МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск 2025 г.

Содержание

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

Задачи освоения дисциплины: формирование у студентов целостного представления о моделировании как методе познания окружающего мира; изучение принципов построения математических моделей в задачах исследования физических процессов, а также проектирования и управления техническими объектами.

2. Оборудование и материалы

Аппаратные средства: переносной ноутбук, проектор, интерактивная доска.

Учебная аудитория для проведения учебных занятий, оснащена оборудованием и техническими средствами обучения.

3 Наименование практических работ

Для студентов очно-заочной формы обучения предусмотрены Практическая работа №2. Законы Ома и Кирхгофа. Метод контурных токов. Практическая работа №3. Метод узловых потенциалов Потенциальная диаграмма. Энергетический баланс в электрической цепи.

№ темы дисциплины	**Наименование тем дисциплины, их краткое содержание**	**Обьем часов**	**Из них практическая подготовка, часов**
2 семестр			
1.	**Практическая работа №1**. Граф электрической цепи и некоторые его подграфы	2	
2.	**Практическая работа №2**. Законы Ома и Кирхгофа. Метод контурных токов.	4	4
3.	**Практическая работа №3**. Метод узловых потенциалов Потенциальная диаграмма. Энергетический баланс в электрической цепи	4	
4.	**Практическая работа №4**. Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Формы представления.	2	
5.	**Практическая работа №5**. Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом	2	
6.	**Практическая работа №6**. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого и второго порядка.	2	
	Итого	**16**	

4. Содержание практических работ

Практическая работа №1

Граф электрической цепи и некоторые его подграфы.

Цель: Изучить основы теории графов и ее применение к электрическим цепям. Получить навыки построения графов электрической цепи.

Основы теории:

В теории электрических цепей используются понятия и методы топологии – математической дисциплины, изучающей наиболее общие свойства геометрических фигур. Именно конфигурация цепи (порядок соединения между собой устройств цепи, ее геометрический образ) содержит полезную информацию о некоторых общих свойствах цепи безотносительно к содержанию ее устройств.

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называют графом электрической цепи. Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называют ветвью графа. Граничные (концевые) точки ветви графа называют узлами графа. Узел – место соединения трех и более ветвей.

Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называют ориентированным.

Ветвью называется участок цепи, обтекаемый одним и тем же током.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь. Поэтому целесообразно каждую ветвь схемы электрической цепи изобразить отрезком линии. Если каждую ветвь схем на рисунке 1.1 заменить отрезком линии, получается геометрическая фигура, показанная на рисунке 1.2.

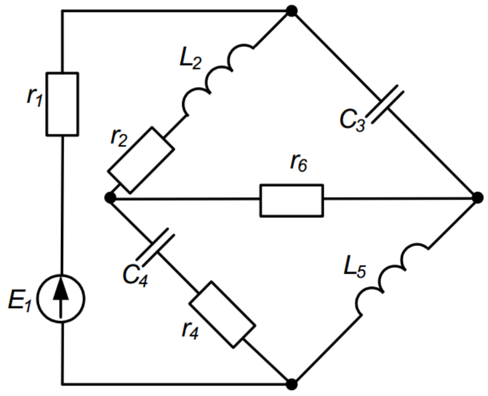


Рисунок 1.1 – Схема электрической цепи

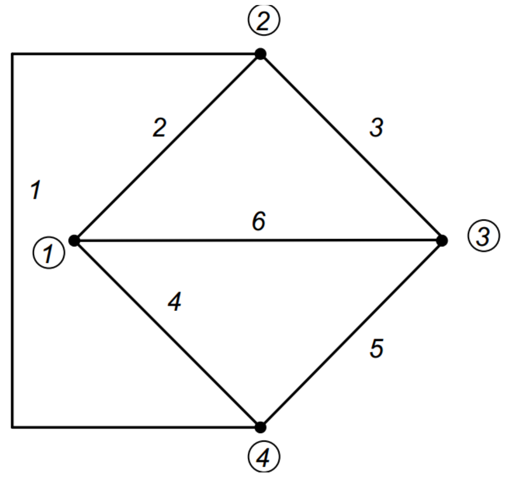


Рисунок 1.2 – Граф электрической цепи

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называется графом электрической цепи. При этом следует помнить, что ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь соединенных различным образом.

Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называется ветвью графа. Граничные точки ветви графа называют узлами графа. Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называется ориентированным.

Подграфом графа называется часть графа, т.е. это может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в графе.

В теории электрических цепей важное значение имеют следующие подграфы:

Путь – это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются на этом пути только один раз. Например, в схеме на рисунке 1.3 ветви *2-6-5; 4-5; 3-6-4; 1* образуют пути между одной и той же парой узлов *1* и *3*. Таким образом, путь – это совокупность ветвей, проходимых непрерывно.

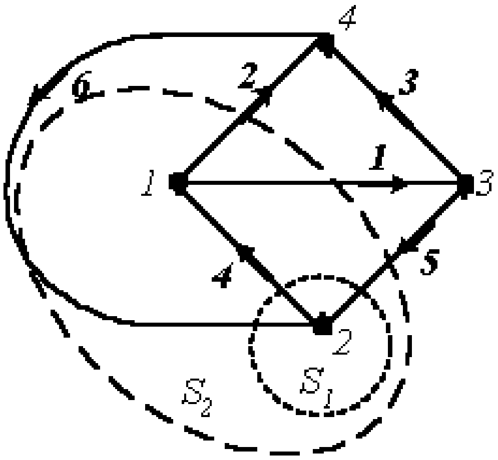


Рисунок 1.3 – Граф электрической цепи

Контур – это замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, для графа (рисунок 1.3) можно определить контуры, образованные ветвями *2-4-6; 3-5-6; 2-3-5-4*. Если между любой парой узлов графа существует связь, то граф называют связным.

Дерево – это связный подграф, содержащий все узлы графа, но ни одного контура. Примерами деревьев для графа (рисунок 1.3) могут служить фигуры на рисунке 1.4:

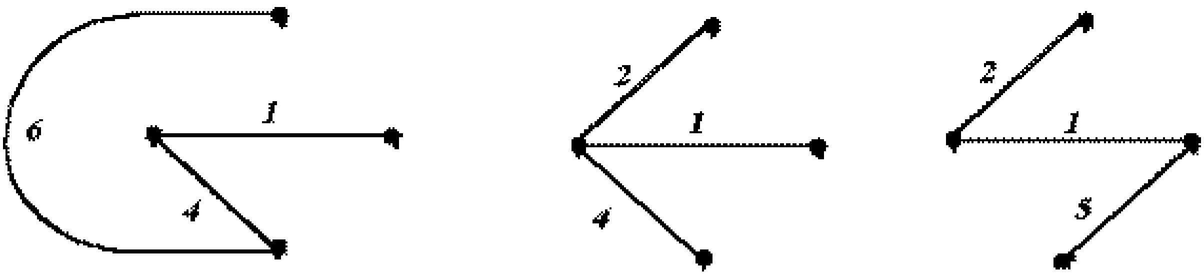


Рисунок 1.4 – Деревья графа

Ветви связи (дополнения дерева) – это ветви графа, дополняющие дерево до исходного графа.

Если граф содержит m узлов и n ветвей, то число ветвей любого дерева $\partial = m - 1$, а числа ветвей связи графа $c = n - (m - 1) = n - m + 1.$

Сечение графа – множество ветвей, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие ветви. Примерами таких поверхностей являются S_1 и S_2 для графа (рисунок 1.3). При этом получаем соответственно сечения, образованные ветвями *6-4-5* и *6-2-1-5*.

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и сечений:

- главный контур – контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи;
- главное сечение – сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева.

Топологические матрицы

Задать вычислительной машине топологию цепи рисунком затруднительно, так как не существует эффективных программ распознавания образа. Поэтому топологию цепи вводят в ЭВМ в виде матриц, которые называют топологическими матрицами. Выделяют три таких матрицы: узловую матрицу, контурную матрицу и матрицу сечений.

1. Узловая матрица (матрица соединений) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы.

Для графа на рисунке 1.3 имеем число узлов $m=4$ и число ветвей $n=6$. Тогда запишем матрицу A_H, принимая, что элемент матрицы a_{ij} (i –номер строки; j – номер столбца) равен $(+1)$, если ветвь j соединена с узлом i и ориентирована от него, (-1), если ориентирована к нему, и 0, если ветвь j не соединена с узлом i .

Сориентировав ветви графа на рисунке 1.3, получим

$$A_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Данная матрица A_H записана для всех четырех узлов и называется неопределенной. Сумма элементов столбцов матрицы A_H всегда равна нулю, так как каждый столбец содержит один элемент *+1* и один элемент *-1*, остальные нули.

Обычно при расчетах один (любой) узел заземляют. Тогда приходим к узловой матрице *A* (редуцированной матрице), которая может быть получена из матрицы A_H путем вычеркивания любой ее строки.

Например, при вычеркивании строки «4» получим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Число строк матрицы *A* равно числу независимых уравнений для узлов $\partial = m - 1$, т.е. числу уравнений, записываемых для электрической схемы по первому закону Кирхгофа. Итак, введя понятие узловой матрицы *A*, перейдем к первому закону Кирхгофа.

Вопросы и задания к собеседованию:

1. Сформулируйте основные топологические понятия для электрических цепей.
2. Что такое узловая матрица?
3. Что такое контурная матрица?
4. Что такое матрица сечений?

Практическая работа №2

Законы Ома и Кирхгофа. Метод контурных токов.

Цель: Изучить основные правила расчета электрических цепей постоянного тока с использованием законов Ома и Кирхгофа и метода контурных токов.

