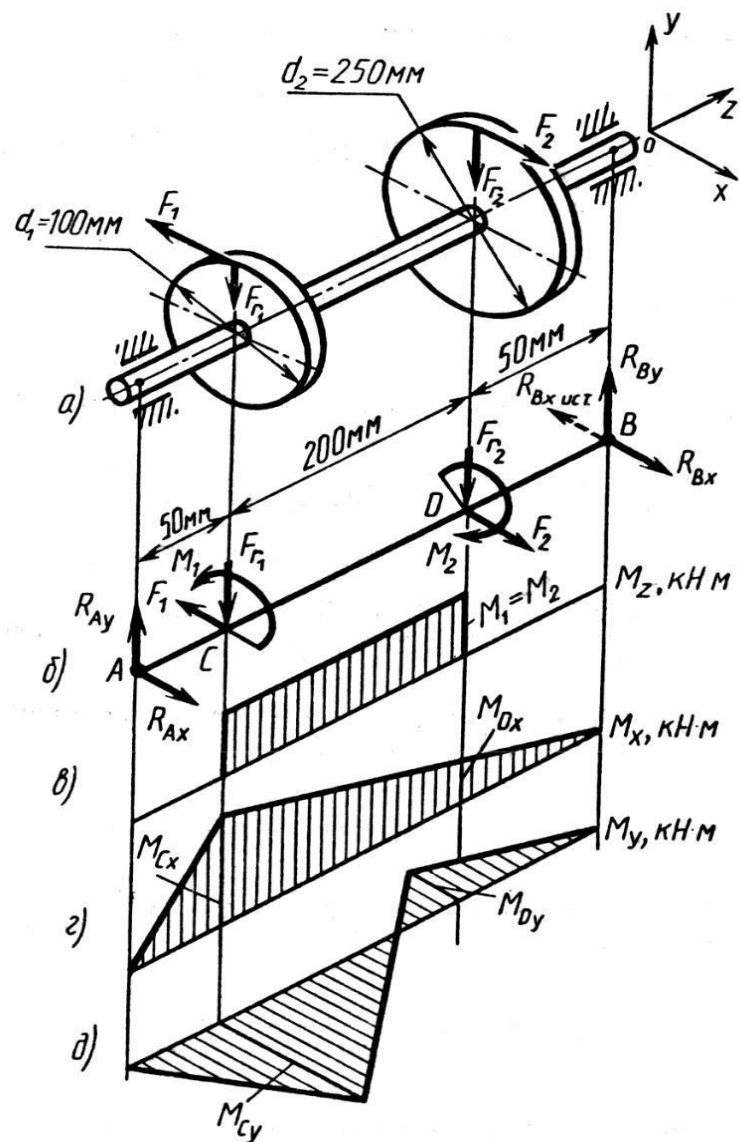


Рисунок 5.1

Вопросы и задания:

1. Что такое изгиб с кручением?
2. Построение эпюр при изгибе с кручением.
3. Внутренние силовые факторы .
4. Определение изгибающего момента при изгибе с кручением.

Практическое занятие 10

Тема 4. Плоские статически определимые фермы.

Классификация ферм, Аналитические методы расчета ферм.

Цель: дать студенту понятие о центре параллельных сил.

Знать: условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

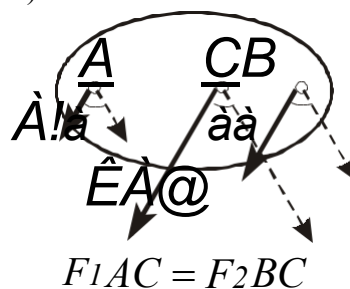
Уметь: приводить систему сил к простейшему

виду; составлять и решать уравнения равновесия;

Актуальность темы объясняется нахождением центра параллельных сил, тем самым упрощается расчетная схема.

Теоретическая часть:

Система двух параллельных и одинаково направленных сил $A!$ и $A@$ имеют равнодействующую $K=A!+A@$, линия действия которой проходит через точку C , определяемую соотношением (1.5):



Очевидно, что если повернуть силы $A!$ и $A@$ на один и тот же угол α в одну и ту же сторону, то на этот же угол повернется и их равнодействующая, причем ее линия действия будет проходить через ту же точку C , так как в определяющее положение точки C выражение (1.5) входят только модули сил F_1 и F_2 .

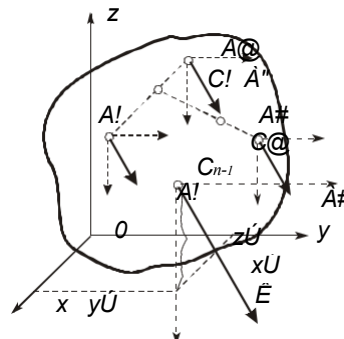


Рис. 1.37 Определение положения центра параллельных сил

Рассмотрим теперь систему параллельных и одинаково направленных сил ($A!$, $A@$, $A\#$, ..., $A\%$), приложенных в точках $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ твердого тела (рис.1.34). Эта система сил имеет равнодействующую $K=CA\$,$ а ее линия действия проходит через точку C_{n-1} , положение которой найдем, определяя последовательно положения точек $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ с помощью выражений

$$\left(\sum_{m=1}^k F_m \right) \cdot A_k C_k = F_{k+1} \cdot A_{k+1} C_k, \text{ записанных для } k=1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (1.18)$$

Так как в равенства (1.18) входят только модули рассматриваемых сил, положение точки C_{n-1} относительно точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ не изменится при любых одинаковых изменениях ориентации сил системы.

Определение: точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил на один и тот же угол в одну и ту же сторону, называется центром параллельных сил.

Найдем координаты этого центра в произвольной декартовой системе координат. Воспользуемся тем, что его положение не зависит от направления сил и направим все силы системы параллельно оси z (рис.1.34). Тогда по теореме Вариньона

$$M_y(R) = \sum M_y(F_k) \quad M_y(R) = R x_{c_{n-1}} \sum F_k x$$

. Учитывая, что

$$\sum M_y(F_k) = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n, \text{ получаем } x_{c_{n-1}} = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}$$

Применяя теорему Вариньона относительно оси x и относительно оси z (в последнем случае направив все силы параллельно оси y) получаем аналогичные формулы для

$y_{c_{n-1}}$ и $z_{c_{n-1}}$:

$$x_{c_{n-1}} = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}, \quad y_{c_{n-1}} = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}, \quad z_{c_{n-1}} = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k} \quad (1.19)$$

Полученные формулы используем для определения положения центров тяжести тел, находящихся в однородном гравитационном поле земного тяготения. Действительно, силы тяжести отдельных частиц тела, размеры которого малы по сравнению с радиусом Земли, образуют систему параллельных сил, аналогичную рассмотренной выше. Назовем равнодействующую сил тяжести отдельных частиц тела весом этого тела и будем обозначать его буквой P . Центром тяжести будем называть центр параллельных сил

тяжести отдельных частиц тела и обозначать его буквой P . В новых обозначениях формулы (1.19) переписутся в виде:

$$x_P = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \quad y_P = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \quad z_P = \frac{\sum p_k z_k}{P} \quad (1.20)$$

Для однородных тел вес p_k отдельных частиц тела пропорционален объемам этих частиц: $p_k = \gamma v_k$, а вес тела пропорционален объему тела $P = \gamma V$ (γ - вес единицы объема).

Подставляя данные выражения в (1.20), после сокращения на γ , получаем формулы для определения центра тяжести объема:

$$x_P = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \quad y_P = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \quad z_P = \frac{\sum v_k z_k}{V} \quad (1.21)$$

Для однородных плоских пластин и изделий из однородных линейных элементов (например из однородной проволоки постоянного сечения), вводя вес единицы площади и вес единицы длины, аналогичным образом получаем формулы для определения центра тяжести площади и центра тяжести линии:

$$x_P = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \quad y_P = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \quad z_P = \frac{\sum s_k z_k}{S},$$

(1.22)

где S - площадь всей пластины, s_k - площади ее частей.

$$x_P = \frac{\sum l_k x_k}{L}, y_P = \frac{\sum l_k y_k}{L}, z_P = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \quad (1.23)$$

где L - длина всей линии, l_k - длина ее частей.

Вопросы и задания:

1. Определение центра параллельных сил.
2. Определение координат центра параллельных сил.
3. Определение центра параллельных сил с помощью теоремы Вариньона..

Практическое занятие 11

Тема 4. Плоские статически определимые фермы.

Метод двух или нескольких сечений

Цель: дать студенту понятия о коэффициенте трения и его определении.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки;

общие теоремы динамики

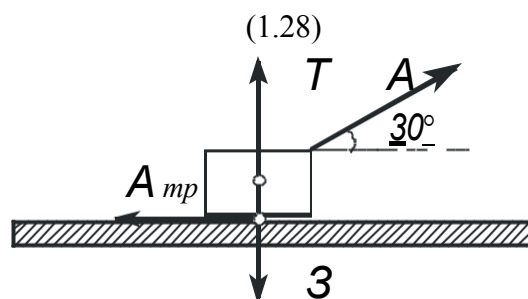
Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением коэффициента трения различных материалов и сплавов.

Теоретическая часть:

Сила трения скольжения. Как показывает опыт, при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения этих тел возникает сила трения, которая может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения, определяемого законом Кулона $F_{тр} = fN$, где f - безразмерный коэффициент трения скольжения, N - нормальная реакция. Коэффициент трения скольжения определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния их поверхностей (характер обработки, смазки, температуры и т.п.). Опыты показывают, что сила трения скольжения в широких пределах не зависит от размеров трущихся поверхностей тел. Так для того, чтобы сдвинуть обычный кирпич, нужно приложить одинаковую силу независимо от того лежит ли он плашмя или на ребре. При решении задач с учетом сил трения скольжения необходимо четко различать обычное и предельное равновесие тела. В первом случае величина силы трения неизвестна и должна определяться из решения соответствующих уравнений равновесия. Если же в задаче речь идет о предельном равновесии, то сила трения определяется законом Кулона:

$$F_{тр} = fN$$



Простейший пример: пусть на тело, находящееся в равновесии на горизонтальной шероховатой поверхности, действует сила $F=10$ Н. Определить, чему равна сила трения скольжения.

Решение: в данном случае тело заведомо находится в равновесии и сила трения определится из уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = F \cos \alpha - F_{тр} = 0, \quad \text{откуда} \quad F_{тр} = F \cos 30^\circ = 8,66 \text{ Н.}$$

Изменим теперь условие задачи: определим минимальную силу F , способную сдвинуть тело с места, если его вес P равен 10 Н, а коэффициент трения скольжения $f=0,1$.

Решение: так как речь идет о предельном состоянии равновесия,

$$F_{\text{тр}} = fN, \quad N = P, \quad F_{\text{тр}} = fP = 1H, \quad \sum F_{\text{кx}} = F \cos 30^\circ - Pf = 0, \\ F = fP / \cos 30^\circ = 1,15H.$$

Как известно полную реакцию шероховатой поверхности принято представлять суммой двух составляющих: нормальной реакции T и силы трения $A_{\text{тр}}$ (рис. 1. 38)

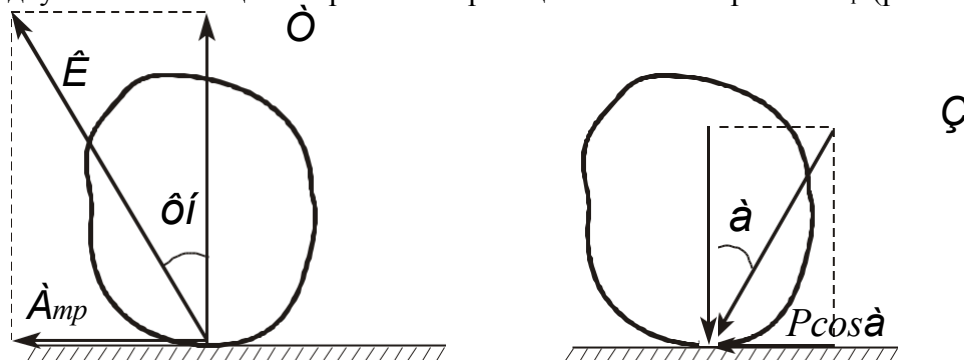
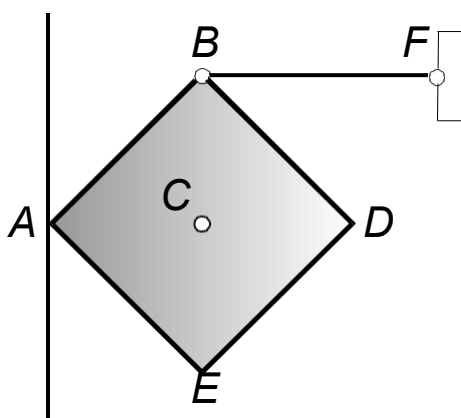


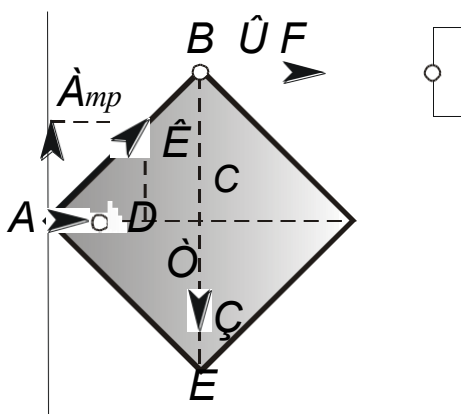
Рис. 1.38. Реакция шероховатой поверхности

Следовательно, полная реакция K будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до ее предельного значения, сила K изменяется от T до своего максимального значения, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения ϕ_n , называемого углом трения. Из рисунка видно, что $\tan \phi_n = F_{\text{тр}} / N$, тогда с учетом того, что $F_{\text{тр}} = fN$, получаем $\tan \phi_n = f$.

Если к телу приложить силу Z под углом α к нормали (рис.1.34), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P \cos \alpha$ будет больше $F_{\text{тр}} = fN$. Это означает, что никакой силой, образующей с нормалью угол $\alpha < \phi_n$, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя.



Пример 1. Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения f в месте контакта однородной квадратной пластины весом P с вертикальной стенкой, если пластина в заданном положении находится в равновесии. Весом стержня BF пренебречь.



Решение. Так как линия действия полной реакции K вертикальной стенки при равновесии пластины должна пройти через точку B (на основании теоремы о трех силах), то $F_{тр} = N$ или, поскольку речь в условии задачи идет о предельном равновесии, $F_{тр} = fN$, $fN = N$, $f = 1$. Тот же результат можно получить и из уравнения равновесия пластины:

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = N \cdot BC - F_{тр} \cdot AC = 0, F_{тр} = N, fN = N, f = 1.$$

Вопросы и задания:

1. Что называют трением?
2. Что называют трением скольжения?
3. Что такое трение качения?
4. Определение коэффициента трения.

Практическое занятие 12

Тема 4. Плоские статически определимые фермы.

Метод замкнутых сечений, Метод замены стержней.

Цель: дать студенту знания в области сопротивления при качении.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением сопротивления при качении возникающих при взаимодействии деформации тел.

Теоретическая часть:

Трение качение. Трением качения называют сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Причины возникновения этого сопротивления невозможно объяснить без учета деформаций тел, возникающих при их взаимодействии. Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиусом R весом Q , лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, которая под тяжестью катка слегка деформировалась, так что касание катка с поверхностью теперь происходит не в одной точке, а по некоторой площадке AB (рис.1.39). Под действием силы Y , приложенной к центру катка, давление у края A убывает и возрастает у края B . В результате нормальная реакция T

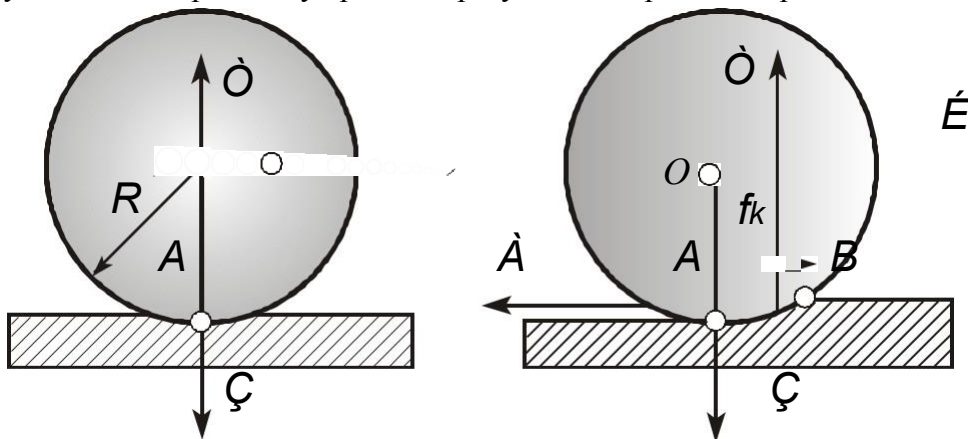


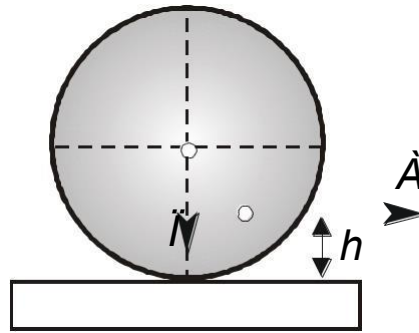
Рис.1.39 Момент сопротивления при качении

являющаяся равнодействующей распределенных на площадке AB сил, смещается в сторону действия силы Y . С увеличением Q до некоторого предельного значения Q_{np} это смещение растет до некоторой предельной величины f_k . В этот момент на каток будут действовать две уравновешивающие друг друга пары сил (Y_{np} , $A_{тр}$) и (T , Q) с моментами $M_{вр} = Q_{np}R$ и $M_{т} = Nf_k$ соответственно. Пока $Q < Q_{np}$ каток будет находиться в покое, при $Q > Q_{np}$ начнется качение. Входящая в формулу $M_c = Nf_k$ (1.29)

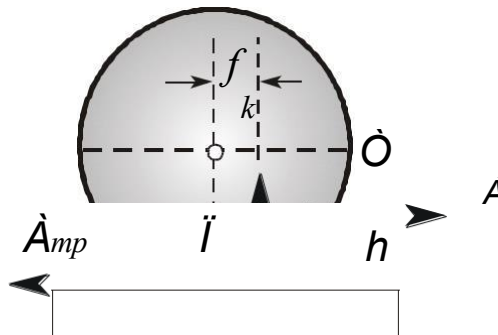
линейная величина f_k называется коэффициентом трения качения. Для большинства материалов, входящее в выражение для предельного значения Q :

$$Q_{np} = (f_k/R)N \quad (1.30)$$

отношение f_k/R значительно меньше коэффициента трения скольжения f из формулы (1.28). Этим объясняется то, что в технике, везде где это возможно, стремятся заменить скольжение качением.



Пример. На какой высоте h и какую горизонтальную силу F нужно приложить, чтобы каток, сила тяжести которого $G=1000$ Н, равномерно скользи по горизонтальной плоскости без качения. Коэффициент трения качения $f_k = 0,01$ м, коэффициент трения скольжения $f = 0,1$.



Решение. Для того чтобы каток двигался равномерно вправо, сила F должна быть равна максимальному значению силы трения скольжения:

$F = F_{тр} = fN = 100$ Н. Каток не будет вращаться, если момент, создаваемый парой сил ($A, A_{тр}$) не будет превышать максимального значения момента сопротивления $M_c = f_k N = kG = 10$ Нм, т.е. максимальное значение $h = M_c/F = 0,1$ м.

Вопросы и задания:

1. Что называют качением?
2. Причины возникновения качения?
3. Почему в технике, везде где это возможно, стремятся заменить скольжение качением?

Практическое занятие 13

Тема 5. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм.

Понятие грузового пояса,.

Цель: научиться определять ядро сечения при внецентренном сжатии.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы заключается в применении знаний в области кинематики на практике.

Теоретическая часть:

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы P слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

Пока точка A располагается внутри ядра, нейтральная ось не пересекает контура сечения, все оно лежит по одну сторону от нейтральной оси и, стало быть, работает лишь на сжатие. При удалении точки A от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру; граница ядра определится тем, что при расположении точки A на этой границе нейтральная ось подойдет вплотную к сечению, коснется его.

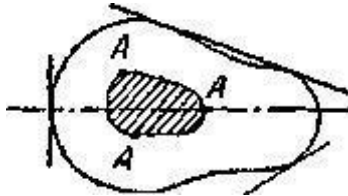


Рис.1. Комбинации положения сжимающей силы и нейтральной линии

Таким образом, если мы будем перемещать точку A так, чтобы нейтральная ось катилась по контуру сечения, не пересекая его, то точка A обойдет по границе ядра сечения. Если контур сечения имеет «впадины», то нейтральная ось будет катиться по огибающей контура.

