МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине
«Геометрия»
для направления подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии
направленность (профиль) Информационные системы и технологии обработки цифрового контента

Пятигорск
2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Геометрия» проводятся в учебной аудитории с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
	2 семестр		
1	Основные приложения метода координат на плоскости. Преобразование системы координат.	4	4
2	Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.	4	4
3	Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.	4	4
4	Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс.	4	4
4	Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.	4	4
5	Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.	4	4
6	Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия	4	4

	параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.		
7	Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой.	4	4
8	Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.	4	4
	Итого за 2 семестр	32	32

4. Содержание практических работ

Практическое занятие 1-2.

Основные приложения метода координат на плоскости и в пространстве.

Преобразование системы координат.

Цель: сформировать представление о координатных системах на плоскости и в пространстве, о возможности их преобразования в зависимости от поставленной задачи

Содержание:

декартовы координаты, полярные координаты, цилиндрические координаты, сферические координаты

расстояние между двумя точками на плоскости и в трехмерном пространстве

деление отрезка в данном отношении

выражение площади треугольника через координаты его вершин

Теоретическая часть:

Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве.

Декартовы координаты на прямой вводятся следующим образом: Выберем на прямой определенное направление и некоторую точку O (начало координат), далее укажем единицу масштаба. Рассмотрим произвольную точку M на оси l. Декартовой координатой x точки M будем называть величину направленного отрезка OM .

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2, равно величине отрезка M_1M_2, взятая по абсолютной величине, т.е. $\rho(M_1M_2) = |x_2 - x_1|$.

Две взаимно перпендикулярные прямые образуют декартову прямоугольную систему координат на плоскости. Горизонтальную прямую называют осью Ox или осью абсцисс, вертикальную прямую называют осью Oy или осью ординат. Координатные оси разбивают плоскость на четыре квадранта. Декартовые координаты x и y точки M называют соответственно величины направленных отрезков $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

Три взаимно перпендикулярные оси в трехмерном пространстве с общим началом O и единой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в трехмерном пространстве. Указанные оси соответственно называют: осью Ox или осью абсцисс; осью Oy или осью ординат; осью Oz или осью аппликат.

Пусть $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ проекции произвольной точки M пространства на оси Ox , Oy и Oz . Декартовыми прямоугольными координатами x , y , z точки M называют соответственно величины направленных отрезков $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ и обозначают $M(x,y,z)$.

Простейшие задачи аналитической геометрии.

1. Расстояние между двумя точками на плоскости и в трехмерном пространстве.

а) Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Расстояние между этими двумя точками: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, откуда $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

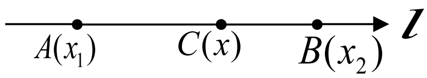
Если рассмотреть две точки, данные в трехмерном пространстве: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними можно получить по формуле аналогичной формуле, т.е.
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть на некоторой оси l заданы две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ и пусть точка $C(x)$, лежащая на той оси l делит отрезок AB внутренним или внешним образом в отношении $\lambda = \frac{Вел.AC}{Вел.CB}$. Требуется выразить координату x точки C через координаты точек A и B , а также через λ .

Пусть сперва точка $C(x)$ делит отрезок AB внутренним образом

Тогда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$.



Пусть, теперь, в прямоугольной системе координат на плоскости даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и точка $C(x, y)$ делит отрезок AB внутренним или внешним образом в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$. Требуется выразить точки $C(x, y)$ через координаты точек A и B, а также через λ. Для этого проектируем точки A, B, C на оси координат. Тогда, очевидно, что имеют место формулы: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ и $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$

.

3. Площадь треугольника.

Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости заданы вершины треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Выразим площадь треугольника через координаты его вершин:

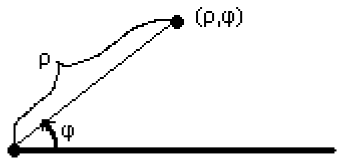
$S = \pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$. Формулу можно записать в виде определителя третьего порядка:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полярная система координат на плоскости

Для того, чтобы задать полярную систему координат на плоскости, надо зафиксировать, во-первых, точку начала координат, а во-вторых, луч, выходящий из этой точки. Необходимо также определить единичный отрезок и положительное направление отсчета угла между лучом и отрезком, соединяющим начало координат с какой-либо точкой плоскости.

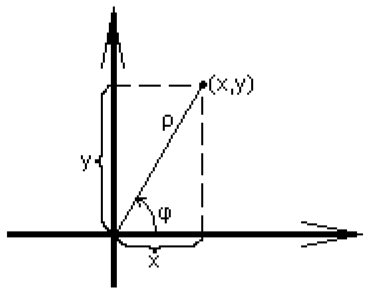
Положение точки на плоскости задаётся двумя числами. Первое – расстояние от точки до начала координат, а второе – угол между зафиксированным лучом и отрезком, соединяющим точку и начало координат.



