

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
федерального университета
Дата подписания: 01.06.2024 23:35:39
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине

«Дополнительные главы математики»

направления подготовки

13.03.02 - Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск
2022

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. Цель и задачи изучения дисциплины	3
2. Оборудование и материалы	3
3. Наименование практических работ	3
4. Содержание практических работ	5
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	87

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора профессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки **13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» проводятся в компьютерном классе с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ темы	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
1	Решение комбинаторных задач: перестановки, размещения, сочетания.	3	3
2	Вероятности и случайные процессы. Решение задач на непосредственное вычисление вероятности события.	3	3
3	Основные теоремы теории вероятностей. Применение теорем сложения и умножения при решении задач.	3	3
3	Решение задач на применение формул полной вероятности, формулы Байеса.	3	3
3	Схема испытаний Бернулли. Наивероятнейшее число появлений события в схеме повторных независимых испытаний.	3	3
3	Приближенные формулы в схеме Бернулли.	3	3
4	Закон распределения дискретной случайной величины.	3	3
4	Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины.	1,5	1,5
5	Функции распределения и плотности распределения вероятностей непрерывных случайных величин, их свойства.	1,5	1,5
5	Числовые характеристики непрерывных случайных величин.	3	3
Итого за 1 семестр		27	27
2 семестр			
8	Абсолютная и относительная погрешности измерений	3	3
8	Расчет погрешностей непосредственных измерений	3	3
8	Расчет погрешностей косвенных измерений	3	3
9	Вариационные ряды и их графическое изображение.	3	3
9	Числовые характеристики выборки, свойства числовых характеристик.	4,5	4,5
10	Выборочный метод. Точечные оценки.	4,5	4,5
11	Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой	3	3
Итого за 2 семестр		24	24

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

12	Статистическая проверка гипотез. Параметрические критерии	4,5	4,5
12	Статистическая проверка гипотез. Непараметрические критерии.	3	3
12	Проверка гипотез о законах распределения	3	3
13	Корреляционная зависимость. Коэффициент корреляции.	4,5	4,5
14	Линейная регрессия. Коэффициенты регрессии.	3	3
15	Однофакторный дисперсионный анализ	4,5	4,5
16	Двухфакторный дисперсионный анализ	4,5	4,5
	Итого за 3 семестр	27	27
4 семестр			
17	Способы задания множеств. Операции над множествами.	1,5	1,5
18	Отношения. Отношения эквивалентности. Отношение порядка. Свойства отношений. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция. Понятие функции.	1,5	1,5
20	Основные алгебраические структуры.	1,5	1,5
21	Операции над высказываниями. Таблицы истинности. Логические задачи.	1,5	1,5
21	Исчисление высказываний. Алгоритм унификации. Правила вывода.	1,5	1,5
22	Исчисление предикатов. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.	1,5	1,5
23	Способы задания булевой функции. Таблица истинности булевой функции.	1,5	1,5
23	Применение законов алгебры логики.	1,5	1,5
24	Дизъюнктивные и конъюнктивные совершенные нормальные формы.	1,5	1,5
24	Алгоритмы построения полиномов Жегалкина.	1,5	1,5
25	Размещения, перестановки, сочетания в комбинаторике.	1,5	1,5
25	Подстановки. Биномиальные коэффициенты. Разбиения.	1,5	1,5
28	Основные характеристики графов. Матрицы смежности и инцидентности. Операции над графами.	1,5	1,5
29	Эйлеров граф. Критерий эйлеровости.	1,5	1,5
29	Гамильтонов граф.	1,5	1,5
30	Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути в нагруженном ориентированном графе.	1,5	1,5
30	Задача нахождения критического пути в графе.	1,5	1,5
31	Построение минимального остовного дерева нагруженного графа.	1,5	1,5
	Итого за 4 семестр	27	27
	ИТОГО:	105	105

4. Содержание практических работ

Практическая работа 1-2. Решение комбинаторных задач: перестановки, размещения, сочетания.

Цель: формирование основных понятий комбинаторики и методов решения комбинаторных задач в приложении к теории вероятностей.

Теоретическая часть:

Комбинаторика - ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, - возникла в XVII в. Долгое время казалось, что комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений. Положение дел резко изменилось после появления быстродействующих вычислительных машин и связанного с этим расцвета конечной математики. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, вычислительной математике, планировании экспериментов и т. д.

Комбинаторика (от лат. combinare – соединять, сочетать) называют раздел математики, в котором изучают комбинации (или комбинации) – совокупности объектов заданного типа: сколько комбинаций можно составить из элементов данного множества.

Элементарными комбинаторными конфигурациями являются сочетания, размещения, перестановки.

Для подсчета числа этих конфигураций используются правила суммы и произведения.

Документ подписан
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Для подсчета числа этих конфигураций используются
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Правило суммы:

Если элемент А можно выбрать m способами, а элемент В можно выбрать k способами, то выбор элемента А или В можно осуществить $m + k$ способами.

Обобщением правила суммы является правило произведения.

Правило произведения:

Если элемент А можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента А элемент В можно выбрать k способами, тогда, упорядоченную пару элементов (А, В) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Пример 1:

Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Решение: $n_1=6$ (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_2=7$ (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_3=4$ (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6). Итак, $N=n_1 \cdot n_2 \cdot n_3=6 \cdot 7 \cdot 4=168$.

Пример 2:

Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение: Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит $N=5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5=5^4=625$.

Размещения

Назовём множество, содержащее n элементов, n -множеством.

Последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ длины k без повторяющихся элементов из элементов данного n -множества назовём k -размещением.

Обозначим символом A_n^k число размещений из n по k элементов (от фран. "arrangement" - размещение). Используя правило произведения, вычислим число A_n^k .

Пусть произвольное размещение длины k имеет вид:

$(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Элемент x_1 можно выбрать n способами. После каждого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать $(n-1)$ способами. После каждого выбора элементов x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать $(n-2)$ способами, и т.д. После каждого выбора элементов $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ элемент x_k можно выбрать $n-(k-1) = (n-k+1)$ способами. Тогда, по правилу произведения, последовательность $(x_1; x_2; \dots, x_k)$ можно выбрать числом способов, равным $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = A_n^k$.

$1)(n-2) \dots (n-k+1) = A_n^k$.

Произведение в левой части равенства умножим и разделим на $(n-k)!$, получим

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Если в формуле $k = n$, то A_n^k есть число P_n перестановок из n элементов $P_n=n!$ (от "permutation"-перестановка).

Пример 3:

Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$$A_5^2 = 4 \cdot 5 = 20.$$

Сочетания

k -подмножество данного n -множества называется k -сочетанием.

Обозначим через C_n^k число k -сочетаний из данных n элементов. Формулу для числа C_n^k получим, рассуждая следующим образом. Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными способами, то получим все k -последовательностей из n элементов, без повторений, то есть все k -размещения.

Иными словами,

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k.$$

Откуда

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ		$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6	
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна	
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022		

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Пример 4: Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$$

Предполагая, что n и k - целые положительные числа и $0!=1$, сформулируем основные свойства сочетаний.

Основные свойства сочетаний

1. Условились, что $C_n^0 = 1$
2. $C_n^1 = n$
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$
4. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
5. $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$

Задачи и упражнения:

1. Определить, какой объект комбинаторики применяется для решения задачи, обосновать выбор.
2. Решить задачу.
1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?
2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
3. В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?
4. Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?
5. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?
6. Из трех математиков и десяти экономистов надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и шести экономистов. Сколькими способами это можно сделать?
7. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?
8. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?
9. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?
10. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трёх дверей, а за каждой из них её ожидают четыре двери. Пройдя дверь, крыса не может вернуться через неё обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

Практическая работа 3-4. Вероятности и случайные процессы. Решение задач на непосредственное вычисление вероятности события.

Цель: формирование понятий классической, геометрической, статистической вероятности события и способах их вычисления.

Теоретическая часть:

Вероятность - одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим. Далее укажем слабые стороны этого определения и предложим другие определения, позволяющие преодолеть недостатки классического определения.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них - красные, 3 - синие и 1 - белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать

эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A . Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом* (*элементарным событием*). Элементарные исходы обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т.д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 - появился белый шар; ω_2, ω_3 - появился красный шар; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ - появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A ; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2 , или ω_3 , или ω_4 , или ω_5 , или ω_6 . В этом смысле событие A подразделяется на несколько элементарных событий ($\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием A и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A . Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5 / 6$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m / n,$$

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих A ; n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

С в о й с т в о 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(A) = m / n = n / n = 1.$$

С в о й с т в о 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(A) = m / n = 0 / n = 0.$$

С в о й с т в о 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < m / n < 1$, следовательно,

$$0 < P(A) < 1.$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Задачи и упражнения:

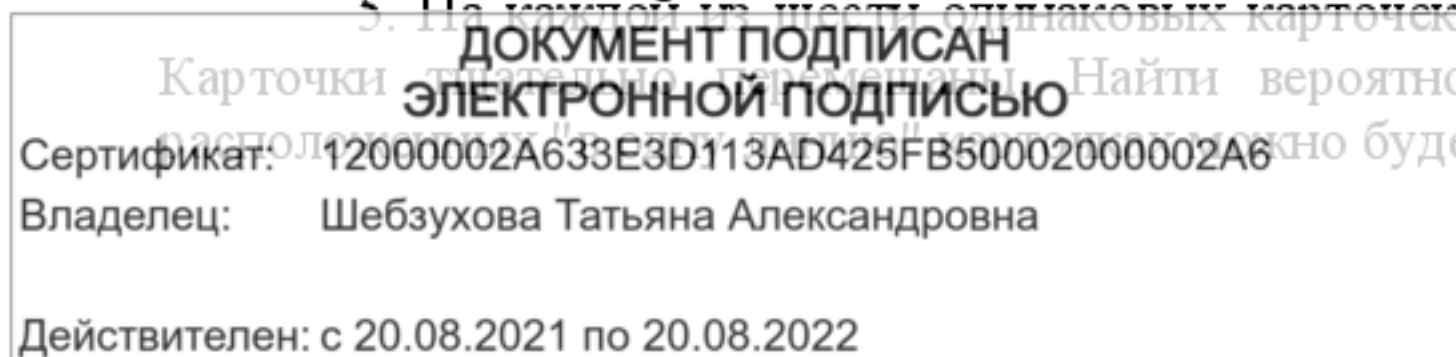
1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных "в одну линию" кубиков можно будет прочесть слово "спорт".

5. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных "в одну линию" карточках можно будет прочесть слово "трос".



6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

7. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

8. В замке на общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых написаны различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

9. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

10. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги — по одному рублю и две книги — по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

11. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

12. При стрельбе из винтовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Практическая работа 5-6. Основные теоремы теории вероятностей. Применение теорем сложения и умножения при решении задач.

Цель: формирование представления об основных теоремах теории вероятностей и методах их применения для решения задач.

Теоретическая часть:

Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B .

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:
 $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой
 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,
где AB – произведение событий A и B .

Два события называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A называется вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло. Аналогично через $P(B/A)$ обозначается условная вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в совместном появлении события A и события B .

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$, или $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Следствие. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:
 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следствие. При производимых n одинаковых независимых испытаниях, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , вероятность появления события A хотя бы один раз равна $1 - (1 - p)^n$.

Задачи и упражнения:

1. Менеджер имеет 8 кандидатов для взятия в штат фирмы, при этом 6 женщин и 3 мужчин. Требуется взять 3 человека. Какова вероятность того, что при произвольном выборе 3 – х людей будет выбрана хотя бы одна женщина.

2. В ящике находятся 3 белых, 4 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет хотя бы один белый.

3. В группе студентов, в которой 10 юношей и 12 девушек, в совет факультета избираются два человека. Какова вероятность того, что среди избранных окажется хотя бы один юноша.

4. В корзине 6 белых и 8 черных мячей. Наудачу извлекается 3 мяча. Рассчитать вероятности:
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

- А - все 3 мяча белые;
 В - один мяч белый а два черных;
 С - все три мяча черных

5. Какова вероятность того, что при подбрасывании двух монет выпадет хотя бы один герб? Выписать пространство элементарных исходов.
6. Среди 30 билетов 5 выигрышных. Найти вероятность того, что среди двух выбранных наугад билетов хотя бы один выигрышный
7. Имеется 5 белых и 8 черных шаров. Вынимают два. Найти вероятность того, что они разного цвета.
8. Имеется 2 урны: в первой а белых и b черных шаров; во второй с белых и d черных. Из каждой урны вынимают по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми (событие А) и вероятность того что оба шара будут разного цвета (событие В).
9. Какова вероятность что при одновременном бросании двух правильных игральных кубиков выпавшее число очков составит величину равную 9.
10. В корзине 6 белых и 8 черных мячей Рассчитать вероятность что наудачу взятые два мяча белые.
11. В корзине 6 белых и 8 черных одинаковых по размеру и весу шариков. Наугад выбираются 3 шарика. Рассчитать вероятности следующих событий:
 - Все три шарика белые;
 - Один шарик белый, а два других черные;
 - Все три шарика черные
12. Правильный игральный кубик бросается 3 раза. Посчитать вероятности следующих событий:
 - Все три раза выпадет шестерка;
 - Все три раза выпадет одно и тоже число.
13. Три раза бросается монета достоинством 5 сантимов. Найти вероятности следующих случайных событий:
 - А – “все три раза выпадет цифра”,
 - В - “цифра выпадет 1 раз”,
 - С - “цифра выпадет большое число раз, чем герб”,
 - D - “цифра выпадет 2 раза”.
14. Из букв слова “полюс” наугад выбираются две буквы дна за другой. Выписать пространство элементарных исходов.
15. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко 2 сорту, а остальные к первому. Найти частоту изделий первого сорта, частоту изделий 2 сорта.
16. Студент знает 14 вопросов из 20. В билете содержится 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит хотя бы на один из них.
17. Из ящика, в котором 90 годных деталей и 10 негодных деталей наудачу выбраны 10 деталей. Рассчитать вероятность того, что все выбранные детали годные.
18. В ящике 20 деталей, 15 из которых окрашены. Из ящика выбираются произвольным образом 4 детали. Найти вероятность, что они все окрашены
19. В ящике 5 белых шаров, 2 черных и 3 красных. Какова вероятность, что два вынутых шара будут одного цвета.
20. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся изношенные элементы.
21. Из n изделий, среди которых k бракованных, наудачу берется k изделий. Какова вероятность, что все они бракованные
22. В урне а белых и b черных шаров ($a \geq 2, b \geq 3$) Из урны вынимают сразу 5 шаров. Найти вероятность р того, что 2 из них будут белыми и 3 черными.
23. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятности событий -
 - а: на кости выпало четное число очков
 - б: на кости выпало не менее 5 очков
 - с: на кости выпало не более 5 очков

Практическая работа 7-8. Решение задач на применение формул полной вероятности, формулы Байеса.

Цель: формирование представления об основных теоремах теории вероятностей и методах их

применения

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
Т ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$. Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:

Пример.

Пять курсантов одинаковое число раз стреляют по отдельным пяти мишеням. Результат стрельбы таков:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- первый и второй курсанты поражают три мишени и имеют два промаха (событие B_1);
- третий курсант поражает две мишени и имеет три промаха (событие B_2);
- четвертый и пятый курсанты поражают одну мишень и имеют четыре промаха (событие B_3).

Наугад берется мишень, она оказалась пораженной (событие A). Определить вероятность того, что эта мишень поражена первым курсантом.

Решение: $P(B_1) = 2/5$, $P(B_2) = 1/5$, $P(B_3) = 2/5$, $P_{B_1}(A) = 3/5$, $P_{B_2}(A) = 2/5$, $P_{B_3}(A) = 1/5$. По формуле Байеса определим искомую вероятность:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}} = 0,6$$

Задачи и упражнения:

Вариант 1. При исследовании криминогенной обстановки в некотором городе все правонарушения, совершенные за последние 5 месяцев, были распределены по трем группам в соответствии с районами города. В первой группе оказалось 70 %, во второй – 23 %, в третьей – 7 % всех правонарушений. Вероятность того, что правонарушителем является человек младше 25 лет для каждой группы равна соответственно 0,6; 0,35 и 0,1. Определить вероятность того, что выбранному произвольно правонарушителю окажется меньше 25 лет.

Выбранному произвольно правонарушителю оказалось меньше 25 лет. Найти вероятность того, что этот человек из первой группы.

Вариант 2. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из не пристрелянной 0,4. Какова вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле?

Стрелок поразил цель. Какова вероятность, что он стрелял из пристрелянной винтовки?

Вариант 3. В районе 24 человека обучаются на заочном факультете института, из них 6 – на физико-математическом факультете, 12 – на агрономическом факультете, 6 – на экономическом факультете. Вероятность успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для студентов физико-математического факультета равна 0,6, агрономического факультета – 0,76 и экономического факультета – 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом экономического факультета.

Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

Вариант 4. В группе милицейского колледжа г. Брюково, состоящей из равного количества юношей и девушек, 5% всех юношей и 0,25% всех девушек страдают дальтонизмом. Какова вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом? Если наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом, то какова вероятность того, что это юноша?

Вариант 5. На предприятии, изготавливающем дверные замки для автомобилей, первый цех производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех замков. Вероятность, что замок будет вскрыт угонщиками, по статистике составляет 5%, 4%, 2% соответственно. Найти вероятность того, что в случайно выбранном автомобиле с замками данного завода, будет вскрыта дверь. Если замок оказался взломан, какова вероятность того, что он был произведен в третьем цехе завода?

Вариант 6. На промышленной зоне ИТК 023/1 работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $\frac{3}{4}$ продукции с процентом брака 4%, вторая – $\frac{1}{4}$ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие окажется бракованным.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Вариант 7. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок из пристрелянной винтовки попадет в цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для стрелка из не пристрелянной винтовки – 0,4. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Вариант 8. В специализированную больницу поступают в среднем 50% с заболеванием Т, 30% - с заболеванием К, 20% - с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни Т равна 0,7; для болезней К и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что поступивший больной будет выписан здоровым? Если больной выписан здоровым, какова вероятность того, что этот больной страдал заболеванием М?

Вариант 9. В компьютерной базе данных содержатся данные об угонах автомашин по трем районам города. В среднем за месяц из первого района поступает 10 сообщений, из второго – 6, из третьего – 4. Вероятность того, что угнан легковой автомобиль для каждого из районов соответственно – 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что очередное сообщение – об угоне легкового автомобиля? Какова вероятность того, что угнанный легковой автомобиль из третьего района?

Вариант 10. Команда стрелков милицейского колледжа города Брюково состоит из 5 человек, трое из них попадают с вероятностью 0,8, а двое – с вероятностью 0,6. Наудачу из команды берется стрелок и производит выстрел. Какова вероятность того, что стрелок попадет? Если стрелок попал в цель, то какова вероятность, что это один из трех (один из двух)?

Практическая работа 9-10. Схема испытаний Бернулли. Наивероятнейшее число появлений события в схеме повторных независимых испытаний.

Цель: формирование представления об основных теоремах теории вероятностей и методах их применения для решения задач.

Теоретическая часть:

Испытание, в результате которого ожидается наступление интересующего нас события, можно многократно повторять. Главный вопрос каждого повторения – произойдет или не произойдет это событие? А во всей серии повторений важно знать, сколько именно раз оно может произойти или не произойти. Например, какова вероятность, что при пяти бросаниях монеты «орел» выпадет ровно 4 раза? Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил подобные вопросы в единую вероятностную схему, которую принято называть схемой Бернулли.

Рассматривают n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами: «успехом» и «неудачей». Вероятность «успеха» равна p , а вероятность неудачи равна q . Известна формула $p+q=1$. Требуется найти вероятность $P_n(x)$ того, что в этих повторениях произойдет ровно x «успехов».

Формула Бернулли:

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x}.$$

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, наудачу выбирается с возвращением 5 раз подряд один шар. Подсчитать вероятность того, что 4 раза появится белый шар.

Решение: В приведенных выше обозначениях $n=8$; $p=1/4$; $q=3/4$; $x=5$. Искомую вероятность вычисляем по формуле Бернулли:

$$P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{15}{1024}$$

Формула Бернулли при заданных числах p и n позволяет рассчитывать вероятность любой частоты x ($0 \leq x \leq n$). Возникает естественный вопрос, какой частоте будет соответствовать наибольшая вероятность?

Предположим, что такая частота существует, и попытаемся ее определить из условия, что вероятность этой частоты не меньше вероятности "предыдущей" и "последующей" частот:

$$P_n(x) \geq P_n(x-1); P_n(x) \geq P_n(x+1) \quad (*)$$

Первое неравенство (*) представляется в виде:

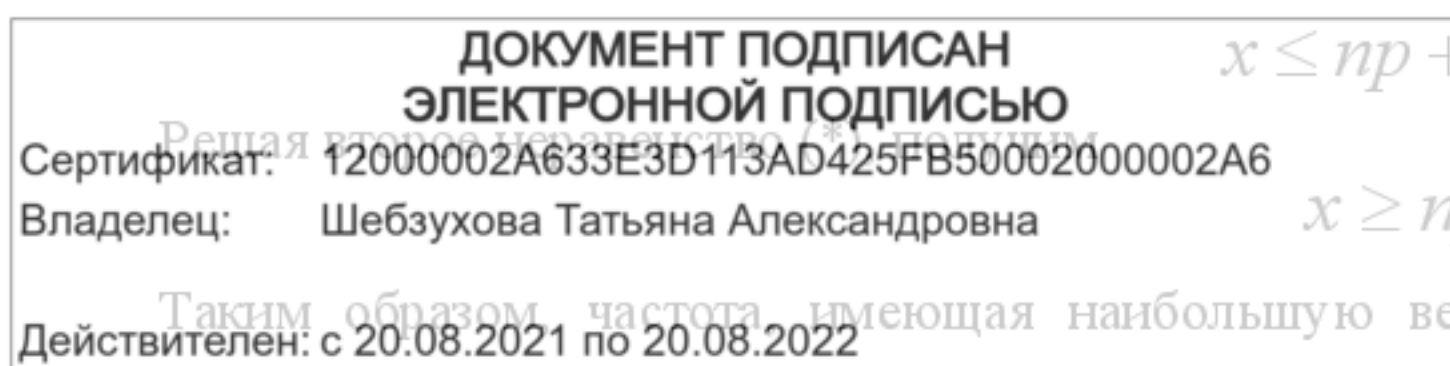
$$C_n^x p^x q^{n-x} \geq C_n^{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1},$$

$$\text{что эквивалентно } \frac{q}{n-x+1} \leq \frac{p}{x} \text{ или } qx \leq pn - px + p. \text{ Отсюда следует:}$$

$$(p+q)x \leq np + p$$

$$x \leq np + p$$

$$x \geq np - q$$



Таким образом, частота, имеющая наибольшую вероятность (наивероятнейшая частота), определяется

двойным неравенством:

$$np - q \leq x \leq np + p$$

Если $np+p$ – целое число (тогда и $np-q$ – целое число), то две частоты: $x=np-q$ и $x=np+p$ обладают наибольшей вероятностью.

Задачи и упражнения:

1. Каждый день акции корпорации ABC поднимаются в цене или падают в цене на один пункт с вероятностями соответственно 0,75 и 0,25. Найти вероятность того, что акции после шести дней вернутся к своей первоначальной цене. Принять условие, что изменения цены акции вверх и вниз – независимые события.
2. Моторы многомоторного самолёта выходят из строя во время полёта независимо один от другого с вероятностью p . Многомоторный самолёт продолжает лететь, если работает не менее половины его моторов. При каких значениях p двухмоторный самолёт надёжнее четырёхмоторного самолёта?
3. Бригада из десяти человек идёт обедать. Имеются две одинаковые столовые, и каждый член бригады независимо один от другого идёт обедать в любую из этих столовых. Если в одну из столовых случайно придёт больше посетителей, чем в ней имеется мест, то возникает очередь. Какое наименьшее число мест должно быть в каждой из столовых, чтобы вероятность возникновения очереди была меньше 0,15?
4. Пусть всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут 5?
5. Если в семье четыре ребёнка, что вероятнее: это два мальчика и две девочки, или три ребёнка одного пола и один другого пола? Принять вероятность того, что данный ребёнок – мальчик, равной 0,5.
6. Капитан корабля перед высадкой десанта приказал выпустить по береговой полосе длиной 200 метров 20 реактивных снарядов, опасаясь замаскированных огневых точек. Вдоль берега в землю был врыт бункер длиной 20 метров.
 - а) Найти вероятность того, что 4 снаряда попали в бункер.
 - б) Найти наивероятнейшее число снарядов, попавших в бункер.

Практическая работа 11-12. Приближенные формулы в схеме Бернулли.

Цель: формирование представления об основных теоремах теории вероятностей и методах их применения для решения задач.

Теоретическая часть:

Непосредственное применение формулы Бернулли при большом числе испытаний связано с громоздкими вычислениями. Поэтому при больших n вместо нее, как правило используют приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Формула Пуассона

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, причем их произведение $a = n \cdot p$ не мало и не велико (обычно достаточно условий $p < 0,1$; $npq < 10$), то вероятность $P_n(m)$ можно приближенно найти по формуле Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

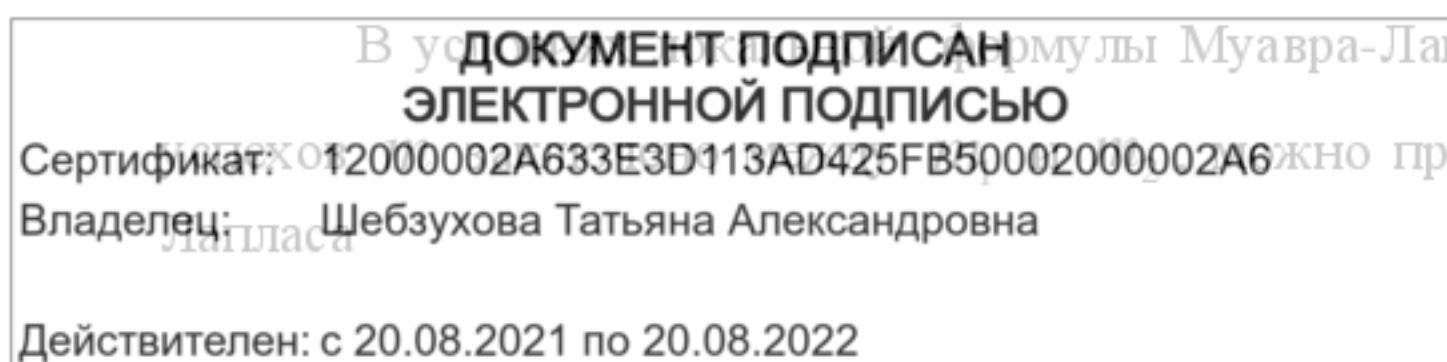
Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условий $n > 100$; $npq > 20$), то вероятность $P_n(m)$ можно приближенно найти по формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

В условиях локальной теоремы Муавра-Лапласа вероятность $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ того, что число успехов m попадет в заданный интервал, можно приближенно найти по интегральной формуле Муавра-Лапласа:



$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad - \text{функция Лапласа.}$$

Значение функций Гаусса и Лапласа находятся по таблицам.

Пример. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность девяти «сбоев».

Решение: По условию задачи $n = 1000$, $m = 9$, $p = 0,007$. Поскольку n – достаточно велико, p – достаточно мало ($npq < 7$), то для вычисления $P_{1000}(9)$ можно использовать формулу Пуассона. Имеем

$$a = n \cdot p = 1000 \cdot 0,007 = 7, \text{ откуда } P_{1000}(9) \approx \frac{7^9 \cdot e^{-7}}{9!} \approx 0,1014.$$

Пример. Вероятность того, что при автоматической штамповке изделий отдельное изделие окажется бракованным, постоянна и равна 0,05. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий ровно 40 окажется бракованными?

Решение: По условию задачи $n = 1000$, $m = 40$, $p = 0,05$, $q = 1 - p = 0,95$. Теоретически можно использовать формулу Бернулли. Однако полученное выражение будет слишком громоздко, поэтому удобней применить локальную формулу Муавра-Лапласа. ($npq = 1000 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 47,5 > 20$). Так

$$\text{как } \sqrt{npq} = \sqrt{47,5} \approx 6,829, \quad \text{то } x = \frac{40 - 1000 \cdot 0,05}{\sqrt{47,5}} = \frac{40 - 50}{6,892} \approx -1,45.$$

$$\varphi(x) = \varphi(-1,45) = \varphi(1,45) \approx 0,1394$$

(значение функции находим по таблице). Следовательно,

$$P_{1000}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{47,5}} \cdot \varphi(-1,45) \approx \frac{0,1394}{6,892} = 0,02$$

Пример. Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при отдельном выстреле равна 0,75. найти вероятность того, что при 300 выстрелов число попаданий будет не менее 210, но не более 230?

Решение: По условию задачи $n = 300$, $p = 0,75$, $q = 1 - p = 0,25$, $m_1 = 210$, $m_2 = 230$. Для нахождения вероятности $P_{300}(210 \leq m \leq 230)$ воспользуемся интегральной формулой Муавра-Лапласа.

$$n \cdot p = 300 \cdot 0,75 = 225, \quad \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = \sqrt{56,25} \approx 7,5, \text{ тогда}$$

$$x_1 = \frac{210 - 225}{\sqrt{56,25}} = \frac{-15}{7,5} \approx -2; \quad x_2 = \frac{230 - 225}{\sqrt{56,25}} = \frac{5}{7,5} \approx 0,67$$

Следовательно,

$$P_{300}(210 \leq m \leq 230) = \Phi(0,67) - \Phi(-2) = \Phi(0,67) + \Phi(2) = 0,2486 + 0,4772 = 0,7258$$

Задачи и упражнения:

Внимательно прочтите условия задачи и выберите нужную формулу (Бернулли, Пуассона или Муавра-Лапласа)

1. Завод изготовитель отправил на базу 12000 доброкачественных изделий. Число изделий поврежденных при транспортировке, составляет в среднем 0,05%. Найти вероятность того, что на базу поступит: а) не более трех поврежденных изделий; б) хотя бы две поврежденные.

2. Вероятность появления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие А произойдет: а) 750 раз; б) 710 раз.

3. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет 790 и 830.

4. Мишень, состоящая из трех concentric зон. При одном выстреле по мишени вероятность попадания в первую зону равна 0,3, во вторую 0,4, в третью 0,5. Для второй и третьей зон эта вероятность соответственно

- равны 0,3 и 0,2. Стрелок производит 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что при этом окажется 3 попадания в первую зону, 2 попадания во вторую и 1 попадания в третью зону.
5. Вероятность выхода из строя одного элемента устройства, в течении t часов работы, равна 0,002. Какова вероятность того, что за время t из 1500 независимо работающих элементов выйдет из строя: а) 4 элемента; б) не более двух элементов?
6. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появления события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5.
7. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0,8$. Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее 710 раз и не более 740.
8. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех; б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.
9. Вероятность допустить ошибку при наборе текста, состоящего из 1200 знаков, составляет 0,005. Найти вероятность того, что при наборе будет допущено: а) 6 ошибок; б) хотя бы одна ошибка.
10. В городе N из каждых 100 семей 85 имеют цветные телевизоры. Какова вероятность того, что из 400 семей 340 имеют такие же телевизоры.
11. какова вероятность того, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будут гореть от 1500 до 1600 ламп? Считать, что каждая лампа будет гореть в течении года с вероятностью 0,64.
12. В семье 6 детей. Найти вероятность, что в данной семье не менее двух мальчиков, но не более четырех. Считать вероятность рождения мальчика и девочки 0,5.

Практическая работа 13-14. Закон распределения случайной величины.

Цель: формирование представления о способах построения закона распределения случайной величины.

Теоретическая часть:

Наряду со случайными событиями, одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины – величины, численное значение которой принимает различные значения в зависимости от результата стохастического эксперимента или опыта. Примерами случайных величин могут являться: число дорожно-транспортных происшествий за сутки; количество студентов, опоздавших на занятия; число дактилокарт, поступивших в течение дня на экспертизу. Приведенные примеры характеризуют случайные величины, имеющие количественные параметры, т.е. изолированные значения с определенными вероятностями. Такие случайные величины называют дискретными.

Но если оценить количественно как дискретную величину число ДТП, то величина интервала времени между последовательными моментами наличия ДТП может принимать любое значение в некотором временном интервале – есть непрерывное множество возможных значений рассматриваемой величины. Такие величины называют непрерывными.

Законом распределения дискретной случайной величины называют число ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Для примера, если взять монету и в течение некоторого времени подбрасывать ее, например 20 раз, то в этом случае могут быть ситуации, что все 20 раз монета будет обращена к вам гербом, или всего 19, 18 и т. д. раз, вплоть до того, что может выпасть 20 раз и решка. Можно вычислить вероятность того, что случайная величина выпадения герба примет значения от нуля до двадцати. Но, как нам известно, вероятность появления герба или решки одна и та же и равна $1/2$. Тогда вероятности появления герба 6, 7, 8 раз и соответственно решек — 14, 13, 12 раз будут равны появлению герба — 14, 13, 12 раз и соответственно 6, 7, 8 раз — решки. Таким образом, для дискретной случайной величины существует определенный закон распределения, который может быть задан графически, аналитически и таблично. В последнем случае это распределение задается таблично, где в одном столбце записаны все возможные значения случайной величины, а в другом - соответствующие им вероятности.

Число выпадений герба	Вероятность	Число выпадений решки
0	0,000	20
1	0,000	19
2	0,000	18
3	0,001	17
4	0,005	16
5	0,015	15
6	0,037	14
...	...	...