Чтобы получить очертание ядра, необходимо дать нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру сечения, определить для этих положений отрезки α_y и α_z и вычислить координаты y_P и z_P точки приложения силы по формулам, вытекающим из известных зависимостей:

$$y_P = -\frac{i_x^2}{a_y}; \quad z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}$$

это и будут координаты точек контура ядра $y_{\text{я}}$ и $z_{\text{я}}$.

При многоугольной форме контура сечения (Рис.2), совмещая последовательно нейтральную ось с каждой из сторон многоугольника, мы по отрезкам a_y и a_z определим координаты $y_{\text{я}}$ и $z_{\text{я}}$ точек границы ядра, соответствующих этим сторонам.

При переходе от одной стороны контура сечения к другой нейтральная ось будет вращаться вокруг вершины, разделяющей эти стороны; точка приложения силы будет перемещаться по границе ядра между полученными уже точками. Установим, как должна перемещаться сила Р, чтобы нейтральная ось проходила все время через одну и ту же точку В (y_B, z_B) — вращалась бы около нее. Подставляя координаты этой точки нейтральной оси в известное уравнение нейтральной оси (линии), получим:

$$1 + \frac{y_P y_B}{i_x^2} + \frac{z_P z_B}{i_y^2} = 0$$

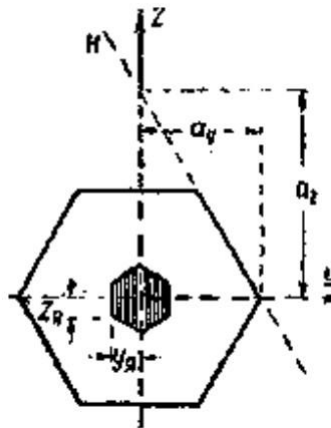


Рис.2. Ядро сечения для многоугольной формы поперечного сечения

Таким образом координаты y_P и z_P точки А приложения силы Р связаны линейно. При вращении нейтральной оси около постоянной точки В точка А приложения силы движется по прямой. Обратно, перемещение силы Р по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки.

На Рис.3 изображены три положения точки приложения силы на этой прямой и соответственно три положения нейтральной оси. Таким образом, при многоугольной форме контура сечения очертание ядра между точками, соответствующими сторонам многоугольника, будет состоять из отрезков прямых линий.

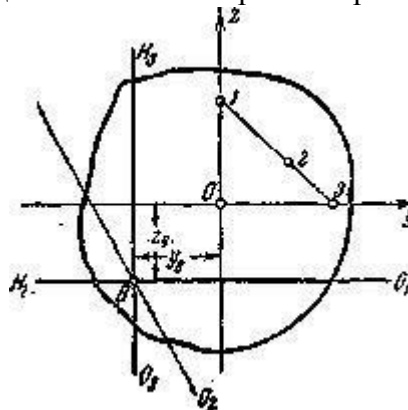


Рис.3. Динамика построения ядра сечения

Если контур сечения целиком или частично ограничен кривыми линиями, то построение границы ядра можно вести по точкам. Рассмотрим несколько простых примеров построения ядра сечения.

При выполнении этого построения для прямоугольного поперечного сечения воспользуемся полученными формулами.

Для определения границ ядра сечения при движении точки А по оси Оу найдем то значение $e = e_0$, при котором нейтральная ось займет положение H_1O_1 . Имеем:

$$a_y = -\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12e_0},$$

откуда

$$e_0 = \frac{b}{6}.$$

Таким образом, границы ядра по оси Оу будут отстоять от центра сечения на $1/6$ величины b (Рис.4, точки 1 и 3); по оси Оz границы ядра определяются расстояниями $\frac{d}{6}$ (точки 2 и 4).

Для получения очертания ядра целиком изобразим положения нейтральной оси H_1O_1 и H_2O_2 , соответствующие граничным точкам 1 и 2.

При перемещении силы из точки 1 в точку 2 по границе ядра нейтральная ось должна перейти из положения H_1O_1 в положение H_2O_2 , все время касаясь сечения, т. е. поворачиваясь вокруг точки D.

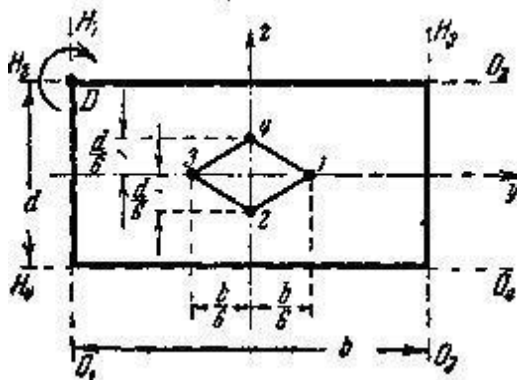


Рис.4. построение ядра для прямоугольного сечения.

Для этого сила должна двигаться по прямой 1 — 2. Точно так же можно доказать, что остальными границами ядра будут линии 2—3, 3—4 и 4—1.

Таким образом, для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

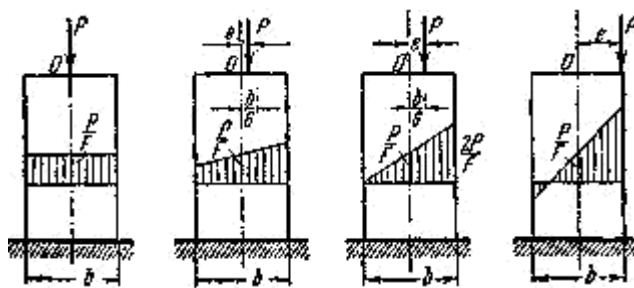


Рис.5. Динамика изменения напряжений при изменении эксцентриситета.

Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете, равном нулю, меньшему, равному и большему одной шестой ширины сечения, изображены на Рис.5.

Отметим, что при всех положениях силы P напряжение в центре тяжести сечения (точка O) одинаково и равно $\frac{P}{F}$ и что сила P не имеет эксцентриситета по второй главной оси.

Для круглого сечения радиуса r очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса r_0 . Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось Oy расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда

$$\alpha_y = r; \alpha_z = \infty; z_x = r_0 = -\frac{i_z^2}{\alpha_y} = -\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2} = -\frac{r}{4}$$

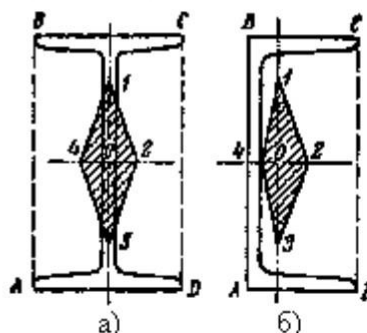


Рис.6. Ядро сечения для двутавра — а) и швеллера — б)

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура $ABCD$, описанного около двутавра (Рис.6а). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (Рис.6 б) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника $ABCD$.

Вопросы и задания:

1. Что такое ядро сечения?
2. Какие бывают эпюры распределения нормальных напряжений.
3. Запишите формулу определения полного ускорения точки, движущейся вращательно.
4. Дайте определение мгновенного центра ускорения.

Практическое занятие 14

Тема 5. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм.

Построение линии влияния усилия.

Цель: научиться рассчитывать балки на упругом основании

Знать: основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел;

постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем; кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики; теорию удара.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

Теоретическая часть:

К числу статически неопределимых балок может быть отнесена балка на упругом основании. Так называется балка, опирающаяся по всей своей длине (Рис.1) на упругое основание, оказывающее в каждой точке на балку реакцию, пропорциональную y — прогибу балки в этой точке. Коэффициент пропорциональности обозначается буквой k .

Введение предположения о пропорциональности реакций прогибу является приближением, хотя и достаточно близким к действительным условиям.

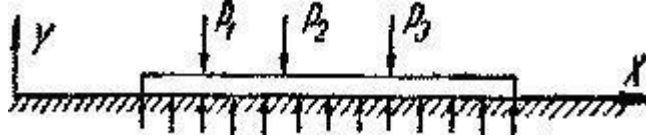


Рис.1. Расчетная схема балки на упругом основании.

Предложение ввести в расчет коэффициент пропорциональности k , именуемый «коэффициентом постели», было впервые сделано русским академиком Николаем Ивановичем Фуссом в 1801 году. Принимая это предположение, получаем, что интенсивность реакции основания в каждой точке сила равна ky и измеряется в единицах силы и длины; размерность коэффициента k при этом будет сила и квадрат длины. Будем считать, что основание оказывает реакцию при прогибах балки как вниз, так и вверх.

На практике задачи о расчете балки на упругом основании встречаются в железнодорожном деле (рельс, шпала), в строительстве — фундаменты различных сооружений, передающие нагрузку на грунт.

Статически неопределимой такая балка будет потому, что условие статики — сумма нагрузок равна всей реакции основания — не дает возможности установить распределение этой реакции по длине балки, а значит, вычислить изгибающие моменты и поперечные силы.

Интенсивность реакции в каждой точке связана с прогибами балки. Поэтому для решения задачи необходимо найти сначала уравнение изогнутой оси $y = f(x)$, а уже

затем формулы для вычисления изгибающего момента и поперечной силы. Ход решения оказывается обратным обычному.

Найдем уравнение изогнутой оси для балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенными силами $P_1, P_2, \dots$ (Рис.1). Начало координат возьмем в любой точке, ось x направим вправо, ось y вертикально вверх. Направление нагрузок вверх будем считать положительным. Напишем обычное дифференциальное уравнение изгиба

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

Так как $M(x)$ нам неизвестен, то постараемся связать прогибы непосредственно с нагрузкой, для этого дифференцируем дважды предыдущее уравнение:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

где $q(x)$ —интенсивность сплошной нагрузки, действующей на балку в сечении с абсциссой x .

Сплошной нагрузкой для нашей балки является лишь реакция упругого основания. Интенсивность ей пропорциональна прогибам; эта нагрузка направлена вверх, т. е. положительна, когда прогибы идут вниз, т. е. отрицательны, и наоборот. Таким образом, эта нагрузка имеет знак, обратный знаку прогибов:

$$q(x) = -ky$$

Тогда

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (2)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EJ} y = 0 \quad (3)$$

Если обозначить $\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \beta$, то общий интеграл уравнения (25.3) имеет вид:
 $y = e^{+\beta x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (25.4)$

Постоянные A, B, C, D должны быть определены в каждом частном случае нагрузки и длины балки. Величина β имеет измерение обратное длине.

Расчет бесконечно длинной балки на упругом основании, загруженной одной силой P .

Наиболее просто решается задача об изгибе бесконечно длинной балки, нагруженной одной сосредоточенной силой (Рис.2). Помимо непосредственного практического значения решение этой задачи позволит путем последовательных приближений рассчитывать и балки конечной длины.

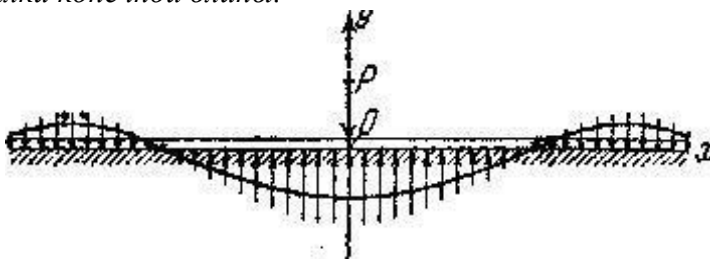


Рис.2. Расчетная схема балки бесконечной длины.

Начало координат расположим в точке приложения силы P . Определим постоянные A, B, C и D . Так как вся реакция основания, равная силе P должна быть конечной величиной,

то прогибы балки в точках, бесконечно удаленных от точки приложения силы, должны обращаться в нуль:

$$y_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (5)$$

При бесконечно больших значениях x два вторых слагаемых в правой части формулы (4) обращаются в нуль благодаря множителю $e^{-\beta x}$, два же первых могут обратиться в нуль лишь при

$$A = 0 \text{ и } B = 0;$$

таким образом,

$$y = e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (6)$$

Далее, по симметрии нагрузки и реакции основания, касательная к изогнутой оси в точке приложения силы должна идти параллельно оси абсцисс:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

Дифференцируя (6), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -\beta e^{-\beta x} [\sin \beta x (C + D) + \cos \beta x (D - C)]$$

Подставляя в это выражение $x = 0$ и приравнявая результат нулю, находим:

$$D - C = 0 \text{ и } C = D;$$

таким образом, уравнения будут:

$$y = e^{-\beta x} C (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -2e^{-\beta x} C \beta \sin \beta x \quad (8)$$

Для определения последней постоянной C имеем еще одно уравнение: нам известна величина поперечной силы в начале координат.

Разрезав балку сечением в точке O справа от силы P и рассматривая правую часть балки, видим, что поперечная сила в этом сечении равна реакции основания, действующей на правую половину балки со знаком минус; так как реакция направлена вверх (для правой половины) и вся реакция основания равна P , значит, поперечная сила в сечении при $x = 0$ равна

$$Q(x)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

Но, с другой стороны

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x) \quad (9)$$

Таким образом,

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -\frac{P}{2} \quad (10)$$

Вычисляем, пользуясь (8), $\frac{d^2 y}{dx^2}$ и $\frac{d^3 y}{dx^3}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2C\beta^2 e^{-\beta x} [\cos \beta x - \sin \beta x] \quad (11)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = +4C\beta^3 e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и приравнявая x нулю, получаем:

$$4EJC\beta^3 = -\frac{P}{2} \quad C = -\frac{P}{8EJ\beta^3}$$

Теперь значения y и ее производных получают вид

$$y = -\frac{P}{8EJ\beta^3} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) = -\frac{P}{8EJ\beta^3} \cdot \eta$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = +\frac{P}{4EJ\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x = +\frac{P}{4EJ\beta^2} \cdot \eta_3$$

$$M(x) = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = +\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} [\cos \beta x - \sin \beta x] = \frac{P}{4\beta} \cdot \eta_1$$

$$Q(x) = EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x = -\frac{P}{2} \cdot \eta_2$$

Таким образом, напряженное состояние и деформации балки на упругом основании всецело определяются нагрузкой и коэффициентом β , зависящим от соотношения жесткостей балки и упругого основания.

Вопросы и задания:

1. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?
2. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.
3. Какие существуют способы задания движения точки?
4. Назвать случаи, когда кориолисово ускорение точки равно нулю.
5. Абсолютное, относительное, переносное движение точки.

Практическое занятие 15

Тема 5. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм.

Построение линии влияния опорных реакций.

Цель: научить студента рассчитывать заклепки на перерезывание.

Знать: основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел;

постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем; кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики; теорию удара.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скорости и ускорения точек звеньев механизма с помощью МЦС

Теоретическая часть:

Мы изучали, что при простом растяжении или простом сжатии две части стержня, разделенные наклонным сечением, стремятся не только оторваться друг от друга, но и сдвинуться одна относительно другой. Растяжению сопротивляются нормальные, а сдвигу — касательные напряжения.

На практике целый ряд деталей и элементов конструкций работает в таких условиях, что внешние силы стремятся их разрушить именно путем сдвига.

В соответствии с этим при проверке прочности таких элементов на первый план выступают касательные напряжения. Простейшими примерами подобных деталей являются болтовые и заклепочные соединения. Заклепки во многих случаях уже вытеснены сваркой; однако они имеют еще очень большое применение для соединения частей всякого рода металлических конструкций: стропил, ферм мостов, кранов, для соединения листов в котлах, судах, резервуарах и т. п. Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают или продавливают отверстия. В них закладывается нагретый до красного каления стержень — заклепки с одной головкой; другой конец заклепки расклепывается ударами специального молотка или давлением гидравлического пресса (клепальной машины) для образования второй головки. Мелкие заклепки (малого диаметра — меньше 8 мм) ставятся в холодном состоянии (авиационные конструкции).

Для изучения работы заклепок рассмотрим простейший пример заклепочного соединения (Рис.1). Шесть заклепок, расположенных в два ряда, соединяют два листа внахлестку. Под действием сил P эти листы стремятся сдвинуться один по другому, чему препятствуют заклепки, на которые и будет передаваться действие сил P).

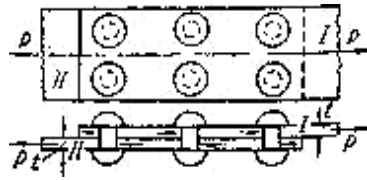


Рис.1. Расчетная схема заклепочного соединения

Для проверки прочности заклепок применим общий порядок решения задач сопротивления материалов.

На каждую заклепку передаются по две равные и прямо противоположные силы: одна — от первого листа, другая — от второго. Опытные исследования показывают, что одни из заклепок ряда нагружаются больше, другие — меньше. Однако к моменту разрушения усилия, передающиеся на различные заклепки, более или менее выравниваются за счет пластических деформаций. Поэтому принято считать, что все заклепки работают одинаково. Таким образом, при n заклепках в соединении, изображенном на фиг. 1, на

каждую из них действуют по две равные и противоположные силы $P_1 = \frac{P}{n}$ (Рис.2); эти силы передаются на заклепку путем нажима соответствующего листа на боковую полуцилиндрическую поверхность стержня. Силы P_1 стремятся перерезать заклепку по плоскости mk раздела обоих листов.

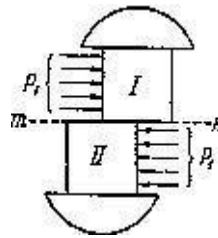


Рис.2. Силы, действующие на заклепочное соединение.

Для вычисления напряжений, действующих по этой плоскости, разделим мысленно заклепочный стержень сечением mk и отбросим нижнюю часть (Рис.2). Внутренние усилия, передающиеся по этому сечению от нижней части на верхнюю, будут уравнивать силу P_1 т. е. будут действовать параллельно ей в плоскости сечения, и в сумме дадут равнодействующую, равную P_1 . Следовательно, напряжения, возникающие в этом сечении и действующие касательно к плоскости сечения, это — касательные напряжения τ . Обычно принимают равномерное распределение этих напряжений по сечению. Тогда при диаметре заклепки d на единицу площади сечения будет приходиться напряжение:

$$\tau = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}}$$

Величина допускаемого касательного напряжения $[\tau]_s$, или, как говорят, допускаемого напряжения на срез, принято определять в виде: $[\tau] = (0,7 + 0,8) [\sigma]$ Зная $[\tau]_s$, мы напишем условие прочности заклепки на перерезывание в таком виде:

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]_s$$

т. е. действительное касательное напряжение τ в материале заклепки должно быть равно допускаемому $[\tau]$ или меньше его.

Из этого условия можно определить необходимый диаметр заклепок, если задаться их числом, и наоборот. Обычно задаются диаметром заклепочных стержней d в соответствии с толщиной t склепываемых частей (обычно $d \approx 2t$) и определяют необходимое число заклепок n :

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]}$$

Знаменатель этой формулы представляет собой ту силу, которую безопасно может взять на себя каждая заклепка.

Пусть $P = 720 \text{ КН}$, $d = 2 \text{ см}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; тогда

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{720000}{\frac{3,14 \cdot 4 \cdot 10^2}{4} \cdot 100} \approx 24$$

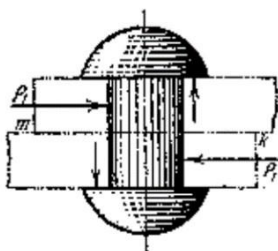


Рис.3. Расчетная модель действия нормальных напряжений

При выводе формулы расчета заклепки на перерезывание, помимо оговоренных, допущена еще одна неточность. Дело в том, что силы P_1 действующие на заклепку, не направлены по одной прямой, а образуют пару. Эта пара уравнивается другой парой, образующейся из реакций соединенных листов на головку заклепки (Рис.3) и ведет к появлению нормальных напряжений, действующих по сечению mk .

Кроме этих нормальных напряжений, по сечению mk действуют еще нормальные напряжения, вызванные тем, что при охлаждении заклепочный стержень стремится сократить свою длину, чему мешает упор головок заклепки в листы. Это обстоятельство, с одной стороны, обеспечивает стягивание заклепками листов и возникновение между ними сил трения, с другой — вызывает значительные нормальные напряжения по сечениям стержня заклепки. Особых неприятностей эти напряжения принести не могут. На заклепки идет сталь, обладающая значительной пластичностью; поэтому даже если бы нормальные напряжения достигли предела текучести, можно ожидать некоторого пластического удлинения стержня заклепки, что вызовет лишь уменьшение сил трения между листами и осуществление в действительности той схемы работы заклепки на перерезывание, на которую она и рассчитывается. Поэтому эти нормальные напряжения расчетом не учитываются.