Основы теории:

Обычно первый закон Кирхгофа записывается для узлов схемы, но, строго говоря, он справедлив не только для узлов, но и для любой замкнутой поверхности, т.е. справедливо соотношение

$$\oint \overline{\delta} d\overline{S} = 0 \qquad (1.1)$$

где $\overline{\delta}$- вектор плотности тока; $d\overline{S}$- нормаль к участку dS замкнутой поверхности S.

Первый закон Кирхгофа справедлив и для любого сечения.

В частности, для сечения S_2 графа на рисунке 1.3, считая, что нумерация и направления токов в ветвях соответствуют нумерации и выбранной ориентации ветвей графа, можно записать

$$I_1 + I_2 - I_5 - I_6 = 0.$$

Поскольку в частном случае ветви сечения сходятся в узле, то первый закон Кирхгофа справедлив и для него. Пока будем применять первый закон Кирхгофа для узлов, что математически можно записать, как:

$$\sum_k I_k = 0 \qquad (1.2)$$

т.е. алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узел, равна нулю.

При этом при расчетах уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m\text{-}1)$ узлов, так как при записи уравнений для всех m узлов одно (любое) из них будет линейно зависимым от других, т.е. не дает дополнительной информации.

Введем столбцовую матрицу токов ветвей

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Тогда первый закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид:

$$AI=O \tag{1.3}$$

– где O - нулевая матрица-столбец.

Как видим, в качестве узловой взята матрица A, а не A_H, т.к. с учетом вышесказанного уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для $(m\text{-}1)$ узлов.

В качестве примера запишем для схемы на рисунке 1.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда для первого узла получаем

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = I_1 + I_2 - I_4 = 0,$$

что и должно иметь место.

Контурная матрица (матрица контуров) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки контурной матрицы B соответствуют контурам, а столбцы – ветвям схемы.

Элемент b_{ij} матрицы B равен *1*, если ветвь j входит в контур i и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура, *-1*, если не совпадает с направлением обхода контура, и *0*, если ветвь j не входит в контур i.

Матрицу B, записанную для главных контуров, называют матрицей главных контуров. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура. Выделив в нашем примере (см. рисунок 1.5) дерево, образуемое ветвями *2-1-4*, запишем коэффициенты для матрицы B.

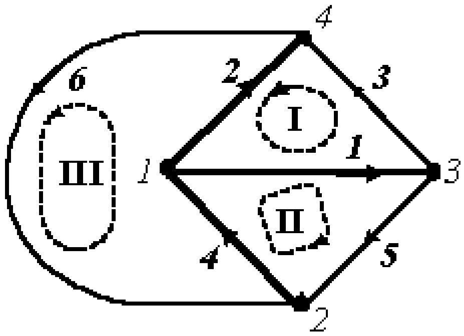


Рисунок 1.5 – Граф электрической цепи

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перейдем теперь ко второму закону Кирхгофа.

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимается разность потенциалов между крайними точками этого участка, т.е.

$$U_{ke} = \varphi_k - \varphi_e = -(\varphi_e - \varphi_k) = -U_{ke} \qquad (1.4)$$

Просуммируем напряжения на ветвях некоторого контура:

$$\begin{array}{l} \quad U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \\ + \\ \quad U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 \\ + \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \\ \quad U_{kI} = \varphi_k - \varphi_I \\ \hline \qquad\qquad\qquad = 0 \end{array}$$

Поскольку при обходе контура потенциал каждой i-ой точки встречается два раза, причем один раз с «+», а второй – с «–», то в целом сумма равна нулю.

Таким образом, второй закон Кирхгофа математически записывается, как:

$$\sum_k U_k = 0, \qquad (1.5)$$

и имеет следующую формулировку: алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей (элементов) контура равна нулю. При этом при расчете цепей с использованием законов Кирхгофа записывается $c = (n - m + 1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа, т.е. уравнений, записываемых для контуров, каждый из которых отличается от других хотя бы одной ветвью. Значение топологического понятия «дерева»: дерево позволяет образовать независимые контуры и сечения и, следовательно, формировать независимые уравнения по законам Кирхгофа. Таким образом, с учетом *(m-1)* уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, получаем систему из $(m-1) + (n - m + 1) = n$ уравнений, что равно числу ветвей схемы и, следовательно, токи в них находятся однозначно.

Введем столбцовую матрицу напряжений ветвей

$$U=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Тогда второй закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид

$$BU = 0. \qquad (1.6)$$

В качестве примера для схемы рисунка 1.5 имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = [0],$$

откуда, например, для первого контура получаем

$$1 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 + 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 + 0 \cdot U_5 + 0 \cdot U_6 = U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

что и должно иметь место.

Если ввести столбцовую матрицу узловых потенциалов

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{m-1} \end{bmatrix}$$

причем потенциал последнего узла $\varphi_m = 0$, то матрица напряжений ветвей и узловых потенциалов связаны соотношением

$$U = A^T \varphi \qquad (1.7)$$

где A^T - транспонированная узловая матрица.

Для определения матрицы B по известной матрице $A = A_Д A_C$, где $A_Д$ – подматрица, соответствующая ветвям некоторого дерева, A_C- подматрица, соответствующая ветвям связи, может быть использовано соотношение $B = (-A^T_C A^{-1T}_Д 1)$.

Матрица сечений – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для сечений. Ее строки соответствуют сечениям, а столбцы – ветвям графа.

Матрица Q , составленная для главных сечений, называется матрицей главных сечений. Число строк матрицы Q равно числу независимых сечений.

Элемент q_{ij} матрицы Q равен *1*, если ветвь входит в i-е сечение и ориентирована согласно направлению сечения (за положительное направление сечения принимают направление ветви дерева, входящей в него), *-1*, если ориентирована противоположно направлению сечения, и *0*, если ветвь*j* не входит в *i*-е сечение.

В качестве примера составим матрицу *Q* главных сечений для графа на рисунке 1.5.

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

В заключение отметим, что для топологических матриц *A*, *B* и *Q*, составленных для одного и того же графа, выполняются соотношения

$$AB^T = 0; \qquad (1.8)$$

$$QB^T = 0, \qquad (1.9)$$

которые, в частности, можно использовать для проверки правильности составления этих матриц. Здесь ***0*** – нулевая матрица порядка ∂.

Приведенные уравнения позволяют сделать важное заключение: зная одну из топологических матриц, по ее структуре можно восстановить остальные.

Метод контурных токов состоит в том, что в качестве неизвестных в системе уравнений цепи используются так называемые контурные токи. Контурные токи являются фиктивными.

Согласно методу предполагается, что в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток.

Независимыми называются контуры, которые имеют хотя бы одну новую ветвь, не входящую в другие контуры.

Число независимых контуров схемы равно числу уравнений, которые нужно составить по второму закону Кирхгофа:

$$n = N_B - (N_Y - 1) - N_T, \qquad (2.1)$$

где N_B – число ветвей схемы; N_Y – число узлов; N_T – число источников тока.

В схеме, представленной на рисунке 2.1, число независимых контуров $n = 3$ Предположение о контурных токах приводит к тому, что число неизвестных, и, соответственно, число уравнений, необходимых для определения этих неизвестных уменьшается по сравнению с полной системой уравнений Кирхгофа и равно числу независимых контуров. Этот метод является фактически записью второго закона Кирхгофа через контурные токи.

Пусть имеем схему, содержащую n независимых контуров. Согласно методу контурных токов в каждом *k-м* независимом контуре протекает контурный ток I_{KK} . В общем случае система уравнений для расчета контурных токов имеет вид:

$$\begin{aligned}
&I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + \ldots + I_{nn}R_{1n} = E_{11};\\
&I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + \ldots + I_{nn}R_{2n} = E_{22};\\
&-------------------------------\\
&I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + I_{33}R_{n3} + \ldots + I_{nn}R_{nn} = E_{nn}.
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

где R_{KK} – полное (собственное) сопротивление *k-го* контура, равное сумме всех сопротивлений, входящих в этот контур;

R_{ik} – сопротивления смежных контуров;

$E_{kk} = \sum_{k=1}^{p} E_K$ – алгебраическая сумма ЭДС, входящих в *к-ый* контур.

Полное (собственное) сопротивление R_{KK} всегда положительное. Если контурные токи в общей (смежной) ветви протекают согласно (сонаправлены), то сопротивления смежных контуров R_{ik} принимается положительным и, если контурные токи направлены встречно, то R_{ik} принимается отрицательным. Со знаком «плюс» берутся ЭДС, направление которых совпадает с контурным током I_{KK}, а со знаком «минус» направление которых не совпадают с I_{KK}.

Контурные токи определяются после решения системы уравнений. Истинный ток (искомый ток) в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этой ветви. Со знаком «плюс» берутся контурные токи, совпадающие с истинным током; со знаком «минус» – несовпадающие с искомым током.

Метод контурных токов целесообразно применять, когда схема содержит много узлов, но мало независимых контуров.

Пример. Используя метод контурных токов определить токи в ветвях электрической цепи

Таблица 2.1 – Данные для расчёта

Сопротивления, Ом						Источники, В, А		
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	$I_{к2}$
130	40	60	80	110	45	12	13	0,3

Уравнения составляют только по II правилу Кирхгофа для, так называемых, фиктивных (контурных) токов, предполагая, что ток одинаковый для всех участков выбранного контура. Направление контурных токов принимается такое же, как направление обхода (рисунок 2.1).