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Задачи и упражнения.
Составить закон распределения вероятностей случайной величины X , если:
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

- 1) вероятность работы каждого из четырех автомобилей автопарка ОВД города Урюпина без поломок в течение определенного времени равна 0,9; случайная величина X – число автомобилей, работавших безотказно;
- 2) вероятность рождения мальчика равна 0,5; случайная величина X – число мальчиков в семьях, имеющих четырех детей;
- 3) вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине 0,4; случайная величина X – число покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя;
- 4) вероятность выпадения герба при бросании равна 0,5; случайная величина X – число выпадений герба, если монета брошена 5 раз;
- 5) в лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышей (количество и размер выигрышей приведены в таблице); случайная величина X – размер выигрыша в лотерее, приходящегося на один билет;

Размер выигрыша, \$	20	5	1
Количество выигрышей	1	4	10

- 6) среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билет с выигрышем, наудачу покупают два билета; случайная величина X – число выигрышных билетов среди купленных;
- 7) баскетболист делает три штрафных броска, вероятность попадания мяча в корзину при каждом броске равна 0,7; случайная величина X – число попаданий мяча в корзину;
- 8) в партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект, покупают три куртки; случайная величина X – число дефектных курток среди купленных;
- 9) вероятность того, что при составлении бухгалтерского баланса допущена ошибка, равна 0,3; аудитору на заключение представлено три баланса предприятия; случайная величина X – число положительных заключений на проверяемые балансы;
- 10) из 20 заключенных, находящихся в следственном изоляторе, четверо – моложе 25 лет, произвольно выбирают 2 заключенных; случайная величина X – число заключенных моложе 25 лет среди выбранных.

Практическая работа 15. Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины.

Цель: формирование представлений о значении и способах вычисления числовых характеристик дискретной случайной величины.

Теоретическая часть:

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии.

Задачи и упражнения: Для случайной величины из задач практического занятия 7 найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Практическая работа 16. Функции распределения и плотности распределения вероятностей непрерывных случайных величин, их свойства.

Цель: формирование основных представлений о назначении и способах вычисления функций распределения и плотности непрерывной случайной величины.

Теоретическая часть:

Для непрерывной случайной величины теряет смысл понятие вероятности каждого конкретного значения, поскольку таких значений бесконечно много, и из условия, что сумма вероятностей всех значений равна 1, следует, что вероятность каждого фиксированного значения равна нулю. Поэтому основными характеристиками непрерывной случайной величины являются *функция распределения* (интегральная функция распределения) и *плотность распределения вероятностей* (плотность вероятности, дифференциальная функция распределения).

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Функция распределения $F(x)$ представляет собой вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее аргумента этой функции:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Плотность вероятности (плотность распределения) $f(x)$ является первой производной от функции распределения: $f(x) = F'(x)$. График функции $f(x)$ называют *кривой распределения*.

Понятие вероятности сохраняется для непрерывной случайной величины как вероятность ее попадания в некоторый интервал, которую можно определить так:

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a) \quad \text{или} \quad P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C(2x - x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

Найти:

1) C ; 2) $F(x)$; 3) $P\{0,5 < X < 1,5\}$.

Решение. 1) Из условия нормированности плотности вероятности следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad \text{В нашем случае}$$

$$\int_0^2 C(2x - x^2)dx = C(x^2 - x^3/3) \Big|_0^2 = C(4 - 8/3) = 4C/3 = 1,$$

откуда $C = 3/4$.

2) Связь между $F(x)$ и $f(x)$ задается формулой $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Поэтому при $x \leq 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$,

при $0 < x < 2$ $F(x) = \frac{3}{4} \int_0^x (2t - t^2)dt = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$,

а для $x \geq 2$ $F(x) = \frac{3}{4} \int_0^2 (2t - t^2)dt + \int_2^x 0 \cdot dx = 1$.

Следовательно,
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

3) $P\{0,5 < X < 1,5\} = \frac{3}{4} \int_{0,5}^{1,5} (2x - x^2)dx = \frac{3}{4} \left(x^2 - x^3/3 \right) \Big|_{0,5}^{1,5} = 0,6875$.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & -3 < x < 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a . б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(-1; 1)$.

2. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ ax^{-9/2}, & x > 2. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a .

б) Построить график функции распределения.

в) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(3; 4)$.

3. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_8$ имеют нормальный закон распределения с параметрами $m=1$, $\sigma=\sqrt{2}$. Рассматривается случайная величина $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_8$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятности $P\{3 < Y < 13\}$, $P\{|Y - 8| > 8\}$.

4. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax(4-x), & 1 < x < 4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a .

б) Построить график функции распределения.

в) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(3; 5)$.

5. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $M(X) = -2$, $D(X) = 1$. Найти: а) плотность вероятности случайной величины X и ее значения в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$; б) вероятности $P\{-2 < X < 0\}$, $P\{X > 1\}$.

Практическая работа 17-18. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Цель: формирование основных представлений о назначении и способах вычисления числовых характеристик непрерывной случайной величины.

Теоретическая часть:

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются следующим образом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ C(2x - x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Решение:

$$M(X) = \frac{3}{4} \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{4} (16/3 - 4) = 1;$$

$$D(X) = \frac{3}{4} \int_0^2 x^2(2x - x^2) dx - 1 = \frac{3}{4} \left(x^4/2 - x^5/5 \right) \Big|_0^2 - 1 = \frac{3}{4} (8 - 32/5) - 1 = 0,2;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,2} \approx 0,447.$$

Задачи и упражнения:

1. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & -3 < x < 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X , если известно, что

$$P\{X < 1\} = 0,1 \quad P\{X > 5\} = 0,2$$

Построить кривую распределения и найти ее максимум.

3. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ ax^{-9/2}, & x > 2. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Практическая работа 19-20. Абсолютная и относительная погрешности измерений.

Цель: формирование представлений о значении и методах вычисления погрешностей измерений.

Теоретическая часть:

Практическая деятельность человека неразрывно связана с числами, которые можно получать тремя способами: в результате измерений, счета и выполнения математических операций.

Однако:

- любое измерение нельзя выполнить точно: ошибку дает либо прибор, либо наблюдатель;
- счет дает точные результаты, только если количество предметов невелико и если оно постоянно во времени;

- не все математические операции можно выполнить абсолютно точно.

В этих случаях мы имеем дело с приближенными числами. Но при вычислениях важно знать отклонение приближенного значения величины от ее точного значения, для этого вводится понятие абсолютной погрешности приближения.

Абсолютной погрешностью приближения называется модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.

$$\Delta = |a - x|, \text{ где } \Delta - \text{абсолютная погрешность}$$

a – точное значение величины

x – приближенное значение

$$\Delta = |a - x| \Rightarrow a - x = \pm \Delta \Rightarrow a = x \pm \Delta$$

Пример. Найти абсолютную погрешность приближения 0,44 числа 4/9.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

100 - 99

225

На практике во многих случаях точное значение бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность найти нельзя. Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Границей абсолютной погрешности Δ приближения называется такое положительное число h больше которого абсолютная погрешность быть не может.

$$\Delta = |a - x| \leq h$$

Пример. $\frac{1}{225} = 0,004444... < 0,0045$

$x - \Delta$ – Нижняя граница (Н.Г.)

$x + \Delta$ – Верхняя граница (В.Г.)

Приближенные числа, как и точные записываются как правило при помощи десятичных дробей. Но если в записи точного числа все его цифры верные, то в приближенном некоторые его цифры верные, а другие являются сомнительными.

Цифра называется верной (точно значащей), если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда в котором записана эта цифра. В противном случае она называется сомнительной.

Пример. $x = 3,7412 \pm 0,002$

Определить верные и сомнительные цифры.

В.Г. = $3,7412 + 0,002 = 3,7432$

Н.Г. = $3,7412 - 0,002 = 3,7392$

Верные – 3 и 7, сомнительные 4, 1 и 2.

Замечания.

1) В записи приближенного числа сохраняются только верные цифры. $x = 3,7$

2) Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то они остаются в записи числа.

$x = 0,301 \pm 0,001$

В.Г. = $0,302$ Н.Г. = $0,300 \Rightarrow x = 0,30$

3) В десятичной записи числа значащими цифрами называются все его верные цифры, начиная с первой слева отличной от нуля.

$0,583; 38,57; 38,507; 29,830$

Но абсолютной погрешности недостаточно для полной характеристики приближения.

Если измерять расстояние между двумя городами, которое равно 100 км, с точностью до 1 м, то это будет точное измерение, а если с точностью до 1 м измерена длина участка земли, которая равна 10 м, то это грубое измерение.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению измеряемой величины. Обычно выражается в процентах.

$$\omega = \frac{\Delta}{x}; \quad \omega\% = \frac{\Delta}{x} \cdot 100\%$$

Т.о. для более полной оценки точности измерений необходимо определить, какую часть, или сколько процентов, составляет абсолютная погрешность от значения данной величины.

Пример. Сравнить точность двух измерений.

$d = 4 \pm 0,3; \quad H = 600 \pm 0,3$

$$\omega(d) = \frac{0,3}{4} = \frac{3}{10} \div 4 = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40} = 0,075 = 7,5\%$$

$$\omega(H) = \frac{0,3}{600} = \frac{3}{10} \div 600 = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{600} = \frac{3}{6000} = \frac{1}{2000} = 0,5 \cdot 0,001 = 0,0005 = 0,05\%$$

Второе измерение более точное.

Задачи и упражнения:

1. Вольтметром, имеющим значения $\gamma_m = 1,0 \%$, $U_n = G_{\text{норм}}$, $G_k = 450 \text{ В}$, измеряют напряжение U_u , равное 10 В. Оценить погрешности измерений.

2. Вычислить абсолютную погрешность вольтметра В7-26 при измерениях напряжения в цепи постоянного тока. Класс точности вольтметра задан максимально приведенной погрешностью $\gamma_m = \pm 2,5 \%$. Используемый в работе предел шкалы вольтметра $U_{\text{норм}} = 30 \text{ В}$.

3. Найти предельную абсолютную погрешность частного $2,81 : 0,571$.
4. Найти сумму приближенных замеров прибора. Найти количество верных знаков: $0,0909 + 0,0833 + 0,0769 + 0,0714 + 0,0667 + 0,0625 + 0,0588 + 0,0556 + 0,0526$.
5. Если при трех и более повторных измерениях данным прибором получены одинаковые значения физической величины, то чему равны абсолютные случайная и систематическая погрешности? Относительная погрешность?
6. Определить для вольтметра с пределом измерения 30 В класса точности 0,5 относительную погрешность для точек 5, 10, 15, 20, 25 и 30 В и наибольшую абсолютную погрешность прибора.

Практическая работа 21-22. Расчет погрешностей непосредственных измерений.

Цель: формирование представлений о значении и методах вычисления погрешностей измерений.

Теоретическая часть:

Работа химиков, физиков и представителей других профессий часто связана с выполнением количественных измерений различных величин. При этом возникает вопрос анализа достоверности получаемых значений, обработки результатов непосредственных измерений и оценки погрешностей расчетов, в которых используются значения непосредственно измеряемых характеристик (последний процесс также называется обработкой результатов косвенных измерений).

A -измеряемая величина, $\bar{A}$ -среднее значение измеряемой величины, $\Delta\bar{A}$ - абсолютная погрешность среднего значения измеряемой величины, $\varepsilon = \frac{\Delta\bar{A}}{\bar{A}} \cdot 100\%$ - относительная погрешность среднего значения измеряемой величины.

Предположим, что были проведены n измерений одной и той же величины A в одних и тех же условиях. В этом случае можно рассчитать среднее значение этой величины в проведенных измерениях:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n} \quad (1)$$

Как вычислить погрешность $\bar{A}$? По следующей формуле:

$$\Delta\bar{A} = t_{\gamma, n-1} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - \bar{A})^2}}{\sqrt{n-1}} \quad (2)$$

В этой формуле используется коэффициент Стьюдента $t_{\gamma, n-1}$. Его значения при разных доверительных вероятностях и значениях n приведены в таблице.

Пример. Проводили измерения длины L металлического бруска. Было сделано 10 измерений и получены следующие значения: 10 мм, 11 мм, 12 мм, 13 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм, 10 мм, 10 мм, 11 мм.

Требуется найти среднее значение $\bar{L}$ измеряемой величины (длины бруска) и его погрешность $\Delta\bar{L}$.

Решение:

С использованием формулы (1) находим:

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_i}{10} = \frac{10+11+12+13+10+10+11+10+10+11}{10} = 10,8 \text{ мм}$$

Теперь с использованием формулы (2) найдем абсолютную погрешность $\Delta\bar{L}$ среднего значения $\bar{L}$ при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ и числе степеней

$$f = n - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$t_{0,95,9} = 2,262, \text{ взятое из таблицы):}$$

свободы. Используем значение

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$\Delta \bar{L} = t_{0,95,9} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (L_i - \bar{L})^2}{9}}}{\sqrt{10}} = 2,26 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{(10 - 10,8)^2 + (11 - 10,8)^2 + (12 - 10,8)^2 + (13 - 10,8)^2 + (10 - 10,8)^2 + (10 - 10,8)^2 + (11 - 10,8)^2 + (10 - 10,8)^2 + (11 - 10,8)^2}{9}}}{\sqrt{10}} = 0,7$$

Запишем результат:
 $\bar{L} = 10,8 \pm 0,7_{0,95} \text{ мм}$

Задачи и упражнения:

1. Студент измеряет период колебаний T маятника три раза и получает результаты: 1,6; 1,8; 1,7 с. Чему равны среднее арифметическое значение $\bar{T}$ и среднее квадратическое отклонение $S(\bar{T})$ результата измерений?
2. Определите доверительную случайную погрешность $\varepsilon(x)$, если $S(\bar{x}) = 0,03 \text{ мм}$; $n = 5$; $P = 0,95$.
3. Вычислите среднее квадратическое отклонение результата измерения, если доверительная случайная погрешность $\varepsilon = 15 \text{ с}$, число наблюдений равно 7, доверительная вероятность $P = 0,95$.

Практическая работа 23-24. Расчет погрешностей косвенных измерений.

Цель: формирование представлений о значении и методах вычисления погрешностей измерений.

Теоретическая часть:

Предположим, что в ходе эксперимента измеряются величины $K_1, K_2, K_3 \dots K_p$ а затем с использованием полученных значений вычисляется величина D по формуле $D = f(K_1, K_2, K_3)$. При этом погрешности непосредственно измеряемых величин рассчитываются так, как это было описано в предыдущем занятии.

Расчет среднего значения величины D производится по зависимости $D = f(K_1, K_2, K_3)$ с использованием средних значений аргументов K_p .

Погрешность величины D рассчитывается по следующей формуле:

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta \bar{D}}{\bar{D}} \cdot 100\% = \sqrt{\sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial K_p} \cdot \frac{\Delta \bar{K}_p}{\bar{K}_p} \right)^2} \cdot 100\% \quad (3)$$

где m - количество аргументов K_p , $\frac{\partial f}{\partial K_p}$ - частные производные функции f по аргументам K_p , $\Delta \bar{K}_p$ - абсолютная погрешность среднего значения аргумента K_p .

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
 ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ как и в случае с прямыми измерениями, рассчитывается по формуле $\varepsilon_D = \frac{\Delta \bar{D}}{\bar{D}} \cdot 100\%$
 Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
 Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пример. Было проведено 5 непосредственных измерений величин Q и R . Для величины Q получены значения: 50, 51, 52, 50, 47; для величины R получены значения: 500, 510, 476, 354, 520. Требуется рассчитать значение величины S , определяемой по формуле $S = \ln(Q \cdot R)$ и найти погрешность полученного значения.

Решение: По формуле (1) найдем средние значения величин Q и R :

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^5 Q_i}{5} = \frac{50 + 51 + 52 + 50 + 47}{5} = 50$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^5 R_i}{5} = \frac{500 + 510 + 476 + 354 + 520}{5} = 472$$

Вычисляем S :

$$\bar{S} = \ln(\bar{Q} \cdot \bar{R}) = \ln(50 \cdot 472) = 10,07$$

Находим в таблице при доверительной вероятности 0,95 и числе степеней свободы $f = n - 1 = 5 - 1 = 4$ значение $t_{0,95,4} = 2,776$. По формуле (2) рассчитываем погрешности средних значений величин Q и R :

$$\Delta Q = t_{\gamma, n-1} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}}{\sqrt{n}} = 2,78 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (50 - 50)^2 + (51 - 50)^2 + (52 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (47 - 50)^2 +}}{\sqrt{5}} = 2,32$$

$$\Delta R = t_{\gamma, n-1} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}}{\sqrt{n}} = 2,78 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (500 - 472)^2 + (510 - 472)^2 + (476 - 472)^2 + (354 - 472)^2 + (520 - 472)^2 +}}{\sqrt{5}} = 84,5$$

С использованием формулы (3) находим относительную погрешность среднего значения величины S :

$$\begin{aligned} \varepsilon_S &= \frac{\Delta \bar{S}}{\bar{S}} \cdot 100\% = \sqrt{\sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial K_p} \cdot \frac{\Delta \bar{K}_p}{\bar{K}_p} \right)^2} \cdot 100\% = \sqrt{\left(\bar{R} \cdot \frac{1}{\bar{Q}} \cdot \frac{\Delta \bar{Q}}{\bar{Q}} \right)^2 + \left(\bar{Q} \cdot \frac{1}{\bar{R}} \cdot \frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} \right)^2} \cdot 100\% = \\ &= \sqrt{\left(472 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{2,32}{50} \right)^2 + \left(50 \cdot \frac{1}{472} \cdot \frac{84,5}{472} \right)^2} \cdot 100\% = 44\% \end{aligned}$$

Найдем абсолютную погрешность среднего значения величины S :

$$\Delta \bar{S} = \frac{\varepsilon_S}{100\%} \cdot \bar{S} = \frac{44\%}{100\%} \cdot 10,07 = 4,43$$

Запишем результат:

$$S = 10,07 \pm 4,43_{0,95}$$

Задачи и упражнения

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

1. Студент измеряет четыре длины: $a = (50 \pm 5)$ см; $b = (30 \pm 3)$ см; $c = (40 \pm 1)$ см; $d = (7,8 \pm 0,3)$ см и вычисляет три суммы: $a + b$, $a + c$, $a + d$. Найдите погрешности этих сумм.

2. Студент получил следующие результаты измерений: $a = (5 \pm 1)$ см;

$b = (18 \pm 2)$ см; $c = (12 \pm 1)$ см; $t = (3,0 \pm 0,5)$ с; $m = (18 \pm 1)$ г. Вычислите значения величин $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$, их абсолютные и относительные погрешности, если рабочие формулы: $w_1 = a + b + c$; $w_2 = a + b - c$; $w_3 = ct$; $w_4 = 4a$; $w_5 = b/2$;

$w_6 = mb/t$. Какую погрешность удобнее рассчитать сначала, абсолютную или относительную для этих рабочих формул?

3. Тележка скатывается без трения по наклонной плоскости с углом наклона φ . Ускорение тележки $a = g \cdot \sin(\varphi)$ ($g = 9,8$ м/с² – ускорение свободного падения). Результат измерения угла $\varphi = (5,4 \pm 0,1)^\circ$. Вычислите ускорение a и его погрешность.

Практическая работа 25-26. Вариационные ряды и их графическое изображение.

Цель: формирование основных понятий математической статистики.

Теоретическая часть:

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики являются:

- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;
- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и *объем выборки* n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была *репрезентативной* (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Пусть X – случайная величина. Тогда X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз,

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ называют вариантами, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим *относительные частоты* $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариантов, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом.

Пример 1:

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 5, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 1.

Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h , а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i -й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется *группированным статистическим рядом*.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$, где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот.

Этапы первичной обработки выборки:

1. Ранжирование опытных данных (расположение значений признака по убыванию или возрастанию).
2. Частотный анализ (построение статистического ряда, определение относительных частот).
3. Группировка (частотная таблица выборки).

Задачи и упражнения:

1. Имеются следующие данные об успеваемости 20 студентов группы по статистике в летнюю сессию: 4, 4, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4. Постройте: ряд распределения студентов по баллам оценок; ряд распределения студентов по уровню успеваемости, выделив в нем две группы студентов: неуспевающие и успевающие. Изобразите каждый из рядов графически.

2. Построить кривую и гистограмму суммы налоговых неуплат, зафиксированных по условным регионам страны, данные по которым приведены в таблице (в млн. руб.):

21	43	72	84
22	54	75	32
26	49	77	45
27	53	78	65
28	54	81	12
32	58	83	34
34	61	84	54
37	65	84	34
39	68	88	41

3. Данные о росте и весе студентов группы:												
Рост	160	169	162	166	163	160	158	173	162	173	156	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6	51		60	67	54	48	58	44	50	56	
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна											
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022												

Определите объем выборки. Составьте ранжированный и вариационный ряды по каждому из признаков.

4. Построить гистограмму нагрузки на одного следователя по расследованным уголовным делам по данным таблицы:

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2001	2003
По линии МВД	63,2	49,6	41	31,5	32,3	32,4	37,9	34,2	36,2
По линии прокуратуры	17,2	16,9	15,5	15,1	16	17,7	18,2	18,3	19,7

5. Три варианта исходных данных таблицы ниже – результаты телефонных переговоров в минутах сотрудников трех отдельных служб в течение рабочего дня. Требуется составить интервальный ряд распределения.

№ выборки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Служба 1	1,9	2,6	3,1	3,3	2,1	2,0	4,7	0,9	2,8
Служба 2	6,9	1,1	3,6	1,0	7,0	2,1	8,7	1,0	8,0
Служба 3	4,7	6,8	3,8	3,1	1,8	7,1	9,2	8,1	4,0

6. Дана выборка 7,3,3,6,4,3,5,1,2,1,3. Построить вариационный ряд. Определить размах выборки.

Практическая работа 27-29. Числовые характеристики выборки, свойства числовых характеристик.

Цель: формирование основных понятий математической статистики.

Теоретическая часть:

Одной из основных характеристик ряда распределения является средняя арифметическая. Существует две формулы для расчёта средней арифметической: простая и взвешенная. Простую среднюю арифметическую используют, когда данные наблюдений не сведены в вариационный ряд или все частоты равны единице (одинаковы).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

где x_i – i -е значение признака; n – объём ряда (число наблюдений).

Если частоты отличны друг от друга, расчёт производится по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{\sum_{i=1}^k m_i},$$

где x_i – i -е значение признака; m_i – частота i -го значения признака; k – число его значений (вариантов).

При расчёте средней арифметической в качестве весов могут выступать и частоты, тогда формула расчёта средней арифметической взвешенной примет следующий вид.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i w_i,$$

где w_i – частость i -го значения признака;

Колеблемость изучаемого признака можно охарактеризовать с помощью различных показателей вариации. К числу основных показателей вариации относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Математическое ожидание – это числовая характеристика случайной величины, со средним арифметическим её наблюдаемых значений, которое является статистической характеристикой вариационного ряда и рассчитывается по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где p_i – вероятность i -го значения признака.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}; \quad D(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^k m_i};$$

Среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Коэффициент вариации определяется формулой

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Задачи и упражнения:

1) При обследовании 50 членов семей рабочих и служащих установлено следующее количество членов семьи: 5; 3; 2; 1; 4; 6; 3; 7; 9; 1; 3; 2; 5; 6; 8; 2; 5; 2; 3; 6; 8; 3; 4; 4; 5; 6; 5; 4; 7; 5; 6; 4; 8; 7; 4; 5; 7; 8; 6; 5; 7; 5; 6; 6; 7; 3; 4; 6; 5; 4. Составьте вариационный ряд распределения частот. Постройте полигон распределения частот, кумуляту. Определите среднее число членов семьи. Охарактеризуйте колеблемость размера семьи с помощью показателей вариации.

Объясните полученные результаты, сделайте выводы.

2) Имеются данные о еженедельном количестве проданных компьютеров одной из фирм: 398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499, 580, 606, 344, 455, 505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582. Составьте вариационный ряд. Найдите среднее количество проданных компьютеров. Рассчитайте показатели вариации.

3) Администрацию магазина интересует частота покупок калькуляторов. Менеджер в течение января регистрировал данные о покупке МК и собрал следующие данные: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8. Постройте вариационный ряд, определите его числовые характеристики. Какие рекомендации вы дали бы администрации универсама?

4) Число пассажиров одного из рейсов за 30 дней составило: 128, 121, 134, 118, 123, 109, 120, 116, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132, 136, 134, 129. Составьте вариационный ряд. Найдите среднее число пассажиров в рейсе? Рассчитайте показатели вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

5) Имеются данные о годовой мощности предприятий в 2003 году

Предприятия с годовой мощностью, тыс.т	Количество предприятий
До 500	27
500 – 1000	11
1000 – 2000	8
2000 – 3000	8
Свыше 3000	2

Постройте гистограмму, кумуляту. Рассчитайте среднюю мощность предприятий. Найдите дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

6) По данным выборочного обследования получено следующее распределение по среднему доходу

Среднедушевой доход семьи в месяц, у.е.	до 25	25 – 50	50 – 75	75 – 100	100 – 125	125 – 150	150 и выше
Количество семей	250	176	102	78	12		

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Постройте гистограмму, кумуляту. Рассчитайте среднюю мощность предприятий. Найдите дисперсию. среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

Практическая работа 30-32. Выборочный метод. Точечные оценки.

Цель: формирование основных понятий математической статистики при обработке результатов эксперимента.

Теоретическая часть:

По одному из определений, статистика – это наука, позволяющая распространять выводы, сделанные на основе изучения части совокупности, на всю совокупность. В этом определении заключена сущность выборочного метода и его ведущая роль в статистике.

Все единицы совокупности, обладающие интересующими исследователя признаками, составляют генеральную совокупность.

Часть совокупности, случайным образом отобранная из генеральной совокупности составляют выборочную совокупность – выборку.

Число элементов статистической совокупности называется её объёмом. Объём генеральной совокупности обозначается N , а объём выборки – n .

Случайная выборка из n элементов – это такой отбор, при котором элементы извлекаются по одному из всей генеральной совокупности и каждый из них имеет равный шанс быть отобранным. Такая выборка называется собственно – случайной.

По способу отбора элементов различают два типа случайных выборок: собственно –случайная бесповторная и собственно –случайная повторная. Выбор схемы отбора зависит от характера изучаемого объекта.

Пусть из генеральной совокупности извлекается выборка объёмом n , причём значение признака x_1 наблюдаются m_1 раз, x_2 – m_2 раз, ..., x_k наблюдается m_k раз,

$$\sum_{i=1}^k m_i = n - \text{объём выборки}$$

Статистическим распределением выборки называется перечень возможных значений признака x_i и соответствующих ему частот m_i

Числовые характеристики генеральной совокупности называются параметрами генеральной совокупности. Доля единиц, обладающих тем или иным признаком в генеральной совокупности, называется генеральной долей и обозначается p .

Оценка параметра – это определённая числовая характеристика, полученная из выборки. Когда оценка определяется одним числом её называют точечной оценкой. В качестве точечных оценок параметров генеральной совокупности используются соответствующие выборочные характеристики.

Ошибки выборки.

Так как выборочная совокупность это часть генеральной совокупности, то естественно, что выборочные характеристики не будут точно совпадать с соответствующими генеральными. Ошибка может быть представлена как разность между генеральными и выборочными характеристиками изучаемой совокупности: $\varepsilon = X - \bar{X}$, либо $\varepsilon = p - \omega$.

Применительно к выборочному методу из теоремы Чебышева следует, что с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом объёме выборки и ограниченной дисперсии генеральной совокупности разность между выборочной средней и генеральной средней будет сколь угодно мала.

$$P(|X - \bar{X}| < \frac{t \cdot \sigma_{\text{ген}}}{\sqrt{n}}) > 1 - \frac{1}{t^2},$$

где X - средняя по совокупности выбранных единиц; $\bar{X}$ - средняя по генеральной совокупности; $\sigma_{\text{ген}}$ - среднее квадратическое отклонение в генеральной совокупности.

О величине расхождения между параметром и статистикой

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$\Delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = t \cdot \mu,$

с вероятностью, от которой зависит величина t .

Средняя ошибка выборки $\mu = \frac{\sigma_{\text{ген}}}{\sqrt{n}}$. Согласно центральной предельной теореме Ляпунова, выборочные распределения статистик (при $n \geq 30$) будут иметь нормальное распределение независимо от того, какое распределение имеет генеральная совокупность. Следовательно,

$$P(|\bar{X} - \mu| < t\mu) \approx 2\Phi_0(t),$$

где $\Phi_0(t)$ - функция Лапласа.

В зависимости от способа отбора средняя ошибка выборки определяется по разному

μ	Собственно случайный отбор	
	повторный	бесповторный
Для средней	$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$
Для доли	$\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$	$\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

Здесь σ^2 - выборочная дисперсия значений признака; $\omega(1-\omega)$ - выборочная дисперсия доли значений признака; n – объём выборки; N – объём генеральной совокупности; $\frac{n}{N}$ - доля обследованной совокупности; $\left(1 - \frac{n}{N}\right)$ – поправка на бесповторность отбора.

Формулы расчёта необходимой численности выборки для собственно случайного отбора определяются в таблице.

μ	Собственно случайный отбор	
	повторный	бесповторный
Для средней	$\frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2}$	$\frac{t^2 \sigma^2 N}{N\Delta^2 + t^2 \sigma^2}$
Для доли	$\frac{t^2 \omega(1-\omega)}{\Delta^2}$	$\frac{t^2 N \omega(1-\omega)}{n\Delta^2 + t^2 \omega(1-\omega)}$

Задачи и упражнения:

По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения, вычислить:

- 1) выборочное среднее;
- 2) исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

А) 8.0 -1.1 13.5 10.0 2.4 4.1 20.0 12.4 13.4 4.8 7.8 0.0 10.9 13.7 6.6

Б) 31.6 34.9 46.9 42.8 36.0 26.2 28.6 48.5 27.7 45.8 32.0 41.2 39.8 33.1 36.3 53.5 43.9 35.8 32.9 34.4

В) 25.4 31.1 13.2 23.0 19.1 26.5 23.2 29.2 24.8 26.6 29.3 21.4 28.2 38.2 19.9 30.6 24.5 23.2

Г) 10.5 5.5 12.6 27.0 25.0 31.2 15.9 15.3 17.4 32.8 30.3 9.5 17.7 16.4 15.9.

Практическая работа 33-34. Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.

Документ подписан
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

При выборке малого объёма точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объёме выборки следует пользоваться интервальными оценками. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ . Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ^* тем точнее определяет параметр Θ , чем меньше абсолютная величина разности $|\Theta - \Theta^*|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, то чем меньше δ , тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $|\Theta - \Theta^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ , с которой это неравенство осуществляется.

Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ , с которой осуществляется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Обычно надёжность оценки задаётся наперёд, причём в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $|\Theta - \Theta^*| < \delta$, равна γ : $P[|\Theta - \Theta^*| < \delta] = \gamma$.

Заменяя неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta, \quad \text{или} \quad \Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta, \quad \text{имеем} \\ P[\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta] = \gamma.$$

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ , равна γ . Доверительным называют интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ .

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ .

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{X}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надёжностью γ .

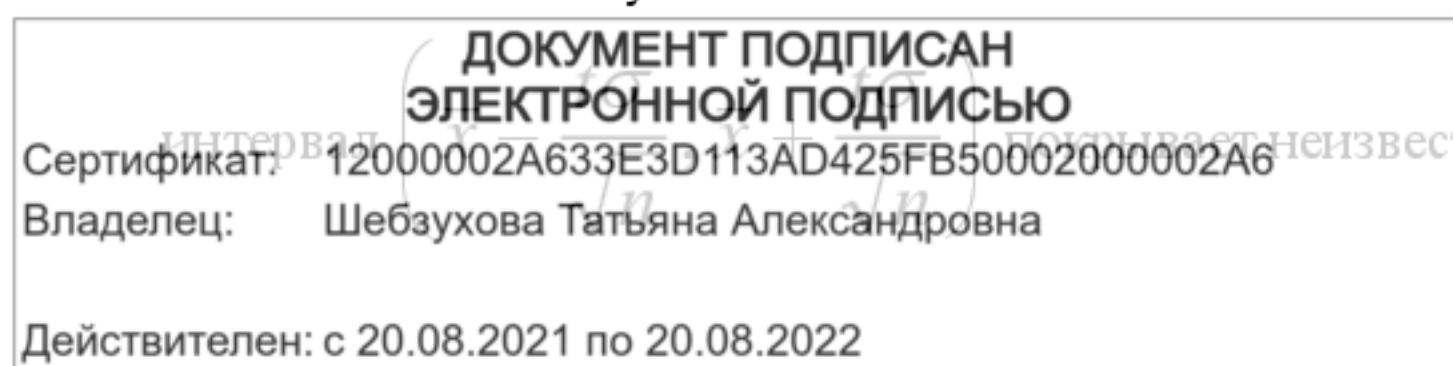
Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы:

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Приняв во внимание, что по условию нам задана вероятность γ , получаем следующую формулу (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через $\bar{x}$)

$$P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надёжностью γ можно утверждать, что доверительный



интервал покрывает неизвестный параметр a ; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Укажем ещё, что число t определяется из равенства $2\Phi_0(t) = \gamma$, или $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$; по таблице

функции Лапласа находят аргумент t , которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Надёжность $\gamma=0,95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключён; лишь в 5 % случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно воспользоваться результатами предыдущего параграфа, в котором σ предполагалось известным.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину $T = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}}$,

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы; здесь $\bar{X}$ – выборочная средняя, S – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n – объём выборки.

Пользуясь распределением Стьюдента, находим:

$$P\left(\bar{X} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Значит, доверительный интервал $\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$, покрывает неизвестный параметр a с

надёжностью γ .

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве (то есть в генеральной совокупности) – распределена нормально. По выборке объёма $n = 16$ найдены выборочная средняя $\bar{X} = 20,2$ кг и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$ кг. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надёжностью 0,95.

Решение: Найдём t_γ . Пользуясь таблицей, по $\gamma = 0,95$ и $n = 16$ находим $t_\gamma = 2,13$.