Обычно направление отсчета угла выбирают против часовой стрелки. Стандартное обозначение координат точки в полярной системе – (ρ, φ). Существуют формулы перехода между заданными стандартным образом декартовой и полярной системами координат. Если они друг другу соответствуют (т.е. должны совпадать начала координат в обеих системах, луч полярной системы координат должен совпадать с “положительной” частью первой оси декартовой системы, должны быть одинаковыми единичные отрезки), то

$x = \rho\cdot\cos\varphi$,

$y = \rho\cdot\sin\varphi$.



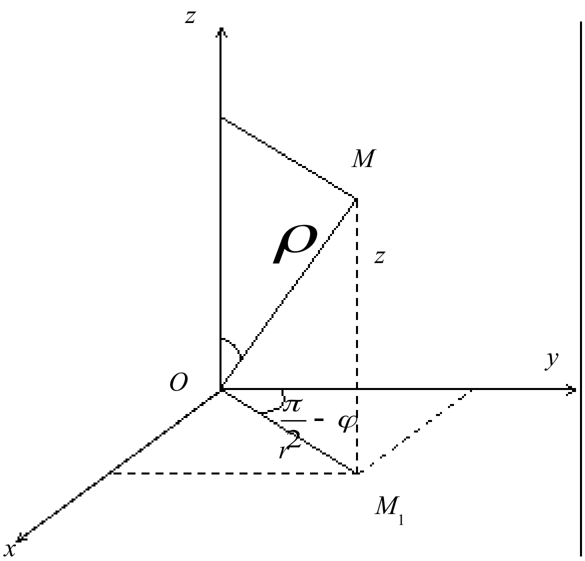
В других случаях формулы зависят от постановки задачи, но получить их легко из геометрических соображений. С помощью этих формул можно осуществлять переход между двумя системами координат, преобразовывать координаты точек, уравнения кривых и т.д.

Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве

Как и на плоскости, в пространстве положение любой точки может быть определено тремя координатами в различных системах координат, отличных от декартовой прямоугольной системы. Цилиндрическая и сферическая системы координат являются обобщением для пространства полярной системы координат, которая была подробно рассмотрена выше.

Введем в пространстве точку *O* и луч *l*, выходящий из точки *O*, а также вектор $\overline{n} \perp l$, $|\overline{n}| = 1$. Через точку *O* можно провести единственную плоскость, перпендикулярную вектору нормали. Для введения соответствия между цилиндрической, сферической и декартовой прямоугольной системами координат точку *O* совмещают с началом декартовой прямоугольной системы координат, луч *l* – с положительным направлением оси *x*, вектор нормали – с осью *z*.

Цилиндрическая и сферическая системы координат используются в тех случаях, когда уравнение кривой или поверхности в декартовой прямоугольной системе координат выглядят достаточно сложно, и операции с таким уравнением представляются трудоемкими.



Пусть $OM = \rho$, $OM_1 = r$; $MM_1 = z$;
Если из точки *M* опустить перпендикуляр MM_1 на плоскость, то точка M_1 будет иметь на плоскости полярные координаты (r, φ).

φ

Определение.
Цилиндрическими координатами точки *M* называются числа (r, φ, z), которые определяют положение точки *M* в пространстве.

Определение.
Сферическими координатами точки *M* называются числа (ρ, θ, φ), где θ – угол между *OM* и осью *z*.

Связь цилиндрических и прямоугольных декартовых координат точки

$$z = z; \quad x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi;$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Связь сферических и прямоугольных декартовых координат точки

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \ \ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \ \ z = \rho\cos\theta.$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \ \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти точку, симметричную точке $M(-3,1)$ относительно начала координат.

Задача 2. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-1,3)$, $B(2,-1)$, $C(5,3)$ является равнобедренным.

Задача 3. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1,1)$ и $C(2,6)$. Найти координаты двух других вершин.

Задача 4. Найти координаты центра тяжести системы двух материальных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, в которых сосредоточены массы m_1 и m_2.

Задача 5. Даны вершины однородного проволочного треугольника: A(-1,3), B(2, -1), C (-2, 3). Определить центр тяжести треугольника ABC.

Задача 7. Даны вершины однородной четырехугольной пластинки: A(-1, 1), B(3, -1), C(2, 2), Д(-2, -2). Найти координаты центра тяжести этой пластинки.

Задача 8. Даны вершины треугольника A(2; -5), B(1; -2), C(4;7). Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

Вопросы:

1. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в трехмерном пространстве.
2. Постройте точки A (1, -2, 4) и B (2, 0, -5) в прямоугольной системе координат.
3. Как находят расстояние между двумя точками?
4. Напишите формулы деления отрезка в данном отношении.
5. Проекция направленного отрезка на оси координат.
6. Выражение площади прямоугольника через координаты вершин.
7. Полярные координаты точки на плоскости. Связь с прямоугольными координатами.

Практическое занятие 3-4.

Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.

Цель: сформировать представление о возможных способах задания прямой на плоскости, выработать умение выбирать соответствующее уравнение для конкретной задачи

Содержание:

уравнение прямой с угловым коэффициентом

общее уравнение прямой

уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

уравнение прямой, проходящей через две данные точки

уравнение прямой в отрезках

Теоретическая часть:

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1–й степени и, обратно, каждое уравнение 1–й степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: y=kx+b, где k – угловой коэффициент прямой, b – начальная ордината.