Вопросы и задания:

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
3. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
4. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как найти положение МЦС в различных случаях?
5. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

Тема 6. Расчет шпренгельных ферм.

Фермы с простой решеткой.

Цель: научить определять скорости и ускорения точек плоской фигуры

Знать: дифференциальных уравнений движения точки;

кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки;

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скоростей и ускорений точек фигуры в плоскости.

Теоретическая часть:

Скорости точек при плоском движении

Для определения скоростей при плоскопараллельном движении используются: формула распределения скоростей, теорема о проекциях и понятие мгновенного центра скоростей (МЦС).

а) Формула распределения скоростей

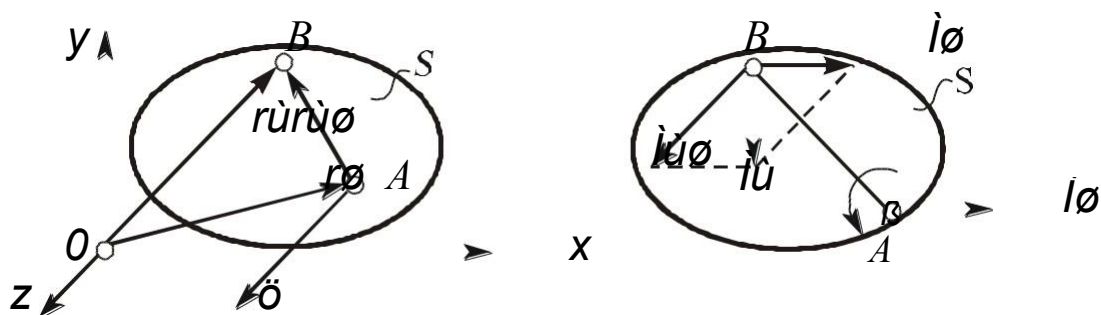


Рис. 2.25. К выводу формулы распределения скоростей

Из рис. 2.25 видно, что положение произвольной точки **B** плоской фигуры **S** в каждый момент времени определяется следующим векторным равенством:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$$

Продифференцируем данное выражение по времени

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt},$$

согласно формуле Эйлера (2.38)

$$\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA},$$

Обоим начав $\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} = \vec{V}_{BA}$ получаем формулу распределения скоростей:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad V_{BA} = \omega AB, \quad \vec{V}_{BA} \perp AB. \quad (2.41)$$

Согласно (41), скорость произвольной точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\vec{V}_A$ и скорости вращения точки B вокруг полюса - $\vec{V}_{BA}$.

б) Теорема о проекциях: при любом движении твердого тела проекции скоростей любых двух его точек на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (рис. 2.26).

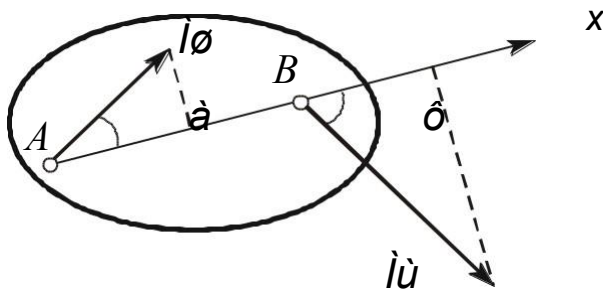


Рис. 2.26. К теореме о проекциях

Спроецируем на ось x , проходящую через точки A и B формулу (2.41). Так как $\vec{V}_{BA} \perp AB$, получаем

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \varphi,$$

что и требовалось доказать.

в) Использование понятия мгновенного центра скоростей.

Определение: мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. МЦС принято обозначать буквой P .

Покажем, что если плоская фигура не движется поступательно, то такая точка существует в каждый момент времени. Для этого восстановим перпендикуляры к скоростям двух произвольных точек A и B и найдем точку их пересечения (рис. 2.27).

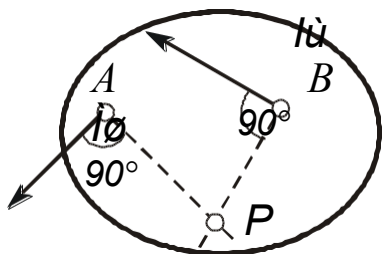


Рис. 2.28. Основной случай определения положения МЦС.

Покажем, что скорость точки P равна нулю и, следовательно, эта точка по определению является мгновенным центром скоростей. Согласно (2.41) имеем

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}, \quad \vec{V}_P = \vec{V}_B + \vec{V}_{PB}.$$

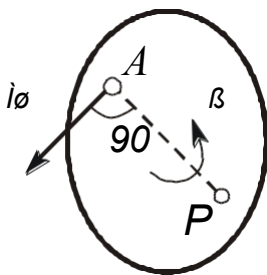
Поскольку векторы $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ перпендикулярны отрезкам AP и BP по построению, а векторы $\vec{V}_{PA}$ и $\vec{V}_{PB}$ перпендикулярны этим отрезкам по определению, вектор $\vec{V}_A$ должен быть одновременно перпендикулярен обоим отрезкам, что невозможно, если только он не равен нулю.

Если теперь взять за полюс точку P , то для точек A и B формула (2.41) запишется в виде:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}, \quad \vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}.$$

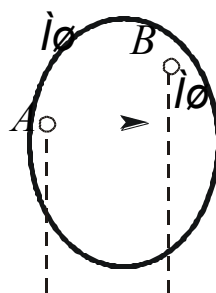
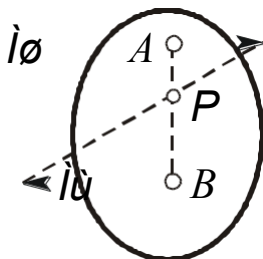
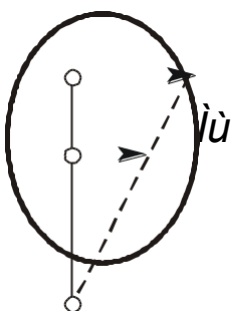
Учитывая, что $\vec{V}_P = 0$, получаем: $V_A = \omega \cdot AP$, $V_B = \omega \cdot BP$ или $V_A / AP = V_B / BP = \omega$. (2.42)

Из (2.42) следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей и движение плоской фигуры можно рассматривать как вращение вокруг меняющего свое положение мгновенного центра скоростей. Мгновенную угловую скорость этого вращения можно найти, поделив скорость любой точки на ее расстояние от мгновенного центра скоростей. Кроме основного случая нахождения положения МЦС, рассмотренного выше, при решении задач встречаются следующие варианты:

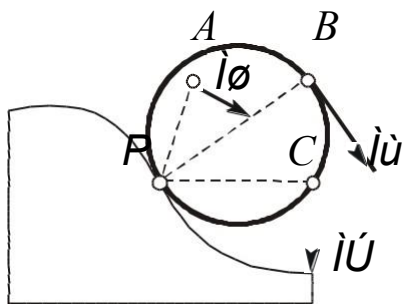


Если известны скорость какой-либо точки A и мгновенная угловая скорость ω , то расстояние от этой точки до мгновенного центра скоростей P равно $AP = V_A / \omega$.

При построении прямой угол откладывается от вектора V_A в сторону вращения плоской фигуры.



Случай мгновенно- $\rightarrow$ поступательного движения. Скорости всех точек тела равны по величине и по направлению, $\omega = 0$, МЦС находится в бесконечности.



При качении тела по неподвижной поверхности, мгновенный центр скоростей P находится в точке касания это тела с неподвижной поверхностью, т.к. отсутствие проскальзывания означает равенство скоростей соприкасающихся точек.

Рис. 2.28. Частные случаи определения положения МЦС

3. Ускорения точек в плоском движении. Формула распределения ускорений.

Для вывода данной формулы распределения ускорений запишем выражение (2.41) в виде:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

и, продифференцировав его по времени, получим:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, а по формуле Эйлера $\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$, имеем:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{W}_{BA}^{ep} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}, \quad \vec{W}_{BA}^u = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}).$$

Векторы $\vec{W}_{BA}^{ep}$ и $\vec{W}_{BA}^u$ называют вращательным и центростремительным ускорением точки B в ее относительном вращении вокруг полюса A .

По определению векторного произведения вектор $\vec{W}_{BA}^{ep}$ перпендикулярен отрезку AB , лежит в плоскости движения, а его модуль равен $\varepsilon \cdot AB$, так как $r_{BA} = AB$. По формуле для двойного векторного произведения

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

$$\text{получаем } \vec{W}_{BA}^u = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{BA}) - \vec{r}_{BA} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_{BA} = -\omega^2 \vec{AB},$$

поскольку $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{BA}) = \omega AB \cos 90^\circ = 0$. Таким образом, вектор $\vec{W}_{BA}^u$ направлен вдоль отрезка AB от точки B к точке A (см. рис. 2.29), а его модуль равен $\omega^2 AB$.

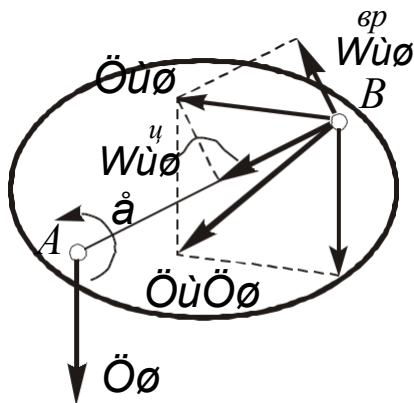


Рис. 2.29. Иллюстрация формулы распределения ускорений

Окончательно формулу распределения ускорений можно записать в виде:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^u + \vec{W}_{BA}^{ep}, \quad (2.43)$$

в которой $W_{BA}^u = -\omega^2 AB$, $W_{BA}^{ep} = \varepsilon AB$.

Формулу (2.43) иногда используют в виде $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}$ (2.43*)

где вектор $\vec{W}_{BA} = \vec{W}_{BA}^u + \vec{W}_{BA}^{ep}$ направлен под углом $\gamma = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right)$ к отрезку

AB и равен по модулю $W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Пример 1. Найти ускорение точки B , угловое ускорение шатуна AB и угловое ускорение кривошипа BC четырехзвенного механизма в положении, указанном на рис. 2.29. Кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 5 \text{ с}^{-1}$, длина шатуна AB равна 0,8 м.

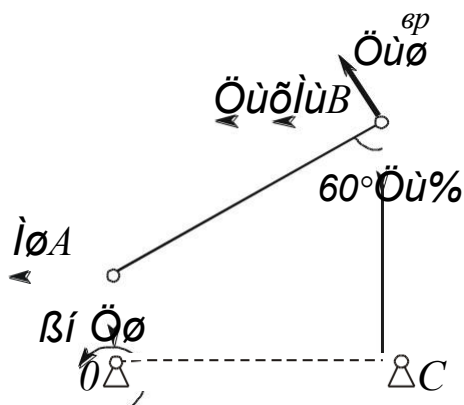


Рис. 2.29. Пример использования формулы распределения ускорений

Решение. Определим скорость и ускорение точки A , которую затем выберем в качестве полюса:

$$V_A = \omega_0 OA = 2 \text{ м/с}, \quad W_A = \omega_0^2 OA = 10 \text{ м/сек}^2.$$

Так как *М.Ц.С.* звена *AB* находится в бесконечности (*М_{шц}* параллелен *М_{шш}*), $\omega_{AB} = 0$. Ускорение точки *B*, как точки, принадлежащей звену *AB*, по формуле распределения ускорений равно:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^u + \vec{W}_{BA}^{ep} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{ep}, \text{ так как } \vec{W}_{BA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0.$$

С другой стороны, ускорение точки *B*, как точки принадлежащей звену *BC* и вращающейся вокруг точки *C*, можно представить в виде сумму ее касательного и нормального ускорений:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_{B\tau} + \vec{W}_{Bn}, \text{ где } W_{Bn} = \frac{V_B^2}{BC} = \frac{5^2}{c^2} = \varepsilon_{BC} BC.$$

Приравнявая правые части выражений для $\vec{W}_B$, получаем:

$$\vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{ad} = \vec{W}_{B\tau} + \vec{W}_{Bn}. \quad (*)$$

Проектируя (*) на направления отрезков *BC* и *AB* имеем:

$$W_{Bn} = W_A - W_{BA} \cos 30^\circ, -W_{Bn} \cos 60^\circ - W_{B\tau} \cos 30^\circ = -W_A \cos 30^\circ$$

$$\text{откуда } W_{BA}^{ep} = \frac{W_A - W_{Bn}}{\cos 30^\circ} = 5,78 \frac{м}{с^2}, \varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^{ep}}{AB} = 7,22 \frac{рад}{с^2},$$

$$W_{B\tau} = (W_A - W_{Bn}) \operatorname{tg} 30^\circ = 2,89 \frac{м}{с^2}, \varepsilon_{BC} = \frac{W_{B\tau}}{BC} = 3,61 \frac{рад}{с^2}.$$

$$W_B = \sqrt{W_{Bn}^2 + W_{B\tau}^2} = 5,77 \frac{м}{с^2}.$$

4. Мгновенный центр ускорений (М.Ц.У)

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. *М.Ц.У* принято обозначать буквой *Q*.

Покажем, что если плоская фигура (рис. 2.30) не движется поступательно, то такая точка существует в каждый момент времени и ее положение легко определить (зная

ускорение какой-либо точки $\vec{W}_A$ и величины ω и ε) следующим образом:

из выражения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ определим угол γ ;

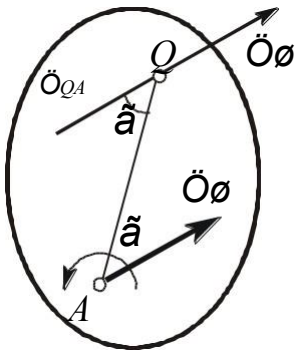


Рис. 2.30. К определению положения мгновенного центра ускорений

от точки A под углом γ к вектору $\vec{W}_A$ проведем отрезок AQ . При этом отрезок AQ должен быть отклонен от вектора ускорения в сторону направления углового ускорения ϵ . Длина отрезка AQ определяется равенством:

$$AQ = W_A \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.44)$$

Найденная таким образом точка Q и будет являться мгновенным центром ускорений. Действительно, по формуле распределения ускорений, имеем

$$\vec{W}_Q = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA}, \text{ где } W_{QA} = AQ \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

Подставляя сюда AQ из (2.44), находим, что $W_{QA} = W_A$. Кроме того, вектор $\vec{W}_{QA}$ должен образовывать с линией AQ угол γ и, следовательно, вектор $\vec{W}_A$ параллелен QA

$\vec{W}_A$, но направлен в противоположную сторону. Поэтому

$W_{QA} = -W_A$ и $W_Q = 0$. Если теперь за полюс выбрать точку Q , то ускорение произвольной точки M , согласно (2.43) будет равно:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_Q + \vec{W}_{MQ} = \vec{W}_{MQ}, \quad W_M = MQ \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4},$$

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в каждый данный момент времени так, как если бы движение плоской фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q (рис. 2.31). При этом ускорения точек плоской фигуры будут пропорциональны их расстояниям от М.Ц.У.

$$\frac{W_M}{MQ} = \frac{W_A}{AQ} = \frac{W_B}{BQ} = \frac{W_C}{CQ} = \dots = \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

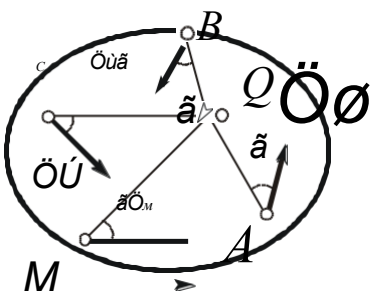
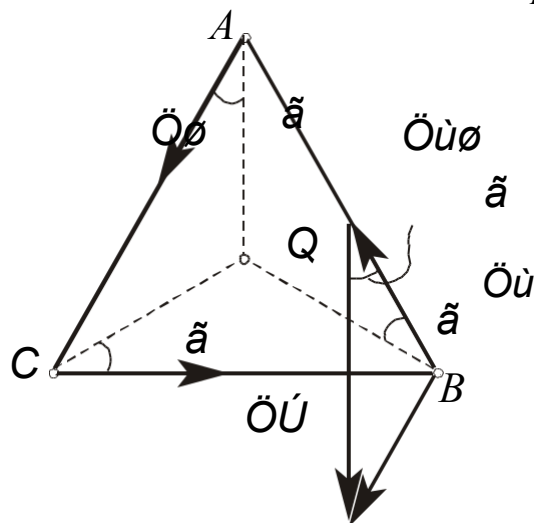


Рис. 2.31. Определение ускорений с помощью М.Ц.У.

Пример 2. Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости чертежа. Ускорения вершин A и B равны в данный момент времени 16 см/с^2 и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение третьей вершины C треугольника.



Решение. Определим ускорение точки C используя понятие мгновенного центра ускорений. Для определения его положения необходимо знать угол между вектором $\vec{CQ}$ и отрезком AB . (см. рис 2.30). Очевидно, что в нашем случае этот угол равен 30° . Положение мгновенного центра ускорений Q определим как точку пересечения двух прямых, проведенных под углом γ к векторам $\vec{C_A}$ и $\vec{C_B}$. Так как расстояния вершин треугольника от точки Q одинаковы, $CQ = 16 \text{ см/с}^2$. Направление этого вектора показано на рисунке.

Вопросы и задания:

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
3. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
4. Абсолютное, относительное, переносное движение точки.
5. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

Тема 6. Расчет шпренгельных ферм.

Шпренгельные фермы.

Цель: научиться определять ядро сечения при внецентренном сжатии.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы заключается в применении знаний в области кинематики на практике.

Теоретическая часть:

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы P слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом ядре сечения. Этим термином обозначается некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P , не вызывая в сечении напряжений разного знака.

Пока точка A располагается внутри ядра, нейтральная ось не пересекает контура сечения, все оно лежит по одну сторону от нейтральной оси и, стало быть, работает лишь на сжатие. При удалении точки A от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру; граница ядра определится тем, что при расположении точки A на этой границе нейтральная ось подойдет вплотную к сечению, коснется его.

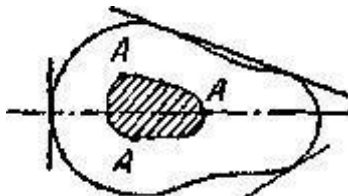


Рис.1. Комбинации положения сжимающей силы и нейтральной линии

Таким образом, если мы будем перемещать точку A так, чтобы нейтральная ось катилась по контуру сечения, не пересекая его, то точка A обойдет по границе ядра сечения. Если контур сечения имеет «впадины», то нейтральная ось будет катиться по огибающей контура.

Чтобы получить очертание ядра, необходимо дать нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру сечения, определить для этих положений отрезки α_y и α_z и вычислить координаты y_P и z_P точки приложения силы по формулам, вытекающим из известных зависимостей:

$$y_P = -\frac{i_x^2}{a_y}; z_P = -\frac{i_y^2}{a_z}$$

это и будут координаты точек контура ядра $y_{\text{я}}$ и $z_{\text{я}}$.

При многоугольной форме контура сечения (Рис.2), совмещая последовательно нейтральную ось с каждой из сторон многоугольника, мы по отрезкам a_y и a_z определим координаты $y_{\text{я}}$ и $z_{\text{я}}$ точек границы ядра, соответствующих этим сторонам.

При переходе от одной стороны контура сечения к другой нейтральная ось будет вращаться вокруг вершины, разделяющей эти стороны; точка приложения силы будет перемещаться по границе ядра между полученными уже точками. Установим, как должна перемещаться сила Р, чтобы нейтральная ось проходила все время через одну и ту же точку В (y_B, z_B) — вращалась бы около нее. Подставляя координаты этой точки нейтральной оси в известное уравнение нейтральной оси (линии), получим:

$$1 + \frac{y_P y_B}{i_x^2} + \frac{z_P z_B}{i_y^2} = 0$$

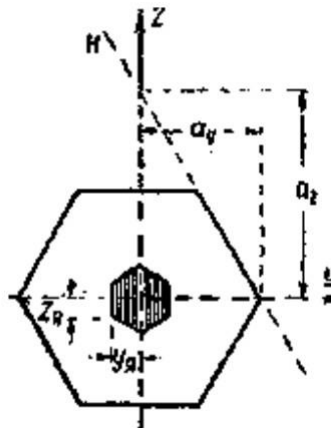


Рис.2. Ядро сечения для многоугольной формы поперечного сечения

Таким образом координаты y_P и z_P точки А приложения силы Р связаны линейно. При вращении нейтральной оси около постоянной точки В точка А приложения силы движется по прямой. Обратно, перемещение силы Р по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки.

На Рис.3 изображены три положения точки приложения силы на этой прямой и соответственно три положения нейтральной оси. Таким образом, при многоугольной форме контура сечения очертание ядра между точками, соответствующими сторонам многоугольника, будет состоять из отрезков прямых линий.