Найдём доверительные границы:

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 20,2 - \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 19,774 \text{ кг},$$

$$\bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 20,2 + \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 20,626 \text{ кг}.$$

Итак, с надёжностью 0,95 неизвестный параметр a заключён в доверительном интервале $19,774 < a < 20,626$ (кг).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s .

Доверительный интервал, покрывающий параметр σ с заданной надёжностью γ находят по следующей формуле:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q).$$

Здесь q – значение функции Лапласа, которое находят по таблице приложения 2, а s находят по выборке.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

среднее квадратическое отклонение $s=0,8$ кг. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью 0,95.

Решение: По таблице по данным $\gamma=0,95$ и $n=25$ найдём $q=0,32$.

Искомый доверительный интервал таков:

$0,8 (1 - 0,32) < \sigma < 0,8 (1+0,32)$, или

$0,544 < \sigma < 1,056$ (кг).

Замечание. Если $q>1$, то неравенство примет вид

$0 < \sigma < s(1+q)$.

Задачи и упражнения:

1) С помощью собственно – случайного повторного отбора фирма провела обследование 900 своих служащих. Средний стаж работы в фирме равен 8,7 года, а среднее квадратическое отклонение – 2,7 года. Среди обследованных оказалось 270 женщин. Считая стаж работы служащих распределённым по нормальному закону определите: а) с вероятностью 0,95 доверительный интервал, в котором окажется средний стаж работы всех служащих фирмы; б) с вероятностью 0.9 доверительный интервал, накрывающий неизвестную долю женщин во всём коллективе фирмы.

2) Владелец автостоянки опасается обмана со стороны служащих. В течении года владельцем автостоянки проведено 40 проверок. По данным проверок среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на охрану, составило 400 единиц, а стандартное отклонение их числа – 10 автомобилей. Считая отбор собственно случайным, с вероятностью 0,99 оцените с помощью доверительного интервала истинное среднее число автомобилей, оставляемых на ночь. Обоснованы ли опасения владельца стоянки, если по отчётности охранников среднее число автомобилей составляет 395 автомобилей.

3) В 24 из 40 проверок число автомобилей на автостоянке не превышало 400 единиц. С вероятностью 0,98 найдите доверительный интервал для оценки истинной доли дней в течении года, когда число оставляемых на стоянке автомобилей не превышало 400 единиц.

4) Служба контроля Энергосбыта провела выборочную проверку расхода электроэнергии жителями одного из домов. С помощью собственно – случайного отбора выбрано 10 квартир и определён расход электроэнергии в течении месяцев: 125; 78; 102; 140; 90; 45; 50; 125; 115; 112. С вероятностью 0. 95 определите доверительный интервал для оценки среднего расхода электроэнергии на 1 квартиру во всём доме при условии, что в доме 70 квартир, а отбор был: а) повторным; б) бесповторным.

5) С целью изучения размеров выручки киосков была произведена 10% -ая случайная бесповторная выборка из 1000 киосков города. В результате были получены данные о средней выручке составившие 500 у.е. В каких пределах с доверительной вероятностью 0,95 может находиться средняя дневная выручка, если среднее квадратическое отклонение составило 150 у. е.?

6) Фирма торгующая компьютерами собирает информацию о состоянии местного компьютерного рынка. С этой целью из 8 746 лиц в возрасте 18 лет и старше, проживающих в этом городе, отобрано 500 человек. Среди них оказалось 29 человек, планирующих приобрести компьютер в новом году. Оцените долю лиц в генеральной совокупности в возрасте 18 лет и старше, планирующих приобрести компьютер в новом году, если $\alpha = 0, 05$

7) Для оценки числа безработных среди рабочих в порядке случайной повторной выборки отобраны 400 человек. 25 из них оказались безработными. Используя 95% доверительный интервал, оцените истинные размеры безработицы.

8) Туристическое агентство утверждает, что для черноморского курорта характерна идеальная погода со среднегодовой температурой 20°C . Пусть случайно отобраны 35 дней в году. Какова вероятность того, что отклонение средней температуры за отобранные дни от среднегодовой температуры не превысит по абсолютной величине 2°C , если температура воздуха распределена по нормальному закону, а стандартное отклонение дневной температуры составляет 4°C ?

Практическая работа 35-37. Статистическая проверка гипотез. Параметрические критерии.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Статус документа: **ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известной функции распределения. Выводы о справедливости выдвинутой гипотезы рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0 .

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. Обозначим эту величину в целях общности через K .

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K , которая служит для проверки нулевой гипотезы.

После выбора определённого критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

В области статистики и биометрии в частности применяют два вида статистических критериев: *параметрические*, построенные на основании параметров данной совокупности (например, $\bar{x}$ и s^2_x) и представляющие функции этих параметров, и *непараметрические*, представляющие собой функции, зависящие непосредственно от вариантов данной совокупности с их частотами. Первые служат для проверки гипотез о параметрах совокупностей, распределяемых по нормальному закону, вторые — для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Применение параметрических критериев связано с необходимостью вычисления выборочных характеристик — средней величины и показателей вариации, тогда как при использовании непараметрических критериев такая необходимость отпадает.

t-критерий Стьюдента (t-распределение). Английский математик В. Госсет (печатавшийся под псевдонимом Стьюдент), в 1908 г. нашел закон распределения величины $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, в которой генеральный параметр σ заменен на его выборочную характеристику s_x , т. е. нашел закон распределения значений

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Открытый Стьюдендом и теоретически обоснованный Р. Фишером закон *t-распределения* служит основой так называемой теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в нормально распределяющейся совокупности в зависимости от объема выборки. t-распределение зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$, причем с увеличением объема выборки n t-распределение быстро приближается к нормальному с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и уже при $n > 30$ не отличается от него. Это видно из таблицы ниже, в которой приведены табулированные значения t-распределения и нормального распределения для разных значений t .

Распределение	Нормированное отклонение t						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Нормальное	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
Стьюдента $n = 3$		0,577	0,728	0,816	0,870	0,905	0,927
Стьюдента $n = 20$		0,670	0,850	0,940	0,978	0,993	0,998

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

n = 30	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Оценка разности средних. Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами μ_1 и μ_2 . Разность $\mu_1 - \mu_2$ этих параметров обозначим через D , то есть $\mu_1 - \mu_2 = D$, а дисперсию этой разности σ_D^2 . Значения генеральных параметров неизвестны, однако по выборкам мы можем найти величины выборочных средних и разность между

ними $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, которую обозначим d , то есть $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = d$.

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mu_1 = \mu_2$, то есть $D = 0$. Критерием для проверки H_0 -гипотезы служит отношение

$$t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{s_d}$$

где t — переменная величина, следующая t -распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, а s_d — ошибка указанной разности, а n_1 и n_2 — объемы первой и второй выборок соответственно.

Так как, согласно H_0 -гипотезе, $\mu_1 = \mu_2$, то t -критерий выражается в виде отношения разности выборочных средних к своей ошибке, т. е.

$$t = \frac{d}{s_d}$$

H_0 -гипотезу отвергают, если фактически установленная величина t -критерия (обозначаемая t_ϕ) превзойдет или окажется равной критическому значению t_{kp} этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, т. е. при условии $t_\phi \geq t_{kp}$.

Ошибку разности средних s_d определяют по формуле:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_j - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Пример. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводили на двух группах животных: опытной и контрольной. Были исследованы кролики в возрасте от полутора до двух месяцев, массой тела 500—600 г. Опыт продолжался полтора месяца. Животных обеих групп содержали на одном и том же кормовом рационе. Однако опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0,06 г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела:

Привесы, г		Отклонения от средней арифметической		Квадраты отклонений	
опыт	контроль	опыт ($x_i - \bar{x}_1$)	контроль ($x_j - \bar{x}_2$)	опыт ($x_i - \bar{x}_1$) ²	контроль ($x_j - \bar{x}_2$) ²
580	504	58	22	3364	484
692	560	54	34	2916	1156
700	420	62	106	3844	11236
621	600	17	74	289	5476
640	580	2	54	4	2916
561	530	77	4	5929	16
680	490	42	36	1764	1296
630	580	8	54	64	2916
	470		56		3136
$\Sigma = 5500$		—		$\Sigma = 18174$	$\Sigma = 28632$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$\bar{x}_1 = 638$	$\bar{x}_2 = 526$	—	--	$\Sigma = 46806$
-------------------	-------------------	---	----	------------------

Средние арифметические привесов:

в опыте $\bar{x}_1 = 5104/8 = 638$ г,

в контроле $\bar{x}_2 = 4734/9 = 526$ г. Разница $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = d = 112$ г. Чтобы установить, достоверна или случайна эта разница, нужно определить ошибку разности средних:

$$s_D = \sqrt{\frac{46806}{8+9-2} \cdot \left(\frac{8+9}{8 \cdot 9}\right)} = \sqrt{736,8} = 27,14.$$

Отсюда $t_{\phi} = 112/27,14 = 4,1$.

По таблице для уровня значимости $\alpha = 0,01$ и числа степеней свободы $k = 9+8-2 = 15$ находим $t_{kp} = 2,95$. Так как $t_{\phi} > t_{kp}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости ($P < 0,01$). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась в высшей степени достоверной.

Задачи и упражнения:

1) 7 студентов из 10 сдавали практические работы так, как будто они были списаны друг у друга. На уровне значимости 0,05 определите, случайно ли это, или студенты действительно списывали.

2) На уровне значимости $\alpha = 0,025$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты

$m_{(эмп)i}$	5	10	20	25	14	3
$m_{(теор)i}$	6	14	28	18	8	3

3) Техническая норма предусматривает в среднем 40 с на выполнение определённой технологической операции на конвейере. От работающих на этой операции поступили жалобы, что они в действительности затрачивают на неё больше времени. Для проверки жалобы произведены измерения времени выполнения этой операции у 16 работниц, занятых на ней и получено среднее время 42 с. Можно ли по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0,01$ отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, если: а) исправленное выборочное отклонение $s = 3,5$ с; б) выборочное среднее отклонение $- 3,5$ с?

4) Экономический анализ производительности труда предприятий позволил выдвинуть гипотезу о наличии 2 типов предприятий с различной средней величиной показателя производительности труда. Выборочное обследование 42 предприятий 1-й группы дало следующие результаты: средняя производительность труда 119 деталей. Выборочное обследование 35 предприятий 2-й группы показало, что средняя производительность труда составляет 107 деталей. Генеральные дисперсии соответственно равны 126,91 (дет.²) и 136,1 (дет.²). Считая, что выборки извлечены из нормально распределённых генеральных совокупностей X и Y, на уровне значимости 0.05, проверьте, случайно ли полученное различие средних показателей производительности труда или же имеются 2 типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

5) Предполагается, что применение новых компьютерных технологий сократит время решения задач. Хронометраж времени решения 9 задач без компьютерных технологий дал следующие результаты: среднее время решения 57 минут, исправленная выборочная дисперсия $s_x^2 = 186,2$ (мин²). Среднее время решения 15 задач с применением компьютерных технологий 52 минуты, а исправленная выборочная дисперсия $s_y^2 = 166,4$ (мин²). На уровне значимости $\alpha = 0,01$ ответьте позволило ли применение компьютерных технологий сократить время решения задач.

6) Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Среди случайно отобранных 200 изделий проверяемой партии оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,02$ принять партию

7) Для завода изготавливают однотипные детали. Для оценки их качества сделаны выборки из продукции этих заводов и получены следующие результаты

Сертификат: Владелец: Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	Документ подписан Электронной подписью		Завод №1	Завод №2
	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A611			n ₂
	Шебзухова Татьяна Александровна		m ₁	m ₂
	Число бракованных деталей			

На уровне значимости $\alpha = 0,025$ определите, имеется ли существенное различие в качестве изготавливаемых деталей?

8) Компания, производящая средства для похудения, утверждает, что приём таблеток в сочетании со специальной диетой позволяет сбросить в среднем в неделю 400гр веса. Случайным образом отобраны 25 человек, использующих эту терапию, и обнаружено, что в среднем еженедельная потеря в весе составила 430гр со средним квадратическим отклонением 110гр. Проверьте гипотезу о том, что средняя потеря в весе составляет 400гр. Уровень значимости $\alpha = 0,05$

9) Компания утверждает, что новый вид зубной пасты лучше предохраняет зубы, чем зубные пасты других фирм. Для проверки в случайном порядке выбраны 400 детей, пользовавшихся новой пастой и 300 детей, которые пользовались зубными пастами других фирм. После окончания эксперимента было выяснено, что у 30 детей, использующих новую пасту, и 25 детей из другой группы появились новые признаки кариеса. Имеются ли у компании достаточные основания для утверждения о том, что новый сорт зубной пасты эффективнее. Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$

10) Инженер по контролю качества проверяет среднее время горения нового вида электроламп. Для проверки в порядке случайной выборки было отобрано 100 ламп, среднее время горения которых составило 1075 часов. Среднее квадратическое отклонение времени горения составляет 100 часов. Используя уровень значимости $\alpha = 0.05$, проверьте гипотезу о том, что среднее время горения ламп – более 1000 часов.

11) Компания, выпускающая в продажу новый сорт кофе, провела проверку вкусов покупателей по случайной выборке из 400 человек и выяснила, что 220 из них предпочли новый сорт всем остальным. Проверьте на уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу о том, что по крайней мере 52% потребителей предпочтут новый сорт кофе.

Практическая работа 38-39. Статистическая проверка гипотез. Непараметрические критерии.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Правильное применение параметрических критериев для проверки статистических гипотез основано на предположении о нормальном распределении совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Однако это не всегда имеет место, так как не все биологические признаки распределяются нормально. Немаловажным является и то обстоятельство, что исследователю приходится иметь дело не только с количественными, но и с качественными признаками, многие из которых выражаются порядковыми номерами, индексами и другими условными знаками. В таких случаях необходимо использовать *непараметрические критерии*.

Известен целый ряд непараметрических критериев, среди которых видное место занимают так называемые *ранговые критерии*, применение которых основано на ранжировании членов сравниваемых групп. При этом сравниваются не сами по себе члены ранжированных рядов, а их порядковые номера, или ранги. Далее мы рассмотрим некоторые непараметрические критерии, применяемые для проверки нулевой гипотезы при сравнении как независимых, так и зависимых выборочных групп.

U - критерий Уилкоксона (Манна—Уитни). Гипотезу о принадлежности сравниваемых независимых выборок к одной и той же генеральной совокупности или к совокупностям с одинаковыми параметрами, т. е. H_0 -гипотезу, можно проверить с помощью *рангового критерия Уилкоксона (Манна—Уитни)*.

Для расчета U -критерия необходимо:

1. Расположить числовые значения сравниваемых выборок в возрастающем порядке в один общий ряд и пронумеровать члены общего ряда от 1 до $N = n_1 + n_2$. (Эти номера и будут «рангами» членов ряда.)

2. Отдельно для каждой выборки найти суммы рангов и определить величины,

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

и

$$U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

которые отображают связь между суммами рангов первой и второй выборки.

3. В качестве U -критерия использовать меньшую величину U_{ϕ} , которую сравнить с табличным значением U_{kp} . Условием для сохранения принятой H_0 -гипотезы служит неравенство $U_{\phi} > U_{kp}$. Критические точки U -критерия U_{kp} для n_1, n_2 и принимаемого уровня значимости α содержатся в таблице 3 Приложения.

Пример. На двух группах лабораторных мышей – опытной ($n_1 = 9$) и контрольной ($n_2 = 11$) – изучали воздействие на организм нового препарата. Испытание продолжалось один месяц. После этого масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

В опытной группе 80, 76, 75, 64, 70, 68, 72, 79, 83.

В контрольной группе 70, 78, 60, 80, 62, 68, 73, 60, 71, 66, 69.

Вычислим по выборкам: $\bar{x}_1 = 74,1$ и $\bar{x}_2 = 68,8$.

Проверим с помощью U -критерия, является ли разность в массе тела между опытной и контрольной группами мышей статистически достоверной.

Суммируя ранги отдельно для каждой группы, находим:

$R_1 = 4+6+9+12+14+15+17+19+20=112$;

$R_2 = 1+2+3+5+7+8+10+11+13+16+18=94$.

Подставляем эти данные в формулы:

$$U_1 = 112 - \frac{9 \cdot 10}{2} = 67; \quad U_2 = 94 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 22$$

Меньшую величину $U_2 = 22$ сравниваем с табличным U_{kp} значением для $n_1=9, n_2=11$ и уровня значимости $\alpha=0,01$, которое равно $U_{kp}=19$.

Поскольку $U_{\phi} > U_{kp}$, отвергнуть проверяемую H_0 -гипотезу нельзя. Следовательно, различия, наблюдаемые между этими выборками, статистически недостоверны. Выборки не имеют значимых отличий.

Критерий знаков z . В тех случаях, когда результаты наблюдений выражаются не числами, а качественными признаками, принимающими два различных значения (помечаем их знаками плюс (+) и минус (—)), различия между попарно связанными членами сравниваемых выборок оценивают с помощью критерия знаков z . Конструкция этого критерия базируется на весьма простых соображениях: если попарно сравниваемые значения двух зависимых выборок существенно не отличаются друг от друга, то число плюсовых и минусовых разностей окажется совершенно одинаковым; если же заметно преобладают плюсы или минусы, это будет указывать на положительное или отрицательное действие изучаемого фактора на результативный признак. Большее число однозначных разностей служит в качестве фактически найденной величины z -критерия знаков. При этом нулевые разности, т. е. случаи, не давшие ни положительного, ни отрицательного результата, обозначаемые цифрой 0, в расчет не принимают и число парных наблюдений соответственно уменьшается.

Как и всякий другой выборочный показатель, z -критерий знаков является величиной случайной; он служит для проверки H_0 -гипотезы, т. е. предположения о том, что совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одинаковые функции распределения. H_0 -гипотеза отвергается, если $z_{\phi} \geq z_{kp}$ для принятого уровня значимости α и числа парных наблюдений n , взятых без нулевых разностей. Критические точки z_{kp} для двух уровней значимости и числа парных наблюдений содержатся в таблице.

Задачи и упражнения:

Результаты тестирования по 30-бальной шкале для группы X и группы Y представлены в таблице. Сравнить эффективность двух методов обучения студентов в двух группах для уровня статистической значимости $\beta = 5\%$.

Сертификат: Владелец:	X ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	15	14	11	13				
	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6 Шебзухова Татьяна Александровна	16	10	19	7	15	14	29	
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022									

Практическая работа 40-41. Проверка гипотез о законах распределения.

Цель: формирование представления о принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определённый вид (назовём его A), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону A .

Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения производится при помощи специально подобранной случайной величины – критерия согласия.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Критерий согласия Пирсона. Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи-квадрат») К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Ограничимся описанием применения критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий аналогично применяется и для других распределений, в этом состоит его достоинство). С этой целью будем сравнивать эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты.

Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Например:

эмп. частоты.....6 13 38 74 106 85 30 10 4

теорет. частоты...3 14 42 82 99 76 37 11 2

Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и объясняется либо малым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены, исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

Критерий Пирсона отвечает на поставленный выше вопрос. Правда, как и любой критерий, он не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости её согласие или несогласие с данными наблюдений.

Итак, пусть по выборке объёма n получено эмпирическое распределение:

варианты..... x_i x_1 x_2 x_s

эмп. частоты... n_i n_1 n_2 n_s

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n'_i (например, так, как в следующем параграфе). При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \frac{\sum (n_i - n'_i)^2}{n'_i} . (*)$$

Эта величина случайная, т.к. в различных опытах она принимает различные, заранее неизвестные значения. Ясно, что чем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия (*), и, следовательно, он в известной степени характеризует близость эмпирического и теоретического распределений.

Заметим, что возведением в квадрат разностей частот устраняют возможность взаимного погашения положительных и отрицательных разностей. Делением на n'_i достигают уменьшения каждого из слагаемых; в противном случае сумма была бы настолько велика, что приводила бы к отклонению нулевой гипотезы даже и тогда, когда она справедлива. Разумеется, приведённые соображения не являются обоснованием выбранного критерия, а лишь пояснением.

Доказано, что при $n \rightarrow \infty$ закон распределения случайной величины (*) независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Поэтому случайная величина (*) обозначена через χ^2 , а сам критерий называют критерием согласия «хи квадрат».

Число степеней свободы находят по равенству $k = s - 1 - r$, где s – число групп (частичных интервалов) выборки; r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В случае, когда закон распределения – нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и дисперсия, или среднее арифметическое и квадратическое отклонение), поэтому $r = 2$ и число степеней свободы

оценивают один параметр λ , поэтому $r=1$ и

$$k = s - 2.$$

Поскольку односторонний критерий более «жёстко» отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α :

$$P\left[\chi^2 > \chi_{kp}^2(\alpha; k)\right] = \alpha.$$

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha; k)$, а область принятия нулевой гипотезы – неравенством $\chi^2 < \chi_{кр}^2(\alpha; k)$.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{набл}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того, чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0 : генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \frac{\sum (n_i - n'_i)^2}{n_i} \quad (**)$$

и по таблице критических точек распределения χ^2 , по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ найти критическую точку $\chi_{kp}^2(\alpha; k)$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевая гипотеза отвергается.

Замечание 1. Объем выборки должен быть достаточно велик, во всяком случае, не менее 50. Каждая группа должна содержать не менее 5-8 вариантов, малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя частоты.

Пример. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

ЭМП. частоты.....6 13 38 75 106 85 30 14

теорет. частоты...3 14 42 82 99 76 37 13

Вычислим $\chi^2_{набл}$, для чего составим расчётную таблицу.

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_2}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08

Σ	ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ		
	Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6	
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна		
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022			

Контроль: $\chi^2_{набл} = 7,19$:

$$\left[\sum \frac{n_i^2}{n'_i} \right] - n = 373,19 - 366 = 7,19. \text{ Вычисления произведены правильно.}$$

Найдём число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариантов) $s = 8$; $k = 8 - 3 = 5$.

По таблице критических точек распределения χ^2 , по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 5$ находим $\chi^2_{кр}(0,05; 5) = 11,1$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задачи и упражнения:

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X по результатам выборки:

X 0,3 0,5 0,7 0,9 1,1 1,3 1,5 1,7 1,9 2,1 2,3
N 7 9 28 27 30 26 21 25 22 9 5

Практическая работа 42-44. Корреляционная зависимость. Коэффициент корреляции.

Цель: формирование представления об элементах корреляционного анализа.

Теоретическая часть:

Зависимость между значениями одной случайной величины и условным математическим ожиданием другой случайной величины носит название статистической.

Чтобы изучить статистическую зависимость, нужно знать условное математическое ожидание случайной величины. Для его оценки необходимо знать аналитический вид двумерного распределения (X,Y). Однако, суждение об аналитическом виде двумерного распределения, сделанного по отдельной ограниченной по объёму выборке, может привести к серьёзным ошибкам. Поэтому идут на упрощение и переходят от условного математического ожидания случайной величины к условному среднему значению,

т.е. принимают, что $M(Y)_x = \bar{Y}_x$

Зависимость между значениями одной случайной величины и условным средним значением другой случайной величины носит название **корреляционной** (от англ. correlation - согласование, связь, взаимосвязь, соотношение, взаимозависимость); термин впервые введен Гальтоном в 1888г.

Парный коэффициент корреляции Пирсона (1896 г.) изменяется в пределах от -1 до +1. Значение 0,00 интерпретируется как отсутствие корреляции. Корреляция определяет степень, с которой значения двух переменных пропорциональны друг другу.

Определяют две черты зависимости между переменными: величину зависимости и надежность зависимости.

Надежность зависимости – менее наглядные понятия, чем величина зависимости, однако чрезвычайно важна. Оно непосредственно связано с репрезентативностью той определенной выборки, на основе которой строятся выводы. Другими словами надежность говорит, насколько вероятно, что зависимость подобная найденной, будет вновь обнаружена (подтвердится) на данных другой выборки, извлеченной из той же самой популяции. Если исследование удовлетворяет некоторым специальным критериям, то надежность найденных зависимостей между переменными выборки можно количественно оценить и представить с помощью стандартной статистической меры (называемой р-уровень, или статистический уровень значимости).

Статистическая значимость результата представляет собой оцененную меру уверенности в его правильности. Уровень значимости или р-уровень, - это показатель, находящийся в убывающей зависимости от надежности результата. Более высокий р-уровень соответствует более низкому уровню доверия к найденной в выборке зависимости между переменными. Именно р-уровень представляет собой вероятность ошибки, связанной с распространением наблюдаемого результата на всю популяцию. Чем слабее зависимость между переменными, тем большего объема требуется выборка, чтобы значимо ее обнаружить.

Другими словами, если зависимость между переменными почти отсутствует, объем выборки, необходимый для ее значимого обнаружения, будет равен объёму всей популяции, которой предполагается бесконечным.

Рабочие формулы коэффициентов корреляции применяют с учетом того, с какой выборкой (большой или малой) мы имеем дело.

Например, для малых выборок удобнее всего пользоваться следующей формулой:

Документ подписан
Электронной подписью
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{q \cdot q}}, \text{ где}$$

$$q = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \text{ и } q = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}, \text{ где } x\text{-варианты первого признака;}$$

y-варианты второго признака; n-число наблюдений в выборке.

Задачи и упражнения:

Определить зависимость содержания витамина С в продукте в зависимости от длительности его обработки при определенной температуре по результатам n=6 измерений (экспериментов). Какое количество витамина С (в долях к первоначальному) будет содержаться в продукте при обработке его в течение t_1^* и t_2^* часов. Построить график полученной зависимости и изобразить на координатной плоскости результаты измерений.

1.

x_i	0,11	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	t_1^*	t_2^*
y_i	0,97	0,94	0,9	0,86	0,83	0,78	0,25	0,74

2.

x_i	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	t_1^*	t_2^*
y_i	0,97	0,94	0,9	0,86	0,83	0,78	0,25	0,74

3.

x_i	0,14	0,24	0,34	0,44	0,54	0,64	t_1^*	t_2^*
y_i	0,97	0,94	0,9	0,86	0,83	0,78	0,25	0,74

Практическая работа 45-46. Линейная регрессия. Коэффициенты регрессии.

Цель: формирование представления об элементах и принципах регрессионного анализа.

Теоретическая часть:

Для изучения корреляционных связей большое значение имеет коэффициент регрессии ρ , который показывает, насколько в среднем изменяется признак (X), если коррелирующий с ним признак (Y) изменяется на определенную величину.

Коэффициент регрессии в конкретной выборке имеет два значения, а именно: ρ_{xy} и ρ_{yx} , т.е. прямое и обратное влияние признаков друг на друга. Формула для расчета коэффициента имеет вид:

$$\rho_{xy} = r \frac{S_x}{S_y}; \rho_{yx} = r \frac{S_y}{S_x}$$

Статистическую зависимость Y от X описывают с помощью уравнения вида

$$M(Y)_x = f(x)$$

где $M(Y)_x$ - условное математическое ожидание величины Y, соответствующее данному значению x; x – отдельные значения величины X; $f(x)$ - некоторая функция. Это уравнение называется уравнением регрессии Y на X.

Обратную статистическую зависимость можно описать уравнением регрессии X на Y:

$$M(X)_y = \varphi(y)$$

где $M(X)_y$ - условное математическое ожидание величины X, соответствующее данному значению y

Функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ называют соответственно регрессиями Y на X и X на Y , а их графики – линиями регрессии Y на X и X на Y . Уравнения регрессии выражают математическое ожидание случайной величины Y (или X) для случая, когда другая переменная принимает определенное число.

В зависимости от вида уравнений регрессии и формы соответствующих линий регрессии говорят о различной форме статистической зависимости между изучаемыми величинами – линейной, квадратичной, показательной и т.д.

Если функции $f(x)$, $\varphi(y)$ линейные, т.е. уравнения регрессии можно представить в виде:

$$\overline{Y}_x = Ax + B$$

$$\overline{X}_y = Cy + D$$

где A, B, C, D – некоторые параметры, то описываемые этими уравнениями зависимости Y от X и X от Y называются линейными; линии регрессии при этом – прямые. Если линия регрессии не является прямой, то такую зависимость называют нелинейной.

Для характеристики формы связи между двумя случайными величинами, полученными в результате выборочных наблюдений, используют корреляционную зависимость $\overline{Y}_x = f(x)$ (или $\overline{X}_y = \varphi(y)$). Уравнения, описываемые подобной зависимостью, называют выборочными уравнениями регрессии.

Если функции $f(x)$, $\varphi(y)$ линейные, то выборочные уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y можно представить в виде:

$$\overline{Y}_x = \rho_{yx}x + b$$

$$\overline{X}_y = \rho_{xy}y + d$$

где $\overline{Y}_x$ и $\overline{X}_y$ – условные средние значения величин Y и X , параметры b и d – оценки B и D , ρ_{yx} и ρ_{xy} – выборочные оценки коэффициентов A и C .

Угловые коэффициенты ρ_{yx} и ρ_{xy} линий регрессии носят названия выборочных коэффициентов регрессии Y на X и X на Y соответственно. Они определяются как:

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\overline{Y}}{S_x^2}; \quad \rho_{xy} = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\overline{Y}}{S_y^2},$$

$$\text{где } S_x^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2, \quad S_y^2 = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2.$$

Задачи и упражнения:

Найти выборочное уравнение прямой $\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \overline{x})$ регрессии Y на X по данной корреляционной таблице.

1.

Y	X						n _y
	10	15	20	25	30	35	
6	4	2	–	–	–	–	6
12	–	6	2	–	–	–	8
18	–	–	5	40	5	–	50
24	–	–	2	8	7	–	17
30	–	–	–	4	7	8	19
n _x	4	8	9	52	19	8	n=100

2.

2.		ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН				
Y		ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ				
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6					n _y
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна		23	33	43	
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022						

8	4	2	–	–	–	–	6
10	–	6	2	–	–	–	8
12	–	–	5	40	5	–	50
14	–	–	2	8	7	–	17
16	–	–	–	4	7	8	19
n _x	4	8	9	52	19	8	n=100

3.

Y	X						n _y
	11	15	19	23	27	31	
10	4	2	–	–	–	–	6
20	–	6	2	–	–	–	8
30	–	–	5	40	5	–	50
40	–	–	2	8	7	–	17
50	–	–	–	4	7	8	19
n _x	4	8	9	52	19	8	n=100

4.

Y	X						n _y
	20	23	26	29	32	35	
16	4	2	–	–	–	–	6
19	–	6	2	–	–	–	8
22	–	–	5	40	5	–	50
25	–	–	2	8	7	–	17
28	–	–	–	4	7	8	19
n _x	4	8	9	52	19	8	n=100

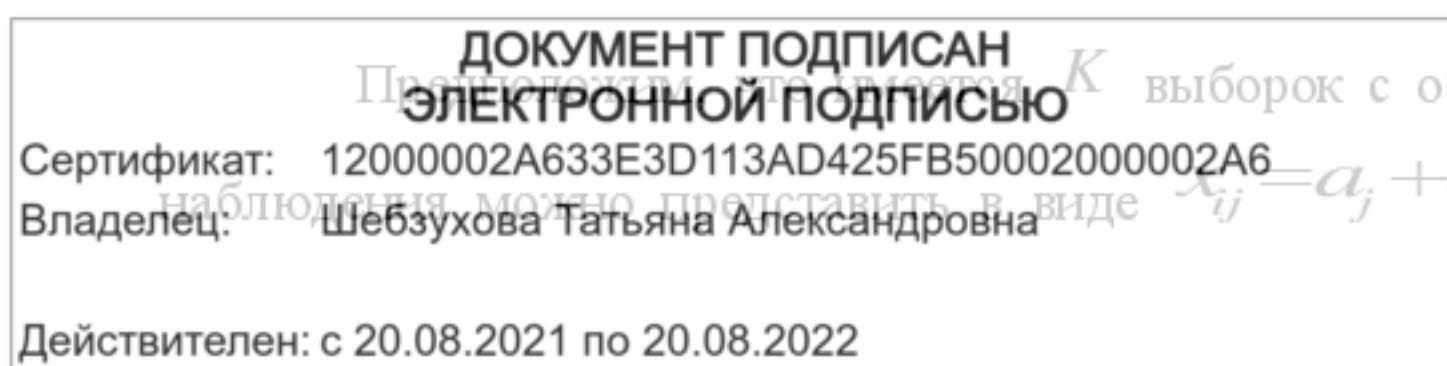
5.

Y	X						n _y
	14	18	22	26	30	34	
5	4	2	–	–	–	–	6
10	–	6	2	–	–	–	8
15	–	–	5	40	5	–	50
20	–	–	2	8	7	–	17
25	–	–	–	4	7	8	19
n _x	4	8	9	52	19	8	n=100

Практическая работа 47-49. Однофакторный дисперсионный анализ.

Цель: формирование представления об элементах и принципах дисперсионного анализа.

Теоретическая часть:



Пример. Пусть дана совокупность K выборок с объемами $n_1, n_2, \dots, n_k, N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, и наблюдения можно представить в виде $x_{ij} = a_j + \varepsilon_{ij}$, где i - номер наблюдения в выборке; j - номер

выборки; μ_j - групповые математические ожидания; ε_{ij} - случайные ошибки с $M\varepsilon_{ij}=0$, о которых предполагается, что они независимы и одинаково расположены.

Подобная ситуация возникает, когда существует некий фактор, принимающий K различных значений (называемых уровнями), и каждая группа объектов, чьи признаки мы примеряем, подвергается воздействию определенного уровня этого фактора. Методы математической статистики, изучающие воздействие одного фактора на объекты и их признаки, называют в совокупности однофакторным анализом.

Предполагается, что ошибки нормально распределены: $\varepsilon_{ij} \in N(0, \sigma^2)$. Тогда можно изучать влияние фактора, вычисляя дисперсии некоторых величин. Совокупность этих методов называют однофакторным дисперсионным анализом.

Основной гипотезой, нуждающейся в проверке, является гипотеза о равенстве групповых средних $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K$. Иными словами, проверяют гипотезу о том, что фактор вообще не влияет на наблюдения. В случае нормальных ошибок ее можно проверить, вычислив две разные оценки дисперсии.