Пример: Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1)$ и образующей с прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45°.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o,y_o)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0), \text{ т.е. } y - 1 = k_1(x + 2)$$

В равенстве необходимо определить угловой коэффициент k_1. Для этого воспользуемся условием, что искомая прямая образует с данной прямой $3x–y+2=0$ угол в 45°. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 3$. Тогда имеем:

$$tg45^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_2},$$

откуда $1 + 3k_1 = 3 - k_1$, или $k_1 = \frac{1}{2}$. Подставив $k_1 = \frac{1}{2}$, получим: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $x - 2y + 4 = 0$ – искомое уравнение прямой.

Общее уравнение прямой: Ax+By+C=0, где A, B, C – произвольные числа. Очевидно, A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Замечание. Прямая линия в отрезках отсекает от координатного угла прямоугольный треугольник, площадь которого определяется формулой $S_\Delta = \frac{1}{2}|a||b|$.

Пример. Дана прямая 5x-3y-30=0. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатных осей.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках, разделив все члены данного уравнения на 30: $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} = 1$. Из уравнения видно, что a=6;b=-10. Следовательно, $S_\Delta = \frac{1}{2}|6||-10| = 30$ кв.ед.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$, где θ - угол, который образует прямая с положительным направлением оси *OX*.

Пример. Дано уравнение прямой 5x – 12y + 26 = 0. Привести к нормальному виду.

Решение. Для перехода от общего уравнения прямой к нормальному необходимо обе части общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку C. В данном уравнении A=5, B= -12, C=26. Так как C>0, то нормирующий множитель берем со знаком минус, т.е. $M = -\frac{1}{\pm\sqrt{25 + 144}} = -\frac{1}{13}$. Умножив на $M = -\frac{1}{13}$ данное уравнение, получим: $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ - нормальное уравнение прямой: $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $P = 2$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Дано общее уравнение прямой . Составьте уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Задача 2. Составьте уравнение прямой с угловым коэффициентом , проходящей через точку .

Задача 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки и .

Задача 4. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 60 = 0$. Написать:

1) уравнение с угловым коэффициентом;
2) уравнение в отрезках;
3) нормальное уравнение.

Задача 5. Прямая на плоскости отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв.ед.

Вопросы:

1. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости? Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Для каких прямых угловой коэффициент не определяется?
3. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.
4. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках?
5. Запишите нормальное уравнение прямой.
6. Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Практическое занятие 5-6.
Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
Расстояние от точки до прямой.

Цель: сформировать умение находить угол между двумя прямыми, определять параллельность и перпендикулярность двух прямых

Содержание:
формулы для вычисления угла между прямыми

Теоретическая часть:

Пусть даны две прямые $\left.\begin{matrix} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{matrix}\right\}$.Угол между двумя прямыми на плоскости может быть вычислен по формуле: $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1=k_2$. Необходимое и достаточное условием перпендикулярности двух прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно (-1): $k_1k_2=-1$.

Замечание. Если уравнения двух прямых заданы в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угловые коэффициенты этих прямых будут иметь вид: $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$.

1) Пусть прямые параллельны. Тогда $k_1=k_2$ или $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$, т.е. если в уравнениях двух прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны. Если при этом имеем отношение $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

2) Пусть прямые перпендикулярны. Тогда выполняется равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $\dfrac{A_1}{B_1} \cdot \dfrac{A_2}{B_2} = -1$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ - это есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде.

Пример. Даны уравнения двух прямых: $2x - y + 3 = 0$ и $4x - 2y + 5 = 0$. Как расположены эти прямые? Здесь $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $C_1 = 3$, $A_2 = 4$, $B_2 = -2$, $C_2 = 5$. Здесь выполняются соотношения: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{3}{5}$, т.е. прямые параллельны.

Пример. Даны уравнения двух прямых $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. Как расположены эти прямые?

Решение. Выпишем коэффициенты при переменных x и y: $A_1 = 3$ $B_1 = -2$, $C_1=1$, $A_2 = 2$, $B_2 = 3$, $C_2 = 4$. Рассмотрим выполнение условие перпендикулярности. Имеем: $A_1A_2 + B_1B_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$. Условие выполнено. Следовательно, данные прямые перпендикулярны.

Чтобы найти расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой, необходимо: 1)уравнение данной прямой привести к нормальному виду; 2)подставить вместо текущих координат, координаты точки $M_0(x_0,y_0)$.

$|d| = | x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - P|$

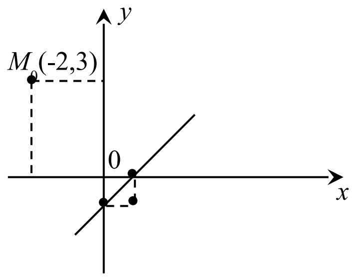
Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3)$ до прямой $3x - 4y - 2 = 0$.

Решение. Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель

$$M = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Получим нормальное уравнение $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0$.

Тогда отклонение $d = \frac{3}{5}\cdot(-2) - \frac{4}{5}\cdot 3 - \frac{2}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{12}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{20}{5} = -4$



Отрицательное значение для отклонения d, указывает на то, что данная точка M_0(-2,3) лежит от данной прямой с той же стороны, что начало координат. Искомое расстояние $|d| = |-4| = 4$.