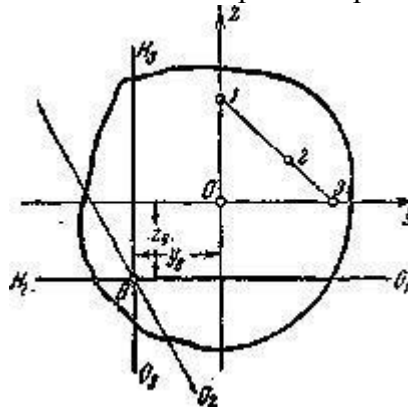


Рис.3. Динамика построения ядра сечения

Если контур сечения целиком или частично ограничен кривыми линиями, то построение границы ядра можно вести по точкам. Рассмотрим несколько простых примеров построения ядра сечения.

При выполнении этого построения для прямоугольного поперечного сечения воспользуемся полученными формулами.

Для определения границ ядра сечения при движении точки А по оси Оу найдем то

значение $e = e_0$, при котором нейтральная ось займет положение H_1O_1 . Имеем:

$$a_y = -\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12e_0},$$

откуда

$$e_0 = \frac{b}{6}.$$

Таким образом, границы ядра по оси Оу будут отстоять от центра сечения на $1/6$ величины b (Рис.4, точки 1 и 3); по оси Оz границы ядра определяются расстояниями $\frac{d}{6}$ (точки 2 и 4).

Для получения очертания ядра целиком изобразим положения нейтральной оси H_1O_1 и H_2O_2 , соответствующие граничным точкам 1 и 2.

При перемещении силы из точки 1 в точку 2 по границе ядра нейтральная ось должна перейти из положения H_1O_1 в положение H_2O_2 , все время касаясь сечения, т. е. поворачиваясь вокруг точки D.

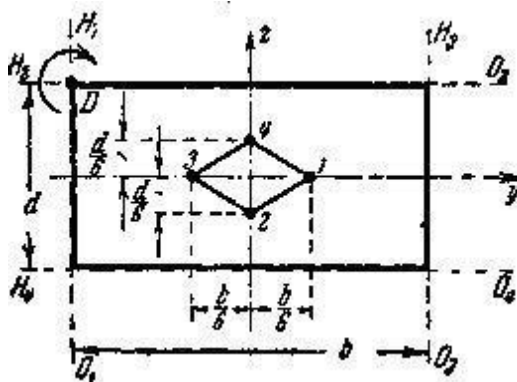


Рис.4. построение ядра для прямоугольного сечения.

Для этого сила должна двигаться по прямой 1 — 2. Точно так же можно доказать, что остальными границами ядра будут линии 2—3, 3—4 и 4—1.

Таким образом, для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными одной трети соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы средней трети стороны сечения.

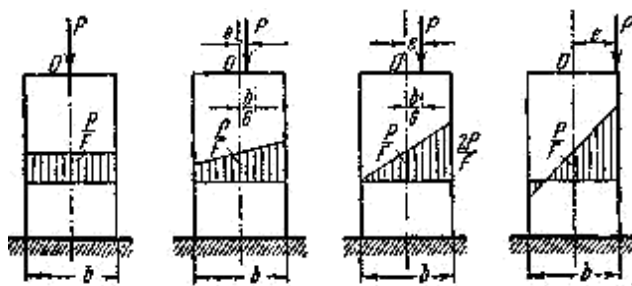


Рис.5. Динамика изменения напряжений при изменении эксцентриситета.

Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете, равном нулю, меньшему, равному и большему одной шестой ширины сечения, изображены на Рис.5.

Отметим, что при всех положениях силы P напряжение в центре тяжести сечения (точка O) одинаково и равно $\frac{P}{F}$ и что сила P не имеет эксцентриситета по второй главной оси.

Для круглого сечения радиуса r очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса r_0 . Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось Oy расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда

$$\alpha_y = r; \alpha_z = \infty; z_0 = -\frac{i_z^2}{\alpha_y} = -\frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2} = -\frac{r}{4}$$

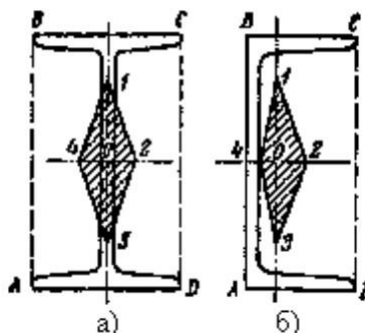


Рис.6. Ядро сечения для двутавра — а) и швеллера — б)

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура $ABCD$, описанного около двутавра (Рис.6а). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

Для швеллера, как и для двутавра, точки 1, 2, 3, 4 контура ядра (Рис.6 б) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольника $ABCD$.

Вопросы и задания:

5. Что такое ядро сечения?
6. Какие бывают эпюры распределения нормальных напряжений.
7. Запишите формулу определения полного ускорения точки, движущейся вращательно.
8. Дайте определение мгновенного центра ускорения.

Практическое занятие 18

Тема 6. Расчет шпренгельных ферм.

Фермы со сложной решеткой

Цель: научиться рассчитывать балки на упругом основании

Знать: основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел;

постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем; кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики; теорию удара.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

Теоретическая часть:

К числу статически неопределимых балок может быть отнесена балка на упругом основании. Так называется балка, опирающаяся по всей своей длине (Рис.1) на упругое основание, оказывающее в каждой точке на балку реакцию, пропорциональную y — прогибу балки в этой точке. Коэффициент пропорциональности обозначается буквой k .

Введение предположения о пропорциональности реакций прогибу является приближением, хотя и достаточно близким к действительным условиям.

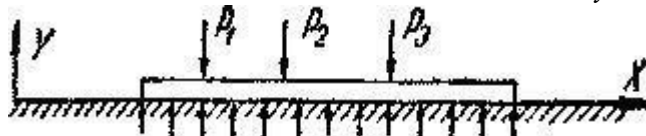


Рис.1. Расчетная схема балки на упругом основании.

Предложение ввести в расчет коэффициент пропорциональности k , именуемый «коэффициентом постели», было впервые сделано русским академиком Николаем Ивановичем Фуссом в 1801 году. Принимая это предположение, получаем, что интенсивность реакции основания в каждой точке сила равна ky и измеряется в единицах силы и длины; размерность коэффициента k при этом будет сила и квадрат длины. Будем считать, что основание оказывает реакцию при прогибах балки как вниз, так и вверх.

На практике задачи о расчете балки на упругом основании встречаются в железнодорожном деле (рельс, шпала), в строительстве — фундаменты различных сооружений, передающие нагрузку на грунт.

Статически неопределимой такая балка будет потому, что условие статики — сумма нагрузок равна всей реакции основания — не дает возможности установить распределение этой реакции по длине балки, а значит, вычислить изгибающие моменты и поперечные силы.

Интенсивность реакции в каждой точке связана с прогибами балки. Поэтому для решения задачи необходимо найти сначала уравнение изогнутой оси $y = f(x)$, а уже

затем формулы для вычисления изгибающего момента и поперечной силы. Ход решения оказывается обратным обычному.

Найдем уравнение изогнутой оси для балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенными силами $P_1, P_2, \dots$ (Рис.1). Начало координат возьмем в любой точке, ось x направим вправо, ось y вертикально вверх. Направление нагрузок вверх будем считать положительным. Напишем обычное дифференциальное уравнение изгиба

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

Так как $M(x)$ нам неизвестен, то постараемся связать прогибы непосредственно с нагрузкой, для этого дифференцируем дважды предыдущее уравнение:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

где $q(x)$ — интенсивность сплошной нагрузки, действующей на балку в сечении с абсциссой x .

Сплошной нагрузкой для нашей балки является лишь реакция упругого основания. Интенсивность ей пропорциональна прогибам; эта нагрузка направлена вверх, т. е. положительна, когда прогибы идут вниз, т. е. отрицательны, и наоборот. Таким образом, эта нагрузка имеет знак, обратный знаку прогибов:

$$q(x) = -ky$$

Тогда

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (2)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{k}{EJ} y = 0 \quad (3)$$

Если обозначить $\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \beta$, то общий интеграл уравнения (25.3) имеет вид:
 $y = e^{+\beta x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (25.4)$

Постоянные A, B, C, D должны быть определены в каждом частном случае нагрузки и длины балки. Величина β имеет измерение обратное длине.

Расчет бесконечно длинной балки на упругом основании, загруженной одной силой P .

Наиболее просто решается задача об изгибе бесконечно длинной балки, нагруженной одной сосредоточенной силой (Рис.2). Помимо непосредственного практического значения решение этой задачи позволит путем последовательных приближений рассчитывать и балки конечной длины.

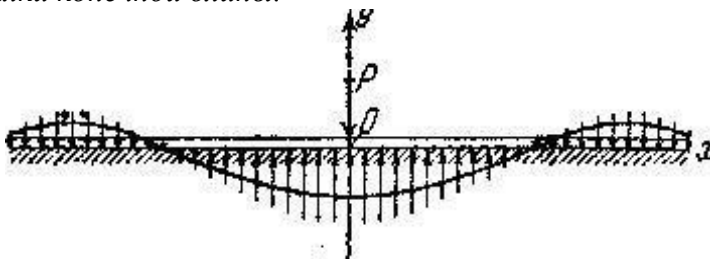


Рис.2. Расчетная схема балки бесконечной длины.

Начало координат расположим в точке приложения силы P . Определим постоянные A, B, C и D . Так как вся реакция основания, равная силе P должна быть конечной величиной,

то прогибы балки в точках, бесконечно удаленных от точки приложения силы, должны обращаться в нуль:

$$y_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (5)$$

При бесконечно больших значениях x два вторых слагаемых в правой части формулы (4) обращаются в нуль благодаря множителю $e^{-\beta x}$, два же первых могут обратиться в нуль лишь при

$$A = 0 \text{ и } B = 0;$$

таким образом,

$$y = e^{-\beta x} (C \sin \beta x + D \cos \beta x) \quad (6)$$

Далее, по симметрии нагрузки и реакции основания, касательная к изогнутой оси в точке приложения силы должна идти параллельно оси абсцисс:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

Дифференцируя (6), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -\beta e^{-\beta x} [\sin \beta x (C + D) + \cos \beta x (D - C)]$$

Подставляя в это выражение $x = 0$ и приравнявая результат нулю, находим:

$$D - C = 0 \text{ и } C = D;$$

таким образом, уравнения будут:

$$y = e^{-\beta x} C (\sin \beta x + \cos \beta x) \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = -2e^{-\beta x} C \beta \sin \beta x \quad (8)$$

Для определения последней постоянной C имеем еще одно уравнение: нам известна величина поперечной силы в начале координат.

Разрезав балку сечением в точке O справа от силы P и рассматривая правую часть балки, видим, что поперечная сила в этом сечении равна реакции основания, действующей на правую половину балки со знаком минус; так как реакция направлена вверх (для правой половины) и вся реакция основания равна P , значит, поперечная сила в сечении при $x = 0$ равна

$$Q(x)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

Но, с другой стороны

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = Q(x) \quad (9)$$

Таким образом,

$$EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -\frac{P}{2} \quad (10)$$

Вычисляем, пользуясь (8), $\frac{d^2 y}{dx^2}$ и $\frac{d^3 y}{dx^3}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2C\beta^2 e^{-\beta x} [\cos \beta x - \sin \beta x] \quad (11)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = +4C\beta^3 e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и приравнявая x нулю, получаем:

$$4EJC\beta^3 = -\frac{P}{2} \text{ и}$$

Теперь значения y и ее ~~производных~~ ^{P} получают вид

$$y = -\frac{P}{8EJ\beta^3} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x) = -\frac{P}{8EJ\beta^3} \cdot \eta$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta = +\frac{P}{4EJ\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x = +\frac{P}{4EJ\beta^2} \cdot \eta_3$$

$$M(x) = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = +\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} [\cos \beta x - \sin \beta x] = \frac{P}{4\beta} \cdot \eta_1$$

$$Q(x) = EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x = -\frac{P}{2} \cdot \eta_2$$

Таким образом, напряженное состояние и деформации балки на упругом основании всецело определяются нагрузкой и коэффициентом β , зависящим от соотношения жесткостей балки и упругого основания.

Вопросы и задания:

6. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?
7. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.
8. Какие существуют способы задания движения точки?
9. Назвать случаи, когда кориолисово ускорение точки равно нулю.
10. Абсолютное, относительное, переносное движение точки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Строительная механика и металлические конструкции машин : учебное пособие / В.А. Глотов, А.В. Зайцев, В.Ю. Игнатьюгин. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 95 с. : ил., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-5266-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426940](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426940) (30.10.2016).
2. Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций : учебное пособие : 2-х частях / В.А. Пшеничкина, Г.В. Воронкова, С.С. Рекунов, А.А. Чураков ; Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, Министерство образования и науки Российской Федерации. - Волгоград : Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, 2015. - Ч. I. - 92 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. - ISBN 978-5-98276-733-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434827](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434827) (30.10.2016).
3. Строительство и механика : краткий справочник / В.В. Леденев ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. - 244 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. - ISBN 978-5-8265-1392-7 ; То же [Электронный ресурс]. URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444650](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444650) (30.10.2016).

Дополнительная литература:

1. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров.М. : Инфра-Инженерия, 2014. - 480 с. - ISBN 978-5-9729-0076-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234783](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234783) (30.10.2016).
2. Строительная механика для архитекторов: учебник : в 2-х т. / Ю.Э. Сеницкий, А.К. Синельник ; Министерство образования и науки РФ, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный архитектурно-строительный университет». - Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2014. - Т. II. - 280 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9585-0563-0 ; То же [Электронный ресурс]. -URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149) (30.10.2016).

Интернет-ресурсы:

1. Электронно-библиотечная система IPRbooks
2. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека on-line»
3. Электронно-библиотечная система Лань

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «**Строительная механика**»
для студентов направления подготовки

07.03.03 Дизайн архитектурной среды

Пятигорск, 2026

Содержание

Практическое занятие 1	5
Практическое занятие 2	12
Практическое занятие 3	14
Практическое занятие 4	16
Практическое занятие 5	21
Практическое занятие 6	23
Практическое занятие 7	27
Практическое занятие 8	33
Практическое занятие 9	39
Практическое занятие 10	44
Практическое занятие 11	48
Практическое занятие 12	51
Практическое занятие 13	53
Практическое занятие 14	57
Практическое занятие 15	61
Практическое занятие 16	64
Практическое занятие 17	72
Практическое занятие 18	76
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	80

ВВЕДЕНИЕ

В курсе дисциплины «Строительная механика» рассматривают типичные элементы конструкций: брус, пластинка, оболочка. Внешние нагрузки, действующие на элементы сооружений, подразделяют на сосредоточенные и распределенные, статические и динамические. Все реальные силы - это силы, распределенные по некоторой площади или объему. Однако распределенную нагрузку на небольшой площади, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента, можно заменить сосредоточенной равнодействующей, силой, что упростит расчет. Распределенные нагрузки имеют единицы силы, отнесенной к единице длины, или к единице поверхности или объема.

При воздействии статических и динамических нагрузок на конструкцию все ее части находятся в равновесии; ускорения элементов конструкции отсутствуют или настолько малы, что ими можно пренебречь. Если же эти ускорения значительны, т. е. изменение скорости элементов машины происходит за сравнительно небольшой период времени, то мы имеем дело с приложением динамических нагрузок. Примерами таких нагрузок могут служить внезапно приложенные нагрузки, ударные и повторно-переменные. Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний конструкций или сооружений. Вследствие изменения скорости колеблющихся масс возникают силы инерции, пропорциональные (согласно второму закону Ньютона) колеблющимся массам и ускорениям.

Методы расчета элементов конструкций излагаются на основе следующих упрощений

и допущений: материал тела имеет сплошное (непрерывное) строение, т. е. не принимается во внимание дискретная атомистическая структура вещества; материал тела однороден, т. е. обладает во всех точках одинаковыми свойствами; материал тела изотропен, т. е. обладает во всех направлениях одинаковыми свойствами; в теле до приложения нагрузки нет внутренних (начальных) усилий; результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к телу последовательно и в любом порядке.

Введение

Целью методических рекомендаций по изучению дисциплины является закрепление и углубление знаний, полученных при изучении теоретического материала по дисциплине «Строительная механика».

Целью проведения практических занятий является:

- Обобщение, систематизация, закрепление полученных теоретических знаний по темам конкретным требованиям дисциплины
- Формирование умений применять полученные знания на практике
- Выработка оптимальных решений при решении практических задач предметной области

Ведущей целью практических занятий по дисциплине Сопротивление материалов является формирование профессиональных компетенций и умений – выполнение определенных действий, необходимых в предметной области.

Методические рекомендации призваны обеспечить эффективность самостоятельной работы студентов с литературой, на основе рациональной организации

ее изучения, облегчить подготовку студентов к сдаче экзамена, сориентировать их в направлении изучения материала по поставленным вопросам, дать возможность отработать навыки составления и оформления различных видов документов, как под контролем преподавателя, так и самостоятельно.

Перед подготовкой к занятию студенты должны ознакомиться с планом практического занятия, а также с учебной программой по данной теме что поможет студенту сориентироваться при проработке вопроса и правильно составить план ответа. Следующий этап – изучение конспекта лекций, разделов учебников, ознакомление с дополнительной литературой, рекомендованной к занятию. Студенты должны готовить краткий конспект ответов на все вопросы, знать определения основных категорий.

Разработано для очной формы обучения.

Практическое занятие 1

Тема 1. Общие понятия и определения.

Сооружения и их элементы;

Цель: дать студенту знания в области основ кинематики.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки;

общие теоремы динамики

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы заключается в применении знаний в области кинематики на практике.

Теоретическая часть:

Классификация движения точки:

1. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} = 0$ и $a_n = 0$, то точка движется равномерно и прямолинейно;

2. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} \neq 0$ и $a_n = 0$, то точка движется неравномерно и прямолинейно;

3. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} = 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется равномерно и криволинейно;

4. Если в течение некоторого времени $a_{\tau} \neq 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется неравномерно и криволинейно.

Виды движения твердого тела:

2. *Простейшие движения твердого тела:*

а. *Поступательное движение:* любой отрезок тела перемещается параллельно самому себе;

б. *Вращательное движение вокруг неподвижной оси:* две точки, неразрывно связанные с телом, остаются неподвижны;

2. *Плоскопараллельное (плоское) движение:* каждая точка тела движется в одной и той же плоскости;

3. *Сферическое движение:* одна точка, неразрывно связанная с телом, остается неподвижна;

4. *Свободное движение:* любое перемещение тела ничем не ограничено.

Плоскопараллельное (плоское), сферическое и свободное движения являются совокупностью простейших движений.

При **поступательном движении** все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

При поступательном движении кинематическими характеристиками тела являются линейная скорость и линейное ускорение этого тела

При **вращательном движении** для определения положения вращающегося тела используют понятие *угла поворота тела* φ (рисунок 5). Угол поворота связан со временем зависимостью, называемой уравнением вращательного движения

$$\varphi = f(t).$$

Кинематическими характеристиками вращательного движения являются *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε .

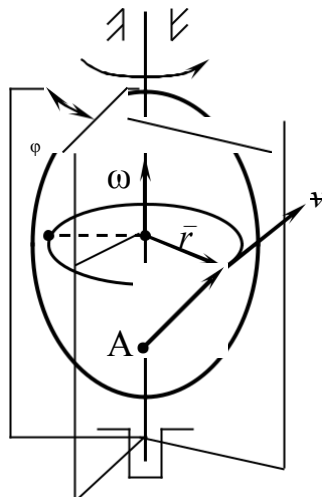


Рисунок 5.

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение тела равно первой производной от его угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор углового ускорения направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, когда вращение ускоренное, и в обратную сторону, когда вращение замедленное.

Величина скорости точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения

$$v = \omega \cdot OM$$

Вектор скорости точки вращающегося тела направлен перпендикулярно прямой, соединяющей эту точку с осью вращения, и перпендикулярно самой оси вращения и определяется по формуле Эйлера

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке твердого тела.

Полное ускорение точки вращающегося тела разлагается на две составляющие: *вращательное* (a_ε) и *осеостремительное* (a_ω), и его величина равна корню квадратному из суммы квадратов этих составляющих

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}.$$

Вращательное ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, когда движение ускоренное и в обратную сторону, когда движение замедленное.

Величина вращательного ускорения точки равна произведению углового ускорения тела на расстояние от точки до оси вращения

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot OM.$$

В векторной форме: $\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$.