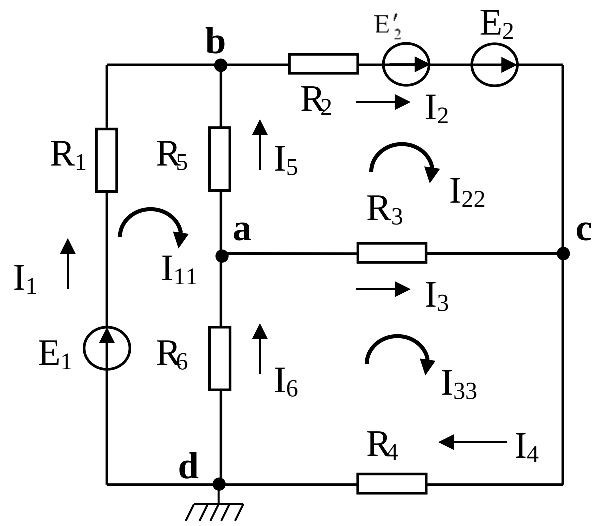


Рисунок 2.1 – Расчётная схема для определения контурных токов

I_{11}, I_{22}, I_{33} – контурные токи

$$
\begin{aligned}
&I_{11}(R_1+R_5+R_6)-I_{22}R_5-I_{33}R_6=E_1;\\
&I_{22}(R_2+R_3+R_5)-I_{11}R_5-I_{33}R_3=E_2'+E_2; \qquad (2.3)\\
&I_{33}(R_3+R_4+R_6)-I_{11}R_6-I_{22}R_3=0.
\end{aligned}
$$

После подстановок значений параметров:

$$\begin{cases} I_{11}285 - I_{22}110 - I_{33}45 = 12\,; \\ I_{22}210 - I_{11}10 - I_{33}60 = 25\,; \\ I_{33}185 - I_{11}45 - I_{22}60 = 0\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Решение системы из составленных уравнений позволяет определить величину контурных токов: $\mathrm{I}_{11} = 0{,}147\,\mathrm{A}$; $\mathrm{I}_{22} = 0{,}227\,\mathrm{A}$; $\mathrm{I}_{33} = 0{,}109\,\mathrm{A}$.

Для определения фактических токов в ветвях составим уравнения, учитывая, что истинный ток (искомый ток) в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этой ветви. Со знаком «плюс» берутся контурные токи, совпадающие с истинным током; со знаком «минус» – несовпадающие с искомым током:

$I_1 = I_{11} = 0{,}147A$;

$\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_{22} = 0{,}227\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_{33} - \mathrm{I}_{22} = 0{,}109 - 0{,}227 = -0{,}118\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_4 = \mathrm{I}_{33} = 0{,}109\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_5 = \mathrm{I}_{22} - \mathrm{I}_{11} = 0{,}227 - 0{,}147 = 0{,}080\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_6 = \mathrm{I}_{33} - \mathrm{I}_{11} = 0{,}109 - 0{,}147 = -0{,}038\,\mathrm{A}$.

Вопросы и задания к собеседованию:

1. Токи ветвей некоторой планарной цепи удовлетворяют следующей полной системе независимых уравнений:

$$I_1 + I_5 - I_8 = 0;\ I_2 + I_6 - I_5 = 0;\ -I_3 + I_7 - I_6 = 0;\ -I_4 + I_8 - I_7 = 0.$$

Восстановив граф цепи, составить матрицы главных контуров и сечений, приняв, что ветвям дерева присвоены первые номера.

Ответ:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Составить матрицу главных контуров для графа на рисунке 1.3, приняв, что дерево образовано ветвями 2, 1 и 5.

Ответ:

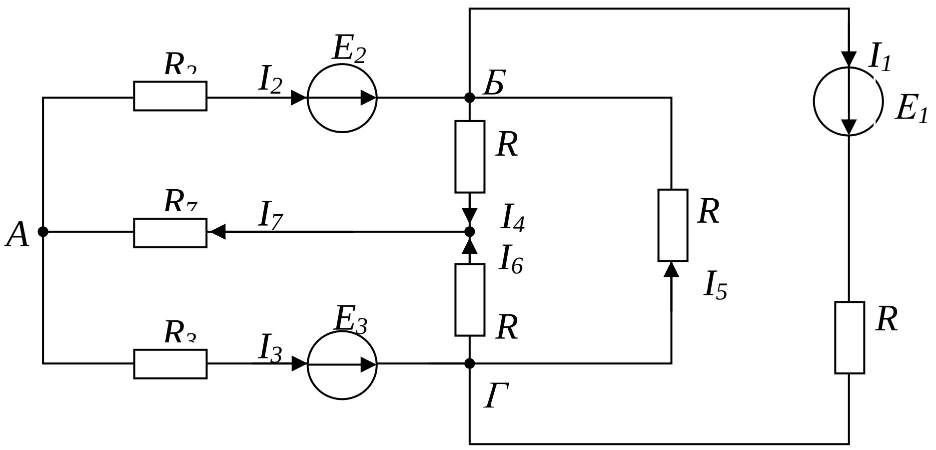
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Решить задачу 5, используя соотношения (1.8) и (1.9).

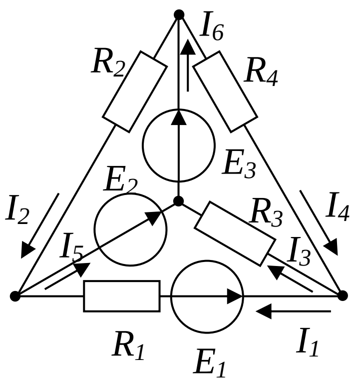
3. Сформулируйте метод контурных токов

4. Как определяются фактические токи электрической цепи?

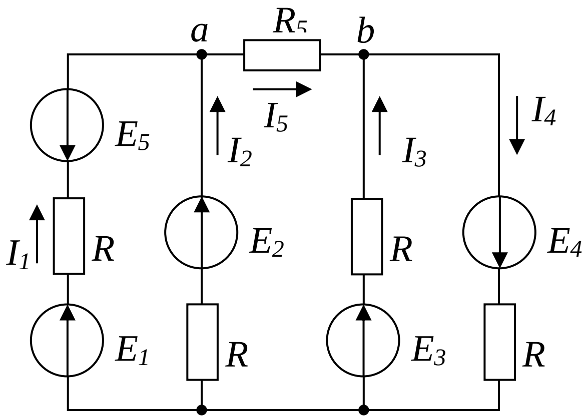
5. Для заданной схемы определить токи, используя метод контурных токов



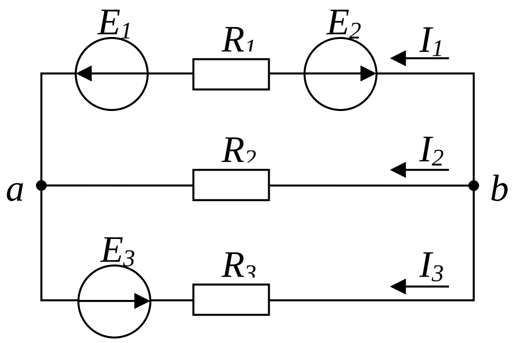
6. Используя метод контурных токов составить уравнения для определения токов в ветвях



5. Используя метод контурных токов составить уравнения для определения токов в ветвях



7. Используя метод контурных токов составить уравнения для определения токов в ветвях



Практическая работа №3

Метод узловых потенциалов Потенциальная диаграмма. Энергетический баланс в электрической цепи

Цель: Изучить метод узловых потенциалов, освоить методику построения потенциальной диаграммы и научиться определять по ней напряжения между двумя заданными точками исследуемой цепи. Получить навыки составления уравнения энергетического баланса электрической цепи. Научиться использовать уравнения энергетического баланса для проверки выполненных расчетов и анализа электрических цепей.

Основы теории:

Метод узловых потенциалов позволяет составить систему уравнений, по которой
можно определить потенциалы всех узлов схемы. По известным разностям узловых потенциалов можно определить токи во всех ветвях. Метод основан на предположении, что между узлами цепи включены источники тока параллельно с приемниками, тогда по первому правилу Кирхгофа составляется система уравнений.

В общем случае для электрической цепи, система уравнений для определения узловых потенциалов имеет следующий вид:

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - \cdots - g_{1n}\varphi_n = \sum\limits_{k=1}^{m} E_{k_1} g_{k_1}; \\ -g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - \cdots - g_{2n}\varphi_n = \sum\limits_{k=1}^{m} E_{k_2} \cdot g_{k_2}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -g_{n1}\varphi_1 - g_{n2}\varphi_2 - \cdots + g_{nn}\varphi_n = \sum\limits_{k=1}^{m} E_{k_n} \cdot g_{k_n}, \end{cases}$$

где g_{11}, $g_{22}, \dots$, g_{nn} – собственная проводимость n-го узла, равная сумме проводимостей всех ветвей, соединенных с этим узлом; эта проводимость всегда положительная;

g_{12}, g_{21}, $g_{13}, \dots, g_{jk}$ – взаимная проводимость между j-м и k-м узлами, эта проводимость всегда отрицательная.

При решении уравнений предполагают, что потенциал одного из узлов равен 0. Токи в ветвях определяются относительно разности потенциалов, к которым подсоединена данная ветвь:

$$I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + \sum E}{\sum R_{AB}},$$

где ΣE – сумма ЭДС в данной ветви, знак (+) если E направлена от большего потенциала к меньшему и (–) наоборот;

φ_A, φ_B – потенциалы узлов, к которым подключена ветвь;

ΣR_{AB} – сумма сопротивлений ветви.

При расчете электрических цепей методом узловых потенциалов целесообразно придерживаться следующего порядка:

- Принять потенциал одного из узлов равным нулю, т. е. заземлить один из узлов и пронумеровать по порядку остальные узлы.
- Определить собственные и взаимные проводимости узлов.
- Составить систему уравнений по для незаземленных узлов.
- Решить систему уравнений и определить потенциалы узлов.
- Определить токи в ветвях по закону Ома
- Проверить правильность решения, составив уравнение баланса мощностей.

По сравнению с методом контурных токов метод узловых потенциалов обладает рядом преимуществ. Как правило, в схеме электрической цепи узлов меньше, чем контуров, поэтому для расчета цепи необходимо составлять меньшее число уравнений.