Рассмотрим группу экспериментальных животных, подвергнутых ультрафиолетовому облучению. В процессе эксперимента измерялась температура тела животных. Результаты измерений были занесены в таблицу:

№ испытания	Уровень фактора А (мощность ультрафиолетового облучения)		
	A1	A2	A3
1	37,4	37,8	38,0
2	37,3	37,9	37,9
3	37,0	37,5	38,4
4	36,9	37,4	38,3
$\bar{x}_j$	37,15	37,65	38,15

Физический фактор А (ультрафиолетовое излучение) имеет $m = 3$ постоянных уровней (3 различных мощности облучения). На всех уровнях распределения случайной величины X (температуры тела животного) предполагается нормальным, а дисперсии одинаковыми, хотя и неизвестными.

В данном эксперименте число проведенных наблюдений при действии каждого из уровней фактора одинаково.

Все значения величины X, наблюдаемые при каждом фиксированном уровне фактора A_j , составляют группу, и в последней строке таблицы представлены соответствующие выборочные групповые средние, вычисленные по формуле

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}.$$

Здесь n – число испытаний, j – номер столбца, i – номер строки, в которой расположено данное значение случайной величины. Общая средняя арифметическая всех nm наблюдений находится как

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j.$$

Введем следующие понятия:

Факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней $\bar{x}$, которая характеризует рассеивание «между группами» (т.е. рассеивание за счет исследуемого фактора):

$$S_{\text{факт}} = n \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2,$$

Остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней $\bar{x}_j$, которая характеризует рассеивание «внутри групп» (за счет случайных причин):

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Общая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней $\bar{x}$:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2,$$

Можно доказать следующее равенство:

$$S_{\text{общ}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{ост}}.$$

С помощью $S_{\text{общ}}$, $S_{\text{факт}}$, $S_{\text{ост}}$ производится оценка общей, факторной и остаточной дисперсий:

$$S_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{mn} S_{\text{общ}},$$

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{1}{m-1} S_{\text{факт}},$$

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} S_{\text{ост}}.$$

В основе однофакторного дисперсионного анализа лежит тесная связь между различием в групповых средних $\bar{x}_j$ и соотношением между двумя видами дисперсий – факторной, которая характеризует влияние фактора А на величину Х, и остаточной, которая характеризует влияние случайных причин. Сравнивая факторную дисперсию с остаточной по величине их отношения судят, насколько сильно проявляется влияние фактора.

Для сравнения двух дисперсий используют **показатель критерия Фишера**

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2}.$$

При этом при заданном уровне значимости проверяют нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий (изучаемый фактор не вызывает изменчивости признака) при конкурирующей гипотезе об их неравенстве (изучаемый фактор вызывает изменчивость признака).

По таблице критических значений распределения Фишера – Снедекора при уровне значимости, равном половине заданного уровня α , находят критическое значение $F_{kp}(d_1; d_2; k_1; k_2)$. Здесь $k_1 = m-1$; $k_2 = n(n-1)$. Если $F_{\text{эксп}} < F_{kp}$, нулевую гипотезу считают согласующейся с результатами наблюдений. Если $F_{\text{эксп}} > F_{kp}$, то эту гипотезу отвергают в пользу конкурирующей.

Замечание. Если окажется, что $S_{\text{факт}}^2 < S_{\text{ост}}^2$, следует сделать вывод об отсутствии влияния фактора А на Х.

Если проверка покажет значимость различий между $S_{\text{факт}}^2$ и $S_{\text{ост}}^2$, следует сделать вывод о существенном влиянии фактора А на Х.

Обычно для упрощения расчетов факторную и остаточную дисперсии рассчитывают не по экспериментальным значениям x_{ij} величины Х, а по значениям $y_{ij} = x_{ij} - C$, где постоянная С представляет собой произвольное число, близкое к среднему значению $\bar{x}$ всех результатов наблюдений.

Вернемся к нашему примеру. Вычтем из всех значений x_{ij} постоянное число $C=37,5$ близкое к общему среднему $\bar{x}=37,51$ и составим таблицу:

№ испытания	Уровень фактора А (мощность ультрафиолетового облучения)		
	A1	A2	A3
1	-0,1	0,3	0,5
2	-0,2	0,4	0,4
3	-0,5	0	0,9
4	-0,6	-0,1	0,8
$\bar{x}_j$	-0,35	0,15	0,65

Общая средняя будет равна $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \bar{x}_j$

Определим значения $S_{\text{факт}}$, $S_{\text{ост}}$

$$S_{\text{факт}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

$$S_{\text{ост}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

Определим значения факторной и остаточной дисперсий:

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{1}{m} S_{\text{факт}}, \quad S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n} S_{\text{ост}}$$

Так как $S_{\text{ост}}^2 < S_{\text{факт}}^2$, следует проверить значимость их различия. Найдем экспериментальное значение критерия:

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2} \approx 1,6$$

Сравним его с критическим значением распределения Фишера – Снедекора для уровня значимости 0,05:

$$F_{\text{кр}} = 1,9$$

Поскольку $F_{\text{эксп}} > F_{\text{кр}}$ можно утверждать, что при уровне значимости $\alpha = 0,05$ рассматриваемый физический фактор оказывает влияние на температуру тела животного.

Критерий Фишера указывает на влияние изучаемого фактора (если $F_{\text{эксп}} > F_{\text{кр}}$) на изменчивость признака. Однако он не указывает на силу влияния этого фактора. В качестве показателя силы влияния фактора на изменчивость признака используют величину η :

$$\eta^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{S_{\text{факт}} + S_{\text{ост}}}$$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Оценку влияния фактора «мощность ультрафиолетового облучения» на повышение температуры тела животных:

или 80,5%

Таким образом, влияние ультрафиолетового облучения на повышение температуры тела животных составляет 80,5%, а 19,5% обусловлены случайными причинами.

Задачи и упражнения:

1. Проверить, существенны ли различия содержания загрязняющего вещества на трех уровнях (глубинах взятия проб):

№	Уровни замеров		
	1	2	3
1	1,17	2,28	1,80
2	1,52	2,46	2,38
3	1,90	0,88	2,62
4	1,76	2,03	2,91
5	1,54	1,22	1,60
6	0,63	2,29	2,83
7	2,30	1,80	2,13
8	1,32	1,79	2,06
9	0,94	1,61	2,23
10	1,15	2,30	3,06
11	0,75	2,60	1,86
12	2,49	1,76	1,92
13	2,14	2,14	2,16
14	1,62	2,73	2,27
15	1,40		

Практическая работа 50-52. Двухфакторный дисперсионный анализ.

Цель: формирование представления об элементах и принципах дисперсионного анализа.

Теоретическая часть:

Двухфакторные комплексы по своей структуре более сложны, чем однофакторные.

Объединение в один статистический комплекс допускается только таких факторов, которые независимы друг от друга (например, тип кормления и доза облучения, возраст и пол и т.д.).

Чтобы построить двухфакторную дисперсионную модель все имеющиеся данные представим в виде таблицы, в которой по строкам - уровни A_i фактора А, по столбцам - уровни B_j фактора В, а в соответствующих клетках, или ячейках, таблицы находятся значения признака x_{ijk} ($i=1,2,\dots, m$; $j=1,2,\dots, l$; $k=1,2,\dots, n$):

B						
A	B_1	B_2	...	B_j	...	B_l
A_1	$x_{111}, \dots, x_{11k}$	$x_{121}, \dots, x_{12k}$	...	$x_{1j1}, \dots, x_{1jk}$	...	$x_{1l1}, \dots, x_{1lk}$
A_2	$x_{211}, \dots, x_{21k}$	$x_{221}, \dots, x_{22k}$	...	$x_{2j1}, \dots, x_{2jk}$	...	$x_{2l1}, \dots, x_{2lk}$
...	...	...	...	...	...	...
A_j	$x_{j11}, \dots, x_{j1k}$	$x_{j21}, \dots, x_{j2k}$	...	$x_{jj1}, \dots, x_{jjk}$	...	$x_{jl1}, \dots, x_{jlk}$
...	...	...	...	...	...	...
A_m	$x_{m11}, \dots, x_{m1k}$	$x_{m21}, \dots, x_{m2k}$	...	$x_{mj1}, \dots, x_{mjk}$	...	$x_{ml1}, \dots, x_{mlk}$

Двухфакторная дисперсионная модель имеет вид:

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

(24.1)

где x_{ijk} - значение наблюдения в ячейке ij с номером k ;

μ - общая средняя;

F_i - эффект, обусловленный влиянием i -го уровня фактора А;

G_j - эффект, обусловленный влиянием j -го уровня фактора В;

I_{ij} - эффект, обусловленный взаимодействием двух факторов, т.е. отклонение от средней по наблюдениям в ячейке ij от суммы первых трех слагаемых в модели (24.1);

ε_{ijk} - возмущение, обусловленное вариацией переменной внутри отдельной ячейки.

Полагаем, что ε_{ijk} имеет нормальный закон распределения $N(0; \sigma^2)$, а все математические ожидания F_i, G_j, I_{ij} равны нулю.

Групповые средние находятся по формулам:

в ячейке -

$$\bar{x}_{ij*} = \frac{\sum_{k=1}^n x_{ijk}}{n} \quad (24.2)$$

по строке -

$$\bar{x}_{i**} = \frac{\sum_{j=1}^l \bar{x}_{ij*}}{l}, \quad (24.3)$$

по столбцу -

$$\bar{x}_{*j*} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij*}}{m} \quad (24.4)$$

Общая средняя

$$\bar{x}_{***} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \bar{x}_{ij*}}{ml} \quad (24.5)$$

Таблица дисперсионного анализа имеет вид:

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средние квадраты
Межгрупповая (фактор А)	$Q_1 = n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i**} - \bar{x}_{***})^2$	$m-1$	$s_1^2 = \frac{Q_1}{m-1}$
Межгрупповая (фактор В)	$Q_2 = m \sum_{j=1}^l (\bar{x}_{*j*} - \bar{x}_{***})^2$	$l-1$	$s_2^2 = \frac{Q_2}{l-1}$
Взаимодействие (АВ)	$Q_3 = n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l (\bar{x}_{ij*} - \bar{x}_{i**} - \bar{x}_{*j*} + \bar{x}_{***})^2$	$(m-1)(l-1)$	$s_3^2 = \frac{Q_3}{(m-1)(l-1)}$
Остаточная	$Q_4 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij*})^2$	$mln - ml$	$s_4^2 = \frac{Q_4}{mln - ml}$
	$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{***})^2$	$mln - 1$	

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Можно показать, что проверка нулевых гипотез H_A, H_B, H_{AB} об отсутствии влияния на рассматриваемую переменную факторов А, В и их взаимодействия АВ осуществляется сравнением отношений $\frac{\xi_1^2/\xi_4}{\xi_2^2/\xi_4}, \frac{\xi_2^2/\xi_4}{\xi_3^2/\xi_4}, \frac{\xi_3^2/\xi_4}{\xi_4^2/\xi_4}$

Если $n=1$, т.е. при одном наблюдении в ячейке, то не все нулевые гипотезы могут быть проверены, так как выпадает компонента Q_3 из общей суммы квадратов отклонений, а с ней и средний квадрат s_3^2 , ибо в этом случае не может быть речи о взаимодействии факторов.

Пример. В таблице приведены суточные привесы (г) отобранных для исследования 18 поросят в зависимости от метода содержания поросят (фактора А) и качества их кормления (фактор В).

Количество голов в группе (фактор А)	Содержание протеина в корме, г (фактор В)	
	$B_1=80$	$B_2=100$
$A_1=30$	530,540,550	600,620,580
$A_2=100$	490,510,520	550,540,560
$A_3=300$	430,420,450	470,460,430

Необходимо на уровне значимости $\alpha=0,05$ оценить существенность (достоверность) влияния каждого фактора и их взаимодействия на суточный привес поросят.

Решение: Имеем $m=3, l=2, n=3$. Определим (в г) средние значения привеса: в ячейках – по (формуле 24.2)

$$\bar{x}_{11} = \frac{530+540+550}{3} = 540 \text{ и аналогично } \bar{x}_{12} = 600;$$

$$\bar{x}_{21} = \frac{490+510+520}{3} = 506,7 \text{ и аналогично } \bar{x}_{22} = 550;$$

по строкам – по (24.3):

$$\bar{x}_{1*} = \frac{540+600}{2} = 570 \text{ и аналогично } \bar{x}_{2*} = 528,4, \bar{x}_{3*} = 443,2$$

по столбцам – (24.4):

$$\bar{x}_{*1} = \frac{540+506,7+433,3}{3} = 493,3 \text{ и аналогично } \bar{x}_{*2} = 534,4$$

Общий средний привес – по (24.5):

$$\bar{x} = \frac{570+528,4+443,2}{3} = 513,9$$

Все средние значения привеса (г) поместим в таблице

Количество голов в группе (фактор А)	Содержание протеина в корме, г (фактор В)		
	$B_1=80$	$B_2=100$	$\bar{x}_{i**}$
$A_1=30$	$\bar{x}_{11*} = 540$	$\bar{x}_{12*} = 600$	$\bar{x}_{1**} = 570$
$A_2=100$	$\bar{x}_{21*} = 506,7$	$\bar{x}_{22*} = 550$	$\bar{x}_{2**} = 528,4$
$A_3=300$	$\bar{x}_{31*} = 433,3$	$\bar{x}_{32*} = 453,3$	$\bar{x}_{3**} = 443,3$
$\bar{x}_{*j*}$	$\bar{x}_{*1*} = 493,3$	$\bar{x}_{*2*} = 534,4$	$\bar{x}_{**} = 513,9$

Из таблицы следует, что с увеличением количества голов в группе средний суточный привес поросят в среднем уменьшается, а при увеличении содержания протеина в корме – в среднем увеличивается. Но является ли эта тенденция достоверной или объясняется случайными причинами? Для ответа на этот вопрос вычислим необходимые суммы квадратов отклонений:

$$Q_1 = 3 \cdot (570 - 513,9)^2 + 3 \cdot (528,4 - 513,9)^2 + 3 \cdot (443,2 - 513,9)^2 = 10200,6$$

$$Q_2 = 2 \cdot (540 - 513,9)^2 + 2 \cdot (600 - 513,9)^2 + 2 \cdot (506,7 - 513,9)^2 + 2 \cdot (550 - 513,9)^2 + 2 \cdot (433,3 - 513,9)^2 + 2 \cdot (453,3 - 513,9)^2 = 10200,6$$

$$Q_3 = 3 \cdot (540 - 513,9)^2 + 3 \cdot (506,7 - 513,9)^2 + 3 \cdot (433,3 - 513,9)^2 = 10200,6$$

Средние квадраты находим делением полученных сумм на соответствующие им число степеней свободы $m-1=2$, $l-1=1$; $(m-1)(l-1)=2$; $mln-ml=18-6=12$; $mln-1=18-1=17$.

Результаты расчета сведем в таблицу.

Очевидно, данные факторы имеют фиксированные уровни, т.е. мы находимся в рамках модели I. Поэтому для проверки существенности влияния факторов А, В и их взаимодействия АВ необходимо найти отношения:

$$F_A = \frac{s_1^2}{s_4^2} = \frac{2505,5}{250} = 10, \quad F_B = \frac{s_2^2}{s_4^2} = \frac{765,6}{250} = 3,1$$

$$F_{AB} = \frac{s_3^2}{s_4^2} = \frac{605,6}{250} = 2,4 \text{ и сравнить их с табличными значениями (см. приложение 6)}$$

соответственно ~~$F_A = 10$~~ Так как $F_A > F_{0,05;2;12}$ и $F_B > F_{0,05;1;12}$, то влияние метода содержания поросят (фактор А) и качества их кормления (фактор В) является существенным. В силу того что $F_{AB} < F_{0,05;2;12}$, взаимодействие указанных факторов незначимо (на 5%-ном уровне).

Компонента дисперсии	Суммы квадратов	Число степеней свободы	Средние квадраты
Межгрупповая (фактор А)	$Q=5011,1$	2	$s_1^2=2505,5$
Межгрупповая (фактор В)	$Q=765,6$	1	$s_2^2=765,6$
Взаимодействие (АВ)	$Q=1211,1$	2	$s_3^2=605,6$
Остаточная	$Q=3000,0$	12	$s_4^2=250,0$
Общая	$Q=6187,8$	17	

Задачи и упражнения:

В химической лаборатории проверяется влияние температуры (фактор А) и катализатора (фактор В) на выход продукта химического синтеза. Полученные результаты приведены в таблице. Проведите двухфакторный дисперсионный анализ. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу о влиянии факторов А и В и их комбинации на указанный признак. Предварительно проверьте по критерию Кочрена равенство дисперсий в группах.

	B_1	B_2	B_3
A_1	16; 19; 17; 16	18; 16; 17; 14	16; 16; 18; 13
A_2	22; 22; 19; 23	18; 19; 23; 24	18; 16; 19; 20
A_3	20; 16; 18; 19	18; 17; 19; 19	20; 20; 16; 16
A_4	23; 20; 22; 23	19; 18; 19; 22	20; 19; 20; 22

Практическая работа 53. Способы задания множеств. Операции над множествами.

Цель. Приобрести навыки задания множеств, выполнения операций над множествами.

Теоретическая часть.

Понятие множества не определяется, а лишь иллюстрируется примерами. Например, можно говорить о множестве статей ГК РФ, о множестве логических возможностей и т.д. Множества будем обозначать прописными латинскими буквами: А, В, ... Если элемент x принадлежит множеству А, пишут $x \in A$ (читают: « x принадлежит множеству А»), в противном пишут $x \notin A$ (« x не принадлежит множеству А»). Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым; его обозначают символом $\emptyset$.

Множество считается заданным, если о любом данном объекте можно однозначно сказать принадлежит он этому множеству или нет. Существует два способа задания множества:

• дается перечисление элементов множества; например, множество результатов голосования присяжного

таково: {«за», «против», «воздержался»};

• указывается правило определения принадлежности любого объекта к рассматриваемому множеству;

например, запись $A = \{x : |x| < 10\}$ означает, что А состоит из таких чисел x , модуль которых меньше 10

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

(после двоеточия записано правило, которому должно удовлетворять число x , чтобы его можно было отнести к множеству A).

Два множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными. Если множества A и B равны, то пишут $A = B$.

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A , то говорят, что B – подмножество множества A . В этом случае пишут $B \subset A$ (читают « B – подмножество множества A »).

В последующем, исходное множество будем называть универсальным и обозначать U . Собственные подмножества множества U — это те подмножества, которые содержат некоторые, но не все элементы U . Наряду с собственными подмножествами условимся само U и пустое множество $\emptyset$ также считать подмножествами множества U .

Рассмотрим процесс образования новых множеств из данных множеств A и B , при этом будем предполагать, что и A , и B , и вновь образованное множество являются подмножествами некоторого универсального множества U .

Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A , B . Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A , и B . Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называется множество всех тех и только тех элементов A , которые не содержатся в B . Пусть U — универсальное множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами. Дополнением множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A (но принадлежащих U).

Если рассмотреть некоторые конечные множества N и M , у которых имеются соответственно некоторые числа элементов $k(N)$, $k(M)$, то имеет место следующее соотношение:

$$k(N \cup M) = k(N) + k(M) - k(N \cap M).$$

Пример. Вступительный экзамен по физической подготовке в Московский университет МВД России сдавали 2500 абитуриентов, оценку ниже "5" получили 1800 человек, а выдержали этот экзамен 2100 абитуриентов. Сколько человек получили оценки "3" и "4"?

Решение. Предположим, что N — множество абитуриентов, выдержавших экзамен по физической подготовке, M — множество абитуриентов, получивших оценки ниже "5". По условию задачи имеем $k(N) = 2100$, $k(M) = 1800$, $k(N \cup M) = 2500$. Абитуриенты, получившие оценки "3" и "4", образуют множество $N \cap M$. Применяя приведенную выше формулу, находим:

$$k(N \cup M) = k(N) + k(M) - k(N \cap M).$$

$$k(N \cap M) = k(N) + k(M) - k(N \cup M),$$

$$k(N \cap M) = 2100 + 1800 - 2500 = 1400.$$

Ответ: 1400 человек получили оценки «3» и «4».

Задачи и упражнения:

Задача 1. На первом курсе следственного факультета Московского университета МВД России 1500 курсантов, из которых 1050 курсантов изучают английский язык, 675 курсантов изучают немецкий язык и 345 курсантов изучают оба языка. Сколько курсантов следственного факультета не изучают ни английского, ни немецкий язык?

Задача 2. В олимпиаде по информатике и математике принимали участие 40 курсантов Московского университета МВД России, им было предложено решить одно задание по информатике, одно по правовой информатике и одно по математике. Результаты проверки решений заданий представлены в таблице:

Решены задания	Количество решивших	Решены задания	Количество решивших
По информатике	20	По информатике и правовой информатике	7
По правовой информатике	18	По информатике и математике	8
По математике	18	По правовой информатике и математике	9

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Известно также, что ни одного задания не решили трое курсантов. Сколько курсантов решили все 3 задания? Сколько курсантов решили ровно 2 задания?

Задача 3. В магазине канцелярских принадлежностей Московского университета МВД России курсанты обычно покупают либо одну ручку, либо одну тетрадь, либо одну ручку и одну тетрадь. В один из дней было продано 57 ручек и 36 тетрадей. Сколько было покупателей, если 12 курсантов купили и ручку, и тетрадь?

Задача 4. В одном из городов Украины часть жителей говорит только по-русски, часть - только по-украински, часть говорит и по-русски, и по-украински. Известно, что 90% жителей говорит по-русски, а 80% - по-украински. Какой процент жителей города говорит на обоих языках?

Задача 5. Каждый из курсантов учебной группы Московского университета МВД России в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли N, M и P видели соответственно 25, 12 и 23 курсанта. Сколько курсантов в учебной группе? Сколько из них видели спектакли N и M, N и P, M и P?

Задача 6. В учебной группе из 40 курсантов 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только 5 не умеют ни того ни другого. Сколько курсантов умеют плавать и играть в шахматы?

Задача 7. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B и C. Из 40 школьников, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B—16, фильм C—19 школьников. Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма.

Задача 8. В спортивном лагере 65% ребят умеют играть в футбол, 70%—в волейбол и 75%—в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

Задача 9. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B и C. Результаты опроса оказались таковы: книгу A читало 25 учащихся, книгу B—22, книгу C—также 22. Книги A или B читали 33 ученика, A или C—32, B или C—31; все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих трех книг?

Задача 10. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике—48 абитуриентов, по физике—37, по русскому языку—42, по математике или физике—75, по математике или русскому языку—76, по физике или русскому языку—66, по всем трем предметам—4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

Практическая работа 54. Отношения. Отношения эквивалентности. Отношение порядка. Свойства отношений. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция. Понятие функции.

Цель. Приобрести навыки определения вида бинарного отношения, его свойств и способа задания.

Теоретическая часть.

Бинарные отношения устанавливают соответствия элементов одного множества элементам другого множества. Если, например, элемент $x \in X$ соответствует элементу $y \in Y$, то факт этого соответствия можно записать в виде упорядоченной пары (x, y) . Правило (предписание, принцип), по которому элементу x из X ставится в соответствие y из Y выражают либо в словесной форме, либо в символической (формальной и т.п.). В большинстве случаев символическая форма имеет вид xRy и читается следующим образом « x находится в отношении R к y ». В принципе, если между некоторыми элементами множеств X и Y определено отношение R , то оно может быть охарактеризовано однозначным простым перечислением всех пар (x, y) , в которых x и y связаны соотношением R . В последнем случае отношение R можно принимать как все множество допускаемых им упорядоченных пар вида (x, y) и писать $(x, y) \in R$, где « R » уже выступает как символ множества.

Бинарное отношение R называется рефлексивным, если $(x, x) \in R$ для всех $x \in X$. Это определение на языке теории множеств пишется в следующем виде: $E \in R, \forall x \in X$, где $E = \{(x, x) / x \in X\} \subset X \times X$.

Отношение R называется антирефлексивным (иррефлексивным), если $(x, x) \notin R, \forall x \in X$ или $R \cap E = \emptyset$.

Бинарное отношение называется симметричным, если $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ или $R = R^{-1}$.

Отношение R называется антисимметричным, если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$ или $R \cap R^{-1} \subset E$.

Отношение R называется асимметричным, если из двух отношений $x_i R x_j$ и $x_j R x_i$ выполняется по меньшей мере одно, т. е. $R \cap R^{-1} = \emptyset$. Следует заметить, что из асимметрии R вытекает его антирефлексивность.

Бинарное отношение R называется транзитивным, если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ или $R \circ R \subset R$. Более просто свойство транзитивности отношения R можно сформулировать следующим образом: из $x_i R x_j$ и $x_j R x_k$ всегда следует $x_i R x_k$. Примером транзитивного отношения может служить отношение включения на множествах. В частности $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Отношение эквивалентности определяется как отношение, обладающее следующими свойствами: 1)

рефлексивность, 2) симметричность, 3) транзитивность. Для обозначения этого отношения вводят символ " $\sim$ ". Если R — отношение эквивалентности, то запись $x_1 R x_2$ и $x_1 \sim x_2$ равнозначны ($R \subset X \times X$).

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

(конгруэнтности).

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

1. Отношение R : " $\leq$ " на множестве действительных чисел является ли рефлексивным?
2. Отношение R : " $\leq$ " на множестве действительных чисел является ли транзитивным?
3. Каким является отношение R : " $<$ " ?
4. Определить, какими свойствами обладает отношение R : «принадлежность к одной студенческой группе» на множестве студентов института?
5. Транзитивно ли отношение неравенства на множестве действительных чисел?
6. Транзитивно ли отношение равенства треугольников в геометрии?
7. Для множеств A , B , и C справедливо отношение $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. Является ли это отношение транзитивным?
8. Определите свойства следующих отношений:
 1. «прямая x пересекает прямую y » (на множестве прямых);
 2. «число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел);
 3. «число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел);
 4. « x - сестра y » (на множестве людей).

9. Для заданных на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ бинарных отношений ρ и τ :

$$\rho = \{(x, y) : |(x-2)(y-2)| \leq 1\}; \quad \tau = \{(x, y) : 2x \geq 3y\}$$

- а) записать матрицы и построить графики;
- б) найти композицию $\rho \circ \tau$;
- в) исследовать свойства отношений ρ , τ и $\rho \circ \tau$ (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).

Практическая работа 55. Основные алгебраические структуры.

Цель. Приобрести навыки определения основных алгебраических структур и определения их свойств.

Теоретическая часть.

В математике и различных её приложениях важную роль играют такие математические объекты, которые называются алгебраическими структурами. В широком смысле под алгебраической структурой понимают всякое множество, на котором заданы некоторые операции (т.е. законы, ставящие в соответствие одному или паре элементов по определённому правилу другой элемент), обладающие определёнными свойствами.

Большинство свойств и результатов об этих множествах получают, опираясь на конкретную природу элементов этих множеств и на конкретный смысл операций над ними. В то же время многие результаты можно получить независимо от природы этих множеств и конкретного смысла операций, а исходя только из свойств этих операций.

Среди таких свойств операций рассматриваются: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, наличие специальных элементов, обладающих определёнными свойствами (нулевой, единичный (нейтральный), обратный элемент к данному и т.д.).

В зависимости от количества операций и свойств, которыми они обладают, различают следующие алгебраические структуры.

Полугруппой называется множество G , на котором задана бинарная операция $*$ (часто её называют умножением и обозначают $\cdot$), для которой выполняется свойство ассоциативности, т.е. для любых $a, b, c \in G$ $(a*b)*c = a*(b*c)$. Если в полугруппе имеется нейтральный элемент e (нулевой, единичный), т.е. такой, что $a*e = e*a = a$ для любого $a \in G$, то полугруппа G называется унитарной (полугруппой с нулём; полугруппой с единицей). Если в полугруппе выполняется коммутативный закон, т.е. если для любых $a, b \in G$ $a*b = b*a$, то полугруппа называется коммутативной (или абелевой).

Унитарная полугруппа называется группой, если для любого $a \in G$ существует обратный элемент $b \in G$, т.е. такой, что $a*b = b*a = e$. Если дополнительно выполняется свойство коммутативности, то группа называется коммутативной (или абелевой), и в этом случае обычно применяется аддитивная символика, т.е. операция обозначается $+$, нейтральный элемент 0 , обратный элемент к a называют противоположным и

обозначается $-a$.

Если в абелевой группе $(K, +)$ наряду с операцией сложения $+$ задана ещё одна операция:

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

произведение $*$ (или $\cdot$), которая связана с $+$ дистрибутивными законами: $(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$, $a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$ для любых $a, b, c \in K$ и $0*a = a*0 = 0$ для любого $a \in K$, то K называется кольцом.

Действителен с 20.08.2021 по 20.08.2022

Если в кольце $(K, +, *)$ дополнительно для произведения $*$ выполняется ассоциативный закон, т.е. если

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{для любых } a, b, c \in K,$$

то кольцо называется ассоциативным. А если кроме того существует единичный элемент 1, т.е. такой, что $1 * a = a * 1 = a$ для любого $a \in K$, то кольцо называется унитарным (или кольцом с 1). Если в кольце выполняется коммутативный закон для $*$, то кольцо называется коммутативным.

Ассоциативное унитарное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент a имеет обратный a^{-1} , т.е. такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$ называется телом. Коммутативное тело называется полем.

Задачи и упражнения:

Является ли следующее множество группой, кольцом, полем относительно сложения чисел и умножения чисел:

- Вариант 1. - множество действительных чисел;
- Вариант 2. - множество рациональных чисел;
- Вариант 3. - множество целых чисел;
- Вариант 4. - множество неотрицательных рациональных чисел;
- Вариант 5. - множество натуральных чисел;
- Вариант 6. - множество неотрицательных действительных чисел;
- Вариант 7. - множество четных целых чисел;
- Вариант 8. - множество неотрицательных целых чисел;
- Вариант 9. - множество простых чисел;
- Вариант 10. - множество комплексных чисел?

Ответ обоснуйте.

Практическая работа 56. Операции над высказываниями. Таблицы истинности. Логические задачи.

Цель. Приобрести навыки выполнения логических операций над высказываниями.

Теоретическая часть.

Основным понятием математической логики является понятие высказывания. Под высказыванием обычно понимают всякое повествовательное предложение, об истинности или ложности которого имеет смысл говорить. Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным, но не может быть одновременно истинным и ложным. Различают простые и составные высказывания. Высказывание, представляющее связывание простых высказываний в составные осуществляется посредством логических операций, называемых связками.

Отрицанием высказывания X называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание X ложно, и ложным, если высказывание X истинно. Отрицание высказывания X обозначается $\bar{X}$ и читается «не X » или «неверно, что X ».

Конъюнкцией двух высказываний X , Y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания X , Y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Конъюнкция высказываний обозначается символом $X \wedge Y$ или $X \& Y$ (читается: « X и Y »).

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний X , Y истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний обозначается $X \vee Y$ (читается: « X или Y »).

Импликацией двух высказываний X , Y называется новое высказывание, которое считается ложным, если X истинно, а Y – ложно, и истинным во всех остальных случаях. Импликация высказываний обозначается символом $X \rightarrow Y$ (читается: «если X , то Y »).

Эквиваленцией двух высказываний X , Y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания X и Y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквиваленция высказываний обозначается символом $X \leftrightarrow Y$ (читается: « X тогда и только тогда, когда Y »).

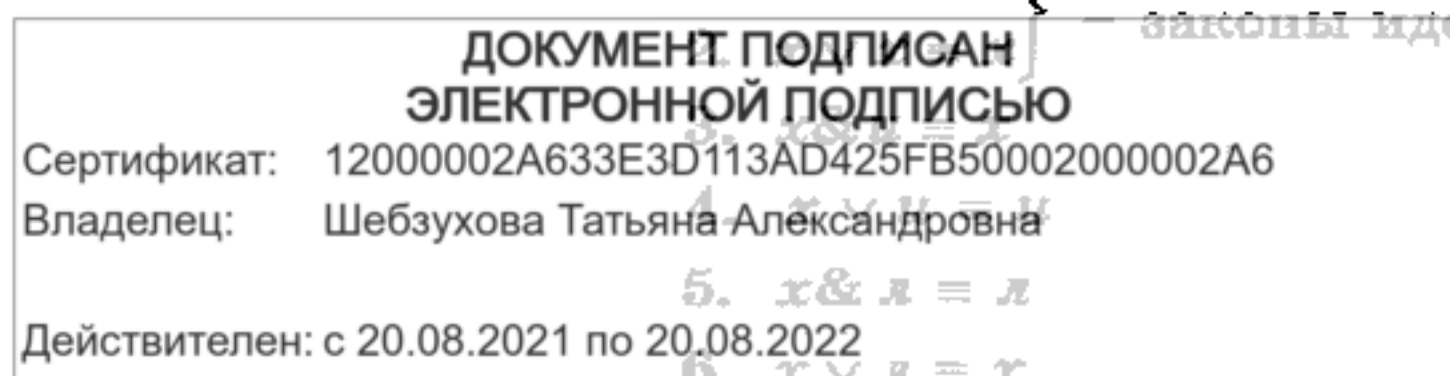
Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения перечисленных логических операций, называется формулой алгебры логики. Две формулы алгебры логики A и B называются равносильными, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний. Равносильность формул обозначают знаком $\equiv$, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы:

1. Основные равносильности:

$$1. \quad x \& x \equiv x$$

закон идемпотентности.



$$5. \quad x \& \bar{x} \equiv \bar{x}$$

$$6. \quad x \vee \bar{x} \equiv x$$

$$7. \quad x \& \bar{x} \equiv \bar{x} \quad \text{— закон противоречия.}$$

$$8. \quad x \vee \bar{x} \equiv \bar{x} \quad \text{— закон исключенного третьего.}$$

$$9. \quad \bar{\bar{x}} \equiv x \quad \text{— закон снятия двойного отрицания.}$$

2. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$
2. $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$
3. $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
4. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$
5. $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x \& y \equiv y \& x$ – коммутативность конъюнкции.
2. $x \vee y \equiv y \vee x$ – коммутативность дизъюнкции.
3. $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ – ассоциативность конъюнкции.
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции.
5. $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.
6. $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Формула называется тождественно истинной (тавтологией), если она принимает значение «истина» при всех значениях входящих в нее переменных. Формула называется тождественно ложной, если она принимает значение «ложь» при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример: Доказать, что формула $A \equiv x \rightarrow (y \rightarrow x)$ тождественно истинная.