Вопросы и задачи:

1. Провести через точку пересечения прямых $x–y–3=0$, $2x+3y–11=0$, прямую, параллельную прямой $5x – 4y – 17 = 0$.
2. Луч света, проходящий через точку $M_1(3;–1)$, отражается от прямой $2x–y-1=0$ и после этого проходит через точку $M_2(5;3)$. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.
3. Найти проекцию точки $M(3;2)$ на прямую $3x – 2y + 1 = 0$.
4. Даны вершины треугольника: $A(3;1)$, $B(-5; -5)$, $C(-1;4)$. Найти уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.
5. Даны вершины треугольника: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.
6. Не вычисляя координаты вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через эти вершины параллельно противолежащим сторонам. Стороны треугольника заданы уравнениями: $5x–2y+6=0$; $4x–y+3=0$ и $x+3y–7=0$.
7. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.
9. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми: $3x – 4y – 10 = 0$; $6x – 8y+5=0$.

Вопросы:

1. Дайте определение угла между двумя прямыми. Как определяется косинус угла между двумя прямыми на плоскости?
2. Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности прямых, заданных а) общими уравнениями; б) уравнениями с угловым коэффициентом.
3. Как определить расстояние между а) точкой и прямой; б) двумя параллельными прямыми?
4. Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ признаком параллельности прямых?

Практическое занятие 7-8.
Кривые второго порядка.
Окружность. Эллипс.

Цель: сформировать представление об уравнении кривой второго порядка, уравнении окружности, уравнении эллипса, научиться определять основные параметры кривых по заданному уравнению

Содержание:

кривая второго порядка

окружность

эллипс, каноническое уравнение эллипса, фокусы, эксцентриситет и директрисы эллипса

Теоретическая часть:

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром. Каноническое уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Если $x_0 = y_0 = 0$, то центр окружности находится в начале координат и уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$

<u>Пример</u>. Определить центр и радиус окружности, данной уравнением: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$

<u>Решение</u>. Данное уравнение представляет окружность, так как отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при квадратах координат равны между собой. Приводим данное уравнение к каноническому виду. Для этого перепишем данное уравнение в виде:

$(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) + 21 = 0$ или

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) + 21 - 16 - 9 = 0$ или

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$

Откуда заключаем, что центр окружности имеет координаты $C(4,-3)$ и $R = 2$.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2*a*. Обозначим расстояние между фокусами $2c$. Сумму расстояний до фокусов $2a$. Ось X направим через фокусы, а ось Y перпендикулярна оси X и делит расстояние между фокусами пополам. Тогда точки F_1, F_2 - фокусы эллипса имеют координаты. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Пусть точка $M(x;y)$ - лежит на эллипсе.

Тогда $\left|\vec{F_1M}\right| + \left|\vec{F_2M}\right| = 2a$. Имеем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Возводим в квадрат

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(cx-a^2\right)^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Поскольку по условию $\left(a^2-c^2\right)>0$, то обозначим $\left(a^2-c^2\right)=b^2$.

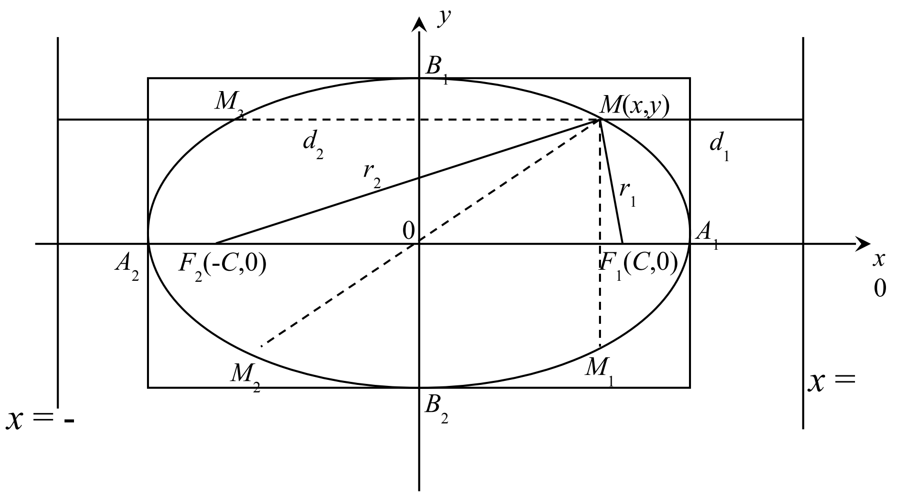
Получаем $\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$; $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

Окончательно получаем: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

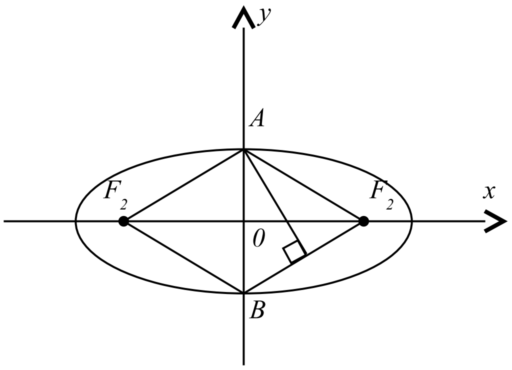
Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Если *a* = *b*, то эллипс становится окружностью.