Потенциальная диаграмма позволяет определить потенциалы во всех точках и узлах схемы. Используется при диагностике возможных неисправностей в работе схемы. Потенциальные диаграммы строятся для выделенных контуров в функции от сопротивления цепи от произвольно выбранного узла. При построении диаграммы принимаем потенциал выбранного узла равным нулю $\varphi_i = 0$. Расчет потенциалов остальных точек производим согласно выбранному направлению обхода контура (по часовой стрелке).

Значения токов принимаются в соответствии с рассчитанными в предшествующих пунктах задания, со своими знаками направлений.

Построение диаграммы осуществляется в масштабах напряжений $m_u = \frac{\text{В}}{\text{мм}}$ и сопротивлений $m_r = \frac{\text{Ом}}{\text{мм}}$. На диаграмме по оси абсцисс откладываются значения сопротивлений участков в последовательности расположения их в контуре; по оси ординат – потенциалы соответствующих точек.

Рассмотрим построение потенциальной диаграммы на примере схемы на рисунке 3.1.

Построим потенциальную диаграмму для контура 1– 2 – 3 – 4 – 1.

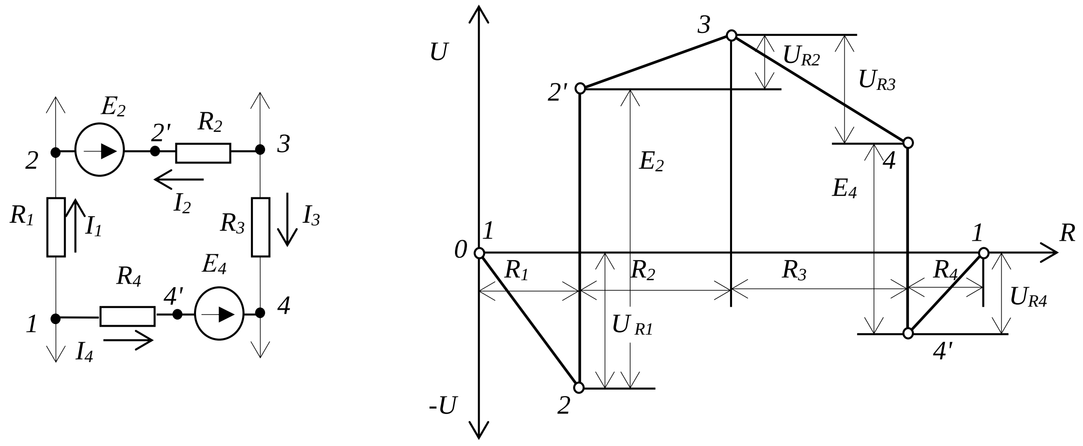


Рисунок 3.1 – Построение потенциальной диаграммы для контура 1,2,3,4,1

Для выбора масштаба по оси абсцисс просуммируем сопротивления вдоль рассматриваемого контура, после чего определим падения напряжения на сопротивлениях контура: $U_{R1}= I_1R_1$; $U_{R2}= I_2R_2$, $U_{R3}= I_3R_3$, $U_{R4}= I_4R_4$.

Потенциал точки 1 принят за нуль.

Пример. Построить потенциальную диаграмму контура «abcdea». Исходные данные: I_1=2А; I_5=3А; I_4=1А, значения ЭДС: E_1=5В; E_5=8В; E_4=3В и значения сопротивлений: R_1=2Ом; R_2=3Ом; R_5=1Ом; R_3=5Ом; R_4=3Ом.

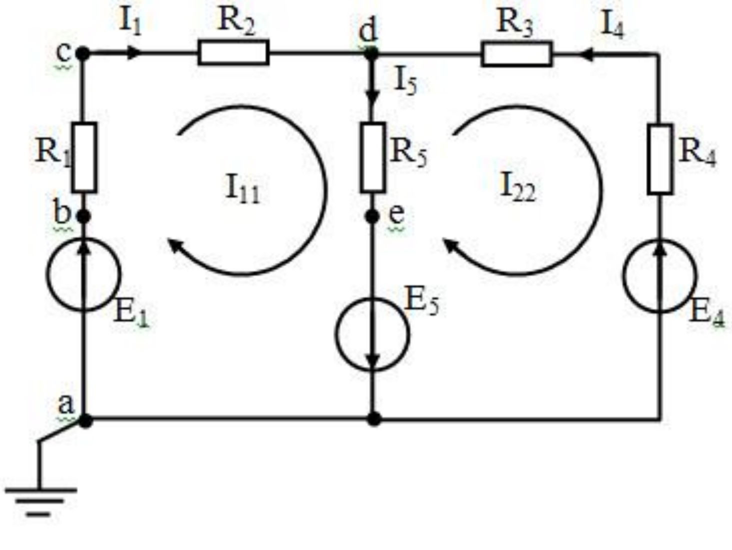


Рисунок 3.2 – Исходная схема электрической цепи

Заземлим точку «а», приняв ее потенциал φa=0. Найдем потенциалы остальных точек контура:

$\varphi_b = \varphi_a + E_1 = 0 + 5 = 5$В;

$\varphi_c = \varphi_b - I_1 R_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$В;

$\varphi_d = \varphi_c - I_1 R_2 = 1 - 2 \cdot 3 = -5$В;

$\varphi_e = \varphi_d - I_5 R_5 = -5 - 3 \cdot 1 = -8$В;

$\varphi_a = \varphi_e - E_5 = -8 + 8 = 0$В.

По полученным данным строим потенциальную диаграмму (рисунок 3.3).

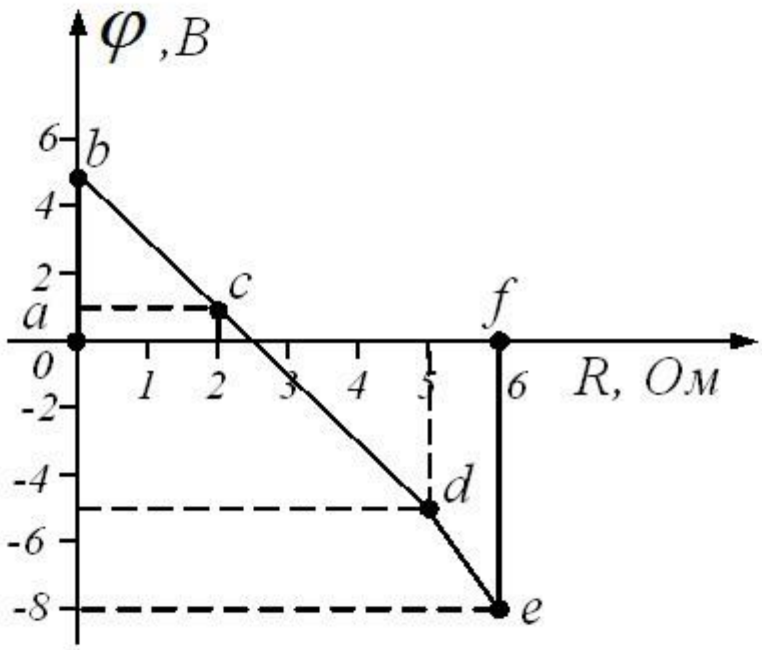


Рисунок 3.3 – Потенциальная диаграмма

На основе закона сохранения энергии мгновенная мощность всех источников энергии в электрической цепи равна алгебраической сумме мгновенных мощностей всех приемников. Баланс мощностей справедлив для цепей любой конфигурации:

$$\Sigma e_n i_n = \Sigma u_{np} i_{np}, \qquad (4.1)$$

где e_n, u_{np} – мгновенные значения ЭДС и напряжений; i_n, i_{np} – токи источников и приемников.

Для цепей постоянного тока:

$$\sum_{K=1}^{m} E_K I_K = \sum_{K=1}^{n} I_K{}^2 R_K \ , \qquad (4.2)$$

где m– число источников; n – число потребителей (сопротивлений) в цепи.

Произведение $E_k I_k$ входит в уравнение баланса со знаком плюс если направление ЭДС совпадает с направлением тока, при встречном направлении – со знаком минус.

Баланс мощности является проверочным при расчетах токов всеми перечисленными выше методами.

Пример. Составить уравнение энергетического баланса.

В таблице 4.1 приведены исходные данные для расчёта параметров разветвлённой цепи на рисунке 4.1.

Таблица 4.1 – Данные для расчёта

Сопротивления, Ом						Источники, В, А		
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	$I_{к2}$
130	40	60	80	110	45	12	13	0,3

Для преобразование заданной схемы в расчетную необходимо произвести замену источника тока на источник напряжения. На рисунке 4.2 приведён принцип замены.

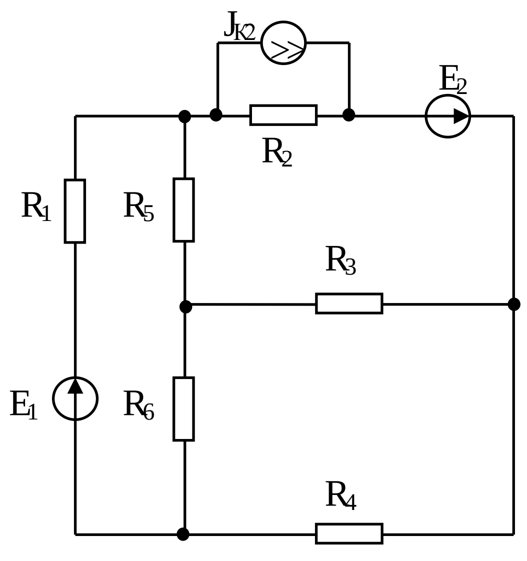


Рисунок 4.1 – Электрическая цепь

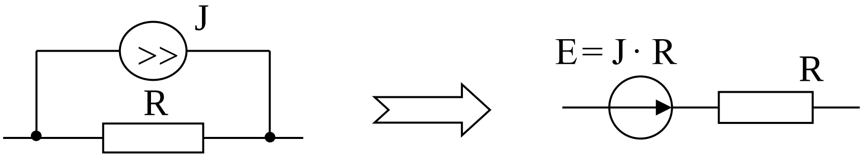


Рисунок 4.2 – Принцип замены источника тока на источник напряжения

Подставив значения из таблицы 1.3, получим:

$$E_2' = R_2 \cdot I_{K2} = 40 \cdot 0{,}3 = 12\ B.$$

На рисунке 4.3 приведена расчётная схема после замены источника тока J_{K2} на источник напряжения E_2'.