Осестремительное ускорение направлено к оси вращения. Величина осестремительного ускорения точки равна произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения

$$a_{\omega} = \omega^2 \cdot OM.$$

В векторной форме: $\vec{a}_{\omega} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

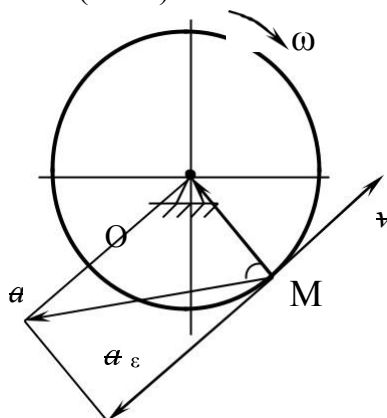


Рисунок 6. Направление векторов скорости и ускорений при замедленном движении вращающегося тела.

Вектор полного ускорения любой точки вращающегося тела направлен под углом φ к прямой, соединяющей эту точку с осью вращения. Тангенс этого угла равен отношению углового ускорения тела к квадрату его угловой скорости

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

При **плоскопараллельном (плоском) движении**:

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть осуществлено как совокупность простейших движений: *поступательного* вместе с выбранной точкой фигуры, называемой полюсом и *вращения* вокруг оси, проходящей через полюс.

Кинематическими характеристиками являются мгновенная угловая скорость ω , мгновенное угловое ускорение ε плоской фигуры, линейная скорость и линейное ускорение, точки выбранной за полюс.

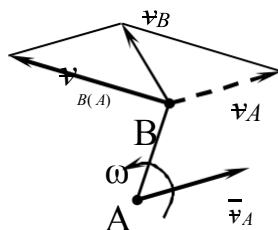


Рисунок 7. Определение скоростей точек плоской фигуры.

Формула распределения скоростей точек при плоском движении (рисунок 7):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B(A)},$$

где $\vec{v}_A$ – скорость полюса A;

$\vec{v}_B$ – скорость любой точки B;

$\vec{v}_{B(A)}$ – скорость, которую получает точка B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A;

$$v_{A(B)} = \omega \cdot AB;$$

Вектор скорости $\vec{v}_{B(A)}$ перпендикулярен прямой AB.

Скорость любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

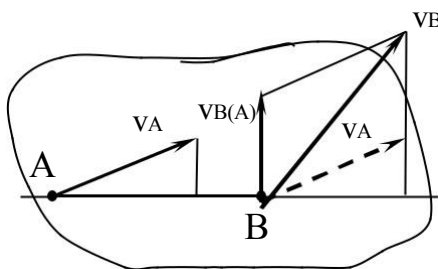


Рисунок 8.

Для определения скоростей плоской фигуры используют наиболее простой и удобный метод, основанный на **теореме о проекциях скоростей двух точек тела**: проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу (рисунок 8)

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Другой простой и наглядный способ определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о *мгновенном центре скоростей*.

Мгновенный центр скоростей – точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Скорость точек плоской фигуры равна произведению мгновенной угловой скорости фигуры (ω , рад/с) на расстояние от точки до МЦС (рисунок 9, а)

$$v_A = \omega \cdot PA,$$

где PA – расстояние от МЦС (т.Р) до точки A .

Вектор скорости плоской фигуры *направлен перпендикулярно прямой*, соединяющей эту точку с МЦС, и лежит в плоскости фигуры.

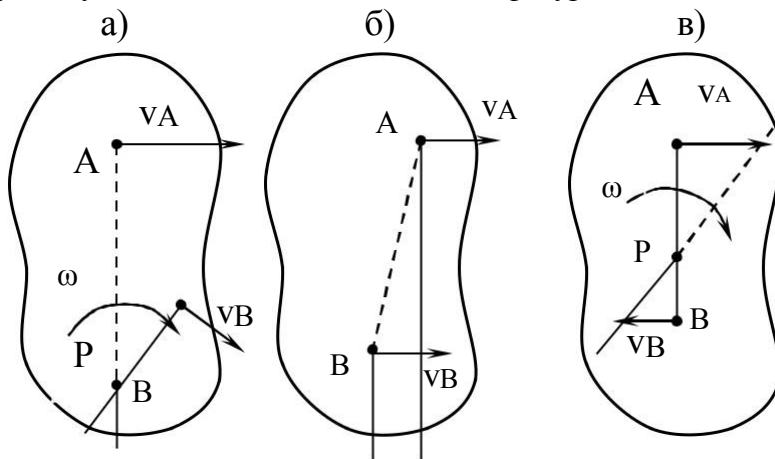


Рисунок 9. Нахождение мгновенного центра скоростей.

Отношение величин скоростей точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦС является величиной постоянной для всех точек плоской фигуры и равно мгновенной угловой скорости фигуры (рисунок 9, а и в)

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \dots = \omega.$$

Для определения МЦС необходимо к известным векторам скоростей двух точек, если они не параллельны, провести перпендикуляры – точка пересечения перпендикуляров будет МЦС (т.Р).

Если векторы скоростей двух точек плоской фигуры равны друг другу и располагаются параллельно, то МЦС находится в бесконечно удаленной точке (рисунок 9, б).

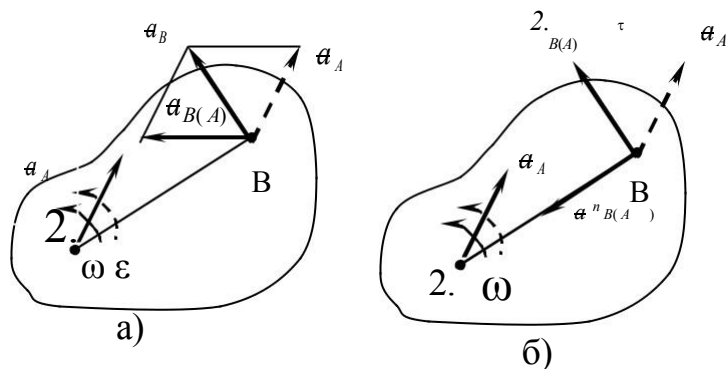


Рисунок 10. Определение ускорений точек плоской фигуры.

2. На рисунке сплошная дуговая стрелка показывает направление угловой скорости ω (направление вращения), а пунктирная – направление углового ускорения ε . При ускоренном вращении обе стрелки будут направлены в одну сторону, а при замедленном – в разные.

Для определения ускорений точек плоской фигуры (рисунок 10, а) используют выражение

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B(A)},$$

где a_A – ускорение полюса A ;

a_B – ускорение любой точки B плоской фигуры;

$a_{B(A)}$ – ускорение, которое получает точка B при вращении плоской фигуры вокруг полюса A .

Ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

При решении задач более удобно вектор $\vec{a}_{B(A)}$ заменить на его составляющие: касательную $\vec{a}_{B(A)}^\tau$ и нормальную $\vec{a}_{B(A)}^n$ (рисунок 10, б), получая выражение следующего вида

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B(A)}^\tau + \vec{a}_{B(A)}^n,$$

где вектор $\vec{a}_{B(A)}^\tau$ направлен перпендикулярно AB в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное и определяется

$$a_{B(A)}^\tau = AB \cdot \varepsilon;$$

вектор $\vec{a}_{B(A)}^n$ всегда направлен от точки B к полюсу A и определяется

$$a_{B(A)}^n = AB \cdot \omega^2.$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно представить как сумму касательной $\vec{a}_A^\tau$ и нормальной $\vec{a}_A^n$ составляющих, тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{B(A)}^\tau + \vec{a}_{B(A)}^n.$$

Если точка B движется криволинейно и ее траектория известна, то a_B можно представить в виде суммы касательной и нормальной составляющих

$$a_B = a_B^\tau + a_B^n.$$

При непоступательном движении плоской фигуры для определения ускорений используют понятие *мгновенный центр ускорений* (МЦУ).

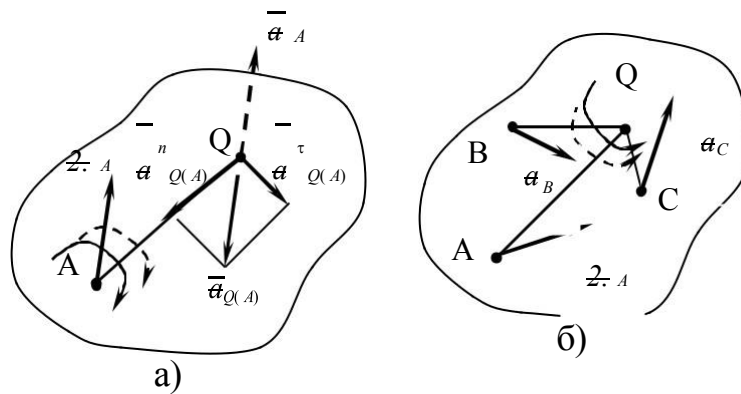


Рисунок 11. Определение мгновенного центра ускорений.

Мгновенный центр ускорений (Q) – точка, ускорение которой в данный момент времени равна нулю.

Положение мгновенного центра ускорений Q (рисунок 11) определяется формулами:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} ;$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} .$$

Откладываем угол α от ускорения $\underline{a}_A$ (в сторону мгновенного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное), получаем полупрямую, на которой на расстоянии AQ лежит мгновенный центр ускорений Q (рисунок 11, а).

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс, то ускорение любой точки B плоской фигуры (рисунок 11, б) определяется по формуле

$$a_B = BQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q.

Отношение величин ускорений точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦУ определяется отношением

$$\frac{a_B}{BQ} = \frac{a_A}{AQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Вопросы и задания:

5. Что изучает кинематика?
6. Перечислите способы задания движения точки.
7. Запишите формулу определения полного ускорения точки, движущейся вращательно.
8. Дайте определение мгновенного центра ускорения.

Практическое занятие 2

Тема 1. Общие понятия и определения.

Кинематический анализ расчетных схем.

Цель: приобретение умений приводить плоскую произвольную систему сил к заданному центру.

Знать: реакции связей,

условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

Уметь: составлять и решать уравнения равновесия;

Актуальность темы объясняется сведением системы с несколькими силами к заданному центру, тем самым упрощая схему и расчет.

Теоретическая часть:

1. Рассмотрим произвольную систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Выберем

произвольную точку O за центр приведения и, воспользовавшись теоремой о параллельном переносе силы, перенесем все силы системы в данную точку, не забывая при переносе каждой силы добавлять присоединенную пару сил.

Полученную таким образом систему сходящихся сил заменим одной силой R , равной главному вектору исходной системы сил. Образовавшуюся при переносе системы пар сил заменим одной парой с моментом M_O , равным геометрической сумме моментов всех пар сил (т.е. геометрической суммой моментов исходной системы сил относительно центра O).

Такой момент называется **главным моментом системы сил относительно центра O** (рис. 1.30).

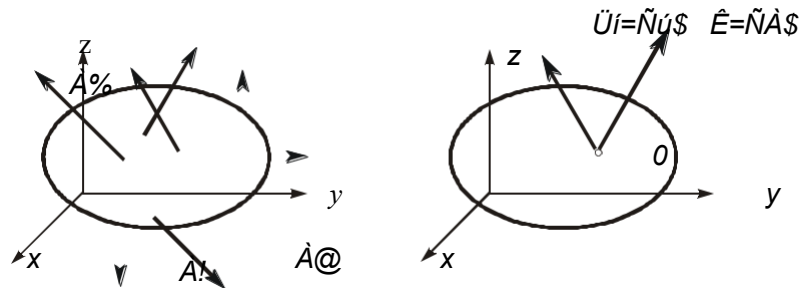


Рис. 1.30. Приведение системы сил к центру

Итак, любую систему сил всегда можно заменить всего двумя силовыми факторами - **главным вектором и главным моментом относительно произвольно выбранного центра приведения**. Очевидно, что главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения (говорят, что главный вектор инвариантен по отношению к выбору центра приведения). Очевидно также, что главный момент таким свойством не обладает, поэтому необходимо всегда указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Вопросы и задания:

5. Что такое главный вектор?
6. Что такое главный момент системы?
7. Приведение системы к заданному центру.
8. Параллельный перенос сил это...?

Практическое занятие 3

Тема 1. Общие понятия и определения.

Кинематический анализ сооружений.

Цель: научиться решать задачи на растяжение - сжатие

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов возникающих в задачах на растяжение – сжатие..

Теоретическая часть:

2. природе различают упругое, упругопластичное и вязкопластичное твердые тела. Упругое тело после снятия внешней нагрузки восстанавливает свои первоначальные размеры и форму. В этом случае деформация тела называется упругой. Упругопластичное тело восстанавливает свои первоначальные размеры и форму не полностью, т. е. имеет место остаточная деформация. В инженерных сооружениях и механических машинах не допустимо появление остаточных деформаций.

От действия внешних нагрузок в поперечных сечениях возникают внутренние силовые факторы, которые определяют, используя метод сечений. Твердое тело, находящееся под действием внешних нагрузок мысленно рассекают на две части и рассматривают равновесие одной из частей. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяют внутренними нагрузками, приложенными в рассматриваемом сечении. Составляя уравнения равновесия оставшейся части от действия внешних и внутренних силовых факторов, находят последние.

Важнейшими понятиями являются напряжения и деформации.

При нагружении тела растягивающими или сжимающими силами определяются напряжения, деформации и удлинения. Внутренняя сила взаимодействия, отнесенная к единице площади, выделенной в окрестности какой-либо точки поперечного сечения тела, называется напряжением в этой точке. Таким образом величина напряжений в каждой точке сечения является мерой внутренних сил, которые возникают в материале в результате воздействия внешних нагрузок. Нормальные напряжения σ при растяжении-сжатии в поперечных сечениях тела определяются из соотношения $\sigma = N/S$, где N - действующее в сечении внутренняя продольная (нормальная) сила; S - площадь поперечного сечения. Напряжения и деформации в пределах упругой деформации связаны между собой законом Гука, т. е. $\sigma = \varepsilon E$, где E - модуль упругости материала (модуль Юнга), ε – относительная продольная деформация.

Расчетные значения напряжений сравнивают с допускаемыми $[\sigma]$, которые определяют путем деления некоторых предельных значений на коэффициент запаса прочности $s([\sigma] = \sigma_{np}/s)$. За предельные значения напряжений принимают предел прочности (для хрупких материалов) или предел текучести (для пластичных материалов), которые

получают при испытаниях стандартных образцов на разрывных машинах. При этом строят 3. координатах напряжение-деформация условную диаграмму растяжения. Условной диаграмму называют потому, что напряжения и деформации вычисляют соответственно по отношению к первоначальной площади сечений и длине образца. Используя условную диаграмму растяжения, необходимо уметь определять механические характеристики материала: предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности и относительное остаточное удлинение при разрыве.

Иногда для изучения значительных пластических деформаций необходимо знать истинную диаграмму растяжения, получаемую путем деления растягивающей силы на истинную площадь поперечного сечения образца (с учетом уменьшения поперечных размеров сечения при растяжении).

Необходимо обратить внимание, что закон Гука, связывающий напряжения и деформации через модуль упругости материала, справедлив только до предела пропорциональности. Продольные деформации при растяжении связаны с поперечными деформациями с помощью коэффициента Пуассона.

При определении напряжений и деформаций в статически неопределимых системах необходимо учитывать, что возникающие при этом в стержнях силы зависят от жесткости стержня, т.е. от площадей поперечных сечений и модулей упругости материала.

Вопросы и задания:

- Какие твердые тела встречаются в природе?
- Какие внутренние силовые факторы возникают в стержнях?
- В чем заключается метод сечений?
- Сформулируйте закон Гука.
- , Что такое истинная диаграмма растяжения?

Практическое занятие 4

Тема 2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.

Нагрузки и внутренние силовые факторы,

Цель: научиться определять внутренние усилия

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов возникающих в задачах на растяжение – сжатие..

Теоретическая часть:

Пример решения задачи на тему «растяжение и сжатие»

Построить по длине бруса, согласно схеме нагружения (рис. 1.1), эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений поперечных сечений. Сделать вывод о прочности бруса, сравнив значения нормальных напряжений в опасном сечении с допустимым, если материал бруса — сталь 3 ($E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 240 \text{ МПа}$).

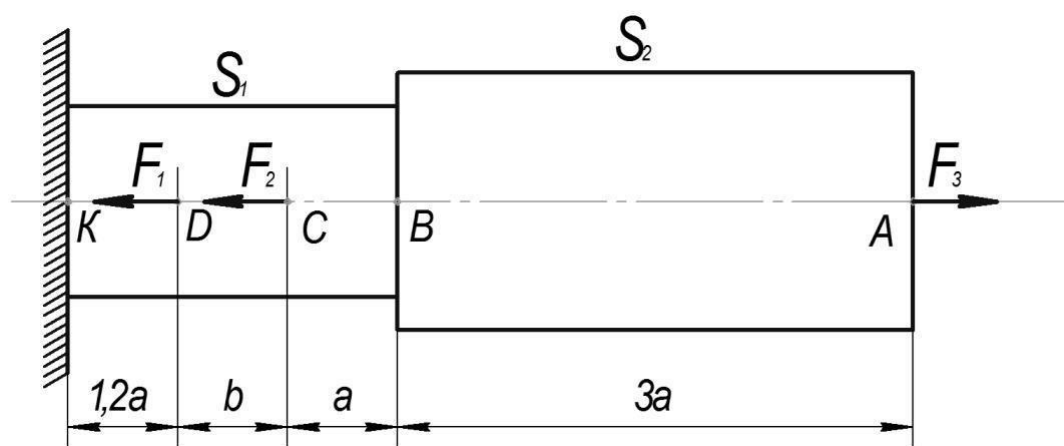


Рисунок 1.1

Дано: $F_1 = 10 \text{ кН}$; $F_2 = 12 \text{ кН}$; $F_3 = 30 \text{ кН}$; $S_1 = 200 \text{ мм}^2$; $S_2 = 300 \text{ мм}^2$;
- $a = 0,3 \text{ м}$, $b = 0,4 \text{ м}$.

Решение:

Имеем четыре участка нагружения (AB , BC , CD , DK), в пределах которых напряжения будут иметь постоянные значения.

Участок 1 (AB). Рассечём, мысленно, стержень в местах, где необходимо определить значения внутренних усилий и внутренних напряжений. Одну из частей (левую) отбросим (рис. 1.2), а для оставшейся составим уравнение равновесия $\sum F_i = N_1 - F_3 = 0$, заменив при этом действие отброшенной части на оставшуюся неизвестной внутренней силой N_1 .



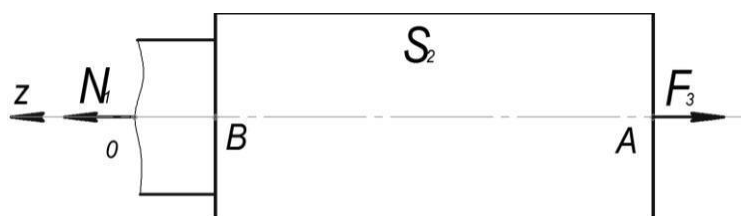
Рисунок 1.2

Тогда, $N_1 = F_3 = 30 \text{ кН}$.

Значение напряжений на участке: $\sigma_1 = \frac{N_1}{S_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{300} = 100 \text{ МПа}$.

Абсолютная деформация участка (относительные перемещения концов участка):
 $\Delta l_{AB} = \frac{\sigma_1 \cdot l_{AB}}{E} = \frac{100 \cdot 900}{2,0 \cdot 10^5} = 0,45 \text{ мм}$.

Участок 2 (BC).



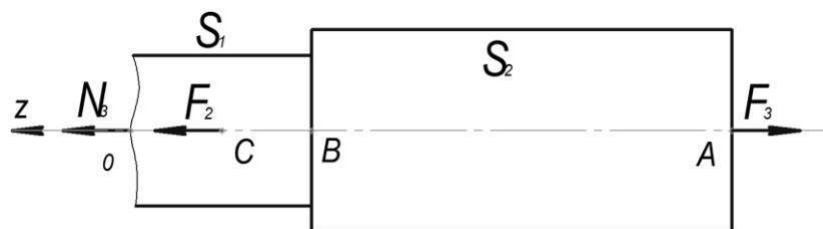
$$N_2 - F_3 = 0,$$

$$N_2 - F_3 = 30 \text{ кН}.$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{200} = 150 \text{ МПа}.$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{\sigma_2 \cdot l_{BC}}{E} = \frac{150 \cdot 300}{2,0 \cdot 10^5} = 0,22 \text{ мм}.$$

Участок 3 (DC).