Решение: Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям:

$$A \equiv x \rightarrow (y \rightarrow x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (x \vee \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee x) \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \bar{y} \equiv 1.$$

Вывод: формула тождественно истинна, так как всегда имеет значение «истина» или «1». Доказать тождественную истинность формулы можно и с помощью таблицы истинности. Например, для рассмотренной формулы A таблица истинности имеет вид:

x	y	$y \rightarrow x$	$x \rightarrow (y \rightarrow x)$
И	И	И	И
И	Л	И	И
Л	И	Л	И
Л	Л	И	И

Для того, чтобы решить задачу с помощью алгебры логики, необходимо:

- ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую условие задачи в символической форме;
- для полученной формулы найти с помощью равносильных преобразований возможно более простую равносильную формулу;
- пользуясь найденной более простой формулой, перейдя к словесной ее формулировке, определить решение задачи.

Пример:

После обсуждения состава участников, отправляемых на конференцию, было решено, что должны выполняться два условия: а) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский; б) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин. Найти более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников конференции.

Решение: Назначение на конференцию Арбузова, Брюквина и Вишневого обозначим буквами А, Б, В соответственно. Тогда условие а) можно записать в виде $A \rightarrow B \vee V$, а условие б) в виде $A \wedge V \rightarrow B$. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то их соединим логической связкой «и». Поэтому принятое решение можно записать в виде следующей символической формулы: $(A \rightarrow B \vee V) \wedge (A \wedge V \rightarrow B)$. С помощью равносильных преобразований упростим составленную формулу:

принадлежит документу, подписанному в виде следующей символической формулы: $(A \rightarrow B \vee V) \wedge (A \wedge V \rightarrow B)$. С помощью равносильных преобразований упростим составленную формулу:

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$(A \rightarrow B \vee B) \wedge (A \wedge B \rightarrow B) \equiv (\bar{A} \vee B \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B} \vee B) \equiv (\bar{A} \vee B) \vee (B \wedge \bar{B}) \equiv A \rightarrow B$$

Символическая формула означает: «Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин». Это и есть наиболее простая словесная формулировка принятого решения о составе группы сотрудников, отправляемых на конференцию.

Задачи и упражнения:

Задача 1. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул с помощью а) равносильных преобразований; б) таблицы истинности формулы:

1. $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$;
2. $(\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \rightarrow (x \rightarrow y)$;
3. $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$;
4. $x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \bar{y})$;
5. $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$;
6. $x \rightarrow (x \vee y)$;
7. $x \wedge y \rightarrow x$;
8. $\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$;
9. $(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y))$;
10. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$.

Задача 2. Пытаясь вспомнить победителей прошлогодних соревнований по стрельбе, пять бывших зрителей заявили:

- А) Антон был вторым, а Борис – пятым,
- Б) Виктор был вторым, а Денис – третьим,
- В) Григорий был первым, а Борис – третьим,
- Г) Антон был третьим, а Евгений – шестым,
- Д) Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест на соревнованиях?

Задача 3. Брауну, Джонсу и Смитту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Задача 4. Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мегрэ. Есть новости?
- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...
- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.

Какой вывод сделал комиссар Мегрэ? Кто совершил убийство?

Задача 5. Студентам объявили, что в понедельник будет одно занятие по криминалистике и одно по математике, причем, если на первой паре математики не будет, то криминалистика будет на второй паре; если третья пара не математика, то четвертая – криминалистика; если математика будет на первой паре, то криминалистика – на пятой.

Определите, на какой паре будет криминалистика, а на какой математика.

Задача 6. Четыре студентки А, Е, С, Р посещают университет по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

А) Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в университет не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.

Б) С и Р не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в

понедельник.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

В) Если С не пойдет в среду, то Е согласится побывать на занятиях в пятницу.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Д) Если А и Р будут в пятницу в среду, то С сможет пойти в пятницу.

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Е) Если Р в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то А придется сходить в институт во вторник, а С – в четверг.

Задача 7. Четирем сотрудникам уголовного розыска – Антонову, Вехову, Сомову, Дееву необходимо отправиться по служебной необходимости в четыре различных города – Москву, Одессу, Киев и Ставрополь. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

- А) Если А не едет в Москву, то С не едет в Одессу.
- Б) Если В не едет ни в Москву, ни в Ставрополь, то А едет в Москву.
- В) Если С не едет в Ставрополь, то В едет в Киев.
- Г) Если Д не едет в Москву, то В не едет в Москву.
- Д) Если Д не едет в Одессу, то В не едет в Москву.

Задача 8. Сотрудникам ГИБДД Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручено дежурство на 7-ом, 8-ом, 9-ом и 10-ом участках трассы. При проверке после дежурства оказалось, что на 10-ом участке произошло дорожно-транспортное происшествие, подробности которого известны дежурившему сотруднику ГИБДД. Не ушедшие домой сотрудники после дежурства сообщили о следующем:

Андреев: «Я дежурил на 9-ом участке, а Савельев – на 7-ом».

Костин: «Я дежурил на 9-ом участке, а Андреев – на 8-ом».

Савельев: «Я дежурил на 8-ом участке, а Костин – на 10-ом».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый милиционер в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ее скрывал. Кто из сотрудников на каком участке дежурил?

Задача 9. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен по математике, если известно:

- А) Если первый сдал, то и второй сдал.
- Б) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
- В) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
- Г) Если четвертый сдал, то и первый сдал.

Задача 10. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто из студентов изучал математическую логику?

Практическая работа 57. Исчисление высказываний. Алгоритм унификации. Правила вывода.

Цель. Приобрести навыки применения правила вывода, алгоритма унификации.

Теоретическая часть.

Рассмотрим древнейший образец логического вывода – силлогизм: «Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен».

Как формализовать такие умозаключения: научить компьютер проверять их правильность и автоматически генерировать подобные? Наш пример состоит из двух посылок «все люди смертны», «Сократ – человек» и заключения «Сократ смертен», истинность которого следует из истинности посылок. Запишем первую посылку на «предикатном» языке: « $\forall x$ если x – человек, то x смертен». На основании общезначимой формулы $\forall x P(x) \rightarrow P(a)$ логично, опустив в высказывании квантор $\forall$, подставить вместо x Сократа: «если Сократ – человек, то Сократ смертен». Поставим рядом с полученным высказыванием вторую посылку силлогизма и получим результат, который оформляется в следующем виде:

Если Сократ человек, то Сократ смертен. Сократ – человек.
Сократ смертен.

В общем случае над чертой помещаются логические формулы-посылки А,В, истинность которых гарантирует истинность заключения С:

$$\frac{A, B}{C}$$

Словесная запись правил логического вывода звучит так: «Из данных формул-посылок А,В следует формула-заключение С.» (сокращенно: $A \wedge B \rightarrow C$). При этом считается, что формула-заключение истинна по крайней мере при всех таких значениях предикатных, предметных и высказывательных переменных, при которых обращаются в истину все формулы-посылки. Метод математической индукции, оформленный как правило вывода, примет вид:

$$\frac{P(1), P(k) \rightarrow P(k+1)}{\forall n P(n)}$$

Приведем некоторые правила вывода, работающие в базах знаний:

$$A \rightarrow B, A$$

правило заключения (modus ponens),

B

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

A → C

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

$$\frac{\forall x P(x), a}{P(a)} \quad \text{- специализация,}$$

$$\frac{A, B}{A \wedge B} \quad \text{- введение конъюнкции.}$$

Рассмотрим следующий пример. В базе данных хранятся сведения о сотрудниках учреждения Петрове, Иванове, Кузнецове, Яковлеве (в дальнейшем обозначим их как П, И, К, Я). Должностная иерархия описывается с помощью двухместных предикатов:

РУК(П,И) означает, что Петров руководит Ивановым,

ОТЧ(У,Х) означает, что У отчитывается перед Х.

В базе данных хранятся три факта:

1: РУК(П,И),

2: РУК(И,К),

3: РУК(К,Я).

Далее описываются два правила вывода, которые имеют место в рассматриваемой предметной области:

1: $\forall X, Y \text{ РУК}(X, Y) \rightarrow \text{ОТЧ}(Y, X)$ – если Х руководит Y, то Y отчитывается перед Х,

2: $\forall X, Y, T \text{ РУК}(X, Y) \wedge \text{ОТЧ}(T, Y) \rightarrow \text{ОТЧ}(T, X)$ – если Х руководит Y и T отчитывается перед Y, то T отчитывается перед Х.

Требуется проверить запрос пользователя: должен ли Яковлев отчитываться перед Ивановым (то есть, сделать заключение $\text{ОТЧ}(Я, И)$).

В базе данных такого факта нет, однако предикат, описывающий интересующую нас связь, встречается в правилах 1 и 2.

Применяя правило 1 к факту 3, получим формулу:

$$\text{РУК}(К, Я) \rightarrow \text{ОТЧ}(Я, К).$$

Применяем к ней и факту 3 правило вывода modus ponens:

$$\frac{\text{РУК}(К, Я) \rightarrow \text{ОТЧ}(Я, К), \text{РУК}(К, Я)}{\text{ОТЧ}(Я, К)}$$

Так как исходные выражения были истинны, то заключение $\text{ОТЧ}(Я, К)$ - новый факт - также является истинным.

Применяя к $\text{ОТЧ}(Я, К)$ и факту 2: $\text{РУК}(И, К)$ правило 2, получим формулу:

$$\text{РУК}(И, К) \wedge \text{ОТЧ}(Я, К) \rightarrow \text{ОТЧ}(Я, И),$$

указывающую на ответ $\text{ОТЧ}(Я, И)$, который однако, надо еще проверить. Для этого связываем факт 2 и $\text{ОТЧ}(Я, К)$ правилом «введения конъюнкции»:

$$\frac{\text{РУК}(И, К), \text{ОТЧ}(Я, К)}{\text{РУК}(И, К) \wedge \text{ОТЧ}(Я, К)}$$

и наконец, применяя modus ponens, обосновываем результат

$$\frac{\text{РУК}(И, К) \wedge \text{ОТЧ}(Я, К) \rightarrow \text{ОТЧ}(Я, И), \text{РУК}(И, К) \wedge \text{ОТЧ}(Я, К)}{\text{ОТЧ}(Я, И)}$$

дающий утвердительный ответ на запрос, действительно ли Яковлев отчитывается перед Ивановым.

Задачи и упражнения:

Доказать следующие тождества вначале на языке теории множеств, а затем – на языке теории доказательств:

а) $A \cap (A \cup B) = A$;

б) $A \cup (A \cap B) = A$;

в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

д) $I \setminus (A \cap B) = (I \setminus A) \cup (I \setminus B)$;

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Практическая работа 38. Исчисление предикатов. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.

Цель. Приобрести навыки математически анализировать суждения с помощью предикатов, применять метод резолюций для доказательства теорем.

Теоретическая часть.

Рассмотрим истинное высказывание «5 - целое число» и ложное высказывание « π - целое число». Общую часть их можно выделить как предложение-шаблон « $\square$ - целое число», при подстановке в который конкретного числа получается конкретное высказывание. Введя обозначение: $P(x) = \langle x \text{ - целое число} \rangle$, получим $P(5) = 1$; $P(\pi) = 0$. Теперь пусть $P(x) = \langle x \text{ - овощ} \rangle$. Замещая x на конкретные плоды, получаем истинное высказывание $P(\text{ЛУК})=1$, или ложное: $P(\text{СЛИВА}) = 0$.

Назовем **предикатом** $P(x)$ предложение, зависящее от переменной x , принадлежащей некоторой предметной области - множеству U : $x \in U$. В первом примере $x \in R$, во втором U - это множество плодов. При подстановке фиксированного элемента $a \in U$ предикат $P(x)$ превращается в высказывание $P(a) \in \{0, 1\}$. Таким образом, предикат можно считать логической функцией, определенной на элементах множества U произвольной природы.

U разбивается предикатом $P(x)$ на два непересекающихся подмножества: на первом из них, которое назовем **множеством истинности**, предикат принимает истинные значения, на втором - ложные.

Обозначив их через P и P' , соответственно, получим: $U = P \cup P'$.

К предикатам применимы все логические операции.

Предложение, определенное на множестве $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, называют **n -местным предикатом**:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n.$$

Найдем область истинности трехместного предиката $P(x, y, z) = \langle xy < z \rangle$, определенного на тройках $(x, y, z) \in A \times A \times A = A^3$, где $A = \{1, 2, 3, 5\}$.

Число всех упорядоченных троек из четырехэлементного множества A равно $4 \cdot 3 \cdot (4-3+1) = 24$. Для сокращения перебора используем симметричность предиката относительно первых двух переменных: $P(x, y, z) = \langle xy < z \rangle = \langle yx < z \rangle = P(y, x, z)$.

Далее, для выполнения неравенства необходимо, чтобы правая часть z превосходила каждый из сомножителей x, y . С учетом сказанного, имеем 3 благоприятных случая: $1 \cdot 2 < 3$, $1 \cdot 2 < 5$, $1 \cdot 3 < 5$, дающие 6 элементов области истинности P : $P(1, 2, 3) = (2 < 3) = P(2, 1, 3)$, $P(1, 2, 5) = (2 < 5) = P(2, 1, 5)$, $P(1, 3, 5) = (3 < 5) = P(3, 1, 5)$.

Итак, область истинности P образует множество троек: $\{(1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 3, 5), (2, 1, 3), (2, 1, 5), (3, 1, 5)\}$.

Для записи предикатов можно использовать квантор существования $\exists$, соответствующий словам «существует», «найдется», «хотя бы один», и квантор общности $\forall$, соответствующий словам «для любого», «все», «каждый». Таким образом, кванторы связывают предикатные переменные x, z , превращая предикаты $P(x)$ и $Q(z)$ в высказывания:

$$\exists x P(x); \quad \forall z Q(z).$$

В общем случае, связывая любую из предметных переменных квантором, или заменяя ее предметной постоянной, мы снижаем число мест в предикате на единицу. Например, из двухместного предиката $P(x, y)$ с помощью двух кванторов можно образовать 8 высказываний:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y P(x, y) &\longleftrightarrow \forall y \forall x P(x, y), \\ \exists x \exists y P(x, y) &\longleftrightarrow \exists y \exists x P(x, y), \\ \exists x \forall y P(x, y) &\longleftrightarrow \forall y \exists x P(x, y), \\ \forall x \exists y P(x, y) &\longleftrightarrow \exists y \forall x P(x, y), \end{aligned}$$

только два первых из которых равносильны, так как разноименные кванторы переставлять нельзя.

Задачи и упражнения:

Задача 1.

а) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: $A(x)$: « x - чётное число»; $B(x)$: « x не делится на 3». Найти множество истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$.

б) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: $C(x)$: « x кратно 5»; $D(x)$: « x - чётное»; Найти множество истинности предиката $D(x) \wedge C(x)$.

в) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: $A(x)$: « x - чётное число»; $C(x)$: « x кратно 5». Найти множество истинности предиката $\neg A(x) \wedge C(x)$.

г) На множестве $M = \{1..20\}$ заданы предикаты: $A(x)$: « x - чётное число»; $B(x)$: « x делится на 3»; $C(x)$: « x кратно 5». Найти множество истинности предиката $B(x) \vee A(x) \vee C(x)$.

д) На множестве $M = \{1..30\}$ заданы предикаты: $C(x)$: « x - не кратно 5»; $D(x)$: « x - непростое»; Найти множество истинности предиката $C(x) \rightarrow D(x)$.

Задача 2.
а) На множестве M заданы предикаты: $A(x)$ и $B(x)$. Изобразить на диаграмме множество истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

б) На множестве M заданы предикаты: $A(x)$ и $C(x)$. Изобразить на диаграмме множество истинности предиката $C(x) \setminus A(x)$.

в) На множестве M заданы предикаты: $A(x)$ и $C(x)$. Изобразить на диаграмме множество истинности предиката $\overline{A(x)} \wedge \overline{C(x)}$.

Задача 3.

а) Для предиката $P(x) : "(x + 0 = x)"$, $x \in R$, определить значение $\neg \forall x P(x)$.

б) Для предиката $P(x) : "(x \cdot 0 = 0)"$, $x \in R$, определить значение $\neg \forall x P(x)$.

в) Для предиката $P(x) : "(2x = 4)"$, $x \in R$, определить значение $\exists x P(x)$.

г) Для предиката $P(x) : "(x + 10 = x + 5)"$, $x \in R$, определить значение $\exists x P(x)$.

д) Для предиката $P(x) : "(x^2 - 2x + 1 = 0)"$, $x \in R$, определить значение $\neg \exists x P(x)$.

е) Для предикатов $P(x) : "(x^2 + x - 2 > 0)"$, $Q(x) : "(x^2 + x + 0.5 = 0)"$, $x \in R$ определить значение $\exists x (P(x) \vee Q(x))$.

ж) Для предикатов $P(x) : "(2x^2 + 3x - 5 \geq 0)"$, $Q(x) : "(2x^2 + 3x - 5 \leq 0)"$, $x \in R$ определить значение $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

з) При $x \in R$ определить значение высказывания $\exists x ((x^2 - 5x + 6 \geq 0) \wedge (x^2 - 2x + 1 > 0))$.

и) При $x \in R$ определить значение высказывания $\exists x ((x \in \{2, 5\}) \rightarrow (x^2 - 6x + 8 = 0))$.

Практическая работа 59. Способы задания булевой функции. Таблица истинности булевой функции.

Цель. Приобрести навыки построения таблицы истинности функции, определения тождественной истинности или ложности формулы. выполнения равносильных преобразований с применением законов алгебры логики.

Теоретическая часть.

Булевой функцией $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется любая функция, в которой аргументы и функция могут принимать значение либо 0, либо 1.

Булеву функцию от n переменных можно задать таблицей истинности, в которой наборы значений аргументов расположены в порядке возрастания их номеров: сначала идет набор, представляющий собой двоичное разложение 0 (этот набор имеет номер 0); затем идет набор, являющийся двоичным разложением 1, потом 2, 3 и т.д.

Отрицание - булева функция одной переменной, которая определяется следующей таблицей истинности

x	0	1	Обозначения
$f(x)$	1	0	$\neg$ $\neg x, \bar{x}$

Некоторые элементарные булевы функции двух переменных приведены ниже.

xy	$x \& y$	$x \vee y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x \rightarrow y$	$x y$	$x \downarrow y$
00	0	0	0	1	1	1	1
01	0	1	1	0	1	1	0
10	0	1	1	0	0	1	0
11	1	1	0	1	1	0	0

С помощью суперпозиции элементарных булевых функций можно построить более сложные функции, которые могут зависеть от любого числа переменных. Запись булевых функций через элементарные булевы функции будем называть **формулой** реализующей данную функцию.

Для более компактной записи сложных функций введем следующие соглашения:

- 1) внешние скобки опускаются;
- 2) сначала записывается отрицание в скобках;

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Для равносильных связей (в скобках) приоритет определяется слева на право.

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пример. Расставить скобки в формулах:

1) $x \vee y \leftrightarrow z \oplus x$; 2) $x \downarrow y \vee z$; 3) $x \oplus y) \leftrightarrow z \rightarrow x \wedge y \vee \neg z$.

Решение: 1) в формуле $x \vee y \leftrightarrow z \oplus x$ скобки расставляются следующим образом:

$((x \vee y) \leftrightarrow (z \oplus x))$;

2) т.к. операция $\downarrow$ сильнее операции $\vee$ согласно замечанию имеем $((x \downarrow y) \vee z)$;

3) в формуле $(x \oplus y) \leftrightarrow z \rightarrow x \wedge y \vee \neg z$ используя введенное старшинство связок, получаем, что данная формула равносильна $((x \oplus y) \leftrightarrow (z \rightarrow ((x \wedge y) \vee (\neg z))))$.

Пример. Составить таблицы истинности для формул:

а) $x \leftrightarrow \bar{y} \rightarrow (y \oplus x)$; б) $x \mid ((\bar{y} \vee z) \downarrow (x \wedge z))$.

Решение:

а) используя введенное старшинство связок, получим, что данная формула равносильна $x \leftrightarrow (\bar{y} \rightarrow (y \oplus x))$, а таблица истинности примет вид:

x	y	$\bar{y}$	$(y \oplus x)$	$\bar{y} \rightarrow (y \oplus x)$	$x \leftrightarrow (\bar{y} \rightarrow (y \oplus x))$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

б) составим таблицу истинности для формулы $x \mid ((\bar{y} \vee z) \downarrow (x \wedge z))$

x	y	z	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{y} \vee \bar{z}$	$x \wedge z$	$\overline{x \wedge z}$	$(\bar{y} \vee \bar{z}) \downarrow \overline{x \wedge z}$	F (x, y)
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Формула называется тождественно **истинной (ложной)**, если она принимает значение **1 (0)** при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример. Является ли формула $((x \rightarrow y) \wedge \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$ тождественно истинной?

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \rightarrow y$	$(x \rightarrow y) \wedge \bar{y}$	$((x \rightarrow y) \wedge \bar{y}) \rightarrow \bar{x}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Формула равна 1 при всех значениях входящих в нее переменных, следовательно, она тождественно

истинная (таблица).

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

2. Как определить число строк в таблице истинности.
3. Составить таблицу истинности данной булевой функции:
 1. $(x \oplus yz) \rightarrow x \vee z$
 2. $(x | y) \rightarrow (\bar{z}y \oplus x)$
 3. $(x \rightarrow \bar{y}) \oplus (z \vee x)$
 4. $(x \vee y) \oplus (\bar{z} \leftrightarrow y)$
 5. $(x \vee y \rightarrow z) \oplus y$
 6. $\bar{x} \vee y \rightarrow zy$
 7. $(x \downarrow y) \vee \overline{x \rightarrow z}$
 8. $(xy \rightarrow z) \vee x \oplus y$
 9. $(x | y)z \rightarrow \bar{y} \vee x$
 10. $(x \rightarrow yz) \oplus \bar{x}$
 11. $x \vee y\bar{z} \rightarrow xy$
 12. $(x \oplus y)(z \vee \bar{x})$
 13. $(x \vee y) \oplus (z \rightarrow \bar{y})$
 14. $(x \downarrow y) \oplus z \vee \bar{x}$
 15. $(x \vee y \rightarrow \bar{z}) \oplus y$
 16. $x \leftrightarrow (y \oplus z \vee y)$
 17. $x \vee y\bar{z} \oplus y$
 18. $(x \oplus y)z \vee \bar{x}$
 19. $(x \rightarrow \bar{y}) \oplus (z \vee y)$
 20. $(x | y)z \vee \bar{x}$
 21. $((x \rightarrow y) \oplus z) \leftrightarrow \bar{y}$
 22. $(x \downarrow y) \leftrightarrow (z \oplus y)$
 23. $((x \vee y) \oplus z) \rightarrow y$
 24. $(xy \oplus z) \rightarrow \bar{x}$
 25. $x \oplus (y \downarrow z) \oplus y$
 26. $\overline{x \rightarrow y \vee (\bar{y} \vee z)}$
 27. $(x | y) \oplus (y \rightarrow \bar{z}x)$
 28. $\overline{x \rightarrow y(x \vee (\bar{y} \oplus z))}$
 29. $(x \oplus z) \leftrightarrow (zx \vee y)$
 30. $x(\overline{y \rightarrow z}) \leftrightarrow (\bar{y} \oplus z)$

Практическая работа 60. Применение законов алгебры логики.

Цель. Приобрести навыки выполнения равносильных преобразований с применением законов алгебры логики.

Теоретическая часть.

Булевы функции f_1 и f_2 называются эквивалентными, если на всяком наборе

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ нулей и единиц значения функций совпадают. Обозначение эквивалентных (равносильных) функций следующее: $f_1 = f_2$ или $f_1 \equiv f_2$.

Основные эквивалентности ($H, H_1, H_2, H_3 \dots$ означают некоторые булевы функции):

1. Закон двойного отрицания: $H = \overline{\overline{H}}$
2. Идемпотентность: $HH = H, H \vee H = H$
3. Коммутативность: $H_1 * H_2 = H_2 * H_1$, где символ $*$ означает одну из связок $\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow$.
4. Ассоциативность: $H_1 * (H_2 * H_3) = (H_1 * H_2) * H_3$, где символ $*$ означает одну из связок $\&, \vee, \oplus, \sim$.
5. Дистрибутивность: $H_1 \& (H_2 \vee H_3) = (H_1 \& H_2) \vee (H_1 \& H_3)$,
 $H_1 \vee (H_2 \& H_3) = (H_1 \vee H_2) \& (H_1 \vee H_3)$.
6. Закон де Моргана: $H_1 \& H_2 = \overline{\overline{H_1} \vee \overline{H_2}}$, $\overline{H_1 \vee H_2} = \overline{H_1} \& \overline{H_2}$,
7. Правила поглощения: $H_1 \vee (H_2 \& H_1) = H_1$, $H_1 \& (H_2 \vee H_1) = H_1$
8. Законы склеивания: $H_1 \& H_2 \vee H_1 \& \overline{H_2} = H_1$, $(H_1 \vee H_2) \& (H_1 \vee \overline{H_2}) = H_1$
9. Законы инверсий: $H \vee \overline{H} = 1$, $H \& \overline{H} = 0$.
10. Правила операций с константами: $H \vee 1 = 1$, $H \& 1 = H$, $H \vee 0 = H$, $H \& 0 = 0$.

Все приведенные соотношения легко проверяются по таблицам истинности.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пример: $\overline{xy \vee xz \vee yz} = \overline{z \vee yz \vee x} \vee \overline{yz} = \overline{z} \vee \overline{y} \vee \overline{x}$;

$$\begin{aligned}
& (x \rightarrow y) \wedge y \rightarrow x \stackrel{x \rightarrow y = \bar{x} \vee y}{=} \neg((x \rightarrow y) \wedge y) \vee x \stackrel{(6)}{=} (\neg(x \rightarrow y) \vee \neg y) \vee x \stackrel{x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, (6)}{=} \\
& 2) = (x \wedge \neg y \vee \neg y) \vee x \stackrel{(3)}{=} (\neg y \vee \neg y \wedge x) \vee x \stackrel{(2)}{=} \neg y \vee x \stackrel{x \rightarrow y = \bar{x} \vee y}{=} y \rightarrow x; \\
& \bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee xyz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z = xz(\bar{y} \vee y) \vee xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z = xz \vee xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z = \\
& 3) = (xz \vee x\bar{z}) \vee (xz \vee \bar{x}z) \vee xy = x(z \vee \bar{z}) \vee z(x \vee \bar{x}) \vee xy = x \vee z \vee xy = x(1 \vee y) \vee z = x \vee z; \\
& 4) \overline{x_1 \vee x_2 x_3 \cdot x_1 x_2 \vee x_3} = \overline{x_0(x_2 \vee x_3) \vee (x_1 x_2) x_3} = \overline{(x_1 \vee x_2 x_3) \vee (x_1 x_2 \vee x_3)} = \overline{x_1(x_2 \vee x_3)} = \\
& = x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3.
\end{aligned}$$

Пример: С помощью равносильных преобразований упростить формулу

$$\bar{x}y \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}.$$

$$\begin{aligned}
& \bar{x}y \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \equiv \overline{\bar{x}y} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee \overline{\bar{x}y} \vee \bar{z} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee \overline{\bar{x}y} \vee \bar{z} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \equiv \\
& \equiv \begin{cases} a) \bar{x} \vee (y \vee \bar{z}) \equiv x \rightarrow (y \vee \bar{z}); \\ b) \bar{z} \vee (\bar{x} \vee y) \equiv z \rightarrow (x \vee y); \\ в) (y \vee \bar{x} \vee \bar{z}) \equiv y \vee \bar{x}z; \\ г) \bar{x} \vee \bar{z} \vee y \equiv \bar{x}z \vee y \equiv xz \rightarrow y; \\ д) \bar{x} \vee y \vee \bar{z} \equiv \overline{\bar{x}y\bar{z}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Любую запись а) - д) можно считать ответом.

Пример.: Проверьте, будут ли эквивалентны следующие функции:

$$(x \rightarrow z)(y \rightarrow z); \quad (x \vee y) \rightarrow z.$$

С помощью равносильных преобразований получаем, что

$$(x \rightarrow z)(y \rightarrow z) \equiv (\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee z) \equiv \overline{\bar{x}y} \vee \bar{z} \vee \overline{\bar{x}z} \vee \bar{z} \equiv \overline{\bar{x}y} \vee \bar{z} \equiv \bar{x} \vee y \vee \bar{z} \equiv (x \vee y) \rightarrow z, \text{ т.е. функции эквивалентны.}$$

Пример.: Доказать равносильность $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$.

$$\begin{aligned}
& (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x \wedge x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{y} \equiv \\
& \equiv x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \equiv x \wedge (1 \vee y \vee \bar{y}) \equiv x \wedge (1 \vee 1) \equiv x.
\end{aligned}$$

Задачи и упражнения:

1. Доказать следующие равносильности:

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ | 8. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \downarrow \bar{y}}$ | 15. $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \equiv \bar{x}$ |
| 2. $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \mid \bar{y}}$ | 9. $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ | 16. $(\bar{x} \vee y) \downarrow (\bar{y} \vee z) \equiv \overline{(\bar{x} \vee y) \vee (\bar{y} \vee z)}$ |
| 3. $x \downarrow y \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$ | 10. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$ | 17. $x \oplus (y \oplus z) \equiv (x \oplus y) \oplus z$ |
| 4. $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ | 11. $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$ | 18. $\bar{x}y \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \equiv \overline{\bar{x}y\bar{z}}$ |
| 5. $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \vee y \vee \bar{z}$ | 12. $\bar{x}y \rightarrow z \equiv \overline{\bar{x}y \wedge \bar{z}}$ | 19. $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow z$ |
| 6. $\bar{x}y \rightarrow z \equiv \overline{\bar{x}y \wedge \bar{z}}$ | 13. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ | 20. $\bar{x} \rightarrow \bar{y} \equiv 1 \oplus y \oplus xy$ |
| 7. $x \vee (y \wedge x) \equiv x$ | 14. $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x$ | 21. $x \leftrightarrow y \equiv (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ |

2. Показать, что формулы $\bar{b} \vee \bar{a}$, $a \wedge \bar{b} \rightarrow \bar{a}$, $a \wedge \bar{b} \rightarrow b$ имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \rightarrow b$.

3. Проверьте, будут ли эквивалентны следующие функции:

1. $x \rightarrow (y \oplus z)$, $(x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$

11. $\bar{x} \downarrow (y \wedge \bar{z})$, $(x \leftrightarrow \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee z)$

2. $x \wedge (y \oplus z)$, $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$

12. $(y \vee \bar{x}) \oplus (\bar{y} \wedge z)$, $(x \oplus y) \vee (x \oplus z)$

3. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$, $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$

13. $x \oplus y$, $y \oplus x$

4. $x \vee (y \mid z)$, $(x \vee y) \mid (x \vee z)$

14. $x \vee \bar{y}$, $\bar{x} \leftrightarrow y$

5. $x \oplus (y \rightarrow z)$, $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$

15. $\bar{x} \vee \bar{y}$, $\bar{x} \mid \bar{y}$

6. $x \mid (y \rightarrow z)$, $(x \mid y) \rightarrow (x \mid z)$

16. $\bar{x} \wedge \bar{y}$, $\bar{x} \downarrow \bar{y}$

7. $x \wedge (y \rightarrow z)$, $xyz \vee \bar{x} \mid \bar{y}$

17. $x(y \vee x)$, x

8. $x \vee (y \rightarrow z)$, $(x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$

18. $\bar{x} \wedge y \wedge x$, x

9. $x \oplus (y \rightarrow z)$, $(xy) \leftrightarrow (x \oplus z)$

19. $xy \downarrow z$, $z \downarrow xy$

10. $x \downarrow (y \leftrightarrow z)$, $(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$

20. $x \vee yz$, $(x \vee y)(x \vee z)$

4. Преобразуйте формулы, используя основные законы эквивалентности:

1. $\overline{xy \vee y \vee xy}$

11. $\overline{xy \vee xy \vee xy \vee y \vee xy}$

2. $\overline{x \vee y \vee xy \vee xy}$

12. $\overline{(xyz \vee z) \vee (xyz \vee \bar{z})}$

3. $\overline{x \vee xy \vee xy \vee x}$

13. $\overline{xyz \vee xyz \vee xy}$

4. $\overline{x \vee y \vee xy \vee y \vee xy}$

14. $\overline{xyz \vee xyz \vee xyz}$

5. $\overline{xyz \vee xy \vee xyz \vee yz}$

15. $\overline{xyz \vee x \vee y \vee z \vee xy \vee xyz}$

6. $\overline{xyz \vee x \vee y \vee z \vee yz \vee xyz}$

16. $\overline{xyz \vee y \vee z \vee xyz \vee x \vee y \vee z}$

7. $\overline{xyz \vee yz \vee xy \vee x \vee y}$

17. $\overline{xyz \vee yz \vee x \vee x \vee y \vee z}$

8. $\overline{xz \vee xyz \vee x \vee y \vee z \vee xyz \vee yz}$

18. $\overline{xyz \vee xz \vee yz \vee y \vee z}$

9. $\overline{xyz \vee xy \vee x \vee z \vee xz}$

19. $\overline{(x \vee y \vee xz)(y \vee y)(y \vee z)}$

10. $\overline{xyz \vee x \vee z \vee x \vee y \vee z \vee xyz}$

20. $\overline{xy \vee xyz \vee x \vee xyz}$

Практическая работа 61. Дизъюнктивные и конъюнктивные совершенные нормальные формы.