Величина $\dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается через букву ε.

Прямые $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются директрисами эллипса. Директрисы эллипса обладают свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.



<u>Пример</u>. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.
<u>Решение</u>: По условию задачи $AF_1 = 5$ и $AK = 4,8$. Тогда площадь ромба $S = AF_1 \cdot AK = 4,8 \cdot 5 = 24$.



С другой стороны, как известно, площадь равна половине произведения диагоналей, т.е. $S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot F_1F_2$; но $AB = 2b$, $F_1F_2 = 2c$. Тогда $S=2bc=24$, откуда $b=\frac{12}{c}$. Далее, $AO^2+OF_1^2=AF_1^2$ или $b^2+c^2=25$. Следовательно, для определения c имеем: $\frac{144}{c^2}+c^2=25$ или $c^4-25c^2+144=0$.

Обозначим $c^2=t$. Тогда имеем: $t^2-25t+144=0$;
$t_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{2}=\frac{25\pm7}{2}$; $t_1=16$, $t_2=9$.

Так как $c > 0$, то $c_1 = 3,\ c_2 = 4$. Тогда $b_1 = 4,\ b_2 = 3$. Известно, что для эллипса $a^2=b^2+c^2$, тогда $a^2=4^2+3^2=25$, $a = 5$.

Искомыми уравнениями эллипса будут: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ (если фокусы лежат на оси Ox) и $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (если фокусы лежат на оси Oy).

Вопросы и задачи:

Задача 1. Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Задача 2. В эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписан правильный (равносторонний) треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

Задача 3. В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят чрез фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

Задача 4. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Вопросы:

1. Что такое окружность? Запишите каноническое уравнение окружности. Какие особенности имеет общее уравнение окружности?
2. Дайте определение эллипса. Запишите его каноническое уравнение. Проведите с помощью канонического уравнения исследование формы эллипса.
3. Что такое эксцентриситет и директрисы эллипса?
4. Как определяются фокальные радиусы эллипса?

Практическое занятие 9-10.
Гипербола. Парабола.
Общее уравнение линий второго порядка.

Цель: сформировать представление об общем уравнении кривой второго порядка, уравнении гиперболы, уравнении параболы, научиться определять параметры кривых по заданному уравнению

Содержание:

гипербола, каноническое уравнение гиперболы, директрисы гиперболы
парабола, каноническое уравнение параболы

Теоретическая часть:

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Обозначим расстояние между фокусами $2c$. Разность расстояний до фокусов $2a$. Ось X направим через фокусы, а ось Y перпендикулярна оси X и делит расстояние между фокусами пополам. Тогда точки F_1, F_2 - фокусы гиперболы имеют координаты. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Пусть точка $M(x;y)$ - лежит на гиперболе.

Тогда $\left|\vec{F_1M}\right| - \left|\vec{F_2M}\right| = \pm 2a$. Имеем

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$. Далее проведем цепочку преобразований.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Возводим в квадрат

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(cx-a^2\right)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Поскольку по условию $\left(a^2-c^2\right) < 0$, то обозначим $\left(a^2-c^2\right) = -b^2$.

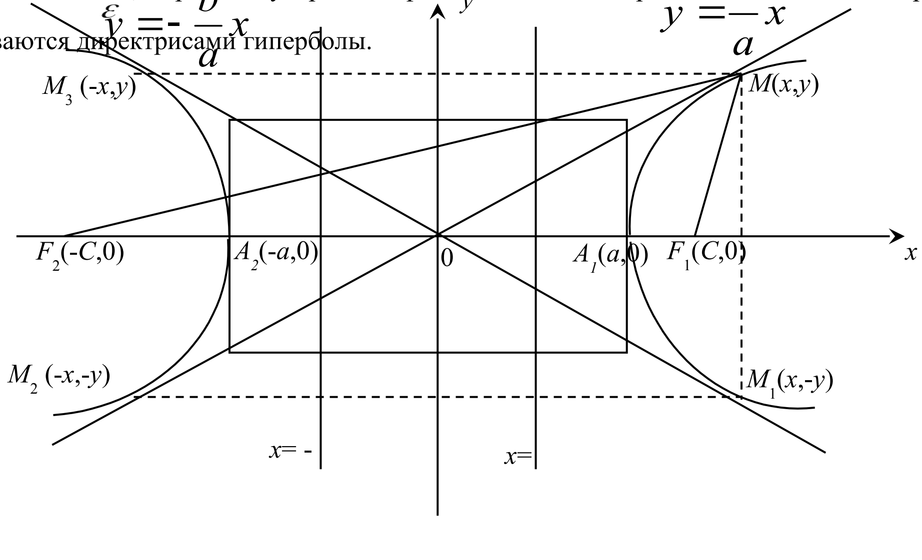
Получаем $\left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right)$; $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$;

Окончательно получаем $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Если гипербола задана своим каноническим уравнением, то главными осями гиперболы являются оси координат, а центр гиперболы находится в начале координат.