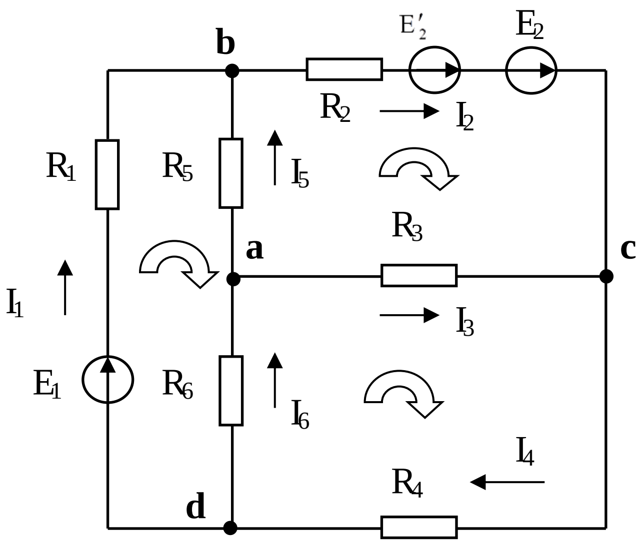


Рисунок 4.3 - Расчётная схема электрической цепи

Для проверки результатов вычислений токов проверим баланс мощностей по зависимости:

$$\sum_{i=1}^{k} E_i \cdot I_i = \sum_{j=1}^{m} I_j^{\ 2} \cdot R_j .$$

При составлении уравнения баланса мощностей необходимо поменять направления токов в ветвях с отрицательными значениями, учитывать, что в тех ветвях цепи, где направление тока совпадает с направлением ЭДС, их произведение будет положительным, т.е. мощность генерируется. В ветвях, где направления ЭДС и тока противоположны, источник ЭДС следует рассматривать как потребитель энергии (например - аккумулятор), и в уравнение баланса он входит со знаком минус. Все сопротивления, независимо от направления протекающего через них тока, являются потребителями энергии:

$$E_2' \cdot I_2 + E_2 \cdot I_2 + E_1 \cdot I_1 = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 \qquad (4.3)$$

После подстановки значений параметров:

$$12 \cdot 0{,}227 + 13 \cdot 0.227 + 12 \cdot 0{,}147 = 0{,}021 \cdot 130 + 0{,}051 \cdot 40 + 0{,}013 \cdot 60 + 0{,}011 \cdot 80 + \\ + 0{,}0064 \cdot 110 + 0{,}0014 \cdot 45.$$

$$7{,}439 \approx 7{,}197\ .$$

Разница составляет менее 4%, следовательно, расчёты выполнены правильно.

Вопросы и задания к собеседованию:

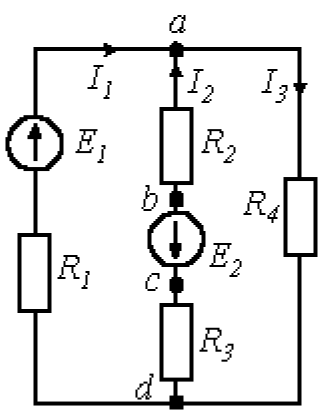
1. Что такое потенциал точки?

2. Как измерить величину Э.Д.С.?

3. Что такое напряжение?

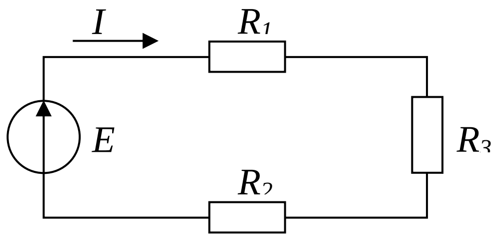
4. Объясните, почему построение потенциальной диаграммы было завершено именно в этой точке 1 на оси абсцисс (рисунок 3.1)?

5. Построить потенциальные диаграммы для левого и внешнего контуров цепи.



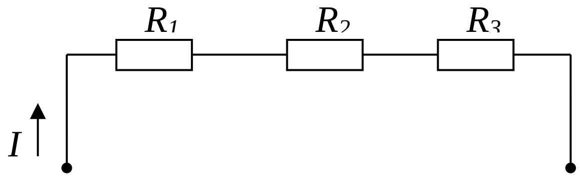
6. Запишите уравнение энергетического баланса.

7. В цепи известны сопротивления R_1= 20 Ом, R_2= 30 Ом, ЭДС источника E=120 В и мощность P=120 Вт всей цепи. Мощность P_2 второго резистора будет равна…



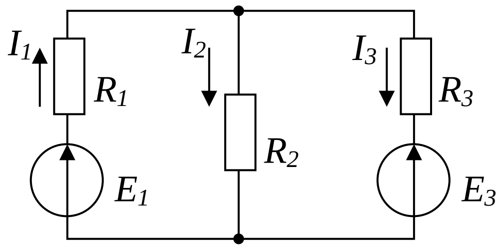
а) 30 Вт б) 125 Вт в) 25 Вт г) 80 Вт

8. В цепи известны сопротивления R_1= 10 Ом, R_2= 20 Ом, напряжение U=100 В и мощность P=200 Вт всей цепи. Мощность P_2 второго резистора будет равна…



а) 30 Вт б) 25 Вт в) 80 Вт г) 125 Вт

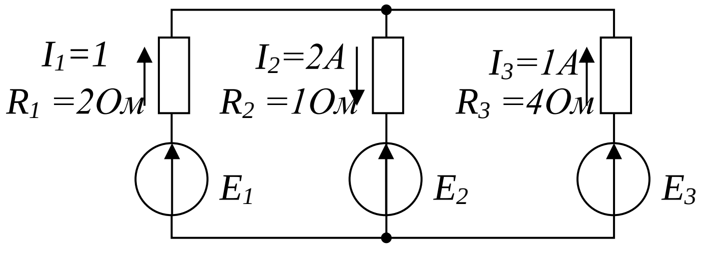
4. Уравнение баланса мощностей представлено выражением…



а) $E_1I_1 - E_3I_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2$ б) $E_1I_1 + E_3I_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2$

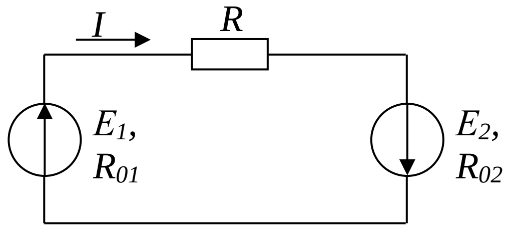
в) $E_1I_1 - E_3I_3 = R_1I_1^2 - R_2I_2^2 + R_3I_3^2$ г) $-E_1I_1 + E_3I_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2$

9. Если сопротивления и токи в ветвях известны и указаны на рисунке, то потребляемая мощность составляет…



а) 8 Вт б) 10 Вт в) 2 Вт г) 20 Вт

10. Уравнение баланса мощностей имеет вид…



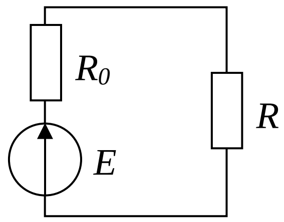
а) $E_1I - E_2I = I^2R_{01} + I^2R_{02} + I^2R$

б) $-E_1I + E_2I = I^2R_{01} + I^2R_{02} + I^2R$

в) $E_1I + E_2I = I^2R$

г) $E_1I + E_2I = I^2R_{01} + I^2R_{02} + I^2R$

11. Выражение для мощности P_0, выделяющейся на внутреннем сопротивлении источника R_0, имеет вид…



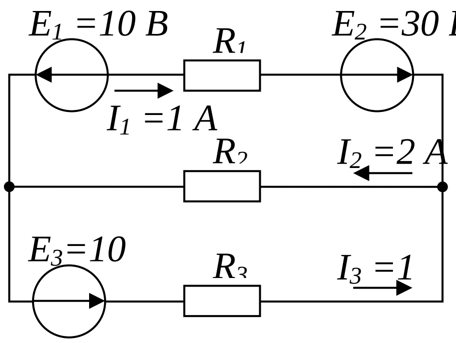
а) $P_0 = E^2R_0 / (R - R_0)^2$

б) $P_0 = E^2R / (R + R_0)^2$

в) $P_0 = E^2/R_0$

г) $P_0 = E^2R_0 / (R + R_0)^2$

12. При известных значениях ЭДС и токов в ветвях вырабатываемая источниками мощность составит…



а) 20 Вт б) 30 Вт в) 10 Вт г) 40 Вт

Практическая работа №4 Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Формы представления.

Цель: Изучить комплексные числа и научиться использовать их для расчета и анализа цепей переменного тока.

Основы теории:

Упорядоченная пара двух действительных чисел (x, y) называется *комплексным числом* $z=(x,y)$. Множество комплексных чисел обозначается C.

Числа вида (x, 0) – это действительные числа, числа вида $(0,y)$, где $y\neq 0$ есть чисто мнимые числа, число $(0,1)$ мнимая единица и обозначается $i=(0,1)$, тогда $(0,y)=y(0,1)=iy$, число $(0,0)$ есть действительное число нуль.