Цель. Приобрести навыки построения СКНФ (СДНФ) с помощью различных алгоритмов.

Теоретическая часть.

Множество всех булевых в базисе $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ образуют булеву алгебру. Если x - логическая переменная, $a = \sigma \in \{0, 1\}$ то выражение

$$x^\sigma = \begin{cases} x & \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x} & \text{если } \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{если } x = \sigma \\ 0 & \text{если } x \neq \sigma \end{cases}$$

называется литерой. Литеры x и $\bar{x}$ называются контрадными. Конъюнктом называется конъюнкция

литер. Дизъюнктом называется дизъюнкция литер. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктов. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция дизъюнктов.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

следующим путем:

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Данная функция приводится к нормальной форме

1. используем законы де Моргана, чтобы преобразовать формулу к виду, в котором знаки отрицания относятся только к отдельным переменным;

2. применяем правило снятия двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$;

3. далее следует использовать законы дистрибутивности, причем первый закон дистрибутивности для приведения к ДНФ, и второй закон дистрибутивности для приведения к КНФ.

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама либо ее отрицание), то эта форма называется **совершенной нормальной формой (СДНФ или СКНФ)**.

Пример: По данной таблице истинности построить СДНФ.

Решение рассмотрим на примере функции $f(x, y, z)$, заданной таблично:

x	y	z	Конstituенты 1	Конstituенты 0	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$	$x \vee y \vee z$	0
0	0	1	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$	$x \vee y \vee \overline{z}$	1
0	1	0	$\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$	$x \vee \overline{y} \vee z$	1
0	1	1	$\overline{x} \cdot y \cdot z$	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	0
1	0	0	$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$	$\overline{x} \vee y \vee z$	0
1	0	1	$x \cdot \overline{y} \cdot z$	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$	1
1	1	0	$x \cdot y \cdot \overline{z}$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$	1
1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	1

Конституенты_1 (или основные конъюнкции), включенные в таблицу, соответствуют конкретному набору нулей и единиц, которые принимают переменные x, y, z . Строятся конституенты_1 по следующему правилу: переменная входит в произведение сама, если на данном наборе она принимает значение 1, в противном случае в произведение входит ее отрицание.

Правило для построения СДНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 1, а затем взять дизъюнкцию соответствующих конституент 1. Так для нашего примера, имеем

$$f(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot \overline{z} \vee x \cdot y \cdot z.$$

Пример: По данной таблице истинности построить СКНФ.

Решение: **Конституенты_0** для набора нулей и единиц (которые принимают переменные x, y, z) строятся следующим образом: переменная входит в дизъюнкцию сама, если на данном наборе она принимает значение 0, в противном случае в дизъюнкцию входит её отрицание.

Правило для построения СКНФ: следует выбрать строки, в которых функция равна 0, а затем взять конъюнкцию соответствующих конституент_0. В результате получится искомая СКНФ. Так для нашего примера, имеем

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee y \vee z).$$

Описанный способ нахождения СДНФ (СКНФ) по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

1. Для нахождения СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ.

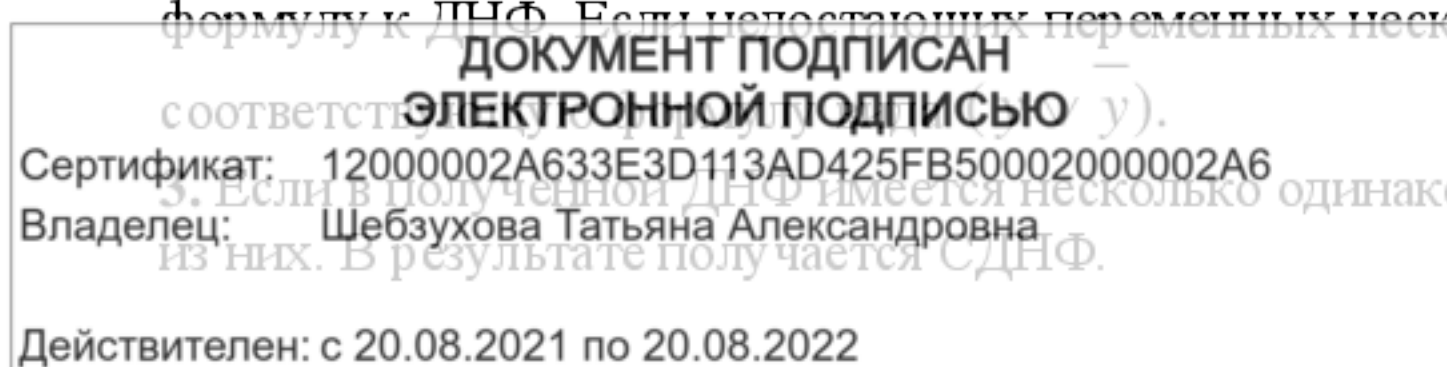
2. Если в некоторый конъюнкт K не входит скажем переменная y , то этот конъюнкт заменяем на

эквивалентную формулу $K \wedge (y \vee \overline{y})$ и, применяя 1-й закон дистрибутивности, приводим полученную

формулу к ДНФ. Если недостаточных переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем

соответствующий конъюнкт $(y \vee \overline{y})$.

3. Если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.



Замечание: Для построения СКНФ дизъюнкт не содержащий скажем переменную y заменяем на эквивалентную формулу $D \vee y \cdot \bar{y}$ и, применяем 2-й закон дистрибутивности.

Пример: Построить СКНФ для функции F при помощи эквивалентных преобразований

$$F_1 = x | (y \oplus z) = \bar{x} \vee \overline{(y \oplus z)} = \bar{x} \vee \overline{(yz \vee y\bar{z})} = \bar{x} \vee \overline{yz} \cdot \overline{y\bar{z}} = \bar{x} \vee (\bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{x} \vee (y \vee \bar{z}) \cdot (\bar{y} \vee z) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) - \text{СКНФ}$$

Пример: С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

$$F = ((x \downarrow y) \rightarrow \bar{z}) \leftrightarrow y.$$

Решение: Приведем функцию F к базису $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee\}$

$$F = \overline{(x \cdot y \rightarrow)} \leftrightarrow y = \overline{(x \cdot y \vee \bar{z})} \leftrightarrow y = \overline{(x \vee y \vee \bar{z})} \leftrightarrow y = \overline{(x \vee y \vee \bar{z} \vee y)} \overline{(x \vee y \vee \bar{z} \vee y)} = \overline{x \cdot y \cdot z \vee y} = \overline{x \cdot y \cdot z} \cdot \bar{y} = (x \vee y \vee \bar{z}) \bar{y} - \text{КНФ}$$

Для приведения F к ДНФ, применим первый закон дистрибутивности.

$$F = x\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{z} \cdot \bar{y} = x\bar{y} \vee \bar{z} \cdot \bar{y} = x\bar{y} \vee \bar{z} \cdot \bar{y} - \text{ДНФ}$$

Приведем функцию F к СДНФ:

$$F = x\bar{y} \vee \bar{z} \bar{y} = x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee \bar{z} \bar{y}(x \vee \bar{x}) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee (\bar{z}y\bar{x} \vee \bar{z}\bar{y}x) = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Приведем функцию F к СКНФ:

$$F = (x \vee y \vee \bar{z}) \bar{y} = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee x\bar{x}) = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee x)(\bar{y} \vee \bar{x}) = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee x \vee \bar{z}\bar{z}) \cdot (\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z}\bar{z}) = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z}).$$

Пример: Привести функцию к ДНФ, используя 1-ый закон дистрибутивности.

$$\begin{aligned} x \cdot \bar{y} \cdot x \cdot y \cdot \bar{z} \cdot (y \vee z) &= x \cdot \bar{y} \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \cdot (y \vee z) = (x \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} \vee x \cdot \bar{y} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cdot (y \vee z) = -\text{это КНФ} \\ &= (0 \vee x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cdot (y \vee z) = (x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \cdot (y \vee z) = -\text{это другая КНФ} \\ &= x \cdot \bar{y} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot z = 0 \vee 0 \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z - \text{это ДНФ} \end{aligned}$$

Пример: Привести функцию к КНФ, используя второй закон дистрибутивности.

$$\begin{aligned} x \vee y \cdot x \cdot y \vee \bar{z} &= x \vee y \cdot (\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}) = x \vee y \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot \bar{z} = x \vee y \cdot \bar{z} \cdot (\bar{x} \vee y) = (x \vee y \cdot \bar{z}) \cdot (x \vee \bar{x} \vee y) = \\ &= (x \vee y) \cdot (x \vee \bar{z}) \cdot (1 \vee y) = (x \vee y) \cdot (x \vee \bar{z}) - \text{это КНФ} \end{aligned}$$

Пример: По данной таблице истинности построить СДНФ:

x	y	z	основные конъюнкции	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	0
0	0	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	1
0	1	0	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	1
0	1	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	0
1	0	0	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	0
1	0	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	1
1	1	0	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	1
1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	1

$$f = \overline{\overline{\overline{x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z}}} = \overline{\overline{\overline{x \cdot y \cdot z} \wedge \overline{x \cdot y \cdot z} \wedge \overline{x \cdot y \cdot z}}} = (x \vee y \vee z) \cdot (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee y \vee z).$$

Задачи и упражнения:

1. Что называется КНФ (ДНФ)?
2. Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ.
3. Какие из следующих функций записаны в нормальной форме, а какие нет?
 1. $x \vee y \rightarrow z$;
 2. $(x \cdot y \vee \overline{x}) \cdot (z \vee x)$;
 3. $(x \vee z \vee \overline{x}) \cdot x \cdot y \cdot (\overline{z} \vee x)$;
 4. $x \cdot y \vee \overline{x} \cdot y \cdot (x \vee y)$;
 5. $x \cdot y \cdot z \cdot \overline{x} \cdot x \vee z \cdot y \vee x$;
 6. $(x \vee y \vee y \vee z) \cdot \overline{z} \cdot (z \vee x)$;
 7. $x \cdot y \vee \overline{x} \cdot z \vee y \cdot z \cdot \overline{x} \vee z$;
 8. $(x \vee y \vee z)(y \vee xy \vee \overline{z})$;
 9. $\overline{xyz} \vee \overline{xy} \vee \overline{x} \vee \overline{yz}$;
 10. $\overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee \overline{xyz}$;
 11. $(yz \vee xy \vee z)(x \vee y \vee \overline{xz})$;
 12. $\overline{xyz} \vee \overline{xy} \vee \overline{xyz}$;
 13. $\overline{xy} \vee \overline{z} \vee \overline{xy} \vee \overline{z} \vee \overline{xy}$;
 14. $(x \vee y \vee z \vee t)(x \vee y)t$;
 15. $x \vee y \vee \overline{z} \vee (x \vee yz)$;
 16. $\overline{xyz} \vee \overline{xyz} \vee yz(\overline{x} \vee z)$;
 17. $x \vee y \vee \overline{z} \vee xy \vee \overline{yz}$;
 18. $\overline{xyz} \vee (x \vee y)(\overline{y} \vee z)$;
 19. $(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y)$;
 20. $xyz \vee xy \vee \overline{zt} \vee x \vee \overline{yzt}$;
 21. $(x \vee y \vee z) \cdot x \cdot (z \vee x)$.
5. Привести следующие формулы к ДНФ и КНФ и по возможности упростить.
 1. $x \vee yz$;
 2. $x \leftrightarrow y$;
 3. $x \leftrightarrow yz$;
 4. $x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$;
 5. $xy \leftrightarrow \overline{xy}$;
 6. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$;
 7. $\overline{xy} \vee (x \rightarrow y)$;
 8. $xy \vee yz \vee \overline{z}$;
 9. $x \vee \overline{yz} \vee \overline{xyz}$;
 10. $\overline{x \vee y \vee z} \cdot x \vee x \cdot y$;
 11. $(x \cdot y \vee z) \cdot (\overline{y} \vee \overline{x \cdot z})$;
 12. $(\overline{xyz} \vee x) \cdot (x \vee y \vee \overline{z} \vee xz) \vee y$;
 13. $x \cdot y \cdot x \cdot \overline{y} \vee xyz \vee \overline{z}$;
 14. $x \cdot y \rightarrow \overline{z} \vee y$;
 15. $\overline{z} \rightarrow y \vee \overline{x \cdot z}$;
 16. $(x \oplus \overline{y}) \rightarrow (z \oplus x)$;
 17. $(x \downarrow y) \oplus z \cdot x$;
 18. $(\overline{x} \vee z) \rightarrow (y \downarrow \overline{z})$;
 19. $(x \mid \overline{y}) \rightarrow x \cdot \overline{y \vee z}$;
 20. $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{x \oplus z}$;
 21. $\overline{x \cdot y \vee xyz \vee \overline{z}}$.
6. Привести функции к совершенным формам (СДНФ и СКНФ) путем эквивалентных преобразований.
 1. $xy \vee xyz \vee z$;
 2. $(x \vee z) \cdot (\overline{x} \vee y)$;
 3. $x \vee y \vee \overline{zx}$;
 4. $(x \vee y \vee z) \cdot y \cdot (\overline{y} \vee z)$;
 5. $x \cdot y \cdot z$;
 6. $\overline{y} \vee \overline{x} \cdot (yz \vee \overline{z})$;
 7. $(x \vee z) \cdot \overline{x} \cdot (\overline{xz} \vee y)$;
 8. $xz \vee y \rightarrow \overline{xz}$;
 9. $(\overline{y} \vee z) \oplus x \cdot y \cdot \overline{z}$;
 10. $(\overline{x} \downarrow y) \vee yz \wedge x$;
 11. $\overline{x} \leftrightarrow x \cdot y \wedge \overline{z}$;
 12. $x \wedge y \downarrow \overline{z}$;
 13. $\overline{x} \vee \overline{y}$;
 14. $\overline{xy}(x \rightarrow y)$;
 15. $(x \rightarrow y) \rightarrow x \vee \overline{y}$;
 16. $x \rightarrow yz$;
 17. $(x \rightarrow y) \rightarrow x$;
 18. $xy \rightarrow (y \rightarrow x)$;
 19. $x \vee y \rightarrow (x \rightarrow z)$;
 20. $xy \rightarrow zt$;
 21. $(\overline{y} \vee z) \oplus x \cdot y$.
7. Построить СДНФ и СКНФ для функций заданных вектором значений булевой функции.
 1. (0011);
 2. (0101);
 3. (1110);
 4. (1000);
 5. (0011 1010);
 6. (1100 0101);
 7. (1000 1111);
 8. (1110 1100);
 9. (1000 0011);
 10. (1100 0000);
 11. (1101 0000 0011 0110);
 12. (0000 1111 0101 1100);
 13. (1001 0000 0011 0100);
 14. (0101 0110 0010 0111);
 15. (0001 1100 0011 1110);
 16. (1101 1111 0011 0001);
 17. (1111 0000 1111 0110);
 18. (0101 0110 0101 0110);
 19. (1000 0110 1011 1111);
 20. (1010 1111 0111 0000).

8. Доказать тождества приведения к СДНФ или СКНФ:

$$1. xy = x \vee xy; \quad 2. x(x \vee y) \equiv x; \quad 3. xy \vee xy \equiv x;$$

$$15. (x \rightarrow y) \rightarrow y \equiv x \vee y;$$

$$16. x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow z;$$

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6;
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

3. $x \vee \overline{xy} \equiv x \vee y$; 10. $x \vee xy \equiv x$; 17. $(x \rightarrow z)(y \rightarrow z) \equiv (x \vee y) \rightarrow z$;
4. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$; 11. $x \vee \overline{xy} \equiv x \vee y$; 18. $x(y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
5. $x \rightarrow y \equiv \overline{xy}$; 12. $x(\overline{x} \vee y) \equiv xy$; 19. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;
6. $(x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv x$; 13. $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$; 20. $x \rightarrow \overline{y} \equiv y \rightarrow \overline{x}$;
7. $x \leftrightarrow y \equiv y \leftrightarrow x$; 14. $x \vee (\overline{x} \wedge y) \equiv x \vee y$.

9. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

1. $x | y$; 8. $\overline{z} \rightarrow x \leftrightarrow (\overline{x} | y)$; 15. $x \downarrow y \rightarrow x \vee y \leftrightarrow x | y$;
2. $x \oplus y$; 9. $\overline{((x | y) \rightarrow z) \oplus y}$; 16. $\overline{(\overline{x} \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus x)}$;
3. $x \leftrightarrow y$; 10. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus \overline{x})}$; 17. $\overline{(z \rightarrow x) \leftrightarrow (y | x)}$;
4. $x \downarrow y$; 11. $\overline{(x | \overline{y}) \oplus (z \rightarrow \overline{x})}$; 18. $\overline{((x \downarrow y) \rightarrow z) \oplus y}$;
5. $x \rightarrow y$; 12. $\overline{(z \rightarrow x) \oplus (x | \overline{y})}$; 19. $x \downarrow y \rightarrow x | y \oplus x$;
6. $x \rightarrow yz$; 13. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (\overline{z} \oplus \overline{x})}$; 20. $\overline{(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \leftrightarrow \overline{x})}$.
7. $\overline{xyz}$; 14. $\overline{((x \downarrow y) \oplus z) \rightarrow yx}$;

10. Проверьте двумя способами, будут ли эквивалентны следующие функции.

1) составлением таблиц истинности; 2) приведением к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

1. $x \vee y, x \rightarrow y$; 11. $x \wedge (y \leftrightarrow z), (x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$;
2. $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y$; 12. $x \vee (y | z), (x \vee y) | (x \vee z)$;
3. $x \vee y, x \oplus y$; 13. $x \oplus (y \rightarrow z), (x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$;
4. $xy \vee z, x(y \vee z)$; 14. $x \rightarrow (y \oplus z), (x \rightarrow y) \oplus (x \rightarrow z)$;
5. $(x \rightarrow y)z, x \rightarrow yz$; 15. $x | (y \rightarrow z), (x | y) \rightarrow (x | z)$;
6. $xy \leftrightarrow x, (x \leftrightarrow y)z$; 16. $x \wedge (y \rightarrow z), (x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)$;
7. $\overline{(x \vee y)}, \overline{x} \wedge \overline{y}$; 17. $x \vee (y \rightarrow z), (x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$;
8. $x \rightarrow y, \overline{x} \vee y$; 18. $x \oplus (y \rightarrow z), (xy) \leftrightarrow (x \oplus z)$;
9. $x \vee (y \rightarrow z), (x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$; 19. $x \downarrow (y \leftrightarrow z), (x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$;
10. $x \wedge (y \rightarrow z), (x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)$; 20. $x \wedge (y \oplus z), (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

Практическая работа 62. Алгоритмы построения полиномов Жегалкина.

Цель. Закрепить навыки построения многочлена Жегалкина методами равносильных преобразований и неопределенных коэффициентов.

Теоретическая часть.

Множество булевых функций, заданных в базисе Жегалкина $S = \{\oplus, \wedge, 1\}$ называется алгеброй Жегалкина.

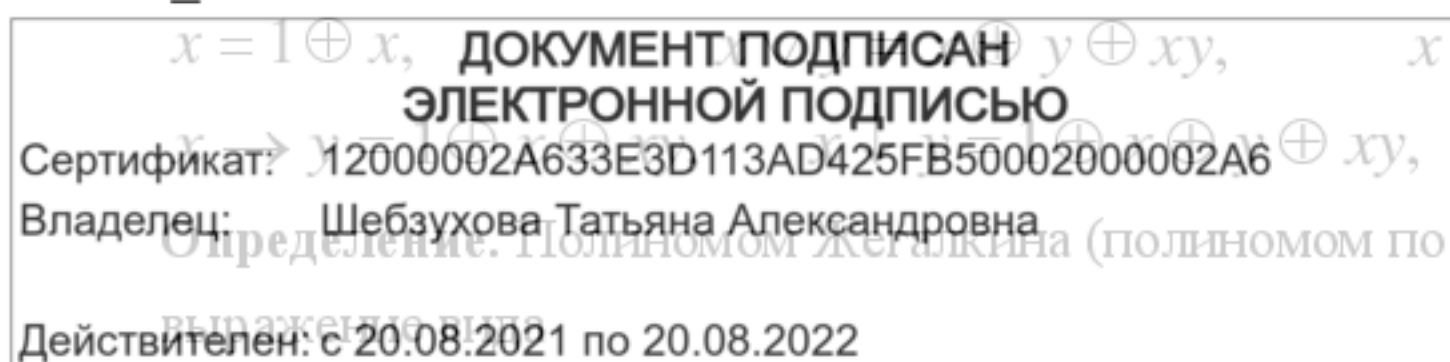
Основные свойства

1. коммутативность $H_1 \oplus H_2 = H_2 \oplus H_1$, $H_1 \wedge H_2 = H_2 \wedge H_1$;
2. ассоциативность $H_1 \oplus (H_2 \oplus H_3) = (H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$, $H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3) = (H_1 \wedge H_2) \wedge H_3$;
3. дистрибутивность $H_1 \wedge (H_2 \oplus H_3) = (H_1 \wedge H_2) \oplus (H_1 \wedge H_3)$;
4. свойства констант $H \wedge 1 = H$, $H \wedge 0 = 0$, $H \oplus 0 = H$;
5. $H \oplus H = 0$, $H \wedge H = H$.

Утверждение. Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

$$\overline{x} = 1 \oplus x, \quad x \oplus y = 1 \oplus x \oplus y, \quad x \sim y = 1 \oplus x \oplus y, \\ x | y = 1 \oplus xy.$$

Определение. Полиномом Жегалкина (полиномом по модулю 2) от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется



$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n \oplus c_{12} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus c_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n,$$

где постоянные c_k могут принимать значения 0 или 1.

Если полином Жегалкина не содержит произведений отдельных переменных, то он называется линейным (линейная функция).

Теорема. Каждая булева функция представляется единственным образом в виде полинома Жегалкина. Основные методы построения полиномов Жегалкина:

1. Метод, основанный на преобразовании формул. Приводим формулу к виду, содержащему связки из базиса $S = \{\oplus, \&, 1\}$; раскрываем скобки используя закон дистрибутивности (см. свойство 3); а затем применяем свойства 4 и 5.

2. Метод неопределенных коэффициентов. Полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ищем в виде

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n \oplus c_{12} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus c_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n.$$

Найдем коэффициенты c_k . Для этого последовательно придадим переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ значения из каждой строки таблицы истинности. В итоге получим систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными, имеющую единственное решение. Решив ее, находим коэффициенты полинома $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример: Построить полином Жегалкина функции

а) $f(x, y) = x \rightarrow y$, б) $f(x, y, z) = ((x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z}) \leftrightarrow y$.

Решение: а) 1 способ. Запишем искомый полином в виде $P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_{12} xy$

Пользуясь таблицей истинности

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \rightarrow y$	1	1	0	1

получаем, что

$$f(0,0) = P(0,0) = c_0 = 1,$$

$$f(0,1) = P(0,1) = c_0 \oplus c_2 = 1,$$

$$f(1,0) = P(1,0) = c_0 \oplus c_1 = 0,$$

$$f(1,1) = P(1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12} = 1.$$

Откуда последовательно находим, $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_{12} = 1$. Следовательно,

$$P(x, y) = 1 \oplus x \oplus xy.$$

2 способ (метод преобразования формул.) Имеем

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = x \cdot \bar{y} = (x \cdot (y \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x \oplus x \cdot y.$$

б) 1 способ. Пусть полином Жегалкина имеет вид:

$$P(x_1 y_1 z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_{12} xy \oplus c_{13} xz \oplus c_{23} yz \oplus c_{123} xyz.$$

$$P(0,0,0) = c_0 = 1, \text{ (т.к. } f(0,0,0) = 1).$$

$$P(0,0,1) = c_0 \oplus c_3 = 0 \text{ (т.к. } f(0,0,1) = 0) \Rightarrow 1 \oplus c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 1.$$

$$P(0,1,0) = c_0 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1.$$

$$P(1,0,0) = c_0 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$P(0,1,1) = c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow c_{23} = 1.$$

$$P(1,0,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow 0 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow c_{13} = 1.$$

$$P(1,1,0) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_{12} = 0 \Rightarrow c_{12} = 0.$$

$$P(1,1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus c_{23} \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow c_{123} = 1.$$

Итак, получаем полином Жегалкина 3-й степени.

$$P(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus yz \oplus xyz.$$

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пример: Построить полином Жегалкина для функции $f = (1011)$ методом неопределенных коэффициентов. Является ли f линейной?

Решение. Ищем полином Жегалкина $P(x, y)$ в виде:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$$

Используя таблицу истинности для f_2 , имеем

$$P(0,0) = c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1,$$

$$P(0,1) = c_0 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1.$$

$$P(1,0) = c_0 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$P(1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1.$$

Итак, $f = 1 \oplus y \oplus xy$ – не линейна.

Задачи и упражнения:

1. Что называется многочленом Жегалкина?

2. Метод неопределенных коэффициентов.

3. Построить полином Жегалкина, используя эквивалентные преобразования.

- | | | |
|-------------------------------|--|---|
| 1. $x \leftrightarrow y$, | 8. $(x \rightarrow y)(y \rightarrow z)$, | 15. $xy \rightarrow x \vee y \leftrightarrow x$, |
| 2. $x \rightarrow y$, | 9. $(xy \vee \bar{x}y) \oplus \bar{z}$, | 16. $(\bar{x} \oplus y) \leftrightarrow (\bar{z}x)$, |
| 3. $xy \downarrow z$, | 10. $\bar{x} \downarrow \bar{y}z$, | 17. $(z \wedge y) \oplus (\bar{y} \vee x \cdot \bar{z})$, |
| 4. $(x \vee y)z$, | 11. $(x \rightarrow y)(\bar{y} \rightarrow x)$, | 18. $(x \vee y) \rightarrow \bar{z} \mid y$, |
| 5. $\bar{x}y \mid \bar{z}$, | 12. $x \vee y \vee z$, | 19. $(x \leftrightarrow y) \downarrow (\bar{x} \oplus x \cdot \bar{z})$, |
| 6. $\bar{x}y(x \oplus y)$, | 13. $x \oplus y \downarrow z$, | 20. $(xz \leftrightarrow xyz) \vee (\bar{x}y \rightarrow \bar{z})$. |
| 7. $\overline{xyz \vee xy}$, | 14. $\bar{x} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}yz$, | |

4. Постройте полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$, | 8. $\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}t \vee \bar{t}z$, | 15. $(z \rightarrow x) \oplus (x \mid \bar{y})$, |
| 2. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$, | 9. $x \downarrow y \rightarrow x \vee y \leftrightarrow x \mid y$, | 16. $(x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \oplus \bar{x})$, |
| 3. $(x \mid y) \downarrow z$, | 10. $x \downarrow y \rightarrow x \mid y \oplus x$, | 17. $(\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \oplus x)$, |
| 4. $xy(x \oplus y)$, | 11. $\bar{z} \rightarrow x \leftrightarrow (\bar{x} \mid y)$, | 18. $(z \rightarrow x) \leftrightarrow (y \mid x)$, |
| 5. $\overline{xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z}$, | 12. $\overline{((x \mid y) \rightarrow z) \oplus y}$, | 19. $\overline{((x \downarrow y) \rightarrow z) \oplus y}$, |
| 6. $(x \rightarrow y)(y \downarrow z)$, | 13. $\overline{(x \vee \bar{y}) \rightarrow (z \oplus \bar{x})}$, | 20. $(x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow \bar{x})$. |
| 7. $(x \rightarrow y) \vee \bar{z} \mid x$, | 14. $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \rightarrow x)}$, | |

5. Постройте полином Жегалкина, если функции $f(x, y, z)$ и $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ заданы вектором своих значений:

- 1) (1010 0101);
- 2) (0011 1101);
- 3) (0011 1100);
- 4) (0101 0011);
- 5) (0010 0011);
- 6) (0101 1001);
- 7) (1111 0101);
- 8) (0111 1111);
- 9) (1101 1011);
- 10) (0010 0011);
- 11) (1111 1100 1011 1001);
- 12) (1101 0011 1101 0011);
- 13) (1100 1011 1101 1001);
- 14) (0101 0011 1101 1001);
- 15) (0000 1111 0101 1100);
- 16) (0011 1101 0011 1100);

- 17) (1111 1100 1011 1011);
 18) (0101 1111 1101 0011);
 19) (0000 1011 1011 1010);
 20) (0001 1101 1010 1111).

Практическая работа 63. Размещения, перестановки, сочетания в комбинаторике.

Цель. Изучить основные комбинаторные объекты и области их возможного применения.

Теоретическая часть.

Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

Основная формула комбинаторики

Пусть имеется k групп элементов, причем i -я группа состоит из n_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением $N = n_1 * n_2 * n_3 * \dots * n_k$.

Пример. Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n_1 элементов, а вторая - из n_2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы?

Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n_2 . Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n_2 . Так как в первой группе всего n_1 элемент, всего возможных вариантов будет $n_1 * n_2$.

Пример. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Решение: $n_1=6$ (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_2=7$ (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_3=4$ (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6).

Итак, $N = n_1 * n_2 * n_3 = 6 * 7 * 4 = 168$.

В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т.е. $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ можно считать, что каждый выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно n^k . Такой способ выбора носит название выборки с возвращением.

Пример. Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение. Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит $N = 5 * 5 * 5 * 5 = 5^4 = 625$.

Рассмотрим множество, состоящие из n элементов. Это множество будем называть генеральной совокупностью.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример. Различными размещениями из трех элементов {1, 2, 3} по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2). Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком.

Число размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Сочетанием из n элементов по m называется любой неупорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример. Для множества {1, 2, 3} сочетаниями являются {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

Число сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
 Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Пример. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$$

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов.

Пример. Всевозможными перестановками множества, состоящего из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ являются: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Пример. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

Решение: эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ способов осуществить расстановку книг.

Задачи и упражнения:

1. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.
2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?
3. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?
4. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?
5. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?
6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?
7. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т. е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.
8. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?
9. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты $800+400+200+100$. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?
10. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?
11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)
12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?
13. Порядок выступления восьми участников конкурса определяется жребием. Сколько различных исходов жеребьевки при этом возможно?
14. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?
15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?
16. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?
17. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?
18. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
19. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.
20. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?
21. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?
22. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура, если группы должны быть различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются.
23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

первого тура
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

24. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

Практическая работа 64. Подстановки. Биномиальные коэффициенты. Разбиения.

Цель. Рассмотреть возможность применения бинома Ньютона к упрощению вычислительных действий.

Теоретическая часть.

Подстановкой (n-ой степени) из n элементов называется взаимно однозначное отображение множества из n символов на себя. Обычно элементы этого множества нумеруются и отождествляются с n числами натурального ряда чисел.

Пример. Вместо подстановки - отображения элементов множества $X=\{a, b, c, g\}$, - говорят об отображении множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и обозначают эту подстановку как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Умножение подстановок - операция, которая ставит в соответствие упорядоченной паре подстановок n-ой степени A и B третью подстановку C той же степени по правилу:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим известные формулы:

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{aligned}$$

Аналогично можно вычислять остальные степени, но мы вместо продолжения такой последовательности формул сформулируем общую теорему о них.

Теорема. Справедлива формула (бинома Ньютона):

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n, \\ k! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)k, \quad k! = (k-1)!k, \quad 0! = 1. \end{aligned}$$

Используя числа C_n^m можно записать бином Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

Коэффициент называется биномиальным коэффициентом.

Теорема. Справедливы формулы для биномиальных коэффициентов:

1. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ - свойство суммы биномиальных коэффициентов;
2. $C_n^m = C_n^{n-m}$ - свойство симметрии;
3. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ - свойство сложения.

Задачи и упражнения:

1. Разложить, вычислив биномиальные коэффициенты: $(a+b)^7$; $(a+b)^{10}$.

2. В разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ найти коэффициент при a^8 .

3. В разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{10}$ найти коэффициент при a^4 .

4. Постройте треугольник Паскаля при $n=12$.

5. Вычислите числа Ферма и Мерсенна при $n=4$.

6. Решить уравнение $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.
7. Найти номер члена разложения бинома $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^6$, не содержащего x .
8. Найти пятый член разложения бинома $(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}})^n$.
9. Найти сумму биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома $(x+y)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена на 9 больше биномиального коэффициента второго члена.
10. Найти седьмой член разложения бинома $(a^2\sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a})^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена равен 36.
11. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?
12. Вычислить сумму $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$.
13. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно x , получаемого в разложении бинома $(3x-4)^{17}$.
14. Сумма нечетных биномиальных коэффициентов разложения $(ax + x^{-1/4})^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x .
15. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?
16. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}})^m$ в двадцать раз больше m , если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5 : 1?
17. В какую наибольшую степень следует возвести бином $(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3)$ чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно $3\sqrt{2}$?

Практическая работа 65. Основные характеристики графов. Матрицы смежности и инцидентности. Операции над графами.

Цель. Изучить возможные способы задания графов, алгоритм выполнения операций над графами.