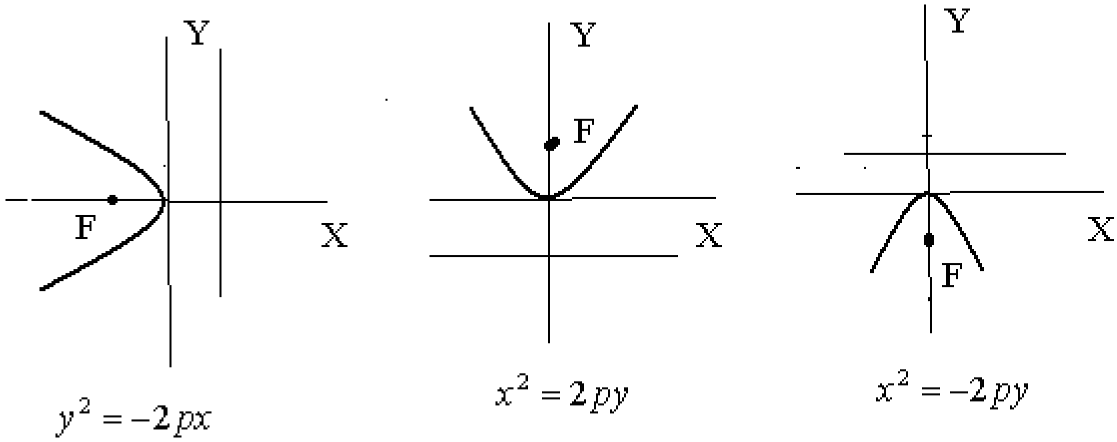
Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершине, называется основным прямоугольником гиперболы. Данный прямоугольник имеет вершины в точках A_1 (a, b), A_2 $(a, -b)$, A_3 $(-a, -b)$, A_4 $(-a, b)$. Диагональ основного прямоугольника называются асимптотами гиперболы. Уравнения асимптот имеют вид: $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и отстоящие на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от ее центра, называются директрисами гиперболы.



Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равностоящих от одной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$. Парабола симметрична относительно оси OY. В первой четверти имеем $y = \sqrt{2px}$ возрастающая функция. Точка O с координатами O(0;0) называется вершиной параболы.

Иногда приходится рассматривать уравнения вида $y^2 = -2px$; $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$. Эти уравнения являются уравнениями параболы, но не являются каноническими.



Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ где } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Вопросы и задачи:

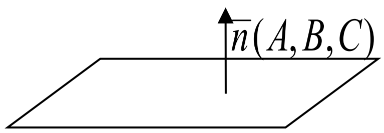
Задача 1. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиус-векторы этой точки и угол между ними.
Задача 2. Вычислить параметр параболы $y^2 = 2px$, если известно, что она касается прямой $x - 2y + 5 = 0$.
Задача 3. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота – 6 м.
Задача 4. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой р = 0,1 м. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстояние 2 м от места выхода.
Вопросы.

1. Запишите общее уравнение кривой второго порядка.
2. Дайте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы. Какая гипербола называется сопряженной данной?
3. Сделайте чертеж гиперболы. Напишите уравнения асимптот гиперболы.
4. Дайте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы. Что такое параметр параболы?

Практическое занятие 11-12.
Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.
Цель: сформировать представление о различных способах задания плоскости, научиться определять расположение плоскости в пространстве по заданному уравнению
Содержание:
нормальный вектор плоскости
общее уравнение плоскости, уравнение плоскости в отрезках, нормальное уравнение плоскости
Теоретическая часть:

Если фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат, то плоскость (P) определяется уравнением первой степени относительно совокупности переменных x, y, z.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D произвольные постоянные, причем хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, вектор $\overline{n}$ = {A, B, C} перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором плоскости.



Частные случаи общего уравнения плоскости:

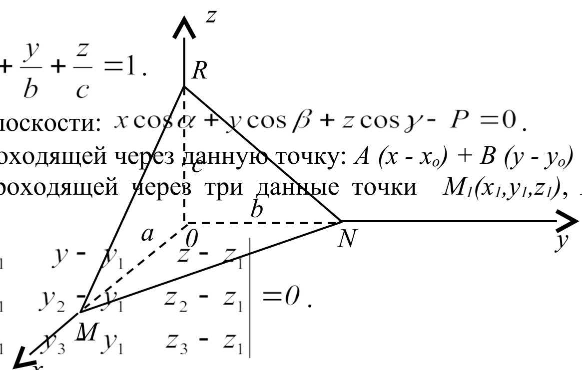
1. Свободный член равен нулю, т. е. $D = 0: \quad Ax + By + Cz = 0$	плоскость проходит через начало координат
2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:	
$A = 0, \quad тогда \quad By + Cz + D = 0$	плоскость параллельна оси Ox
$B = 0, \quad тогда \quad Ax + Cz + D = 0$	плоскость параллельна оси Oy
$C = 0, \quad тогда \quad Ax + By + D = 0$	плоскость параллельна оси Oz