Число $x=\operatorname{Re}z$ называется *действительной* (вещественной) частью комплексного числа $z=(x,y)$, а число $y=\operatorname{Im}z$ *мнимой* частью комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$, называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е.

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

Соотношение больше-меньше для комплексных чисел не вводится.

Комплексное число $z=(x,y)=x+iy$ изображается в плоскости *XOY* точкой *M* с координатами (x,y), либо вектором, начало которого находится в точке *O(o,o)*, а конец в точке *M*(x,y) (рисунок 5.1).

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется ее расстоянием ρ от полюса *O*: $|OM|=\rho$ ($\vec{\rho}$ полярный радиус – вектор точки) и углом φ, образованным отрезком *OM* полярной осью *Ox* (φ полярный угол точки). Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

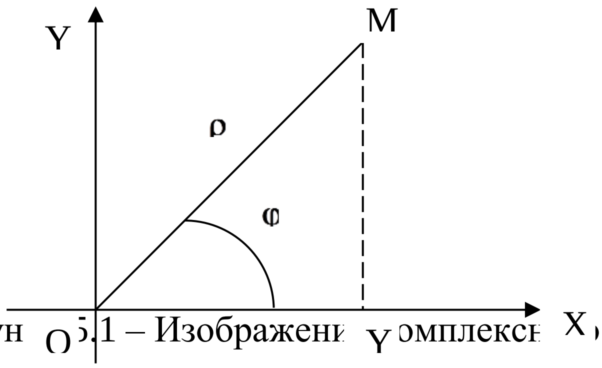


Рисунок 5.1 – Изображение комплексного числа

Действия над комплексными числами

Пусть даны $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \ z_2 \neq 0.$$

$z = x + iy$ – алгебраическая форма записи комплексного числа, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + $$
$$+ i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Комплексные числа $z = (x, y) = x + iy$ и $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются знаком, называются *взаимно сопряженными* или *комплексно сопряженными*.

Нетрудно видеть, что $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\arg z = -\arg \bar{z}$ (кроме чисел $z = x < 0$; для них $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$).

Деление комплексных чисел в алгебраической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Действительная часть $x = \operatorname{Re} z$ и мнимая часть $y = \operatorname{Im} z$ комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \ \operatorname{Im} z = i\frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Пример 1. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Решение. Докажем это равенство, используя определение

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Пример 2. Найти произведение и частное чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + i$.

Решение.

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(-4 + i) = -8 + 2i + 12i - 3i^2 = -8 + 14i + 3 = -5 + 14i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{-4 + i} = \frac{(2 - 3i)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-8 - 2i + 12i + 3i^2}{(-4)^2 - i^2} = \frac{-8 + 10i - 3}{4 + 1} =$$

$$= \frac{-11 + 10i}{5} = -\frac{11}{5} + \frac{10i}{5} = -\frac{11}{5} + 2i,$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + i}{2 - 3i} = \frac{(-4 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{-8 - 12i + 2i + 3i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{-8 - 10i - 3}{4 + 9} =$$

$$= \frac{-11 - 10i}{13} = -\frac{11}{13} - \frac{10i}{13}.$$

Пример 3. Вычислить значение выражения $\frac{(1-2i)(2-3i)}{(3-4i)(4-5i)}$.

Решение. Используя правила раскрытия скобок и выполнения действий над комплексными числами, получим

$$\frac{(1-2i)(2-3i)}{(3-4i)(4-5i)} = \frac{2 - 3i - 4i + 6i^2}{12 - 15i - 16i + 20i^2} = \frac{2 - 7i + 6i^2}{12 - 31i + 20i^2} = \frac{-4 - 7i}{-8 - 31i} = -\frac{4 + 7i}{8 + 31i} =$$

$$= -\frac{(4 + 7i)(8 - 31i)}{(8 + 31i)(8 - 31i)} = \frac{32 - 124i + 56i - 217i^2}{64 - 961i^2} = \frac{249 - 68i}{1025} = \frac{249}{1025} - \frac{68i}{1025}.$$

Комплексное число $z = (x, y) = x + iy$ изображается в плоскости *XOY* точкой *M* с координатами (x,y), либо вектором, начало которого находится в точке *O(o,o)*, а конец в точке $M(x,y)$ (рисунок 5.2).

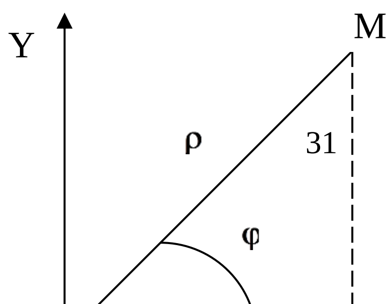


Рисунок 5.2 – Изображение комплексного числа

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется ее расстоянием ρ от полюса *O*: $|OM| = \rho$ ($\vec{\rho}$ полярный радиус – вектор точки) и углом φ, образованным отрезком *OM* полярной осью *Ox* (φ полярный угол точки). Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместит с полюсом, а ось *Ox* направить по полярной оси, то прямоугольные координаты *x* и *y* точки $M(x, y)$ и ее полярные координаты ρ и φ связаны формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$;

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Тогда комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Эта формула дает тригонометрическую форму комплексного числа. При этом, $|z| = \rho = |\vec{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем комплексного числа*, а угол $\varphi = \mathrm{Argz}$ – *аргументом комплексного числа*. Угол $\varphi = \mathrm{Argz}$ определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\mathrm{Argz} = \arg z + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

где $\arg(z)$ есть главное значение $Arg(z)$, определяемое условием $-\pi < \arg z \le \pi$, причём:

$$\arg(z) = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & åñëè, x > 0, \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & åñëè, x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & åñëè, x < 0, y \langle 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & åñëè, x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & åñëè, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Имеют место следующие соотношения

$$tg(Arg(z)) = \frac{y}{x},\ \sin(Arg(z)) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos(Arg(z)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π:

$$|z_1| = |z_2|,\ Arg(z_1) = Arg(z_2) + 2\pi n \ \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

То есть,

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\ Arg(z_1 z_2) = Argz_1 \cdot Argz_2.$$

Это правило распространяется на любое число сомножителей. Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, то получим *формулу Муавра*

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

То есть, $|z^n| = |z|^n$, $Argz^n = nArgz + 2\pi k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$.

Свойства модуля комплексных чисел

1. $|\bar{z}| = |z|$, 2. $z\bar{z} = |z|^2$, 3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

4. $|z^n| = |z|^n$, 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$, 6. $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$

7. $|z_2 + z_1| \le |z_2| + |z_1|$, 8. $||z_2| - |z_1|| \le |z_2 - z_1|$.

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

То есть

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ Arg\,\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2.$$

Извлечения из комплексного числа корня n-ой степени

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,1,2,\ldots,n-1.$

Эта формула дает ровно *n* различных корней при $k = 0,1,2,\ldots,n-1.$

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Доказано, что на комплексные степени положительных чисел распространяются все правила действий со степенями и

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Если $x = 0$, то имеет место *формула Эйлера*:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Используя формулу Эйлера, получим еще одну форму записи комплексного числа – показательную.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i\mathrm{Arg}z} = |z|e^{i\arg z}.$$

Операции над числами в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)},$$

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} = |z|^n e^{in\arg z},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Показательная функция комплексного переменного z $f(z) = e^z$ является периодической с периодом $2\pi ki$, так как

$$f(z + 2\pi ki) = e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k) = e^z,$$

т.е. $f(z + 2\pi ki) = f(z)$.

Если $z = 0$, то $e^{2\pi i} = 1$ и $e^{2\pi ki} = 1$.

Пример 1. Комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ представить в тригонометрической форме.

Решение. Здесь $x = -2,\ y = 2\sqrt{3}$. По формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

получаем

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4.$$

По формулам

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

получаем

$$\cos\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2};\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, то $\varphi = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$, т.е.

$$\varphi = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$$

где Z – множество целых чисел (0, ±1, ±2, …).

Поскольку φ принадлежит II четверти, то $\varphi = \mathrm{Arg}z = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, а главное значение аргумента $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Поэтому число z в тригонометрической форме имеет вид

$$z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}).$$

Можно использовать и другие значения Argz:

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Пример 2. Представить числа $z_1 = -1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Так как $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $tg\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, но $y > 0$, $x < 0$, то есть $\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$, то $z_1 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$, а $r_2 = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $tg\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, но $y < 0$, $x > 0$, то есть $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$, то $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Пример 3. Найти $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме, если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ и $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Учитывая что, $-\pi < \varphi \le \pi$, найдем модель и аргумент каждого комплексного числа:

для $z_1 : r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = arctg 1 = \dfrac{\pi}{4}$,

для $z_2 : r_2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ и $\varphi_2 = arctg \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$,

для $z_3 : r_3 = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ и $\varphi_3 = arctg \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

Тогда заданные числа в тригонометрической форме имеют вид

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\ z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}),\ z_3 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Следовательно,

$$z_2 \cdot z_3 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \cdot 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) =$$
$$= 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2 z_3} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}{4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})) = ,$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Пример 4. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\dfrac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{0 + 2\pi k}{3}$.

При $k = 0,1,2$ получаются корни

$$\alpha_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$
$$\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

При $k = 3$ $\alpha_3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$, что совпадает с α_0. Все последующие корни будут повторяться, так что различных корней будет только три.

Пример 5. Найти $(\sqrt{2} - \sqrt{6i})^5$.

Решение. 1) Запишем число $z = \sqrt{2} - \sqrt{6i}$ в тригонометрической форме.

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8};$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

откуда $\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Поскольку угол φ лежит в четверти IV, то $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$ Можно взять главное значение аргумента $\varphi = -\frac{\pi}{3}.$ Итак, $z = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$

2) По формуле Муавра $z^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$ найдем z^5:

$$z^5 = (\sqrt{8})^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 128\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3i}).$$

(так как $-\frac{5\pi}{3} \notin [-\pi;\pi)$, то $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$).