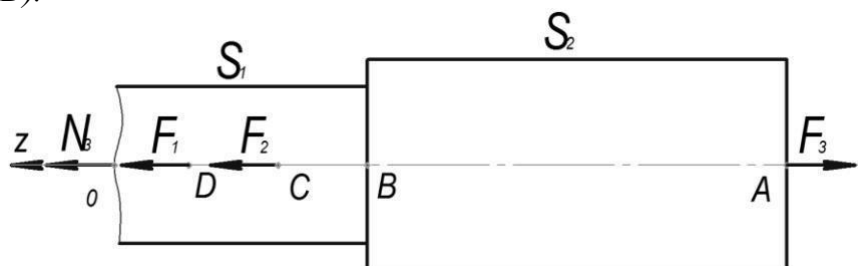
$$N_3 - F_3 + F_2 = 0,$$

$$N_3 = 30 - 12 = 18 \text{ кН.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_1} = \frac{18 \cdot 10^3}{200} = 90 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_{DC} = \frac{\sigma_3 \cdot l_{DC}}{E} = \frac{90 \cdot 400}{2,0 \cdot 10^5} = 0,18 \text{ мм.}$$

Участок 4 (KD).



$$N_4 - F_4 + F_3 + F_2 = 0,$$

$$N_4 = 30 - 12 - 10 = 8 \text{ кН.}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{S_1} = \frac{8 \cdot 10^3}{200} = 40 \text{ МПа.}$$

=

$$\Delta l_{KD} = \frac{\sigma_4 \cdot l_{KD}}{E} = \frac{40 \cdot 360}{2,0 \cdot 10^5} = 0,072 \text{ мм.}$$

Для построения эпюры перемещений поперечных сечений, определим расстояния, на которые переместятся концы участков нагружения относительно жестко заделанного левого конца стержня (точки K).

Перемещение точки D относительно точки K:

$$\delta_{DK} = \Delta l_{KD} = 0,072 \text{ мм.}$$

Тогда, перемещение точки C относительно точки K составит:

$$\delta_{CK} = \delta_{DK} + \Delta l_{KD} = 0,072 + 0,18 = 0,252 \text{ мм.}$$

Аналогично определим перемещения остальных концов участков:

$$\delta_{BK} = \delta_{CK} + \Delta l_{BC} = 0,25 + 0,22 = 0,47 \text{ мм},$$

$$\delta_{AK} = \delta_{BK} + \Delta l_{AB} = 0,47 + 0,45 = 0,92 \text{ мм}.$$

Построив и проанализировав эпюры продольных сил N , нормальных напряжений

$\mathfrak{R}$ и перемещений поперечных сечений (рис. 1.3), делаем вывод, что опасным участком вала является участок BC с $\sigma_{\max} = 150 \text{ МПа}$.

Т.к. $\sigma_{\max} < [\sigma]$, то условие прочности выполняется.

Определим степень загруженности стержня:

$$\frac{\sigma_{\max}}{[\sigma]} = \frac{150}{240} = 0,625.$$

Стержень нагружен на 62,5 %.

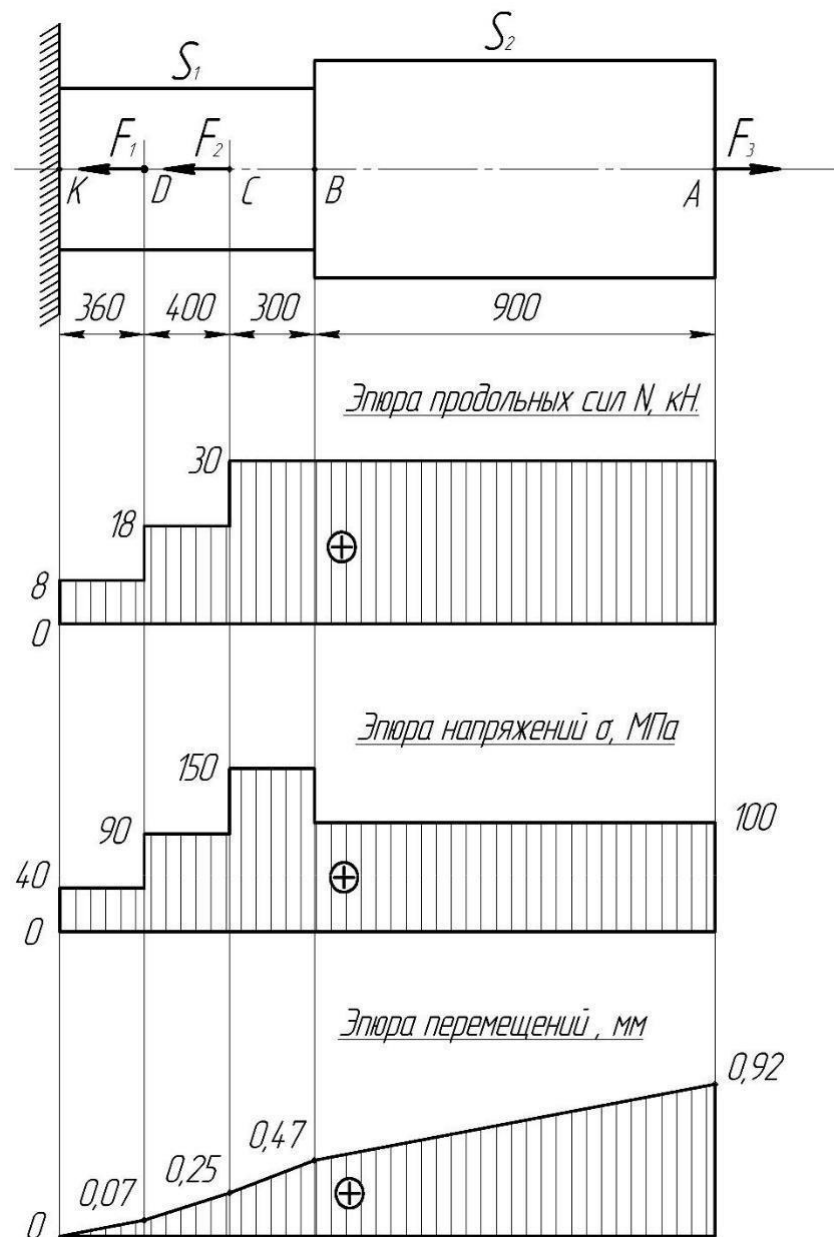


Рисунок 1.3

Вопросы и задания:

- 2) Какие твердые тела встречаются в природе?
Как определяются внутренние силовые факторы?
В чем заключается метод сечений?
Сформулируйте закон Гука.
- в Что такое истинная диаграмма растяжения?

Практическое занятие 5

Тема 2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.

Линии влияния в статически определимых балках,

Цель: научиться решать задачи на сдвиг и кручение

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при сдвиге и кручении.

Теоретическая часть:

Сдвигом называют такой вид напряженного состояния, когда на гранях элемента действуют только касательные напряжения. При этом на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют равные по величине и обратные по знаку касательные напряжения. Этот закон называется законом парности или взаимности касательных напряжений и имеет силу как для одноосного, так и для объемного напряженного состояний. Деформации, возникающие при сдвиге, называют угловыми деформациями или углом сдвига. Опыты показывают, что между напряжениями и деформациями при сдвиге существует линейная зависимость, аналогичная закону Гука при растяжении. Поэтому закон Гука при сдвиге имеет вид $\tau = \gamma G$, где γ - угловая деформация, а G - модуль сдвига.

Следует обратить внимание на то, что модуль продольной упругости, или модуль упругости первого рода E и модуль упругости при сдвиге, или модуль упругости второго рода G для одного и того же материала связан через коэффициент Пуассона μ зависимостью $G = E/[2(1 + \mu)]$. При расчетах на срез обычно принимают, что касательные напряжения распределены равномерно в поперечном сечении стержня и условие прочности на срез имеет вид $\tau = F/S \leq [\tau]$, где F – внешняя поперечная сила.

Допускаемые напряжения $[\tau]$ на сдвиг (срез) составляют некоторую часть от допускаемых напряжений на растяжение. Рассчитывают на срез соединения заклепочные, болтовые, сварные, шпоночные и некоторые другие типы соединений.

При проведении прочностных расчетов на сдвиг (срез) необходимо научиться правильно определять площади среза для односрезных и многосрезных заклепок, а также для углового сварного шва, в котором срез происходит по биссекторной плоскости прямого угла поперечного сечения шва.

Если в поперечном сечении стержня действует крутящий момент M_k , то стержень испытывает кручение. Необходимо, используя метод сечений, научиться строить эпюры крутящих моментов по длине стержня и определять возникающие касательные напряжения, которые определяются из соотношения $\tau = M_k / W_P$, где W_P - полярный момент сопротивления сечения кручению.

В поперечном сечении стержня касательные напряжения распределены неравномерно. Так, для стержня с круглым поперечным сечением касательные напряжения изменяются по линейному закону - от нуля на оси до максимального значения

2. поверхности. Так как сечения, расположенные у оси стержня, нагружены незначительно, то с целью экономии материала при кручении целесообразно использовать пустотелые профили. Крутящий момент в сечении скручиваемого стержня (вала) численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

Вопросы и задания:

1. Что такое сдвиг?
Что такое кручение?
4. Закон Гука при сдвиге .
4. Определение крутящего момента.

Практическое занятие 6

Тема 2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.

Нахождение усилий по линиям влияния.

Общие сведения,

Цель: научиться решать задачи на сдвиг и кручение

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при сдвиге и кручении.

Теоретическая часть:

Пример Решения Задачи На Тему «Кручение»

С стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное круглое сечение, приложены четыре внешних закручивающих момента (T_1 , T_2 , T_3 и T_4), левый конец вала жестко закреплен в опоре, а правый конец – свободен и его торец имеет угловые перемещения относительно левого конца.

Требуется:

3. построить эпюру крутящих моментов;
4. определить диаметры d_1 и d_2 вала из расчета на прочность, при заданном значении $[\tau]$, округлить величину найденных диаметров до ближайшего большего значения из ряда;
- 4) построить эпюру действительных напряжений кручения по длине вала;
- 4) построить эпюру абсолютных углов закручивания φ , приняв $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

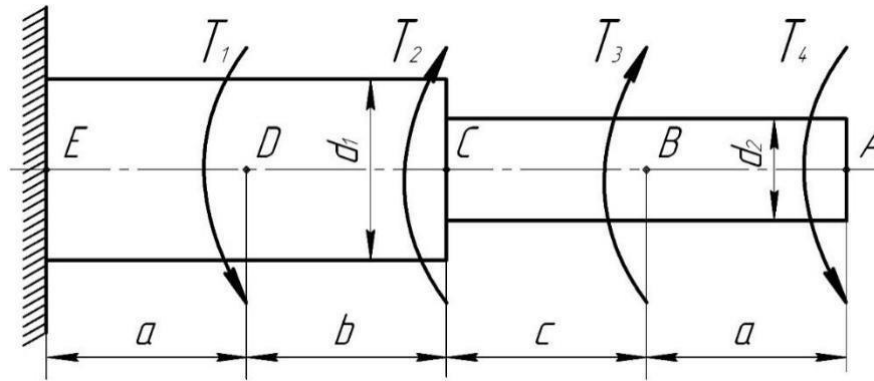


Рисунок 3.1

Исходные данные: $a = b = c = 1,6 \text{ м}$; $T_1 = 5,7 \text{ кНм}$; $T_2 = 2,7 \text{ кНм}$; $T_3 = 1,7 \text{ кНм}$;
 $T_4 = 0,7 \text{ кНм}$; $[\tau] = 45 \text{ МПа}$.

Решение:

2. Определим крутящие моменты (рис. 3.2):

Участок AB:

$$M_{\kappa 1} = T_4 = 0,7 \text{ кНм};$$

Участок BC:

$$M_{\kappa 2} = T_4 - T_3 = 0,7 - 1,7 = -1,0 \text{ кНм};$$

Участок CD:

$$M_{\kappa 3} = T_4 - T_3 - T_2 = 0,7 - 1,7 - 2,7 = -3,7 \text{ кНм};$$

Участок DE:

$$M_{\kappa 4} = T_4 - T_3 - T_2 + T_1 = 0,7 - 1,7 - 2,7 + 5,7 = 2 \text{ кНм}.$$

2. Определим значения диаметров ступеней из условия прочности на опасных участках BC и DC.

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa 3}}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{3,7 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 45}} = 74,4 \text{ мм},$$

Принимаем $d_1 = 80 \text{ мм}$.

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa 2}}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1,0 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 45}} = 48,1 \text{ мм},$$

Принимаем $d_2 = 50 \text{ мм}$.

3. Для построения эпюр напряжений найдем значения напряжений кручения, действующих на участках.

$$\tau_1 = \frac{M_{\kappa 1}}{W_{p1}} = \frac{0,7 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 50^3} = 28 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{M_{\kappa 2}}{W_{p1}} = \frac{-1,0 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 50^3} = -40 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{M_3}{W_5} = \frac{3,7 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 80^3} = -36,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_4 = \frac{M_{\kappa 4}}{W_{p2}} = \frac{2,0 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 80^3} = 19 \text{ МПа}.$$

5. Относительные угловые перемещения концов участков.

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{\kappa 1} \cdot l_{AB}}{G \cdot J_{p1}} = \frac{0,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 50^4} = 0,0224 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{\kappa 2} \cdot l}{G \cdot J_{p1}} = \frac{-1,0 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 50^4} = -0,0320 \text{ рад},$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{\kappa 3} \cdot l}{G \cdot J_{p2}} = \frac{0,0181 \cdot 2,0 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 80^4} = -0,00181 \text{ рад},$$

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{\kappa 4} \cdot l}{G \cdot J_{p2}} = \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 80^4} = 0,0098 \text{ рад}.$$

Абсолютные углы закручивания, относительно жестко заделанного левого конца вала (сечение E).

$$\varphi_{CE} = \varphi_{DE} + \varphi_{CD} = 0,0098 - 0,0181 = -0,0083 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BE} = \varphi_{CE} + \varphi_{BC} = -0,0083 - 0,0320 = -0,0403 \text{ рад},$$

$$\varphi_{AE} = \varphi_{BE} + \varphi_{AB} = -0,0403 + 0,0224 = -0,0179 \text{ рад}.$$

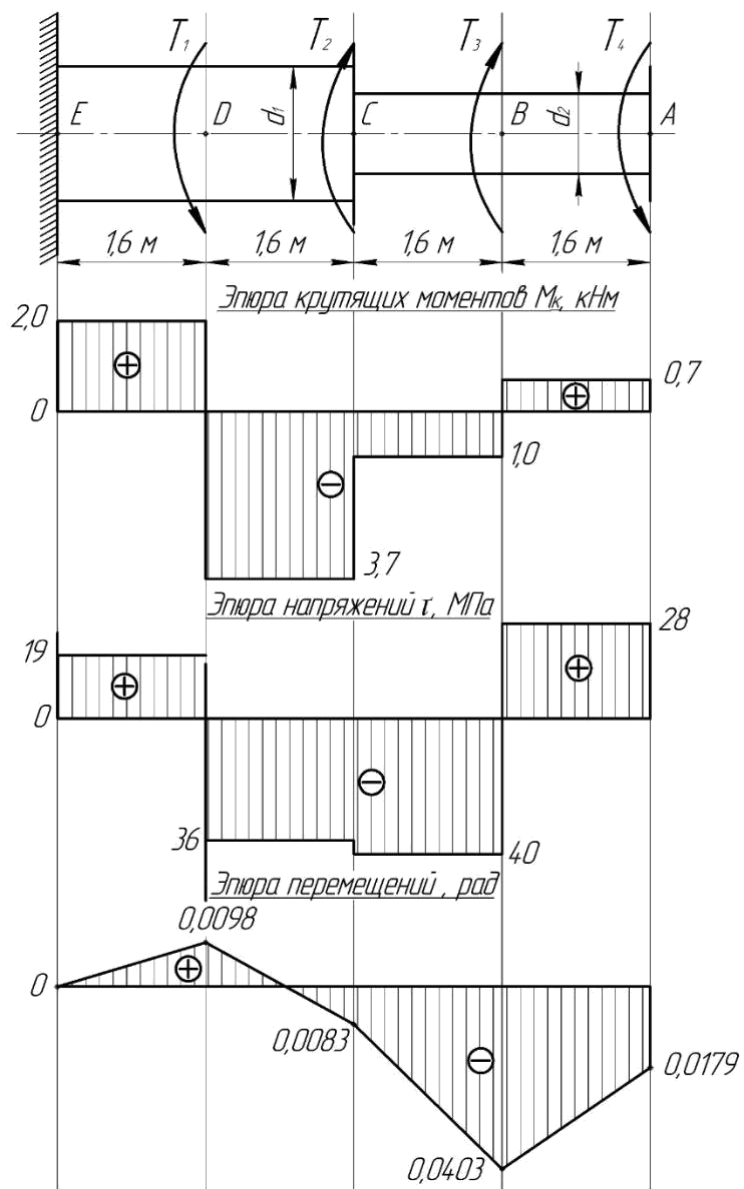


Рисунок 3.2

Вопросы и задания:

2. Что такое сдвиг?
2. Что такое кручение?
4. Закон Гука при сдвиге.
4. Определение крутящего момента.

Практическое занятие 7

Тема 3. Трехшарнирные арки и рамы.

Общие сведения,.

Цель: научиться определять геометрические характеристики поперечных сечений

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения Геометрических характеристик поперечного сечения.

Теоретическая часть:

При расчетах на прочность, жесткость и устойчивость используются геометрические характеристики поперечного сечения бруса: *площадь, осевые и полярный моменты инерции, осевые и полярный моменты сопротивления*. Кроме того, при их определении вспомогательную роль играют *статические моменты и центробежные моменты инерции сечения*.

Напомним определения, свойства и методы вычисления перечисленных характеристик (рис. 2.1).

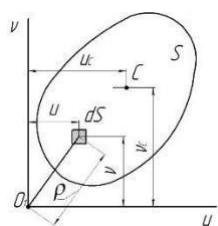


Рисунок 2.1

Площадь сечения . $S = \int_S dS$, где dS – площадь элементарной площадки.

Статический момент площади сечения – сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до данной оси, взятая по всей площади сечения. Статический момент сечения измеряется в единицах длины третьей степени (мм^3 , см^3 , м^3).

Статические моменты сечения относительно осей Ou и Ov :

$$S_u = \int_S v dS = S v_c ,$$

$$S_v = \int_S u dS = S u_c .$$

где u_c и v_c – расстояния от центра тяжести сечения соответственно до осей Ou и Ov .

Статический момент сечения может быть как положительным, так и отрицательным. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, он равен нулю.

Осевой момент инерции сечения – сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до данной оси, взятая по всей площади сечения.

$$J_u = \int_S v^2 dS ;$$

$$J_v = \int_S u^2 dS .$$

Полярный момент инерции – сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до точки (полюса), взятая по всей площади сечения.

$$J_p = \int_S \rho^2 dS .$$

Осевые и полярный моменты инерции – величины существенно положительные. Осевые и полярные моменты инерции сечения измеряются в единицах длины четвертой степени (мм^4 , см^4 , м^4).

Центробежный момент инерции – сумма произведений площадей элементарных площадок на их координаты, взятая по всей площади сечения.

$$J_{uv} = \int_S uv dS .$$

Центробежный момент инерции измеряется в единицах длины четвертой степени (мм^4 , см^4 , м^4), может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Через любую точку, взятую в плоскости сечения, можно провести две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю. Эти оси называются *главными осями* (иногда их называют *главными осями инерции*). Практический интерес представляют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, они называются *главными центральными осями* (для краткости в дальнейшем будем в большинстве случаев называть их просто *главными осями*).

Осевые моменты инерции относительно главных осей (*главные моменты инерции*) экстремальны – относительно одной из них момент инерции максимален, а относительно другой – минимален. Для расчетов на прочность и жесткость при изгибе, сочетании изгиба с растяжением и в ряде других случаев нужно знать положение главных центральных осей и величины соответствующих моментов инерции.

В случае, если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось и ось к ней перпендикулярная, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными центральными осями.

При вычислении главных моментов инерции сечений, составленных из простейших геометрических фигур или стандартных прокатных профилей, широко применяются формулы перехода от центральных к параллельным им нецентральных осям (рис. 2.2).

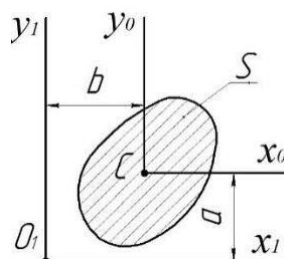


Рисунок 2.2

Эти формулы имеют следующий вид: для осевого момента инерции

$$J_{X_1} = J_{X_0} + a^2 S;$$

для центробежного момента инерции

$$J_{x_1, y_1} = J_{x_0, y_0} + abS.$$

Координаты a и b должны быть подставлены со своими знаками (a и b – координаты начала новой системы координат в старых осях). В частном случае, если исходные оси Ox_0 и Oy_0 главные, $J_{x_0, y_0} = 0$ тогда имеем:

$$J_{x_1, y_1} = abS.$$

Приведем формулы для вычисления моментов инерции прямоугольника, треугольника, круга и кольца.