б) $D = 0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:	
$A = 0, \quad тогда \quad By + Cz = 0$	плоскость проходит через ось *Ox*
$B = 0, \quad тогда \quad Ax + Cz = 0$	плоскость проходит через ось *Oy*
$C = 0, \quad тогда \quad Ax + By = 0$	плоскость проходит через ось *Oz*
3. Два коэффициента при текущих координатах равны 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:	
$B = 0, \quad C = 0, \quad тогда \quad Ax + D = 0$	плоскость параллельна плоскости *Oyz* (перпендикулярна оси *Ox*)
$A = 0, \quad C = 0, \quad тогда \quad By + D = 0$	плоскость параллельна плоскости *Oxz* (перпендикулярна оси *Oy*)
$A = 0, \quad B = 0, \quad тогда \quad Cz + D = 0$	плоскость параллельна плоскости *Oxy* (перпендикулярна оси *Oz*)
б) $D = 0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:	
$B = 0, C = 0, тогда\ Ax = 0\ или\ x = 0$	уравнение плоскости *Oyz*
$A = 0, C = 0, тогда\ By = 0\ или\ y = 0$	уравнение плоскости *Oxz*
$A = 0, B = 0, тогда\ Cz = 0\ или\ z = 0$	уравнение плоскости *Oxy*

Различные виды уравнений плоскости

1. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость не проходит через начало координат, а отсекает от осей координат соответственно отрезки *a*, *b*, *c*, т. е. плоскость проходит через точки *M(a,0,0)*, *N(0,b,0)* и *R(0,0,c)*.



Уравнение такой плоскости: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$.
3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$((\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2}) \cdot \overline{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки *A(2,1,3), B(1,0,4)* и *C(1,1,5)*.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1-2 & 0-1 & 4-3 \\ 1-2 & 1-1 & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-2) - 1(y-1) - 1(z-3) + 2(y-1) =$$

$= -2x + 4 - y + 1 - z + 3 + 2y - 2 = -2x + y - z + 6 = 0$ или

$2x - y + z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - z + 5 = 0$.

Задача 3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; параллельна оси *Ox*; параллельна оси *Oy*; параллельна оси *Oz*.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *M(0; 2; 1)* и параллельной векторам $\overline{a} = \{1; 1; 1\}$ и $\overline{b} = \{1; 1; -1\}$.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярно данной плоскости.

Задача 6. Две грани куба лежат на плоскостях: $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Oy* и точку G(4,2,-5).

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения плоскости.
2. Как найти расстояние от точки до плоскости?
3. Покажите, что всякое уравнение первой степени относительно совокупности переменных *x, y, z* определяет плоскость в прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве.

Практическое занятие 13-14.

Расстояние от точки до плоскости.

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Цель: сформировать умение находить расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями, определять параллельность или перпендикулярность плоскостей

Содержание:

расстояние от точки до плоскости

угол между плоскостями

условия параллельности и перпендикулярность плоскостей

Теоретическая часть:

Пусть даны две плоскости (P_1) и (P_2). Пусть даны их общие уравнения: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. При этом $cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

<u>Пример.</u> Вычислить расстояние от точки M(-9,6,6) до плоскости 2x – 6y – 3z +9 =0.

Решение: $d = \frac{|2\cdot(-9) - 6\cdot 6 - 3\cdot 6 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \frac{63}{7} = 9$.

<u>Пример.</u> Найти острый угол между плоскостями:

$\mathbf{5x - 3y + 4z - 4 = 0,\ (1)}$

$\mathbf{3x - 4y - 2z + 5 = 0.\ (2)}$

Решение: По формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\right|; \quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$$\cos\varphi = 0{,}4990; \quad \varphi = 60°04'.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить расстояние от точки M до плоскости α, если: 1) M (-2,7,1), α : *2x-6y+3z+1=0;* 2) M (1,-3,4), α : *2x-6y-3z+27=0.*

Задача 2. Найти величину острого угла между плоскостями:
11x-8y-7z-15=0, 4x-10y+z-2=0; 2) 2x+3y-4z+4=0, 5x-2y+z-3=0.

Задача 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки M1 (0,0,2) и M2 (0,1,0) и образующей угол 45 градусов с плоскостью OYZ.

Вопросы.

1.Как определить величину угла между двумя плоскостями?

2.Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

3.Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ признаком параллельности плоскостей? Что можно сказать об этих плоскостях?

4.Как Вы думаете, какое из приведенных ниже уравнений соответствует плоскости, проходящей через точки M(0,-3,2) и N(5,4,-1) параллельно оси *Oy*: *3x+5z-10 = 0, 3y-z-10 = 0, 2x-5y+10 = 0, 3x-5z+10 = 0?*

Практическое занятие 15. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой.

Цель: сформировать умение составлять необходимое уравнение прямой в пространстве, определять параметры прямой по уравнению

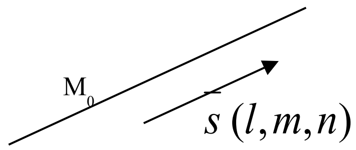
Содержание:

параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве

уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

Теоретическая часть:

Положение прямой в трехмерном пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определенную точку M_0 при помощи ее радиус – вектора $\overline{Z}_0$ и вектор $\overline{S} \neq 0$, которому прямая параллельна. Вектор $\overline{S}$ при этом называется направляющей.