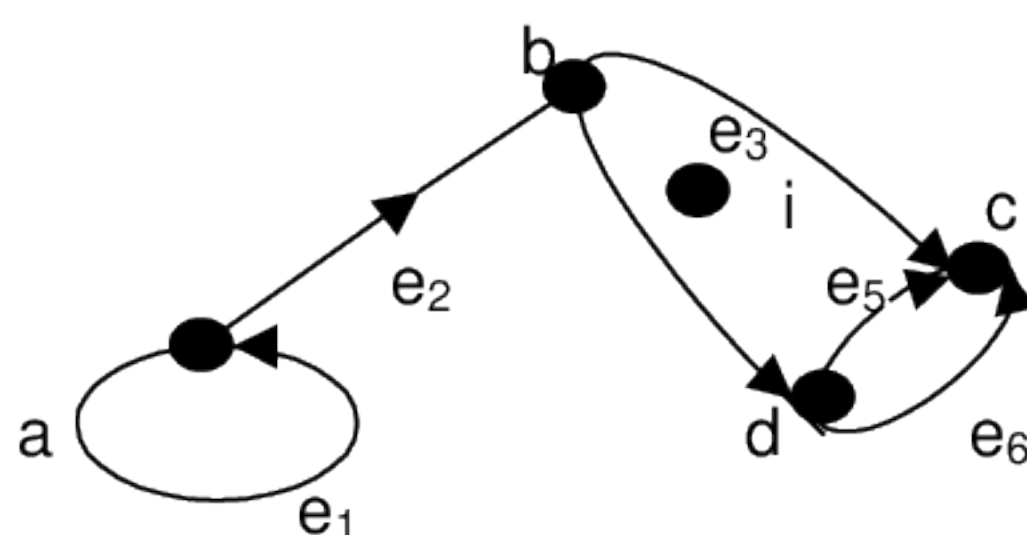
Теоретическая часть.

Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества вершин) и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V (E – множество ребер или дуг).

$$G(V, E) = \langle V; E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subset V \times V, \quad E = E^{-1}.$$

При этом дуга (a, b) называется исходящей из вершины a и заходящей в вершину b .

Элементы множества V называются вершинами (или узлами, или точками) графа G , а элементы из E – его ребрами (или линиями).



Дугу, выходящую из некоторой вершины и заходящую в ту же вершину, будем называть петлей, а дуги, выходящие из одной и той же вершины и заходящие в одну и ту же вершину, будем называть кратными. Так, дуги e_5 и e_6 являются кратными, а дуга e_1 – петлей. Вершину, из которой не выходит и в которую не заходит ни одна дуга, будем называть изолированной. Например, i – изолированная вершина.

Вершина v инцидентна ребру e , если $v \in e$; тогда еще говорят, что e есть ребро при v . Две вершины, инцидентные ребру, суть его концевые вершины или концы; ребро соединяет свои концевые вершины.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента соединены ребром. Замкнутая цепь ($v_0 = v_k$) называется циклом. Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

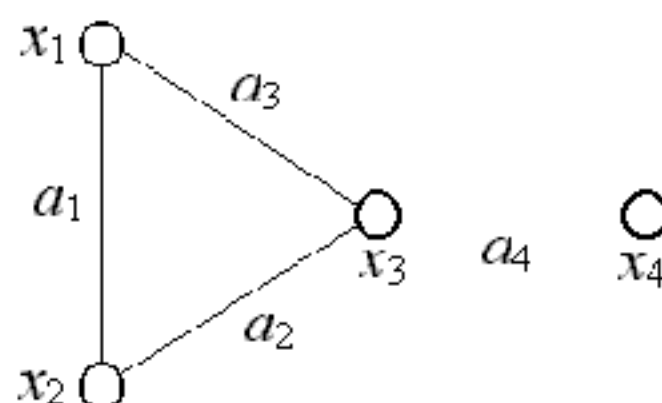
Для многих задач несущественно, являются ли ребра отрезками прямых или криволинейными дугами; важно лишь то, какие вершины соединяет каждое ребро.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется ориентированным. Ребра ориентированного графа называются дугами. Соответствующие вершины ориентированного графа называют началом и концом. Если направления ребер не указываются, то граф называется неориентированным (или просто графом).

На рисунке изображен неориентированный граф $G = (X, A)$.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

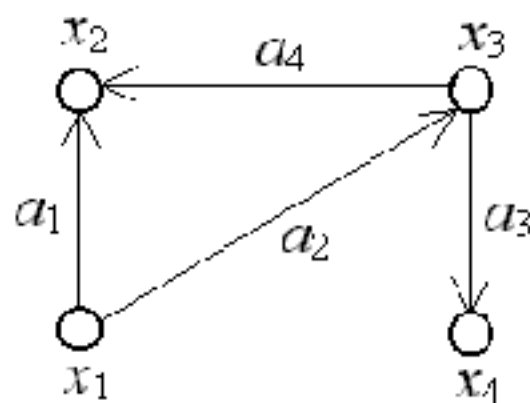
$$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_2, x_3), a_3 = (x_1, x_3), a_4 = (x_3, x_4)\}.$$



На следующем рисунке изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3), a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}.$$



Граф, имеющий как ориентированные, так и неориентированные ребра, называется смешанным.

Различные ребра могут соединять одну и ту же пару вершин. Такие ребра называют кратными. Граф, содержащий кратные ребра, называется мультиграфом.

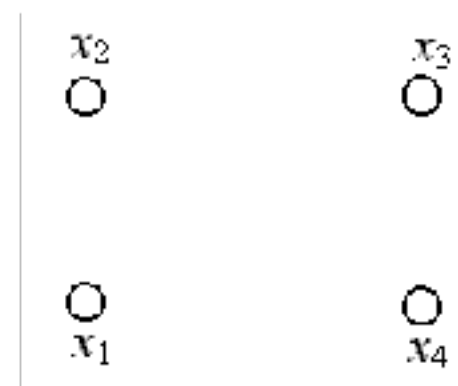
Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины.

Ребро может соединять вершину саму с собой. Такое ребро называется петлей. Граф с кратными ребрами и петлями называется псевдографом.

Множество ребер графа может быть пустым. Множество вершин графа не может быть пустым. Например, ниже изображен ориентированный граф $G = (X, A)$.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$A = \{a_1 = (x_1, x_2), a_2 = (x_1, x_3), a_3 = (x_3, x_4), a_4 = (x_3, x_2)\}.$$



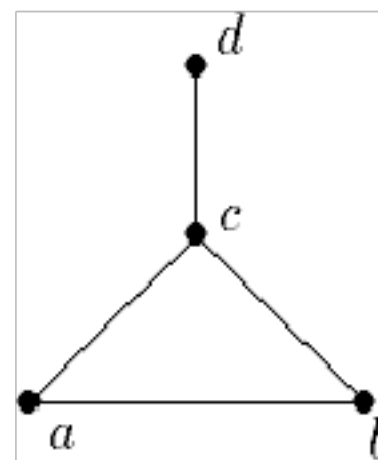
Как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного ребра говорят, что вершины x и y инцидентны ребру a , если эти вершины соединены a .

Степенью вершины графа называется число ребер, инцидентных этой вершине. Вершина, имеющая степень 0, называется изолированной, а степень 1 – висячей.

Для ориентированного графа множество вершин, в которые ведут дуги, исходящие из вершины x , обозначают $G(x)$, то есть $G(x) = \{y: (x, y) \in G\}$. Множество $G(x)$ называют образом вершины x . Соответственно $G^{-1}(y)$ – множество вершин, из которых исходят дуги, ведущие в вершину y , $G^{-1}(y) = \{x: (x, y) \in G\}$. Множество $G^{-1}(y)$ называют прообразом вершины y .

Способы задания графов

1. Геометрический



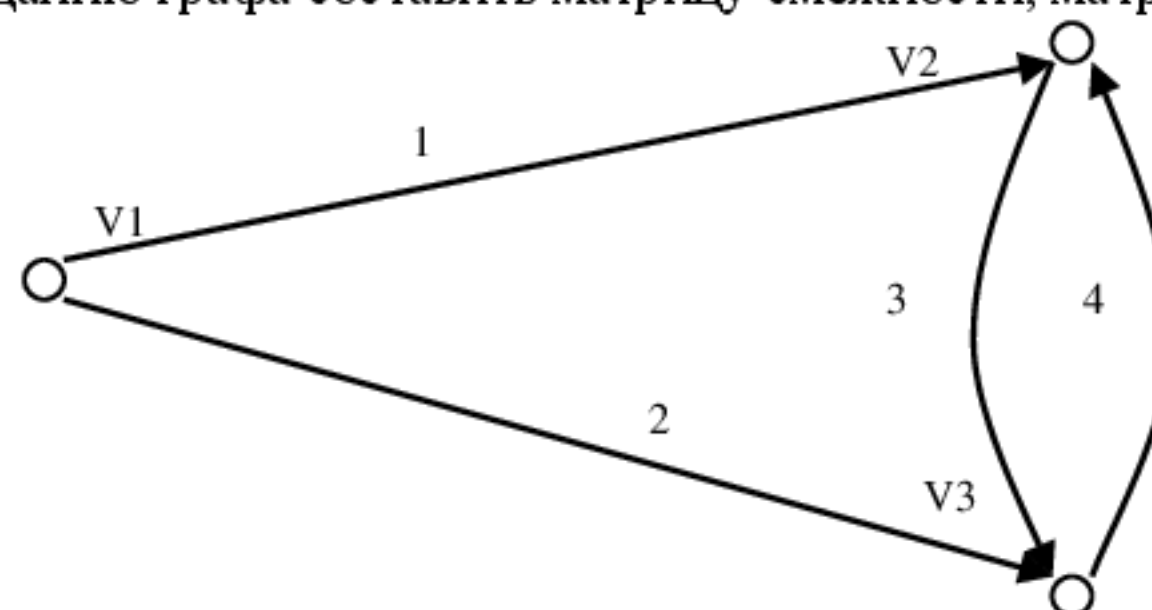
2. Матрица смежности – квадратная матрица, размерности, равной количеству вершин. При этом $a[i, j]$ – целое число, равное количеству рёбер, связывающих i -ю, j -ю вершину. Если в графе нет петель, то диагональные элементы равны 0. Если рёбра не повторяются, то все элементы 0 или 1. Если граф неориентированный, то матрица симметрична.

3. Матрица инцидентности – матрица размерности $m \times n$, где m – количество вершин, n – количество ребер или дуг.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } e_j \text{ исходит из вершины } v_i \\ -1, & \text{если дуга } e_j \text{ заходит в вершины } v_i \\ 2, & \text{если } e_j \text{ петля при вершине } v_i \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

4. Список смежности (или список инцидентности) – список каждый элемент которого состоит из вершины графа и списка смежных с ней вершин.

Пример. По графическому заданию графа составить матрицу смежности, матрицу инцидентности



Решение: Матрица смежности $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Матрица инцидентности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Объединением графов $G_1 (V_1, E_1)$ и $G_2 (V_2, E_2)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, при условии $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) называется граф $G(V, E)$, где

$$V := V_1 \cup V_2 \text{ \& } E := E_1 \cup E_2$$

3. Соединением графов $G_1 (V_1, E_1)$ и $G_2 (V_2, E_2)$ (обозначение $G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2)$, при условии $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) называется граф $G(V, E)$, где

$$V := V_1 \cup V_2 \text{ \& } E := E_1 \cup E_2 \cup \{e = (v_1, v_2) | v_1 \in V_1 \text{ \& } v_2 \in V_2\}$$

4. Удаление вершины v из графа $G_1 (V_1, E_1)$ (обозначение $G_1 (V_1, E_1) - v$, при условии $v \in V_1$) дает граф $G_2 (V_2, E_2)$, где

$$V_2 := V_1 \setminus \{v\} \text{ \& } E_2 := E_1 \setminus \{e = (v_1, v_2) | v_1 = v \vee v_2 = v\}$$

5. Удаление ребра e из графа $G_1 (V_1, E_1)$ (обозначение $G_1 (V_1, E_1) - e$, при условии $e \in E_1$) дает граф $G_2 (V_2, E_2)$, где

$$V_2 := V_1 \text{ \& } E_2 := E_1 \setminus \{e\}$$

6. Добавление вершины v в граф $G_1 (V_1, E_1)$ (обозначение $G_1 (V_1, E_1) + v$, при условии $v \notin V_1$) дает граф $G_2 (V_2, E_2)$, где

$$V_2 := V_1 \cup \{v\} \text{ \& } E_2 := E_1$$

7. Добавление ребра e в графа $G_1 (V_1, E_1)$ (обозначение $G_1 (V_1, E_1) + e$, при условии $e \notin E_1$) дает граф $G_2 (V_2, E_2)$, где

$$V_2 := V_1 \text{ \& } E_2 := E_1 \cup \{e\}$$

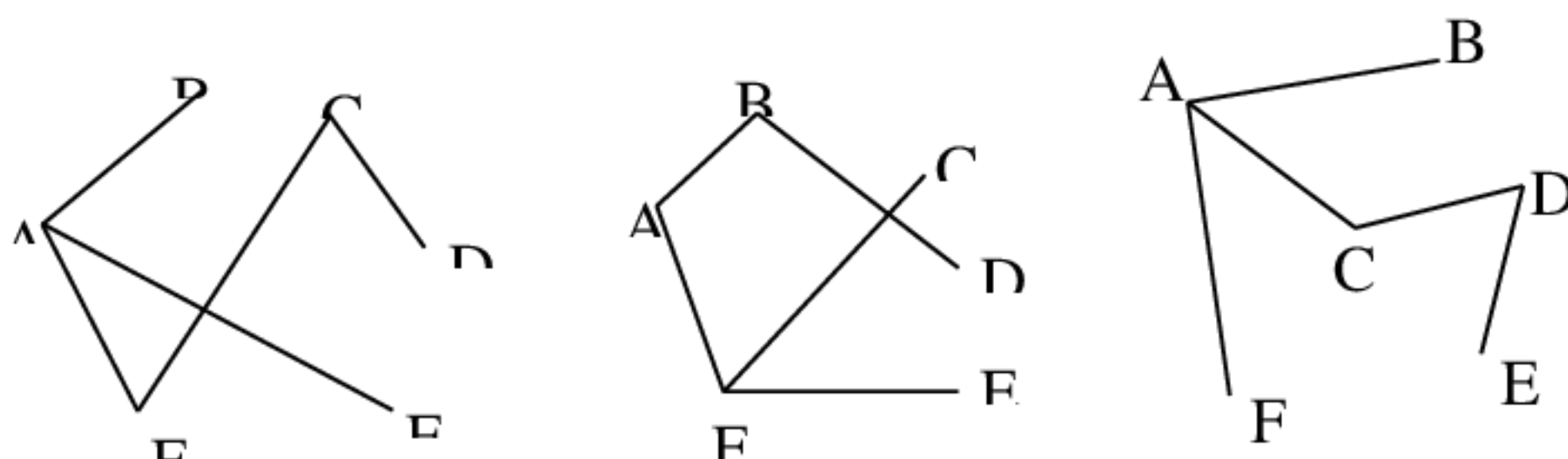
Задачи и упражнения:

1. Изобразить графы, заданные матрицами:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Составить матрицу смежности для графов:



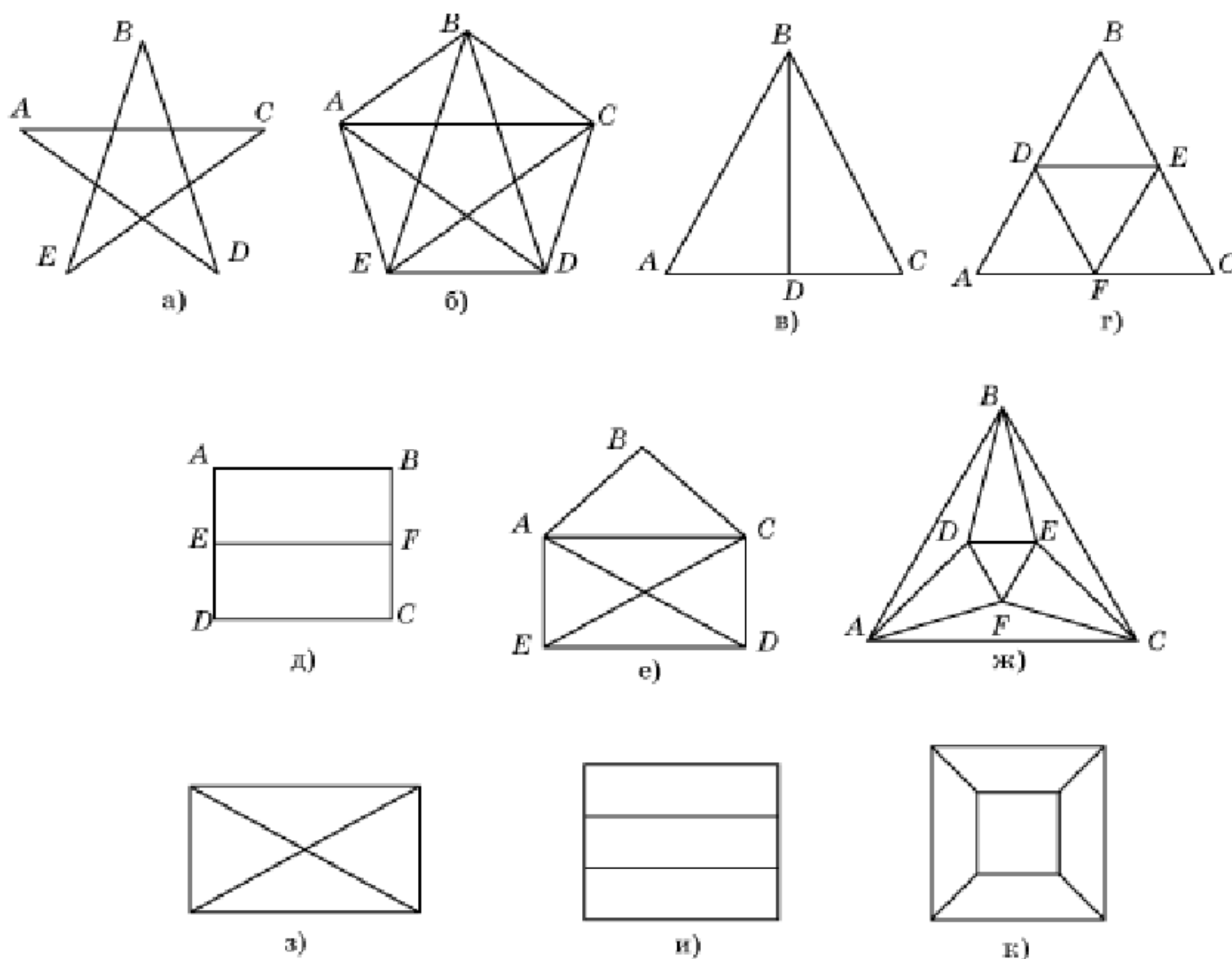
3. Построить графы для решения задач:

1) Перевозчику (П) нужно переправить через реку волка (В), козу (К) и мешок с капустой (М). Лодка так мала, что кроме перевозчика может взять только один из этих объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять с козой, а козу – с волком. Как осуществить переправу?

2) Два человека имеют полный кувшин воды в 8 л, а также два пустых кувшина в 5 л и 3 л. Как им разделить воду поровну?

4. Поток документов циркулирует между городами A_1, A_2, A_3 и городами B_1, B_2, B_3 . Можно ли проложить непересекающиеся маршруты, соединяющие каждый город A_i с каждым городом B_j ?

5. Определите, какие графы, изображенные на рисунке ниже, являются уникурсальными?



6. В офисе 15 компьютеров. Можно ли соединить их друг с другом так, чтобы каждый был соединен ровно с тремя другими?

Практическая работа 66. Эйлеров граф. Критерий эйлеровости.

Цель. Изучить алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе и его приложения на практике.

Теоретическая часть.

Первые задачи теории графов были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок (задача о Кенигсбергских мостах, задача о расстановке ферзей на шахматной доске, задачи о перевозках, задача о кругосветном путешествии и другие). Одним из первых результатов в теории графов явился критерий существования обхода всех ребер графа без повторений, полученный Л. Эйлером при решении задачи о Кенигсбергских мостах.

Правило Эйлера:

1. В графе, не имеющем вершин нечетных степеней, существует обход всех ребер (причем каждое ребро проходит в точности один раз) с началом в любой вершине графа.
2. В графе, имеющем две и только две вершины с нечетными степенями, существует обход с началом в одной вершине с нечетной степенью и концом в другой.
3. В графе, имеющем более двух вершин с нечетной степенью, такого обхода не существует.

Теорема Связный неориентированный мультиграф тогда и только тогда является эйлеровым, когда степень каждой из его вершин — четное число.

Опишем алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе. Этот алгоритм задается следующими правилами.

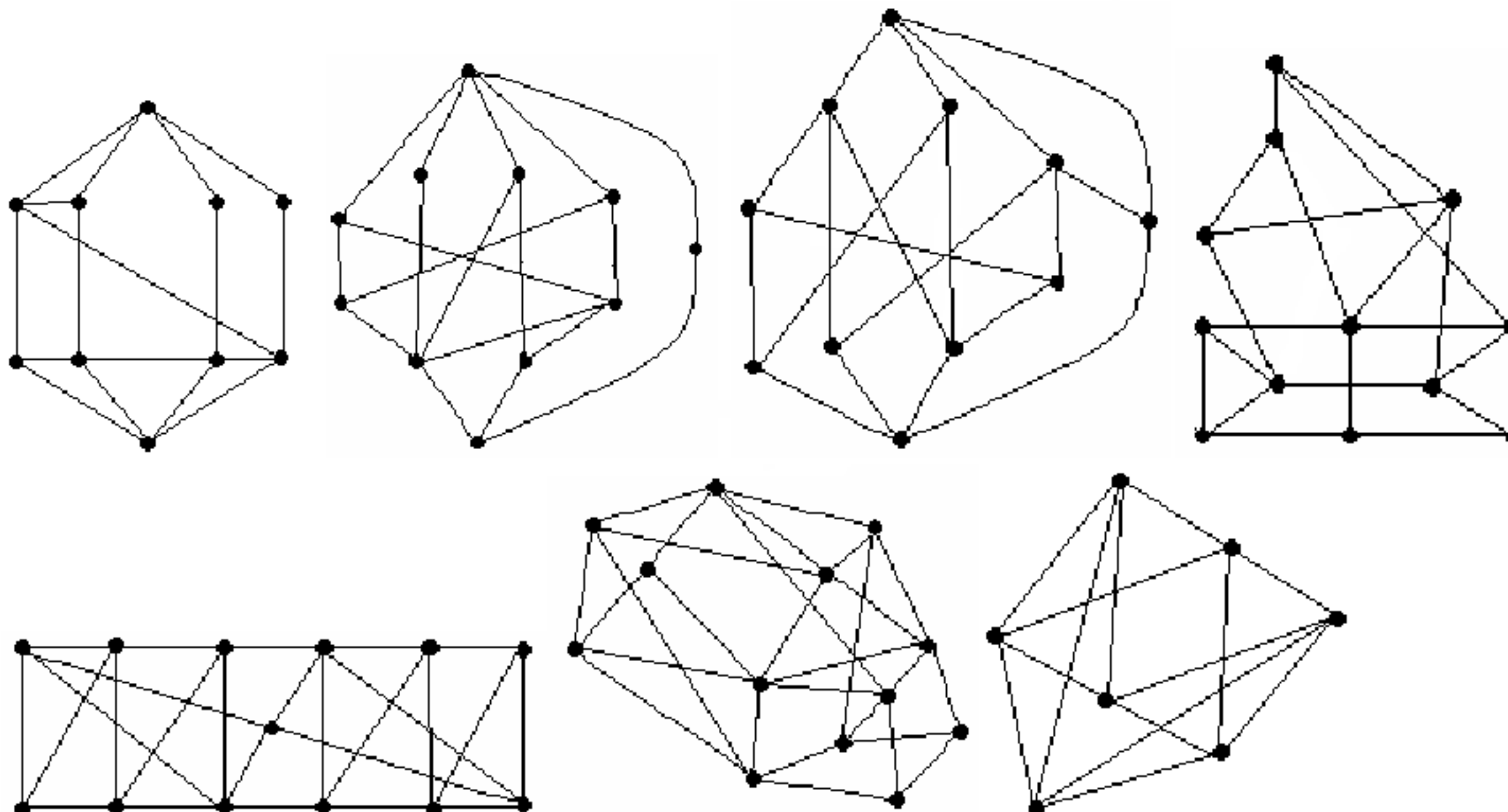
1. Выбрать произвольно некоторую вершину a .
2. Выбрать произвольно некоторое ребро u , инцидентное a , и присвоить ему номер 1 (назовем это ребро пройденным).
3. Каждое инцидентное ребро v выбрать и присвоить ему номер, на единицу больший номера предыдущего вычеркнутого ребра.
4. Находясь в вершине x , не выбирать ребро, соединяющее x с a , если имеется возможность иного выбора.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

5. Находясь в вершине x , не выбирать ребро, которое является перешейком (т.е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).
6. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода, ребер.

Задачи и упражнения:

1. Имеются ли в графе эйлеровы циклы?



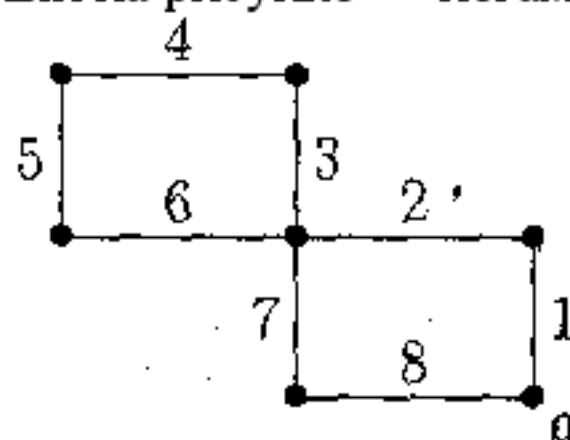
2. Имеют ли пятиугольник и пятигранник-пирамида с петлями в некоторых вершинах эйлеров цикл (цепь)?
3. Являются ли эйлеровыми графами: прямоугольник с главной диагональю, куб?

Практическая работа 67. Гамильтонов граф.

Цель. Изучить алгоритм построения гамильтонова цикла минимального веса и его приложения на практике.

Теоретическая часть.

Граф называется гамильтоновым, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам такой цикл также называется гамильтоновым. Гамильтоновой называется и простая цепь, содержащая все вершины графа. Очевидно, что любой граф, ребра которого образуют простой цикл, является гамильтоновым, а граф, показанный на рисунке — негамильтоновый.



Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее. Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновых циклов в связном неорграфе G без петель, имеющем $n \geq 3$ вершин:

Теорема Если для любых двух различных несмежных вершин a и b графа G выполняется условие $\deg a + \deg b \geq n$, то существует гамильтонов цикл, где $\deg(a)$ — степень (валентность) вершины.

Следствие Если для любой вершины a графа G выполнено условие $\deg a \geq n/2$, то существует гамильтонов цикл.

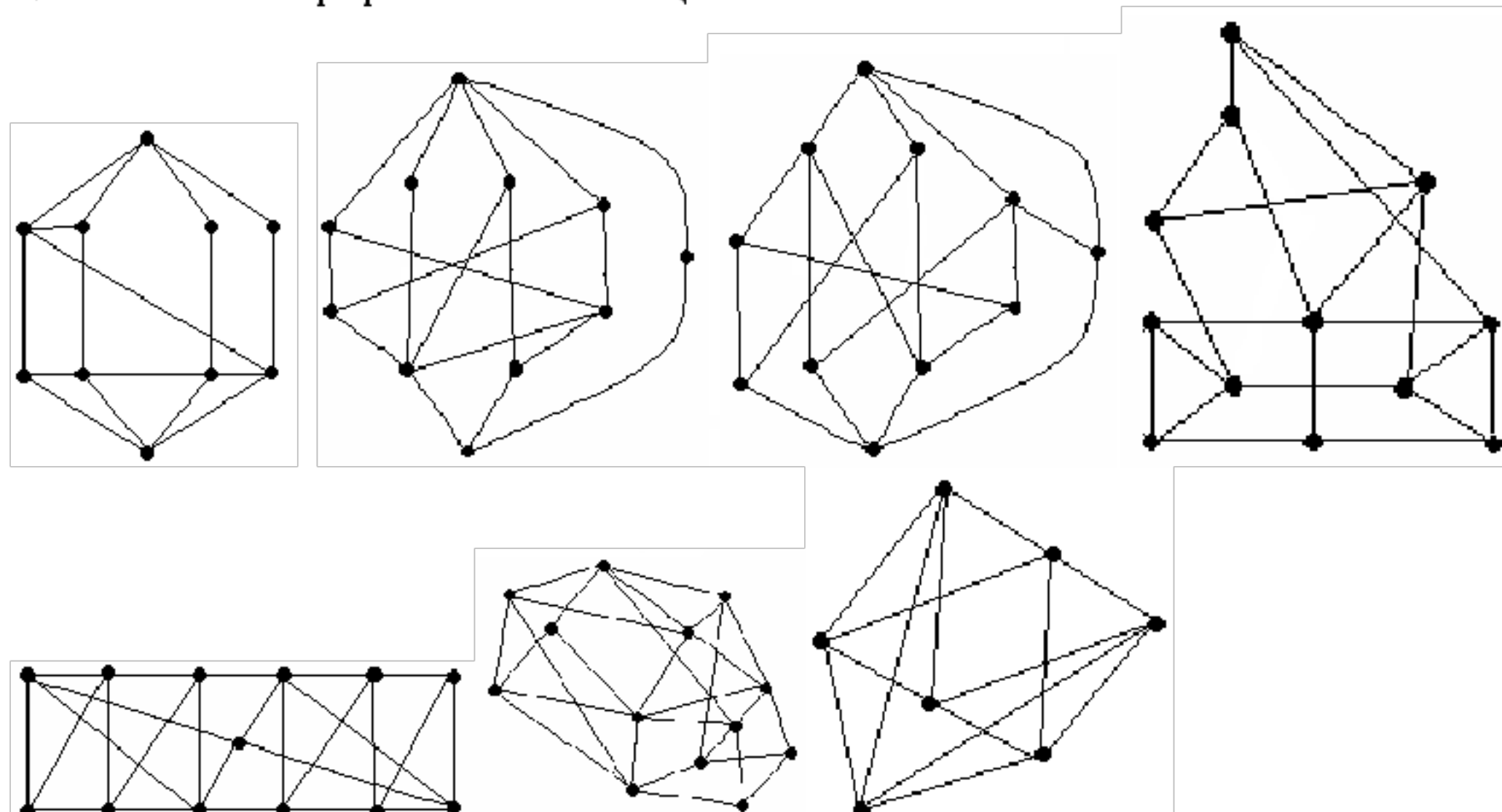
С задачей нахождения гамильтонова цикла связана задача коммивояжера.

Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит некоторое количество городов, расстояние между которыми задано. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходную точку. Если таких маршрутов много, требуется найти кратчайший из них. Минимальная достижимая задача выглядит так: требуется найти гамильтонов цикл минимального веса.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Задачи и упражнения:

1. Имеются ли в графе гамильтоновы циклы?



2. Применив алгоритм с возвратами, построить все гамильтоновы циклы для графа, образованного квадратом с пересекающимися диагоналями.

3. Укажите задачи, интерпретация которых состоит в необходимости построения гамильтоновых циклов.

Практическая работа 68. Алгоритм Форда – Беллмана нахождения минимального пути в нагруженном ориентированном графе.

Цель. Изучить алгоритм нахождения минимального пути в орграфе и возможности его практического применения.

Теоретическая часть.

Предполагается, что ориентированный граф не содержит контуров отрицательной длины.

Алгоритм Форда – Беллмана.

Основными вычисляемыми величинами этого алгоритма являются величины $l_i(k)$, где $i = 1, 2, \dots, n$ (n – число вершин графа); $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Для фиксированных i и k величина $l_i(k)$ равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины x_1 в вершину x_i и содержащего не более k дуг.

Шаг 1. Установка начальных условий.

Ввести число вершин графа n и матрицу весов $C = (c_{ij})$.

Шаг 2. Положить $k = 0$. Положить $l_i(0) = \infty$ для всех вершин, кроме x_1 ; положить $l_1(0) = 0$.

Шаг 3. В цикле по k , $k = 1, \dots, n - 1$, каждой вершине x_i на k -ом шаге приписать индекс $l_i(k)$ по следующему правилу:

$$l_i(k) = \min_{1 \leq j \leq n} \{l_j(k-1) + c_{ji}\}$$

для всех вершин, кроме x_1 , положить $l_1(k) = 0$.

В результате работы алгоритма формируется таблица индексов $l_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. При этом $l_i(k)$ определяет длину минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более k дуг.

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для любой вершины x_s предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения:

$$l_r(n-2) + c_{rs} = l_s(n-1), \quad x_r \in G^{-1}(x_s),$$

где $G^{-1}(x_s)$ – прообраз вершины x_s .

Для найденной вершины x_r предшествующая ей вершина x_q определяется из соотношения:

$$l_q(n-3) + c_{qr} = l_r(n-2), \quad x_q \in G^{-1}(x_r),$$

где $G^{-1}(x_r)$ – прообраз вершины x_r , и т. д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины x_i , найдем минимальный путь.

Пример: С помощью алгоритма Форда – Беллмана найти минимальный путь из вершины x_1 в

вершину x_3 на рисунке:

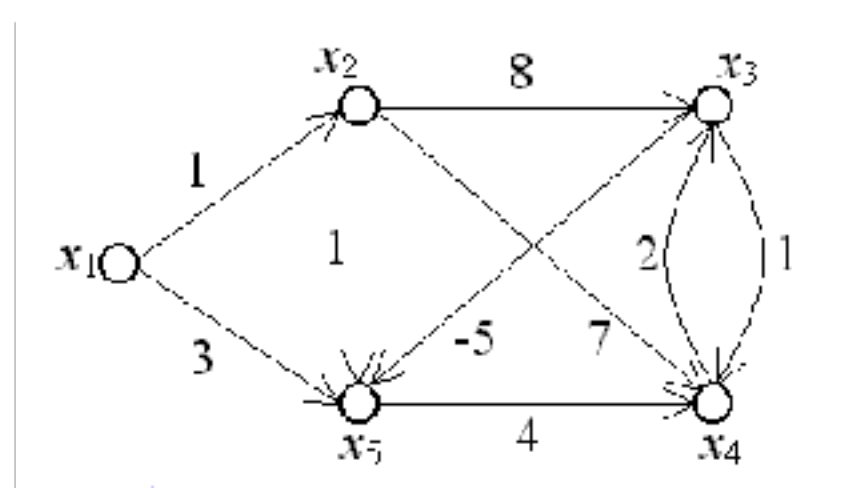
ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН

ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022



Рассмотрим подробно работу алгоритма Форда – Беллмана для этого примера. Значения индексов $i(k)$ будем заносить в таблицу индексов.