А. Прямоугольник (рис. 2.3): $J_x = \frac{bh^3}{12}$, где b – сторона, параллельная оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

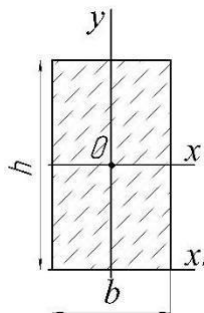


Рисунок 2.3

Для оси, совпадающей с одной из сторон прямоугольника (не главный момент инерции): $J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$.

Б. Равнобедренный треугольник (рис. 2.4).

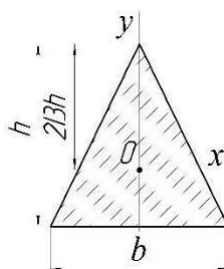


Рисунок 2.4

Главные моменты инерции: $J_x = \frac{bh^3}{36}$; $J_y = \frac{b^3 h}{48}$.

Заметим, что формула J_x дает величину момента инерции любого треугольника относительно оси, параллельной его основанию, но, если треугольник неравнобедренный, указанная ось не будет главной.

В. Круг (рис. 2.5):

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

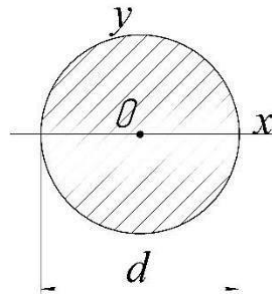


Рисунок 2.5

Г. Кольцо (рис. 2.6): $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4)$, где: $c = \frac{d_0}{d}$, коэффициент трубы.

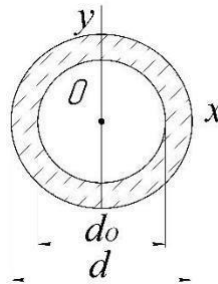


Рисунок 2.6.

Заметим, что для круга и кольца все центральные оси главные и моменты инерции относительно этих осей равны между собой. Этим же свойством обладает любое сечение, у которого два главных центральных момента инерции одинаковы.

При вычислении моментов инерции сложных сечений (составленных из простейших фигур или прокатных профилей) координаты их центра тяжести определяют по формулам:

$$u_c = \frac{S_y}{S} = \frac{\sum S_i u_i}{\sum S_i};$$

$$v_c = \frac{S_u}{S} = - \frac{\sum S_i v_i}{\sum S_i},$$

где: $S_i; u_i; v_i$ – соответственно площадь и координаты центра тяжести каждой из составляющих фигур; $S; S_y; S_u$ – площадь и статические моменты всего сечения.

Моменты инерции (осевые и центробежные) сложных сечений относительно данных осей определяют путем суммирования соответствующих моментов инерции составляющих фигур относительно тех же осей.

При этом используются формулы перехода от центральных к параллельным им нецентральному осям.

В тех случаях, когда сечение не имеет ни одной оси симметрии, сначала вычисляют моменты инерции относительно некоторых целесообразно выбранных центральных осей Ox_0 и Oy_0 (исходные оси), затем определяют угол наклона главных осей по отношению к исходным и величины главных моментов инерции.

Связь между моментами инерции относительно исходных осей (Ox_0, Oy_0) и осей, повернутых на произвольный угол α (рис. 2.7), имеет вид:

$$J_{x_1} = J_{x_0} + J_{y_0} + \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cos 2\alpha - J_{xy_0} \sin 2\alpha ;$$

$$J_{y_1} = J_{x_0} + J_{y_0} - \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cos 2\alpha + J_{xy_0} \sin 2\alpha .$$

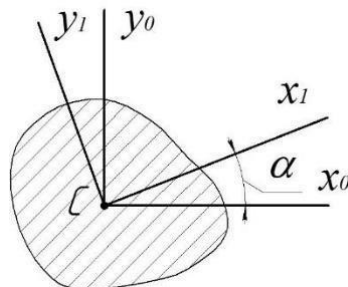


Рисунок 2.7

Угол поворота главных осей по отношению к исходным определяется из зависимости

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2J_{xy_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} .$$

Эта формула дает два значения угла α_0 : α'_0 и $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$. При $J_{x_0} > J_{y_0}$, угол α'_0 дает положение главной оси, относительно которой момент инерции максимален.

Положительный угол α_0 следует откладывать от оси x_0 против хода часовой стрелки.

Для определения положения (угла наклона) главных осей можно применять формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha_{0x} = \frac{2J_{xy_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{0y} = \frac{2J_{xy_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} ,$$

где: α_{0x} , и α_{0y} , – углы, образуемые главными осями x и y соответственно с осью x_0 ; J_{x_0} и J_{y_0} – главные моменты инерции.

Главные моменты инерции можно вычислить, подставляя в нее последовательно $\alpha_0 = \alpha'_0$ и $\alpha_0 = \alpha''_0$, но практически удобнее пользоваться формулами, не содержащими тригонометрических функций. Эти формулы имеют вид:

$$J_{\max} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{xy_0}^2} ;$$

$$J_{\min} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{xy_0}^2} .$$

Вопросы и задания:

2. Определение геометрических характеристик простых сечений?
2. Определение геометрических характеристик сложных сечений?
3. Определение моментов инерции.
4. Что такое сортамент.

Практическое занятие 8

Тема 3. Трехшарнирные арки и рамы.

Расчет трехшарнирных арок и рам

Цель: научиться решать задачи на прямой поперечный изгиб

Знать: принципы сопротивления конструкционных материалов, методы и алгоритмы проектирования различных механических систем; методы и алгоритмы конструирования элементов различных механических систем, методики расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и их конструкций;

Уметь: осуществлять рациональный выбор конструкционных и эксплуатационных материалов; производить расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении, изгибе и сложном нагружении, при статическом и ударном приложении нагрузок; выполнять стандартные виды прочностных расчетов.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения внутренних факторов при изгибе.

Теоретическая часть:

При изгибе стержни подвергаются воздействию поперечной силы или изгибающего момента. Изгиб называется чистым, если действует только изгибающий момент, и поперечным, если действует нагрузка, перпендикулярная оси стержня. Брус (стержень), работающий на изгиб, обычно называют балкой. Балки являются наиболее часто встречающимися элементами сооружений и машин, воспринимающими нагрузки от других элементов конструкций и, передающими их тем частям, которые поддерживают балку (чаще всего опорам).

В строительных сооружениях и машиностроительных конструкциях чаще всего можно встретить следующие случаи крепления балок: консольные - с одним заделанным концом (с жесткой заделкой), двухопорные - с одной шарнирно-неподвижной опорой и с одной шарнирно-подвижной опорой и многоопорные балки. Если опорные реакции могут быть найдены из одних уравнений статики, то балки называют статически определимыми. Если же число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики, то такие балки называют статически неопределимыми. Для определения реакций в таких балках приходится составлять дополнительные уравнения - уравнения перемещений. При плоском поперечном изгибе все внешние нагрузки перпендикулярны к оси балки.

Определение внутренних силовых факторов, действующих в поперечных сечениях балки, следует начинать с определения опорных реакций. После этого используем метод сечений, мысленно рассекаем, балку на две части и рассматриваем равновесие одной части. Взаимодействие частей балки заменяем внутренними факторами: изгибающим моментом и поперечной силой.

Поперечная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций всех сил, а изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от сечения. Знаки действующих сил и моментов следует определять в соответствии с принятыми правилами. Необходимо научиться правильно определять

равнодействующую силу и изгибающий момент от равномерно распределенной по длине балки нагрузки.

Следует иметь в виду, что при определении напряжений, возникающих при изгибе, принимают следующие допущения: сечения плоские до изгиба остаются плоскими и после изгиба (гипотеза плоских сечений); продольные соседние волокна не давят одно на другое; зависимость между напряжениями и деформациями линейная.

При изучении изгиба следует обратить внимание на неравномерность распределения нормальных напряжений в поперечном сечении балки. Нормальные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения пропорционально расстоянию от нейтральной оси. Следует уметь определять напряжения изгиба, которые зависят от величины действующего изгибающего момента M и момента сопротивления сечения при изгибе W (осевой момент сопротивления сечения).

Условие прочности при изгибе: $\sigma = M / W \leq [\sigma]$. Значение W зависит от размеров, формы и расположения поперечного сечения относительно оси.

Наличие поперечной силы, действующей на балку, связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях, а по закону парности касательных напряжений - и в продольных сечениях. Касательные напряжения определяют по формуле Д. И. Журавского.

Поперечная сила сдвигает рассматриваемое сечение относительно смежного. Изгибающий момент, складывающийся из элементарных нормальных усилий, возникающих в поперечном сечении балки, поворачивает сечение относительно смежного, чем и обусловлено искривление оси балки, т. е. ее изгиб.

Когда балка испытывает чистый изгиб, то по всей длине балки или на отдельном ее участке в каждом сечении действует изгибающий момент постоянной величины, а поперечная сила в любом сечении данного участка равна нулю. При этом в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения.

Для того чтобы глубже разобраться в физических явлениях изгиба и в методике решения задач при расчете на прочность и жесткость, необходимо хорошо усвоить геометрические характеристики плоских сечений, а именно: статические моменты сечений, моменты инерции сечений простейшей формы и сложных сечений, определение центра тяжести фигур, главные моменты инерции сечений и главные оси инерции, центробежный момент инерции, изменение моментов инерции при повороте осей, теоремы о переносе осей.

При изучении этого раздела следует научиться правильно строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, определять опасные сечения и действующие в них напряжения. Помимо определения напряжений следует научиться определять перемещения (прогибы балки) при изгибе. Для этого используется дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (упругой линии), записанное в общем виде.

Для определения прогибов проводится интегрирование уравнения упругой линии. При этом следует правильно определять постоянные интегрирования C и D исходя из условий опирания балки (граничных условий). Зная величины C и D , можно определить угол поворота и прогиб любого сечения балки. Изучение сложного сопротивления обычно начинают с косоугольного изгиба.

Явление косоугольного изгиба особенно опасно для сечений со значительно отличающимися друг от друга главными моментами инерции; балки с таким сечением хорошо работают на изгиб в плоскости наибольшей жесткости, но даже при небольших углах наклона плоскости внешних сил к плоскости наибольшей жесткости в балках возникают значительные дополнительные напряжения и деформации. Для балки круглого сечения косоугольный изгиб невозможен, так как все центральные оси такого сечения являются главными и нейтральный слой всегда будет перпендикулярен плоскости внешних сил. Косоугольный изгиб невозможен и для балки квадратного сечения.

При определении напряжений в случае внецентренного растяжения или сжатия необходимо знать положение главных центральных осей сечения; именно от этих осей отсчитывают расстояния точки приложения силы и точки, в которой определяют напряжения.

Приложенная эксцентрично сжимающая сила может вызвать в поперечном сечении стержня растягивающие напряжения. В связи с этим внецентренное сжатие является особенно опасным для стержней из хрупких материалов, которые слабо сопротивляются растягивающим усилиям.

В заключение следует изучить случай сложного сопротивления, когда тело испытывает одновременно несколько деформаций: например, изгиб совместно с кручением, растяжение-сжатие совместно с изгибом и т. д. При этом следует иметь в виду, что изгибающие моменты, действующие в различных плоскостях, могут складываться как векторы.

Пример решения задачи на тему «прямой поперечный изгиб»

Для заданной схемы балки (рис. 4.1) требуется написать выражения внутренних поперечных сил Q и изгибающих моментов M_u для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M_u , найти $M_u^{\max}$ и подобрать стальную двутавровую балку с указанием её номера. Допускаемое напряжение на изгиб принять $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$. Значения моментов сопротивления сечения при изгибе W_x для балок двутаврового сечения (ГОСТ 8239–89).

Исходные данные: $a = 3,2 \text{ м}, b = 4,4 \text{ м}, c = 2,4 \text{ м}, l = 13 \text{ м},$
 $M = 10 \text{ кНм}, F = 13 \text{ кН}, q = 16 \text{ кН/м}.$

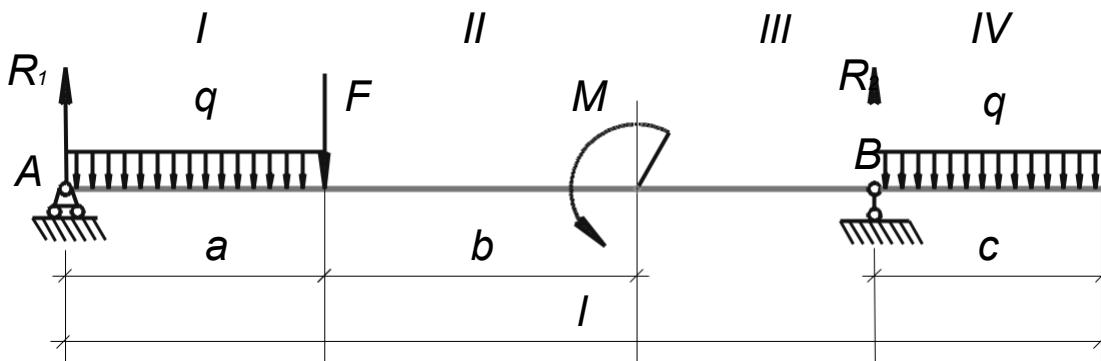


Рисунок 4.1

Решение:

1. Определим опорные реакции R_1 и R_2 :

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0, R_1 - q \cdot a - F + R_2 - q \cdot c = 0 ; \\ \sum m_A (F_i) &= 0; \\ R_2 &= \frac{0,5qa^2 + Fa - M + qc(l - 0,5c)}{l - c} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 3,2^2 + 13 \cdot 3,2 - 10 + 16 \cdot 2,4(13 - 0,5 \cdot 2,4)}{13 - 2,4} = 53,5 \text{ кН}. \\ R_1 &= qa + F - R_2 + qc = 16 \cdot (3,2 + 2,4) + 13 - 53,5 = 49,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка: $\sum m_B (F_i) = 0$,

$$-R_1(l-c) + qa(l-c-0,5a) + F(l-c-a) + M - 0,5qc^2 =$$

$$= -49,1(13-2,4) + 16 \cdot 3,2(13-2,4-0,5 \cdot 3,2) + 16(13-2,4-3,2) + 10 - 0,5 \cdot 16 \cdot 2,4^2 = 0$$

Опорные реакции найдены верно.

3. Найдем значения изгибающих моментов M_u и поперечных сил Q на концах участков нагружения методом сечения.

I Участок (рис. 4.2): $0 \leq z_1 \leq a$,

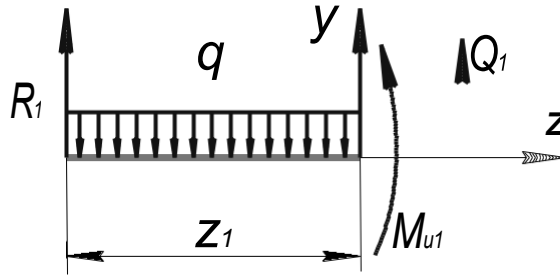


Рисунок 4.2

$$Q_1 = R_1 - qz_1,$$

$$M_{u1} = R_1 z_1 - 0,5qz_1^2,$$

при $z_1 = 0$, $Q_1 = R_1 = 49,1 \text{ кН}$; $M_{u1} = 0$

при $z_1 = a = 3,2 \text{ м}$, $Q_1 = R_1 - qa = 49,1 - 16 \cdot 3,2 = -2,1 \text{ кН}$;

$M_{u1} = R_1 \cdot a - 0,5qa^2 = 49,1 \cdot 3,2 - 0,5 \cdot 16 \cdot 3,2^2 = 75,2 \text{ кНм}$.

II Участок (рис. 4.3): $0 \leq z_2 \leq a + b$,

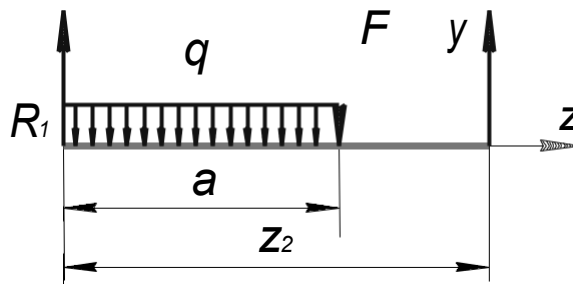


Рисунок 4.3

$Q_2 = R_1 - qa - F = 49,1 - 16 \cdot 3,2 - 13 = -15,1 \text{ кН}$;

$M_{u2} = R_1 \cdot z_2 - qa(z_2 - 0,5a) - F(z_2 - a)$

при $z_2 = 3,2 \text{ м}$,

$M_{u2} = R_1 \cdot a - qa(a - 0,5a) - F(a - a) = 49,1 \cdot 3,2 - 16 \cdot 3,2(3,2 - 0,5 \cdot 3,2) = 75,2$

кНм,

при $z_2 = 7,6 \text{ м}$,

$M_{u2} = 49,1 \cdot 7,6 - 16 \cdot 3,2(7,6 - 0,5 \cdot 3,2) - 13(7,6 - 3,2) = 8,76 \text{ кНм}$.

IV Участок (рис. 4.4): $0 \leq z_4 \leq c$

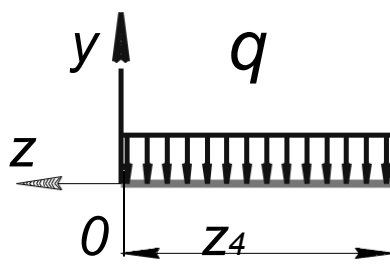


Рисунок 4.4

$$Q_4 = qz_4,$$

$$M_{u4} = -0,5qz_4^2,$$

при $z_4 = 0$, $Q_4 = 0$, $M_{u4} = 0$,

при $z_4 = 2,4$ м, $Q_4 = 16 \cdot 2,4 = 38,4$ кН;

$$M_{u4} = -0,5 \cdot 16 \cdot 2,4^2 = -46,08 \text{ кНм}.$$

III Участок (рис. 4.5) : $c \leq z_3 \leq l - a - b$ ($2,4 \leq z_3 \leq 5,4$)

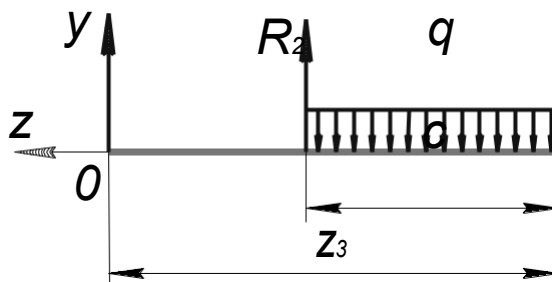


Рисунок 4.5

$$Q_3 = qc - R = 16 \cdot 2,4 - 53,5 = -15,1 \text{ кН},$$

$$M_{u3} = -qc(z_3 - 0,5c) + R_2(z_3 - c).$$

при $z_3 = 2,4$, $M_{u3} = -16 \cdot 2,4(2,4 - 0,5 \cdot 2,4) + 53,5 \cdot 0 = -46,08 \text{ кНм}.$

при $z_3 = 5,4$ м, $M_{u3} = -16 \cdot 2,4(5,4 - 0,5 \cdot 2,4) + 53,5(5,4 - 2,4) = -0,78 \text{ кНм}.$

Определим координату сечения $z_1^{\max}$, при которой $Q = 0$ и $M_{u1} = \max$.