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[5]{z}$, при $z = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3i})$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа z:

$$r=\sqrt{(64\sqrt{2})^2(1^2+(\sqrt{3})^2)}=2\cdot 64\sqrt{2}=128\sqrt{2}=2^{\frac{15}{2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{64\sqrt{2}}{128\sqrt{2}}=\frac{1}{2};\ \varphi=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Так как $\operatorname{Re} z>0$ и $\operatorname{Im} z>0$, то угол φ лежит в четверти I. Поэтому $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k.$

В формуле $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$ можно взять любое значение аргумента, в частности $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Подставляя найденные значения r и φ в формулу, получим

$$\sqrt[5]{64\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)}=\sqrt[5]{128\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}\right).$$

Подставляя значения $k=0,1,2,3,4$, найдем пять различных значений $\sqrt[5]{z}$ (учитывая, что $\sqrt[5]{128\sqrt{2}}=\sqrt[5]{2^{15/2}}=2^{3/2}=2\sqrt{2}$):

$$w_0=2\sqrt{2}=\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right),\ w_1=2\sqrt{2}=\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right),$$

$$w_2=2\sqrt{2}=\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right),\ w_3=2\sqrt{2}=\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right),$$

$$w_4=2\sqrt{2}=\left(\cos\frac{25\pi}{15}+i\sin\frac{25\pi}{15}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{6}i.$$

Остальные значения k новых точек w_k уже не дадут. Заметим, что, извлекая корень 5-й степени из числа $z=64\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)$, мы решали задачу, обратную той, которая разбиралась в примере 8, и корень $w_4=\sqrt{2}-\sqrt{6}i)$ оказался равным тому числу, которое возводилось в 5-ю степень. Но кроме w_4, будет еще 4 различных значений $\sqrt[5]{z}$; соответствующие точки $w_0,...,w_4$ расположены в вершинах правильного пятиугольника с центром в начале координат и удалены от начала координат на расстояние $2\sqrt{2}$.

Пример 7. Решить уравнение $z^2+2z+2=0$.

Решение. $D=b^2-4ac=4-4\cdot1\cdot2=4-8=-4;$

$\sqrt{D}=\sqrt{-4}=\sqrt{-1\cdot4}=2\sqrt{-1}=\pm2i.$

По формуле $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i;$$

$$z_1=-1+i;\ z_2=-1-i.$$

Пример 8. $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.

Пример 9. Решить уравнение $\omega^5+32i=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\omega^5=-32i$, или $\omega=\sqrt[5]{-32i}$. Число $z=-32i$ запишем в тригонометрической форме. Модуль числа равен $|z|=32$ и так как действительная часть этого числа равна нулю, то $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$, то есть

$$Z=32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Значит, решение уравнения имеет вид

$$\omega=32^{\frac{1}{5}}\sqrt[5]{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}=2\left(\cos\frac{-90+360k}{5}+i\sin\frac{-90+360k}{5}\right).$$

Запишем все найденные корни уравнения:

при $\kappa=0$ $\omega_0=2(\cos(-18^\circ)+i\sin(-18^\circ))$,

$\kappa=1$ $\omega_1=2(\cos54^\circ+i\sin54^\circ)$, *к=2* $\omega_2 = 2\left(\cos 126^{\circ} + \imath \sin 126^{\circ}\right)$,

к=3 $\omega_3 = 2\left(\cos 198^{\circ} + \imath \sin 198^{\circ}\right)$,

к=4 $\omega_4 = 2\left(\cos 270^{\circ} + \imath \sin 270^{\circ}\right)$.

Изобразив все найденные корни уравнения на комплексной плоскости, получим вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса 2, то есть

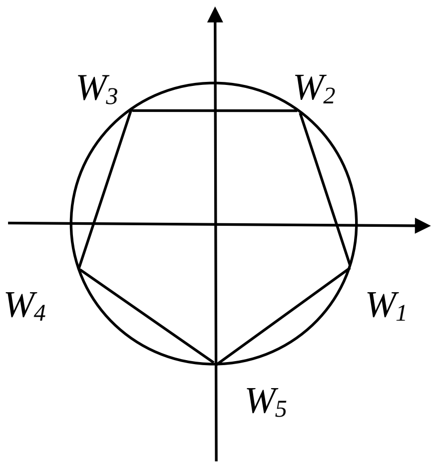


Рисунок 5.3 – Корни уравнения на комплексной плоскости

Вопросы и задания к собеседованию:

1. Что называется комплексным числом?
2. Какие формы записи комплексных чисел вы знаете?
3. Найти действительную и мнимую части числа

$$\text{а) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3,$$

$$\text{б) } \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}.$$

4. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$\text{а) } 1+i^{123},$$

$$\text{б) } -\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7},$$

в) $(1+i)^8 \cdot \left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

5. Выполните арифметические действия над комплексными числами. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

1.1. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.2. $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$.

1.3. $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

1.4. $\sqrt[2]{\dfrac{(2-i)^2-3}{(-1+i)^8}}$.

1.5. $\sqrt[3]{\dfrac{(1-2i)^3+(1+2i)^3}{44\cdot(1+i)}}$.

1.6. $\sqrt[3]{\dfrac{33\cdot(2+2i)^5}{(1+3i)^2 14}}$.

1.7. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

1.8. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.9. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.10. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.12. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$.

1.13. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.14. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{2}}$.

1.15. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.16. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.17. $\sqrt[3]{-8i}$.

1.18. $\sqrt[3]{\dfrac{(1-2i)^3+(1+2i)^3}{44\cdot(1+i)}}$.

1.19. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.20. $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$.

1.21. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.22. $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

1.23. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.24. $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$.

1.25. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)}{2}}$.

1.26. $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.27. $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

1.28. $\sqrt[2]{\dfrac{(2-i)^2-3}{(-1+i)^8}}$.

6.Изобразите найденные числа на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$,

б) $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$,

в) $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

Практическая работа №5.
Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом

Цель: Научится проводить расчет цепи переменного тока при последовательном соединении активных и реактивных элементов

Основы теории:

Катушка индуктивности в цепи синусоидального тока

Если катушку индуктивности включить в цепь синусоидального тока, изменяющегося по закону:

$$i = I_m \sin \omega t, \tag{6.1}$$

где I_m – амплитуда тока;

ω – частота, 1/с;

t – время, с,

то ток в соответствии со вторым законом Кирхгофа и законом Ома в любой момент времени будет равен:

$$i = \frac{u + e_L}{r} \tag{6.2}$$

где u – напряжение на зажимах катушки;

r – активное сопротивление катушки;

$e_L = -L\dfrac{di}{dt}$ – э.д.с. самоиндукции, равная взятому со знаком «минус» произведению индуктивности L на скорость изменения тока. Знак «минус» отражает то обстоятельство, что индуктируемая э.д.с. препятствует изменению тока.

Выражение (6.2) можно записать иначе:

$$u = ir - e_L = ir + L\frac{di}{dt} \tag{6.3}$$

Обозначим $ir = u_r$ – падение напряжения на активном сопротивлении

$L\dfrac{di}{dt} = u_L$ – падение напряжения на индуктивности.

В выражение (6.3) подставим значение тока из (6.1)

$$\begin{aligned} u &= I_m r \sin \omega t + L\frac{d\left(I_m \sin \omega t\right)}{dt} = I_m r \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t = \\ &= I_m r \sin \omega t + I_m \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Из последнего выражения следует, что

$$u_r = I_m r \sin \omega t = U_{rm} \sin \omega t \tag{6.5}$$

по фазе совпадает с током, а падение напряжения на индуктивности

$$u_L = I_m \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.6}$$

по фазе опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$.

Произведение индуктивности L на частоту ω имеет размерность сопротивления, и его называют индуктивным сопротивлением:

$$x_L = \omega L \tag{6.7}$$

При переходе к комплексной форме выражение (4) запишется:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + j\dot{U}_L = \dot{I}r + j\dot{I}x_L = \dot{I}\left(r + jx_L\right) = \dot{I}ze^{j\varphi} = \dot{I}Z \tag{6.8}$$

В последнем выражении

$$Z = r + jx_L = \sqrt{r^2 + x_L^2}\, e^{iarctg\left(x_L/r\right)} = ze^{i\varphi} \tag{6.9}$$

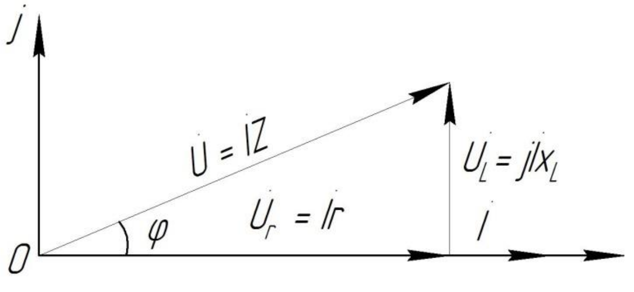
– комплекс сопротивления катушки.

z – полное сопротивление катушки, его можно найти как отношение действующих значений напряжения на зажимах катушки и протекающего по катушке тока:

$$z = \frac{U}{I} \tag{6.10}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},\ I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

В соответствии с выражением (6.8) векторная диаграмма токов и напряжений будет иметь вид, представленный на рисунке 6.1.