Параметрические уравнения прямой в пространстве: [illegible], канонические уравнения: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Любая прямая в трехмерном пространстве может быть выражена также уравнениями двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, которые определяют общее уравнение прямой в пространстве, если плоскости, определяемые этими уравнениями, различны и не параллельны.

<u>Пример.</u> Дано общее уравнение прямой: $\begin{cases} 2x-3y+z-5=0, \\ 3x+y-2z-2=0 \end{cases}$.

Требуется привести данное уравнение к каноническому виду. Для этого сначала найдем точку $M_o(x_o,y_o,z_o)$, лежащую на данной прямой.

Положим $z=z_0=0$ в и решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+y=2 \end{cases}.$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив с первым уравнением, получим $11x=11$, $x=1$. Из второго уравнения $y=2-3x=2-3=-1$. Итак, точка $M_o(1,-1,0)$ найдена.

Находим направляющий вектор $\overline{s}=[\overline{n}_1\overline{n}_2]$, где $\overline{n}_1=\{2;-3;1\}$, $\overline{n}_2=\{3;1;-2\}$.

$$\overline{s}=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6l_1+3l_2+2l_3+9l_3-l_1+4l_2=5l_1+7l_2+11l_3$$

Итак, точка $M_o(1,-1,0)$ и $\overline{s}=\{5;7;11\}$ найдены. Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{11}.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Составить параметрические уравнения прямых: $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x+5y+2z+1=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y+4z-8=0, \\ 6x+3y+2z-18=0. \end{cases}$

Задача 2. Определить координаты направляющего вектора прямой 1) $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x+y-z+5=0 \\ 3x+2y+4z+7=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x-y+7z-1=0 \\ -x+2y+11z+5=0 \end{cases}$.

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения прямой линии в пространстве.
2. Что такое направляющий вектор прямой?
3. Как определить координаты направляющего вектора прямой по общему ее уравнению?
4. Как преобразовать общее уравнение прямой к каноническому?

Практическое занятие 16. **Угол между двумя прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.**

Цель: сформировать умение вычислять угол между двумя прямыми в пространстве, расстояние от точки до прямой, кратчайшее расстояние между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью

Содержание:

угол между двумя прямыми в пространстве, расстояние от точки до прямой

кратчайшее расстояние между двумя прямыми

угол между прямой и плоскостью

Теоретическая часть:

Углом между двумя прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным. Очевидно, за угол φ между прямыми можно взять угол между их направляющими векторами: $\bar{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\bar{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$, косинус которого можно найти по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Углом между прямой $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

$Al+Bm+Cn=0$ – условие параллельности прямой и плоскости.

$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить косинус угла между прямыми:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{5}$ и $\begin{cases} x = 5t - 4 \\ y = -2t \\ z = -t + 1 \end{cases}$; 2) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$ и $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 5t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}$;

3) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-11}{1}$ и $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -t + 4 \end{cases}$; 4) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 5 \end{cases}$.

Задача 2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$ и плоскости $x+y-z-3 = 0$.

Вопросы.

1.Как определить угол между двумя прямыми в пространстве?

2.Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в трехмерном пространстве?

3.Как найти точку пересечения прямой и плоскости в трехмерном пространстве?

4.Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

5. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

Грешилов, А. А. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка : учебное пособие / А. А. Грешилов, Т. И. Белова. — Москва : Логос, 2004. — 128 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13004.html

Дополнительная литература:

Погорелов, А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 208 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16488.html

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Геометрия»
для студентов направления подготовки 09.03.02 **Информационные системы и технологии** направленность (профиль) **Информационные системы и технологии обработки цифрового контента**

Пятигорск, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Алгебра» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Геометрия» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций,

		индикаторов
ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-1$_{\text{ОПК-1}}$** Знаком с основами математики, физики, вычислительной техники и программирования. **ИД-2$_{\text{ОПК-1}}$** Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Применяет естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического моделирования в профессиональной деятельности.

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и

выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
2 семестр					
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	79,64	1,96	99,6
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	5,76	0,64	6,4
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-9	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	1	9	10
Итого за 2 семестр			**104,4**	**11,6**	**116**
Итого			**104,4**	**11,6**	**116**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль

Рейтинговая оценка знаний студента

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1.	Практическое занятие 5	5 неделя	15
2.	Практическое занятие 10	10 неделя	20
3.	Практическое занятие 15	15 неделя	20
	Итого за 2 семестр		**55**
	Итого		**55**

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55.** Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее

60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	***Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)***
Отличный	***100***
Хороший	***80***
Удовлетворительный	***60***
Неудовлетворительный	***0***

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

Грешилов, А. А. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка : учебное пособие / А. А. Грешилов, Т. И. Белова. — Москва : Логос, 2004. — 128 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13004.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

Погорелов, А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 208 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16488.html