$$R_1 - qz_1^{\max} = 0$$

$$z_1^{\max} = \frac{R_1}{q_1} = \frac{49,1}{16} = 3,07 \text{ м}.$$

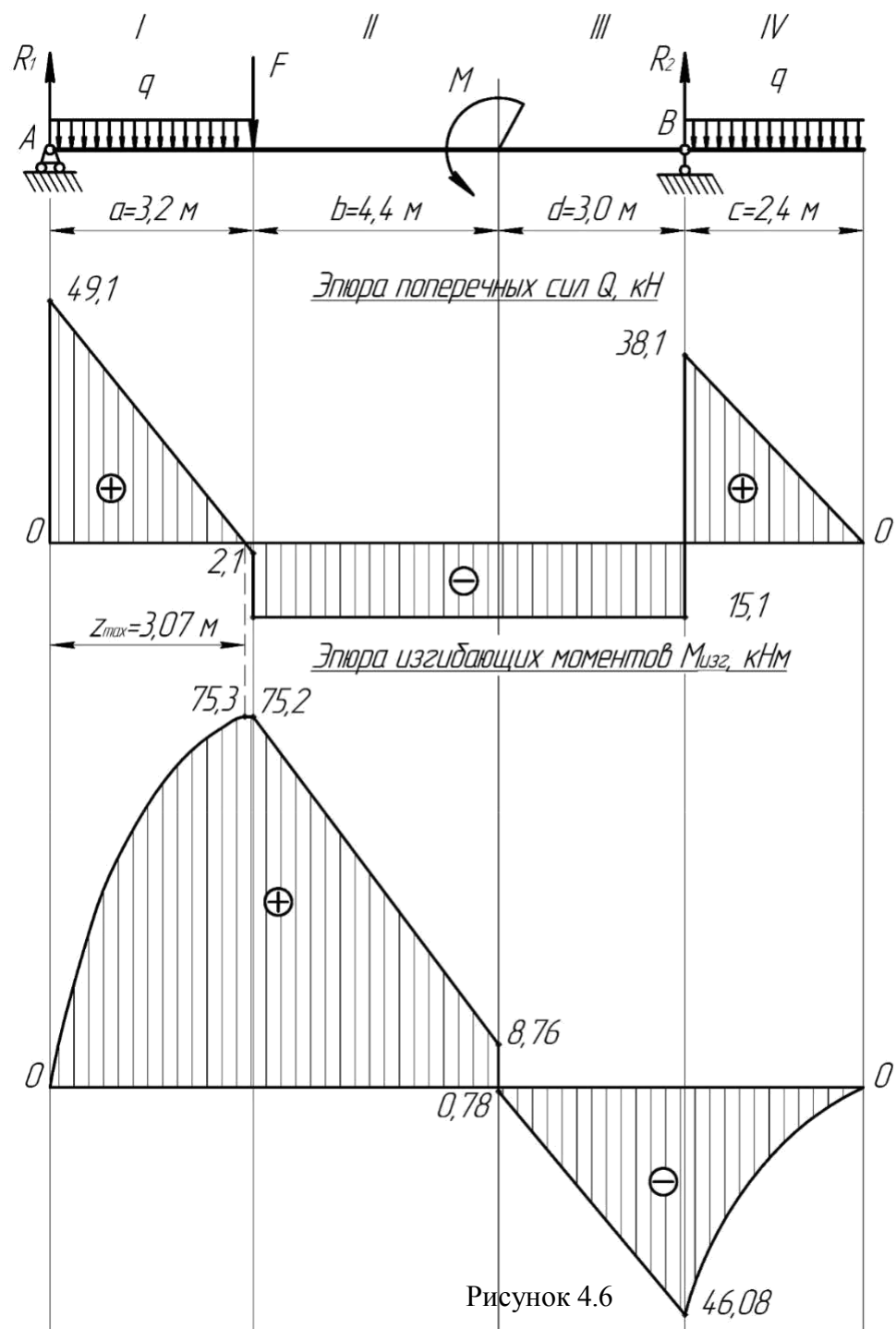
$$M_{u1}^{\max} = R_1 \cdot z_1^{\max} - 0,5q(z_1^{\max})^2 = 49,1 \cdot 3,07 - 0,5 \cdot 16 \cdot 3,07^2 = 75,3 \text{ кНм}.$$

Из построенных эпюр (рис. 4.6) видно, что опасным является сечение, расположенное на 3,07 м от левого конца балки с $M_{u1}^{\max} = 75,3 \text{ кНм}.$

Определим минимально необходимый момент сопротивления сечения балки при изгибе $W_x^{\min}$, из условия прочности по нормальным напряжениям.

$$W_{x\min} = \frac{M_{u1}^{\max}}{[\sigma]} = \frac{75,3 \cdot 10^6}{150} = 502252 \text{ мм}^3.$$

Назначаем двутавр №33 (ГОСТ 8239-89) с осевым моментом сопротивления сечения $W_x = 597 \text{ см}^3.$



Вопросы и задания:

2. Что такое изгиб?
2. Построение эпюр при изгибе.
4. Внутренние силовые факторы .
4. Определение изгибающего момента.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

4. Строительная механика и металлические конструкции машин : учебное пособие / В.А. Глотов, А.В. Зайцев, В.Ю. Игнатьюгин. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 95 с. : ил., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-5266-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426940](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426940) (30.10.2016).
5. Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций : учебное пособие : 2-х частях / В.А. Пшеничкина, Г.В. Воронкова, С.С. Рекунов, А.А. Чураков ; Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, Министерство образования и науки Российской Федерации. - Волгоград : Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, 2015. - Ч. I. - 92 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. - ISBN 978-5-98276-733-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434827](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434827) (30.10.2016).
6. Строительство и механика : краткий справочник / В.В. Леденев ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. - 244 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. - ISBN 978-5-8265-1392-7 ; То же [Электронный ресурс]. URL:[//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444650](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444650) (30.10.2016).

Дополнительная литература:

3. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров.М. : Инфра-Инженерия, 2014. - 480 с. - ISBN 978-5-9729-0076-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234783](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234783) (30.10.2016).
4. Строительная механика для архитекторов: учебник : в 2-х т. / Ю.Э. Сеницкий, А.К. Синельник ; Министерство образования и науки РФ, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный архитектурно-строительный университет». - Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2014. - Т. II. - 280 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9585-0563-0 ; То же [Электронный ресурс]. -URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149) (30.10.2016).

Интернет-ресурсы:

4. Электронно-библиотечная система IPRbooks
5. Электронная библиотечная система «Университетская библиотека on-line»
6. Электронно-библиотечная система Лань

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов направления подготовки
07.03.03 Дизайн архитектурной среды

Пятигорск, 2026

Содержание

Введение	
1. Общая характеристика самостоятельной работы студента.....	
2. План - график выполнения самостоятельной работы	
3. Методические рекомендации по изучению теоретического материала	
3.1. Вид самостоятельной работы: самостоятельное изучение литературы	
3.2. Вид самостоятельной работы: подготовка к практическим работам	
4. Методические указания	
5. Методические указания к экзамену	
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	

Введение

Методические указания и задания для выполнения самостоятельной работы студентами по дисциплине «Строительная механика» по направлению подготовки бакалавров: 07.03.03 Дизайн архитектурной среды.

Методическое пособие содержит весь необходимый материал для выполнения самостоятельной работы по дисциплине «Строительная механика»

В данном методическом пособии приведены темы и вопросы для самостоятельного изучения.

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента

Самостоятельная работа – это вид учебной деятельности, выполняемый учащимся без непосредственного контакта с преподавателем или управляемый преподавателем опосредованно через специальные учебные материалы; неотъемлемое обязательное звено процесса обучения, предусматривающее прежде всего индивидуальную работу учащихся в соответствии с установкой преподавателя или учебника, программы обучения.

На современном этапе самостоятельную работу студента следует разделить на работу с бумажными источниками информации, т.е. учебниками, методическими пособиями, монографиями, журналами и т.д. и электронными источниками информации, т.е. доступ к электронным ресурсам через Интернет.

Сегодня самостоятельную работу студента невозможно представить без использования информационной сети – Интернет. Необходимость использования Интернета возникает не только при подготовке к практическим и семинарским занятиям, но, в большей степени, при написании различных исследовательских и творческих работ. Многие современные монографии, периодические журналы изданы только в электронном виде и с ними можно познакомиться только в Интернете.

Цели и задачи самостоятельной работы: формирование способностей к самостоятельному познанию и обучению, поиску литературы, обобщению, оформлению и представлению полученных результатов, их критическому анализу, поиску новых и неординарных решений, аргументированному отстаиванию своих предложений, умений подготовки выступлений и ведения дискуссий.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Компетенция (ии), индикатор (ы)	Уровни сформированности компетенци(ий)			
	Минимальный уровень не достигнут (Неудовлетворитель- но) 2 балла	Минимальный уровень (удовлетворитель- но) 3 балла	Средний уровень (хорошо) 4 балла	Высокий уровень (отлично) 5 баллов
<i>Компетенция:</i> ОПК-4. Способен применять методики определения технических параметров проектируемых объектов				
Результаты обучения по дисциплине: Индикатор: ИД-1	Не способен выполнять сводный анализ исходных данных, данных задания на проектирование средовых объектов и комплексов, и их наполнения и данных задания на разработку проектной документации. Проводить поиск проектного решения в соответствии с	Частично способен выполнять сводный анализ исходных данных, данных задания на проектирование средовых объектов и комплексов, и их наполнения и данных задания на разработку проектной документации. Проводить поиск	Способен выполнять сводный анализ исходных данных, данных задания на проектирование средовых объектов и комплексов, и их наполнения и данных задания на разработку проектной документации. Проводить поиск	Способен в полной мере выполнять сводный анализ исходных данных, данных задания на проектирование средовых объектов и комплексов, и их наполнения и данных задания на разработку проектной документации. Проводить

	особенностями проектируемого объекта архитектурной среды. Проводить расчёт технико-экономических показателей предлагаемого проектного решения.	проектного решения в соответствии с особенностями проектируемого объекта архитектурной среды. Проводить расчёт технико-экономических показателей предлагаемого проектного решения.	проектного решения в соответствии с особенностями проектируемого объекта архитектурной среды. Проводить расчёт технико-экономических показателей предлагаемого проектного решения.	поиск проектного решения в соответствии с особенностями проектируемого объекта архитектурной среды. Проводить расчёт технико-экономических показателей предлагаемого проектного решения.
ИД-2	Не способен применять объемно-пространственные и технико-экономические требования к основным типам средовых объектов и комплексов, включая требования, определяемые функциональным назначением проектируемого объекта и особенностями участка застройки, а также требования обеспечения безбарьерной среды жизнедеятельности . Основы проектирования конструктивных решений объектов архитектурной среды. Основы проектирования средовых составляющих архитектурно-дизайнерских объектов и	Частично способен применять объемно-пространственные и технико-экономические требования к основным типам средовых объектов и комплексов, включая требования, определяемые функциональным назначением проектируемого объекта и особенностями участка застройки, а также требования обеспечения безбарьерной среды жизнедеятельности. Основы проектирования конструктивных решений объектов архитектурной среды. Основы проектирования средовых составляющих	Способен выбирать применять объемно-пространственные и технико-экономические требования к основным типам средовых объектов и комплексов, включая требования, определяемые функциональным назначением проектируемого объекта и особенностями участка застройки, а также требования обеспечения безбарьерной среды жизнедеятельности. Основы проектирования конструктивных решений объектов архитектурной среды. Основы проектирования	Способен в полной мере применять объемно-пространственные и технико-экономические требования к основным типам средовых объектов и комплексов, включая требования, определяемые функциональным назначением проектируемого объекта и особенностями участка застройки, а также требования обеспечения безбарьерной среды жизнедеятельности. Основы проектирования конструктивных решений объектов архитектурной среды. Основы проектирования

	комплексов, включая, освещение, микроклимат, акустику, в том числе с учетом потребностей маломобильных групп граждан и лиц с ОВЗ Основные строительные материалы, изделия и конструкции, облицовочные материалы, их технические, технологические, эстетические и эксплуатационные характеристики. Основные технологии производства строительных и монтажных работ. Методики проведения технико-экономических расчётов проектных решений.	архитектурно-дизайнерских объектов и комплексов, включая, освещение, микроклимат, акустику, в том числе с учетом потребностей маломобильных групп граждан и лиц с ОВЗ Основные строительные материалы, изделия и конструкции, облицовочные материалы, их технические, технологические, эстетические и эксплуатационные характеристики. Основные технологии производства строительных и монтажных работ. Методики проведения технико-экономических расчётов проектных решений.	средовых составляющих архитектурно-дизайнерских объектов и комплексов, включая, освещение, микроклимат, акустику, в том числе с учетом потребностей маломобильных групп граждан и лиц с ОВЗ Основные строительные материалы, изделия и конструкции, облицовочные материалы, их технические, технологические, эстетические и эксплуатационные характеристики. Основные технологии производства строительных и монтажных работ. Методики проведения технико-экономических расчётов проектных решений.	средовых составляющих архитектурно-дизайнерских объектов и комплексов, включая, освещение, микроклимат, акустику, в том числе с учетом потребностей маломобильных групп граждан и лиц с ОВЗ Основные строительные материалы, изделия и конструкции, облицовочные материалы, их технические, технологические, эстетические и эксплуатационные характеристики. Основные технологии производства строительных и монтажных работ. Методики проведения технико-экономических расчётов проектных решений.
--	--	---	---	---

2. План - график выполнения самостоятельной работы

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
3 семестр					
ОПК-4 (ИД-1)	Самостоятельное изучение литературы по темам № 1-6	Собеседование	3,24	0,36	3,6
ОПК-4 (ИД-1)	Подготовка к практическим занятиям	Отчёт (устный)	12,96	1,44	14,4
Итого			16,2	1,8	18

3. Методические рекомендации по изучению теоретического материала

3.1. Вид самостоятельной работы: самостоятельное изучение литературы

Изучать учебную дисциплину «Строительная механика» рекомендуется по темам, предварительно ознакомившись с содержанием каждой из них в программе дисциплины. При теоретическом изучении дисциплины студент должен пользоваться соответствующей литературой. Примерный перечень литературы приведен в рабочей программе

Для более полного освоения учебного материала студентам читаются лекции по важнейшим разделам и темам учебной дисциплины. На лекциях излагаются и детально рассматриваются наиболее важные вопросы, составляющие теоретический и практический фундамент дисциплины.

Итоговый продукт: конспект лекций

Средства и технологии оценки: Собеседование

Критерии оценивания: Оценка «отлично» выставляется студенту, если в полном объеме изучен курс данной дисциплины и выполнены практические задания

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если достаточно полно изучен курс данной дисциплины и выполнены практические задания

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, недостаточно если полно изучен курс данной дисциплины и выполнены практические задания

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если отсутствуют знания и практические навыки по данной дисциплине.

Темы для самостоятельного изучения:

1. Общие понятия и определения.
2. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.
3. Трехшарнирные арки и рамы.
4. Плоские статически определимые фермы.
5. Построение линий влияния усилий в стержнях ферм.
6. Расчет шпренгельных ферм.

3.2. Вид самостоятельной работы: подготовка к практическим работам

Итоговый продукт: отчет по практическому занятию

Средства и технологии оценки: защита отчета

Критерии оценивания: Оценка «отлично» выставляется студенту, если в полном объеме изучен курс данной дисциплины и выполнены практические задания

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если достаточно полно изучен курс данной дисциплины и выполнены практические задания

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, недостаточно, если полно изучен курс данной дисциплины и выполнены практические задания

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если отсутствуют знания и практические навыки по данной дисциплине

3.3. Вид самостоятельной работы: подготовка к лабораторным работам

Итоговый продукт: отчет по лабораторному занятию

Средства и технологии оценки: защита отчета

Критерии оценивания: Оценка «отлично» выставляется студенту, если в полном объеме изучен курс данной дисциплины и выполнены лабораторные задания

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если достаточно полно изучен курс данной дисциплины и выполнены лабораторные задания

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, недостаточно, если полно изучен курс данной дисциплины и выполнены лабораторные задания

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если отсутствуют знания и практические навыки по данной дисциплине

4. Методические указания

1. Методические указания для проведения практических работ по дисциплине «Строительная механика» студентами направления подготовки 08.03.01 Строительство.
2. Методические указания для проведения лабораторных работ по дисциплине «Строительная механика» студентами направления подготовки 08.03.01 Строительство.
3. Методические указания для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Строительная механика» студентами направления подготовки 08.03.01 Строительство.

5. Методические указания к экзамену

Процедура проведения экзамена осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются три вопроса (один вопрос для проверки знаний и два вопроса для проверки умений и навыков студента).

Для подготовки по билету отводиться 30 минут.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования справочными таблицами

При проверке практического задания, оцениваются:

— знание параметра;

— последовательность и рациональность выполнения.

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

1. Основные задачи предмета «Строительная механика».
2. Опорные устройства, виды нагрузок.
3. Классификация сооружений и расчетных схем.
4. Основные разрешающие уравнения «Строительной механики».
5. Плоская и пространственная система.
6. Стержень, оболочка, пластика-определение.
7. Принцип независимости действия сил.
8. Геометрическая независимость системы.
9. Статическое определение систем.
10. Определение линий влияния.
11. Какие задачи можно решить с примирением линий влияния.
12. Матрица влияния- определения.
13. Трех шарнирные арки, рамы.
14. Фермы, как стержневые системы.
15. Балочные и консольно-балочные фермы.
16. Методы расчета статически определенных ферм.
17. Ординаты линий влияния.
18. Линии влияния шарнирно - опертой балки.
19. Линии влияния M и Q в сечениях консольной балки.
20. Линии влияния M и Q в сечениях однопролетной балки.
21. Линии влияния усилий в сечениях трех шарнирной балки.
22. Нулевые точки в трех шарнирных арках и рамах.
23. Прочность строительных конструкций. Критерии и основные оценки.
24. Элементы строительных конструкций.
25. Диаграмма Прандля.
26. Нормальные и поперечные силы в трех шарнирных арках, кривая давления.
27. Метод линий влияния при расчете статически определимых систем.
28. Определение реакции в распорных системах.
29. Кинематический метод определения усилий.
30. Система с одной степенью свободы.
31. Установившиеся вынужденные колебания.
32. Сейсмические колебания.
33. Поперечные колебания балки с распределёнными параметрами.
34. Основные виды динамических нагрузок.
35. Что называется явлением резонанса.
36. Поперечные колебания балки с распределенными параметрами.
37. Дайте определение степенного и свободного кручения.
38. Определение понятия секторальной площади. Точка называется секторальным полюсом.
39. Основные положения без моментной и моментной теории оболочек.
40. Цилиндрические оболочки как геометрические формы.
41. Основные положения деформационной теории пластичности.
42. Понятия релаксации.
43. Принцип Вольтера.
44. Определение свойств пластичности и ползучести материалов.
45. Формула Чебушева.
46. Принцип Лагранжа в равновесных системах.
47. Линии влияния опорных реакций в консольной балки.
48. Линии влияния опорных реакций однопролетных балок.
49. Основные группы узлов стержневых систем

50. Виды стержневых систем.
51. Методы исследования устойчивости стержневых систем.
52. Определение усилий однопролетной балки с помощью линий влияния (действие сосредоточенных сил).
53. Определение усилий однопролетной балки с помощью линий влияния (действие равномерно распределенной нагрузки).
54. Определение опорных реакций в трехшарнирных арках.
55. Определение внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке.
56. Определение внутренних усилий в арке при вертикальной нагрузке.
57. Уравнение рациональной оси трехшарнирной арки.
58. Построение линий влияния при узловой передаче нагрузки.
59. Метод допускаемых напряжений.
60. Метод предельного равновесия.
61. Метод двух моментов.
62. Метод статических испытаний
63. Закон Гаусса.
64. Расчет статически неопределимых систем смешанным способом.
65. Расчет статически неопределимых систем комбинированным способом.
66. Расчет конструкций матричным методом.
67. Расчет статически неопределимых систем методом сил.
68. Расчет статически неопределимых систем методом перемещений.
69. Предмет и задачи устойчивости.
70. Критерии определения устойчивости упругих систем.
71. Устойчивость стержней с различными концевыми условиями их закрепления.
72. Выражение изгибающих моментов и поперечных сил в концевых сечениях стержней.
73. Устойчивость рам при действии узловых нагрузок.
74. Определение перемещений в стержневой системе.
75. Уравнение трех моментов.
76. Предмет и задачи динамики сооружений.
77. Поперечные колебания балки с распределенными параметрами.
78. Метод конечных элементов.
79. Определение предельного состояния системы при растяжении – сжатии.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Строительная механика и металлические конструкции машин : учебное пособие / В.А. Готов, А.В. Зайцев, В.Ю. Игнатьев. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2015. - 95 с. : ил., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-5266-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426940](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426940) (30.10.2016).
2. Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций : учебное пособие : 2-х частях / В.А. Пшеничкина, Г.В. Воронкова, С.С. Рекунов, А.А. Чураков ; Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, Министерство образования и науки Российской Федерации. - Волгоград : Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, 2015. - Ч. I. - 92 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. - ISBN 978-5-98276-733-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434827](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=434827) (30.10.2016).
3. Строительство и механика : краткий справочник / В.В. Леденев ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. - 244 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн.. - ISBN 978-5-8265-1392-7 ; То же [Электронный ресурс]. URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444650](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=444650) (30.10.2016).

Дополнительная литература:

1. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров.М. : Инфра-Инженерия, 2014. - 480 с. - ISBN 978-5-9729-0076-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234783](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234783) (30.10.2016).
2. Строительная механика для архитекторов: учебник : в 2-х т. / Ю.Э. Сеницкий, А.К. Синельник ; Министерство образования и науки РФ, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный архитектурно-строительный университет». - Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2014. - Т. II. - 280 с. : ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9585-0563-0 ; То же [Электронный ресурс]. -URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=256149) (30.10.2016).