Шаг 1. Введем число вершин графа $n=5$. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Положим $k=0$, $i_1(0)=0$, $i_2(0)=i_3(0)=i_4(0)=i_5(0)=\infty$. Эти значения занесем в первый столбец таблицы.

Шаг 3.

$k=1$.

$$i_1(1)=0.$$

Для $k=1$:

$$i_i(1) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{i_j(0) + c_{ji}\}.$$

$$i_2(1) = \min \{i_1(0) + c_{12}; i_2(0) + c_{22}; i_3(0) + c_{32}; i_4(0) + c_{42}; i_5(0) + c_{52}\} = \min \{0 + 1; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 1.$$

$$i_3(1) = \min \{i_1(0) + c_{13}; i_2(0) + c_{23}; i_3(0) + c_{33}; i_4(0) + c_{43}; i_5(0) + c_{53}\} = \min \{0 + \infty; \infty + 8; \infty + \infty; \infty + 2; \infty + \infty\} = \infty.$$

$$i_4(1) = \min \{i_1(0) + c_{14}; i_2(0) + c_{24}; i_3(0) + c_{34}; i_4(0) + c_{44}; i_5(0) + c_{54}\} = \min \{0 + \infty; \infty + 7; \infty + 1; \infty + \infty; \infty + 4\} = \infty.$$

$$i_5(1) = \min \{i_1(0) + c_{15}; i_2(0) + c_{25}; i_3(0) + c_{35}; i_4(0) + c_{45}; i_5(0) + c_{55}\} = \min \{0 + 3; \infty + 1; \infty - 5; \infty + \infty; \infty + \infty\} = 3.$$

Полученные значения $i_i(1)$ занесем во второй столбец таблицы. Убеждаемся, что второй столбец, начиная со второго элемента, совпадает с первой строкой матрицы весов, что легко объясняется смыслом величин $i_i(1)$, которые равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более одной дуги.

$k=2$.

$$i_1(2)=0.$$

Для $k=2$:

$$i_i(2) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{i_j(1) + c_{ji}\}.$$

$$i_2(2) = \min \{0 + 1; 1 + \infty; \infty + \infty; \infty + \infty; 3 + \infty\} = 1.$$

$$i_3(2) = \min \{0 + \infty; 1 + 8; \infty + \infty; \infty + 2; 3 + \infty\} = 9.$$

$$i_4(2) = \min \{0 + \infty; 1 + 7; \infty + 1; \infty + \infty; 3 + 4\} = 7.$$

$$i_5(2) = \min \{0 + 3; 1 + 1; \infty - 5; \infty + \infty; 3 + \infty\} = 2.$$

Полученные значения $i_i(2)$ занесем в третий столбец таблицы. Величины $i_i(2)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более двух дуг.

$k=3$.

$$i_1(3)=0.$$

Для $k=3$:

$$i_i(3) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{i_j(2) + c_{ji}\}.$$

$$i_2(3) = \min \{0 + 1; 1 + \infty; 9 + \infty; 7 + \infty; 2 + \infty\} = 1.$$

$$i_3(3) = \min \{0 + \infty; 1 + 8; 9 + \infty; 7 + 2; 2 + \infty\} = 9.$$

$$i_4(3) = \min \{0 + \infty; 1 + 7; 9 + 1; 7 + \infty; 2 + 4\} = 6.$$

$$i_5(3) = \min \{0 + 3; 1 + 1; 9 - 5; 7 + \infty; 2 + \infty\} = 2.$$

Полученные значения $i_i(3)$ занесем в четвертый столбец таблицы. Величины $i_i(3)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более трех дуг.

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

$$i_1(4)=0.$$

Для $k = 4$:

$$i(4) = \min_{1 \leq j \leq 5} \{l_{ij}(3) + c_{ji}\}.$$

$$l_2(4) = \min\{0 + 1; 1 + \infty; 9 + \infty; 6 + \infty; 2 + \infty\} = 1.$$

$$l_3(4) = \min\{0 + \infty; 1 + 8; 9 + \infty; 6 + 2; 2 + \infty\} = 8.$$

$$l_4(4) = \min\{0 + \infty; 1 + 7; 9 + 1; 6 + \infty; 2 + 4\} = 6.$$

$$l_5(4) = \min\{0 + 3; 1 + 1; 9 - 5; 6 + \infty; 2 + \infty\} = 2.$$

Полученные значения $l_i(4)$ занесем в пятый столбец таблицы. Величины $l_i(4)$ равны длине минимального пути из первой вершины в i -ую, содержащего не более четырех дуг.

I (номер вершины)	$l_1(0)$	$l_1(1)$	$l_1(2)$	$l_1(3)$	$l_1(4)$
1	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1
3	∞	∞	9	9	8
4	∞	∞	7	6	6
5	∞	3	2	2	2

Шаг 5. Восстановление минимального пути.

Для последней вершины x_3 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 3$:

$$l_r(3) + c_{r3} = l_3(4), \quad x_r \in G^{-1}(x_3),$$

где $G^{-1}(x_3)$ - прообраз вершины x_3 .

$$G^{-1}(x_3) = \{x_2, x_4\}.$$

Подставим в последнее равенство последовательно $r = 2$ и $r = 4$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$l_2(3) + c_{23} = 1 + 8 \neq l_3(4) = 8,$$

$$l_4(3) + c_{43} = 6 - 2 = l_3(4) = 8.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_3 , является вершина x_4 .

Для вершины x_4 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 4$:

$$l_r(2) + c_{r4} = l_4(3), \quad x_r \in G^{-1}(x_4),$$

где $G^{-1}(x_4)$ - прообраз вершины x_4 .

$$G^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}.$$

Подставим последовательно $r = 2$, $r = 3$ и $r = 5$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$l_2(2) + c_{24} = 1 + 7 \neq l_4(3) = 6,$$

$$l_3(2) + c_{34} = 1 + 1 \neq l_4(3) = 6,$$

$$l_5(2) + c_{54} = 2 - 4 = l_4(3) = 6,$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_4 , является вершина x_5 .

Для вершины x_5 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 5$:

$$l_r(1) + c_{r5} = l_5(2), \quad x_r \in G^{-1}(x_5),$$

где $G^{-1}(x_5)$ - прообраз вершины x_5 .

$$G^{-1}(x_5) = \{x_1, x_2\}.$$

Подставим последовательно $r = 1$ и $r = 2$, чтобы определить, для какого r это равенство выполняется:

$$l_1(1) + c_{15} = 0 + 3 \neq l_5(2) = 2,$$

$$l_2(1) + c_{25} = 1 - 1 = l_5(2) = 2,$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_5 , является вершина x_2 .

Для вершины x_2 предшествующая ей вершина x_r определяется из соотношения, полученного при $s = 2$:

$$l_r(0) + c_{r2} = l_2(1), \quad x_r \in G^{-1}(x_2),$$

где $G^{-1}(x_2)$ - прообраз вершины x_2 .

$$G^{-1}(x_2) = \{x_1\}.$$

Подставим $r = 1$, чтобы определить, выполняется ли это равенство:

$$l_1(0) + c_{12} = 0 - 1 = l_2(1) = 1.$$

Таким образом, вершиной, предшествующей вершине x_2 , является вершина x_1 .

Итого минимальный путь — x_1, x_2, x_5, x_4, x_3 , его длина равна 8.

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Задачи и упражнения:
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

Дан список дуг с указанием их длин. Составьте по нему рисунок ориентированного графа. Найдите для этого графа наименьший путь от вершины-входа до вершины с максимальным номером.

1. $(0;1) - 3, (0;2) - 9, (1;2) - 5,$
 $(2;4) - 1, (1;3) - 8, (2;3) - 2,$
 $(3;5) - 4, (4;5) - 6.$
2. $(0;1) - 4, (0;2) - 5, (1;2) - 8,$
 $(2;4) - 3, (1;3) - 11, (2;3) - 5,$
 $(3;5) - 3, (4;5) - 6.$
3. $(0;1) - 3, (0;2) - 9, (1;2) - 12,$
 $(2;4) - 1, (1;3) - 2, (2;3) - 3,$
 $(3;5) - 10, (4;5) - 5.$
4. $(0;1) - 6, (0;2) - 2, (2;1) - 3,$
 $(2;4) - 6, (1;3) - 1, (2;3) - 5,$
 $(3;5) - 8, (4;5) - 7.$
5. $(0;1) - 6, (0;2) - 5, (1;2) - 1,$
 $(2;4) - 6, (1;3) - 7, (2;3) - 6,$
 $(3;5) - 8, (4;5) - 7.$
6. $(0;1) - 3, (0;2) - 2, (2;1) - 1,$
 $(2;5) - 3, (1;5) - 4, (5;4) - 8,$
 $(5;3) - 5, (3;4) - 3, (4;6) - 2,$
 $(3;6) - 4.$
7. $(0;1) - 10, (0;2) - 5, (2;1) - 4,$
 $(2;5) - 8, (1;5) - 3, (5;4) - 4,$
 $(5;3) - 2, (3;4) - 1, (4;6) - 5,$
 $(3;6) - 7.$
8. $(0;1) - 3, (0;2) - 2, (2;1) - 2,$
 $(2;5) - 12, (1;5) - 8, (5;4) - 2,$
 $(5;3) - 6, (3;4) - 1, (4;6) - 8,$
 $(3;6) - 3.$
9. $(0;1) - 2, (0;2) - 7, (2;1) - 1,$
 $(2;5) - 6, (1;5) - 12, (5;4) - 10,$
 $(5;3) - 5, (3;4) - 4, (4;6) - 2,$
 $(3;6) - 7.$
10. $(0;1) - 4, (0;2) - 2, (2;1) - 1,$
 $(2;5) - 7, (1;5) - 5, (5;4) - 4,$
 $(5;3) - 1, (3;4) - 4, (4;6) - 3,$
 $(3;6) - 7.$
11. $(0;2) - 2, (0;1) - 7, (2;1) - 4,$
 $(2;4) - 9, (1;3) - 3, (3;4) - 1,$
 $(4;6) - 2, (3;5) - 8, (6;5) - 4,$
 $(6;7) - 10, (5;7) - 5.$
12. $(0;2) - 10, (0;1) - 5, (2;1) - 1,$
 $(2;4) - 4, (1;3) - 3, (3;4) - 5,$
 $(4;6) - 3, (3;5) - 10, (6;5) - 10,$
 $(6;7) - 5, (5;7) - 1.$
13. $(0;2) - 4, (0;1) - 6, (2;1) - 4,$
 $(2;4) - 6, (1;3) - 3, (3;4) - 2,$
 $(4;6) - 4, (3;5) - 7, (6;5) - 3,$
 $(6;7) - 8, (5;7) - 5.$
14. $(0;2) - 3, (0;1) - 1, (2;1) - 4,$
 $(2;4) - 2, (1;3) - 6, (3;4) - 4,$
 $(4;6) - 3, (3;5) - 6, (6;5) - 4,$
 $(6;7) - 12, (5;7) - 7.$
15. $(0;2) - 8, (0;1) - 12, (2;1) - 3,$
 $(2;4) - 6, (1;3) - 5, (3;4) - 4,$
 $(4;6) - 10, (3;5) - 4, (6;5) - 6,$
 $(6;7) - 10, (5;7) - 6.$

Практическая работа 69. Задача нахождения критического пути в графе.

Цель. Изучить алгоритм нахождения критического пути и возможности его практического применения.

Теоретическая часть.

Задача нахождения критического, (т. е. длиннейшего) пути в графе — это задача, связанная с загрузкой станочного оборудования, сборки многозвенных изделий и т. д.

Сетевой график — необходимый элемент сложного производства, состоящего из нескольких связанных и зависящих друг от друга этапов. Выявление критического пути и временных резервов производства — основная задача, решаемая построением сетевого графика. Такие задачи могут быть представлены в виде графа и в виде отображающей его таблицы. Для нахождения критического пути (последовательности этапов работы, определяющих длительность всего проекта и не имеющих резерва по времени) применяются вычислительные методы. Одним из таких методов является табличный метод и применяется для данных, представленных в виде таблицы.

Проблема автоматизации расчёта сетевого графика является достаточно актуальной и важной. Вычисление критического пути с помощью ЭВМ поможет в несколько раз ускорить этот процесс, а при больших графиках — во много раз. Поэтому автоматизация расчёта сетевого графика может иметь большую практическую пользу.

Алгоритм нахождения длиннейшего пути в графе похож на алгоритм нахождения кратчайшего пути в графе. Вместо кратчайших ребер в алгоритме нахождения кратчайшего пути выбираются длиннейшие.

Пусть требуется найти такой путь на графе, который бы имел максимальную длину по сравнению со всеми возможными путями для данного графа. Пусть существует ориентированный граф без циклов G .

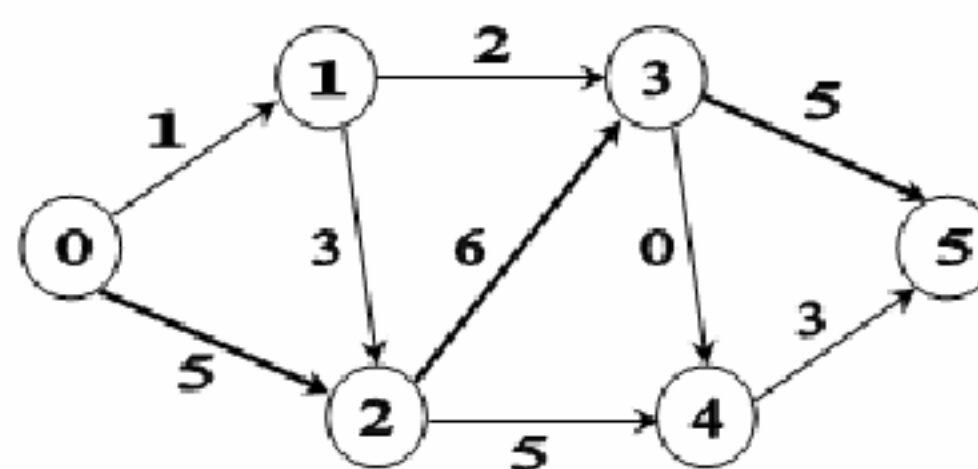
Рёбра графа — выполнение работы. Рёбра имеют длину, обозначающую продолжительность работы и направление, обозначающее последовательность выполнения работы. Вершины — это факт начала и

окончания работ
ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022



Для каждого события I определим наиболее ранний срок его наступления $TP(I)$ по следующему правилу:

1) $TP(0)=0$;

2) для $I > 0$ $TP(I)$ равно продолжительности самого длинного $(0, I)$ -пути.

Значения $TP(I)$ определяют последовательно, переходя от источника к стоку. Так, для рассматриваемого примера находим:

$TP(0) = 0, TP(1) = 1, TP(2) = 5, TP(3) = 11, TP(4) = 11, TP(5) = 16$.

Эти значения находятся из соотношения: $TP(I) = \max \{ TP(K) + T_{ki} \}$,

т. е. для всех дуг (K, I) , для которых I является концом, необходимо вычислить $TP(K) + T_{ki}$ и выбрать наибольшее значение.

Итак, в нашем примере время выполнения проекта равно 16. Чтобы получить критический путь, будем передвигаться в обратном направлении, от стока к источнику, по тем ребрам (K, I) , которые определяли значения $TP(I)$, т. е. для которых выполняется равенство $TP(I) - T_{ki} = TP(K)$. В примере это ребра: $(3, 5); (2, 3); (2, 1)$. Таким образом, $(1, 2, 3, 5)$ - критический путь.

Задачи и упражнения:

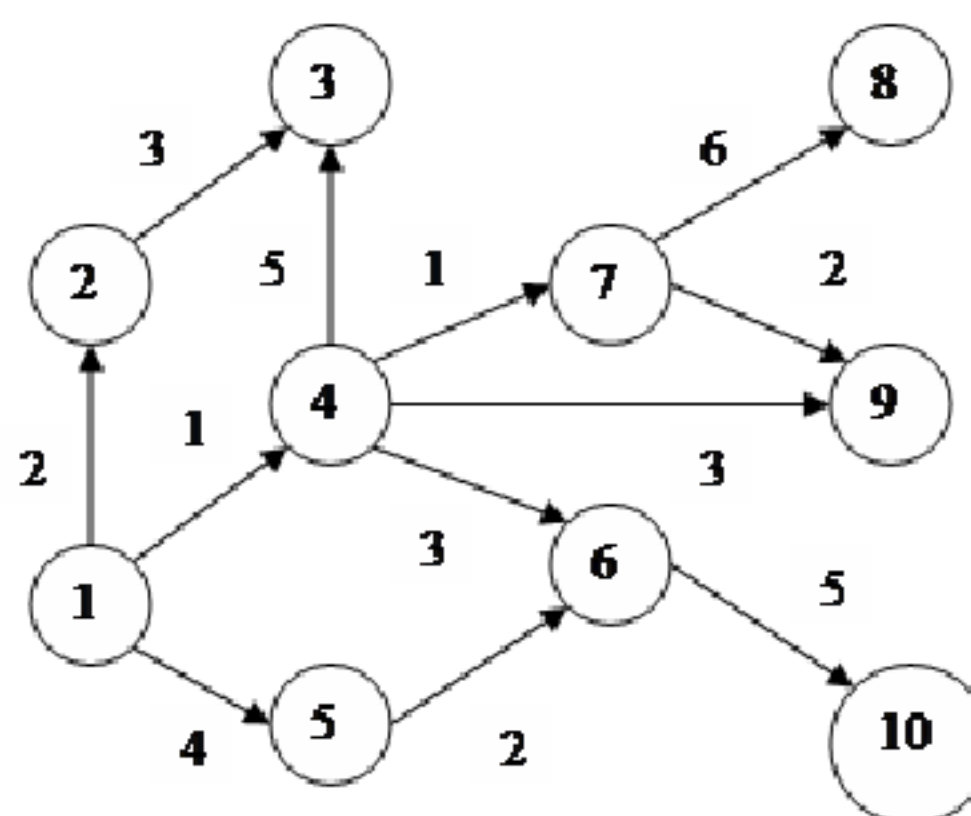
1. При составлении проекта работ выделено 8 событий: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, которые связаны работами $(i - j)$, где $i, j = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$ и $i \neq j$, например, событие 1 связано с событием 2 работой $(1-2)$.

Исходные данные по продолжительности работ:

Работа	0-1	0-2	0-3	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	2-5	3-4	3-5	4-5	4-6	5-6	5-7	6-7
Длит. дни	8	12	10	8	10	4	10	6	8	12	5	8	6	6	7	5

Требуется определить критический путь и время выполнения проекта.

2. Определить критический путь в графе:



Практическая работа 70. Построение минимального остовного дерева нагруженного графа

Цель. Изучение алгоритма построения минимального остовного дерева нагруженного графа.

Теоретическая часть.

Граф $G = (X, A)$ называется нагруженным, если для каждого ребра (x_i, x_j) определена его длина (или вес) c_{ij} .

Пусть G - связный нагруженный граф. Задача построения минимального остовного дерева заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа

а) Изучение путей в сетях железнодо

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

б) Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального остовного дерева можно решить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм Краскала.

Шаг 1. Установка начальных значений.

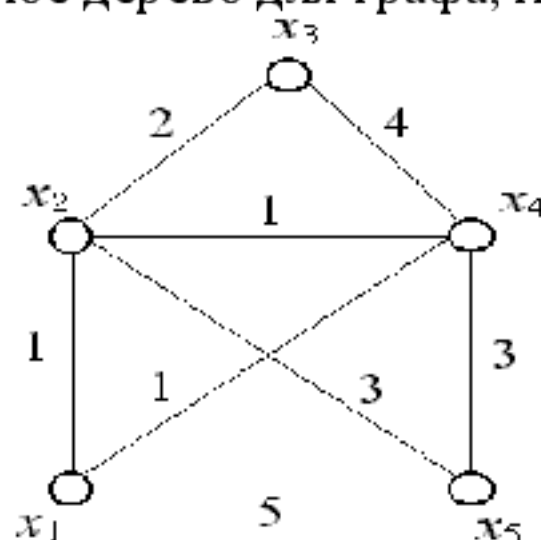
Вводится матрица длин ребер C графа G .

Шаг 2. Выбрать в графе G ребро минимальной длины. Построить граф G_2 , состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Положить $i = 2$.

Шаг 3. Если $i = n$, где n - число ребер графа, то закончить работу (задача решена), в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Построить граф G_{i+1} , добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G , каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G , не содержащейся в G_i . Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} инцидентную ему вершину, не содержащуюся в G_i . Присваиваем $i := i + 1$ и переходим к шагу 3.

Например, найдем минимальное остовное дерево для графа, изображенного ниже.



Шаг 1. Установка начальных значений.

Введем матрицу длин ребер C :

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 5 & \infty \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 3 \\ \infty & 2 & \infty & 4 & \infty \\ 5 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ \infty & 3 & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Выберем ребро минимальной длины. Минимальная длина ребра равна единице. Таких ребер три: (x_1, x_2) , (x_1, x_4) , (x_2, x_4) . В этом случае можно взять любое. Возьмем (x_1, x_2) . Построим граф G_2 , состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин x_1 и x_2 . Положим $i = 2$.

Шаг 3. Так как $n = 5$, то $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_3 , добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G , каждое из которых инцидентно одной из вершин x_1, x_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G , не содержащейся в G_2 т. е. одной из вершин x_3, x_4, x_5 . Таким образом, нужно выбрать ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_4) , (x_1, x_5) , (x_2, x_3) , (x_2, x_4) , (x_2, x_5) . Таких ребер длины единица два: (x_1, x_4) и (x_2, x_4) . Можно выбрать любое. Возьмем (x_1, x_4) . Вместе с этим ребром включаем в G_3 вершину x_4 , не содержащуюся в G_2 . Полагаем $i = 3$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_4 , добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5) , (x_2, x_3) , (x_2, x_5) , (x_4, x_5) . Такое ребро длины два одно: (x_2, x_3) . Вместе с этим ребром включаем в G_4 вершину x_3 , не содержащуюся в G_3 . Полагаем $i = 4$ и переходим к шагу 3.

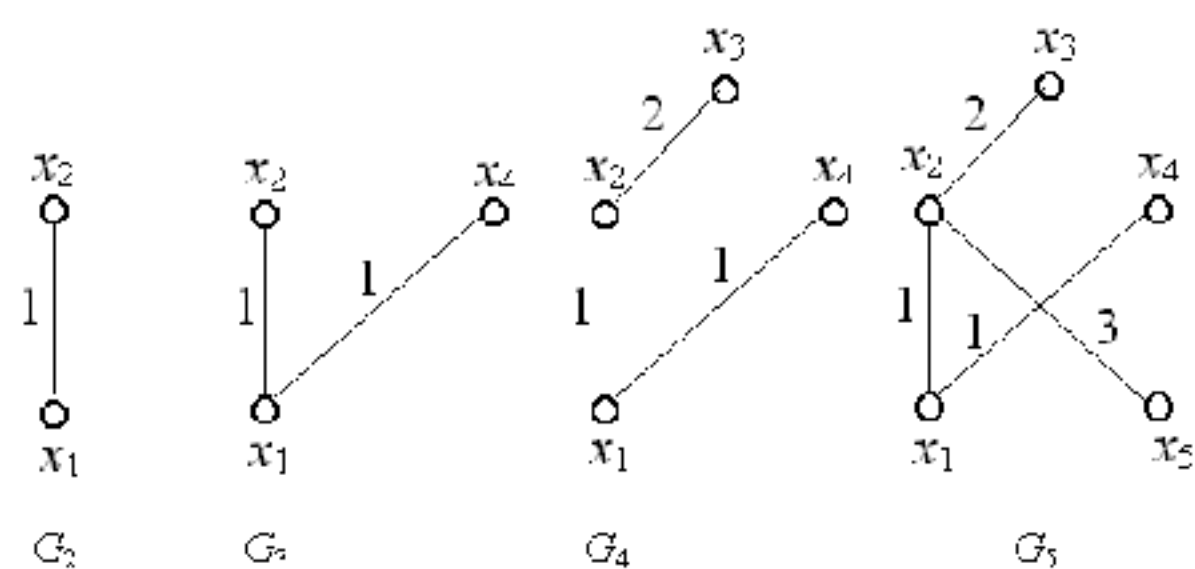
Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_5 , добавляя к графу G_4 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5) , (x_2, x_5) , (x_4, x_5) . Таких ребер длины три два: (x_2, x_5) и (x_4, x_5) . Возьмем (x_2, x_5) . Вместе с этим ребром включаем в G_5 вершину x_5 , не содержащуюся в G_4 . Полагаем $i = 5$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i = n$, то граф G_5 - искомое минимальное остовное дерево. Суммарная длина ребер равна $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Процесс построения минимального остовного дерева изображен на рисунке.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	



Задачи и упражнения:

Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.

Варианты заданий

- 1.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & 6 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 20 & 14 \\ 12 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & \infty & 10 & 12 \\ 20 & 4 & 10 & \infty & 6 \\ 14 & 6 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}$
- 2.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$
- 3.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix}$
- 4.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 6 \\ 1 & 5 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 11 & 7 \\ 7 & \infty & 3 & \infty & 4 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 5 \\ 11 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$
- 5.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 5 \\ 2 & \infty & 8 & \infty & 7 \\ \infty & 8 & \infty & 10 & 1 \\ 5 & \infty & 10 & \infty & 13 \\ 5 & 7 & 1 & 13 & \infty \end{pmatrix}$

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

5.1.1. Перечень основной литературы:

1. Зарипова, Э. Р. Лекции по дискретной математике. Математическая логика: учебное пособие / Э. Р. Зарипова, М. Г. Кокотчикова, Л. А. Севастьянов. — Москва : Российский университет дружбы народов, 2014. — 120 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22190.html>

2. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 287 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28244.html>

5.1.2. Перечень дополнительной литературы:

1. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. — Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13115.html>

2. Казаков В.Г. Планирование экспериментальных исследований и статистическая обработка данных. Основы научных исследований в промышленной теплоэнергетике : учебное пособие / Казаков В.Г., Громова Е.Н.. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2020. — 85 с. — Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru/118407.html>

5.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Дополнительные главы математики»

2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики»

5.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://el.ncfu.ru/> – система управления обучением ФГАОУ ВО СКФУ. Дистанционная поддержка дисциплины «Математика».

2. <http://www.mathnet.ru> - общероссийский портал Math-Net.Ru

3. <https://www.mathedu.ru> - электронная библиотека по математике.

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания
по организации самостоятельной работы
по дисциплине
«Дополнительные главы математики»
направления подготовки
13.03.02 - Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск
2022

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Цель и задачи самостоятельной работы	4
3. Технологическая карта самостоятельной работы студента	5
4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом	6
<i>4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой</i>	6
<i>4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям</i>	7
<i>4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний</i>	8
5. Контроль самостоятельной работы студентов	8
6. Список литературы	9

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.
2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.
3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.
4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.
5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Дополнительные главы математики» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ	
Сертификат:	12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец:	Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022	

Самостоятельная работа студента по дисциплине «Дополнительные главы математики» направлена на формирование следующих компетенций:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ПК-2: Способен анализировать режимы работы систем электроснабжения объектов	ИД-5 _{ПК-2} Применяет инженерно-технические расчеты для решения задач профессиональной деятельности	Способен применять инженерно-технические расчеты для решения задач профессиональной деятельности

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора профессиональных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ПК-2	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	4,86	0,54	5,4
ПК-2	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-6	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	19,44	2,16	21,6
Итого за 1 семестр			24,3	2,7	27
2 семестр					
ПК-2	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	4,32	0,48	4,8
ПК-2	Самостоятельное изучение литературы по темам 7-11	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	22,68	2,52	25,2
Итого за 2 семестр			27	3	30
3 семестр					
ПК-2	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	4,86	0,54	5,4
ПК-2	Самостоятельное изучение литературы по темам 12-16	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	19,44	2,16	21,6
Итого за 3 семестр			24,3	2,7	27
4 семестр					
ПК-2	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	4,86	0,54	5,4

Документ подписан
Электронной подписью
Идентификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Подписатель: Шебзухова Татьяна Александровна
Дата: 20.08.2024

Комплект заданий и вопросов по

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

		разделам дисциплины			
ПК-2	Самостоятельное изучение литературы по темам 17-31	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	19,44	2,16	21,6
Итого за 4 семестр			24,3	2,7	27
Итого			99,9	11,1	111

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

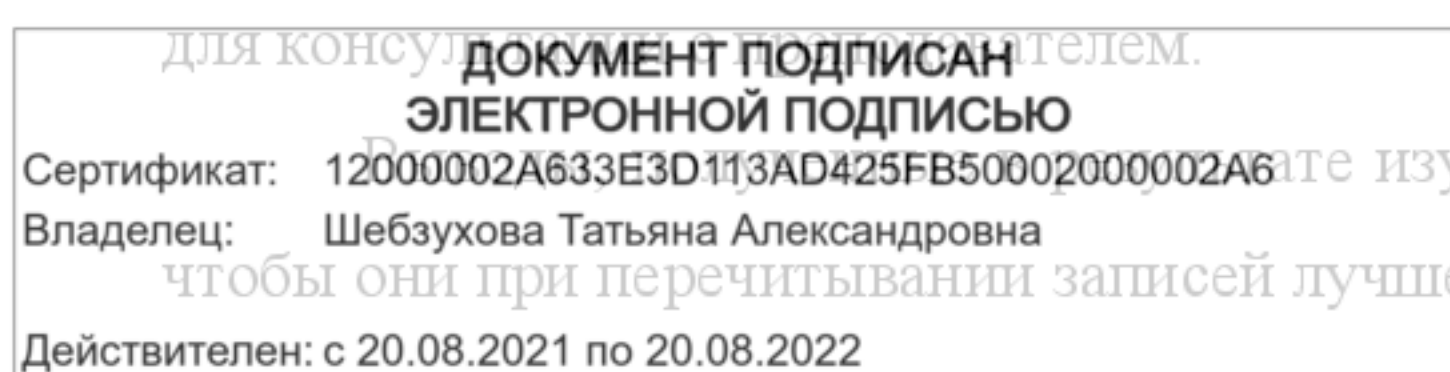
Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом



Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста:**

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

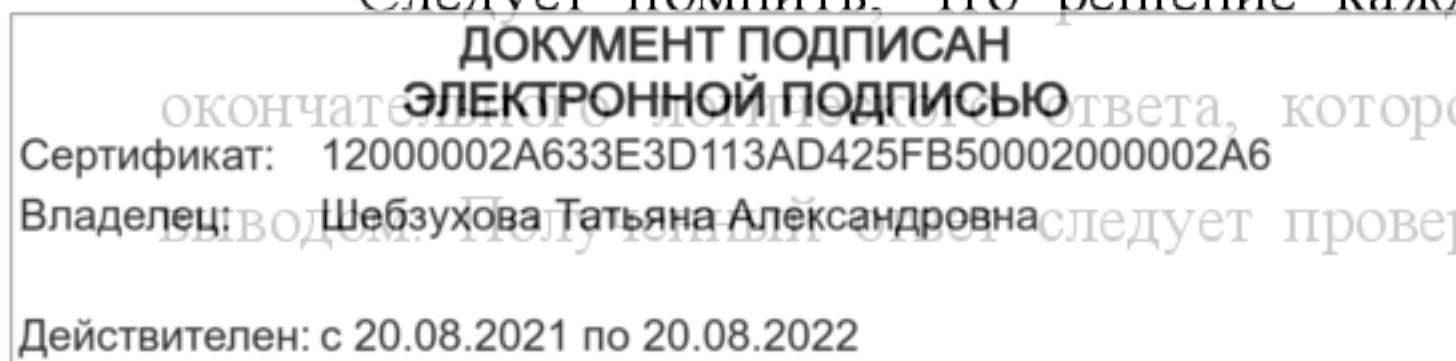
аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки теории.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до



данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5. Контроль самостоятельной работы студентов

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль

Рейтинговая оценка знаний студента

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1.	Практическая работа 4	4 неделя	15
2.	Практическая работа 9	9 неделя	20
3.	Практическая работа 14	14 неделя	20
	Итого за 1 семестр		55
1.	Практическая работа 8	8 неделя	25
2.	Практическая работа 14	14 неделя	30
	Итого за 2 семестр		55
1.	Практическая работа 4	4 неделя	15
2.	Практическая работа 9	9 неделя	20
3.	Практическая работа 16	16 неделя	20
	Итого за 3 семестр		55
1.	Практическая работа 4	4 неделя	15
2.	Практическая работа 9	9 неделя	20
3.	Практическая работа 15	15 неделя	20
	Итого за 4 семестр		55

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6
 Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна
 Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

1.Зарипова, Э. Р. Лекции по дискретной математике. Математическая логика: учебное пособие / Э. Р. Зарипова, М. Г. Кокотчикова, Л. А. Севастьянов. — Москва : Российский университет дружбы народов, 2014. — 120 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22190.html>

2.Гусак, А. А. Теория вероятностей. Примеры и задачи [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Гусак, Е. А. Бричкова. — Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2013. — 287 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28244.html>

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Г. П. Климов. — Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. — 368 с. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/13115.html>

2.Казаков В.Г. Планирование экспериментальных исследований и статистическая обработка данных. Основы научных исследований в промышленной теплоэнергетике : учебное пособие / Казаков В.Г., Громова Е.Н.. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2020. — 85 с. — Режим доступа: <https://www.iprbookshop.ru/118407.html>

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 12000002A633E3D113AD425FB50002000002A6

Владелец: Шебзухова Татьяна Александровна

Действителен: с 20.08.2021 по 20.08.2022