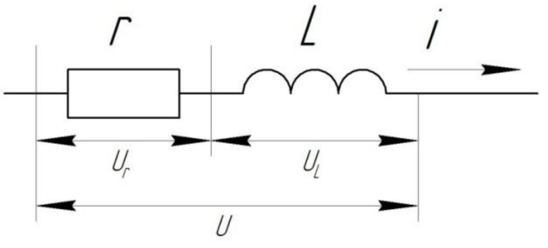


Рисунок 6.1- Векторная диаграмма Рисунок 6.2 – Схема соединения

На рисунке 6.2 представлена схема замещения катушки индуктивности. Вектор падения напряжения на активном сопротивлении совпадает по направлению с вектором тока. Вектор падения напряжения на индуктивности опережает вектор тока на 90°. Сумма этих двух векторов дает вектор напряжения на зажимах катушки. Длина последнего, как следует из векторной диаграммы:

$$U = \sqrt{U_r^2 + U_L^2} = I \cdot \sqrt{r^2 + x_L^2} = I \cdot z \ ,$$

а начальная фаза

$\varphi = arctg\dfrac{U_L}{U_r} = arctg\dfrac{x_L}{r}$ (см. формулу 6.8 и 6.9)

Если на векторной диаграмме каждый из векторов треугольника напряжений умножить на ток, то получится треугольник мощностей:

$$\left.\begin{array}{l} \text{- активная мощность } P = U_r I = I^2 r = UI\cos\varphi \text{, Вт,} \\ \text{- реактивная мощность } Q = U_L I = I^2 x_L = UI\sin\varphi \text{, ВАр,} \end{array}\right\} \qquad (6.11)$$

- полная мощность $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$, ВА.

Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{r}{z}. \qquad (6.12)$$

Конденсатор в цепи синусоидального тока

Напряжение на конденсаторе u_c в любой момент времени равно заряду на его обкладках q, деленному на емкость C:

$$u_c = \frac{q}{C} \qquad (6.13)$$

Поскольку ток есть количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника (в данном случае – поступающего на конденсатор) в единицу времени, то при переменном токе

$$i = \frac{dq}{dt}\text{, откуда } q = \int i dt\ .$$

Подставив заряд, выраженный через ток, в выражение (6.13), получим

$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{I_m}{C}\int \sin\,\omega t dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\omega t + U_0\ ,$$

где U_0 – постоянный заряд на конденсаторе, который при включении конденсатора на переменное напряжение отсутствует.

Последнее выражение перепишем, заменив косинус синусом:

$$u_c = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m x_c \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (6.14)$$

Величина $\frac{1}{\omega C}$ имеет размерность сопротивления, ее называют емкостным сопротивлением конденсатора и обозначают x_c.

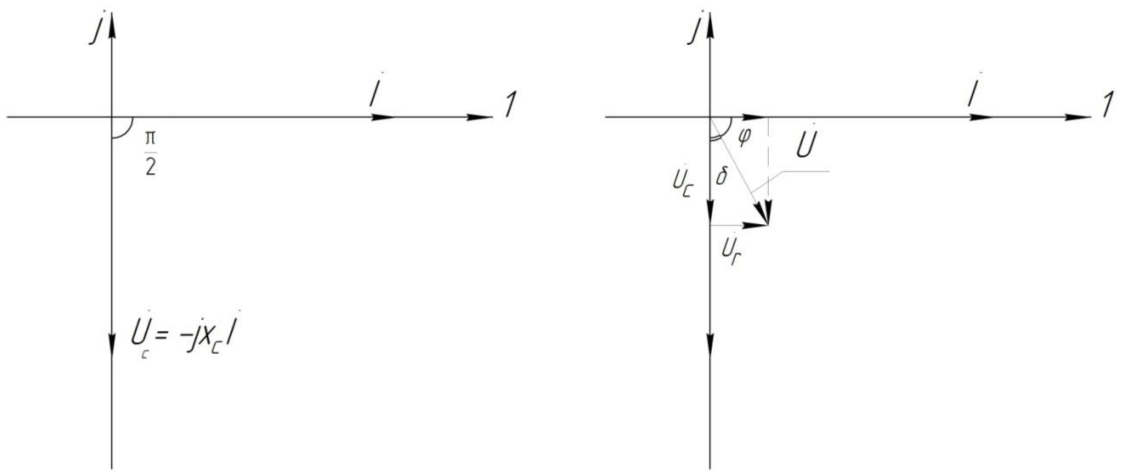
Произведение $I_m x_c$ есть ни что иное, как амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$I_m x_c = U_{cm}.$$

Как видно из (11.14) напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на угол $\pi/2$. В комплексной форме это выражение запишется:

$$\dot{U}_c = -jx_c\dot{I}\ , \qquad (6.15)$$

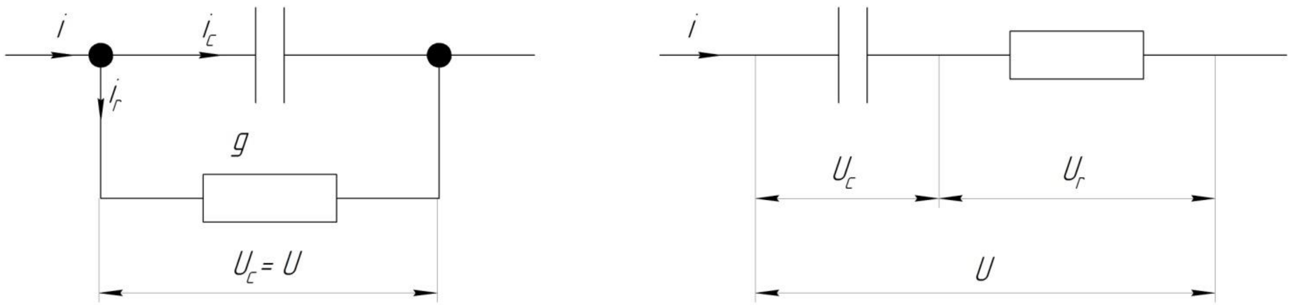
соответствующая векторной диаграмма представлена на рисунке 6.3.,а.



а) б)

Рисунок 6.3 – Векторная диаграмма

При рассмотрении процесса протекания тока через конденсатор не было учтено то обстоятельство, что диэлектрик между обкладками конденсатора не является идеальным, то есть его активное сопротивление, хотя и очень велико, но имеет конечное значение. В соответствии с этим схема замещения реального конденсатора может быть представлена так, как изображено на рисунке 6.4, а или 6.4., б.



а) б)

Рисунок 6.4 – Схема замещения реального конденсатора

Для схемы *а* в соответствии с (6.15) и с законами Ома и Кирхгофа справедливо выражение:

$$\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_c = \dot{U}g + jUb_c = \dot{U}(g + jb_c) = \dot{U}Y \qquad (6.16)$$

где g – проводимость диэлектрика;

$b_c = \omega C$ – проводимость идеального конденсатора;

$$Y = g + jb_c = \sqrt{g^2 + b_c^2}\, e^{jarctg\left(b_c/g\right)} = ye^{j\varphi}$$ - комплекс проводимости реального конденсатора.

Для схемы *б* справедливо выражение

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_c = \dot{I}r - j\dot{I}x_c = \dot{I}Z \qquad (6.17)$$

Из (6.15) и (6.16) следует

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = \frac{1}{Y} \text{ или } Z = r - jx_c = \frac{1}{g + jb_c} = \frac{g - jb_c}{g^2 + b_c^2} = \frac{g}{y^2} - j\frac{b_c}{y^2} \qquad (6.18)$$

Ввиду того, что два комплексных числа равны друг другу, если равны их вещественные части и равны коэффициенты мнимых частей, из (6.18) следует:

$$r = \frac{g}{y^2},\ x_c = \frac{b_c}{y^2}. \qquad (6.19)$$

Аналогично получаются обратные выражения проводимостей конденсатора через сопротивления:

$$g = \frac{r}{z^2},\ b_c = \frac{x_c}{z^2}. \qquad (6.20)$$

Следует отметить, что значение r малы по сравнению с x_c, и его часто не учитывают, считая конденсаторы идеальными.

Векторная диаграмма напряжений для реального конденсатора представлена на рис. 6.3,б. Угол δ называют углом диэлектрических потерь.

$$\delta = arctg\frac{U_r}{U_c} = arctg\frac{r}{x_c} \qquad (6.21)$$

Для качественных диэлектриков этот угол изменяется десятками минут и даже минутами.

Умножив на векторной диаграмме рисунка 6.3, б векторы напряжения на ток, получим треугольник мощностей:

$$S = UI,\ P = U_r I,\ Q = U_c I,\ \tilde{S} = P - jQ \qquad (6.22)$$

Последовательное включение активного сопротивления, индуктивности и емкости в цепь синусоидального тока

Рассмотрим прохождение синусоидального тока по цепи, состоящей из последовательно включенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора (рисунок 6.5). Следует иметь ввиду, что на данной схеме замещения сопротивление r учитывает и активное сопротивление катушки индуктивности и активные потери в диэлектрике конденсатора.

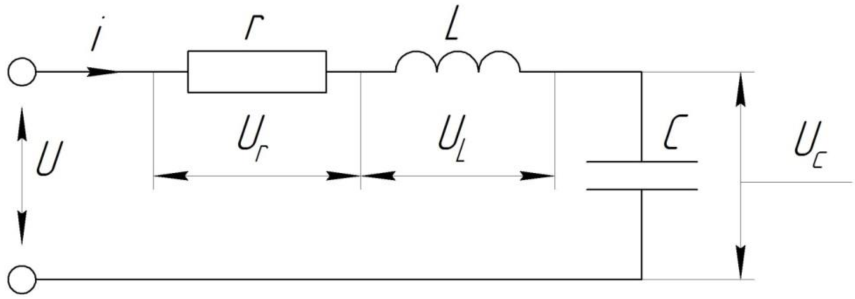


Рисунок 6.5 – Схема последовательного включения резистора, катушки индуктивности и конденсатора

В соответствии с законом Ома и вторым законом Кирхгофа для схемы замещения справедливо выражение:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_c = \dot{I}\left[r + j\left(x_L - x_c\right)\right] = \dot{I}Z \qquad (6.23)$$

Соответствующие векторные диаграммы представлены на рисунке 6.6 а,б,в.

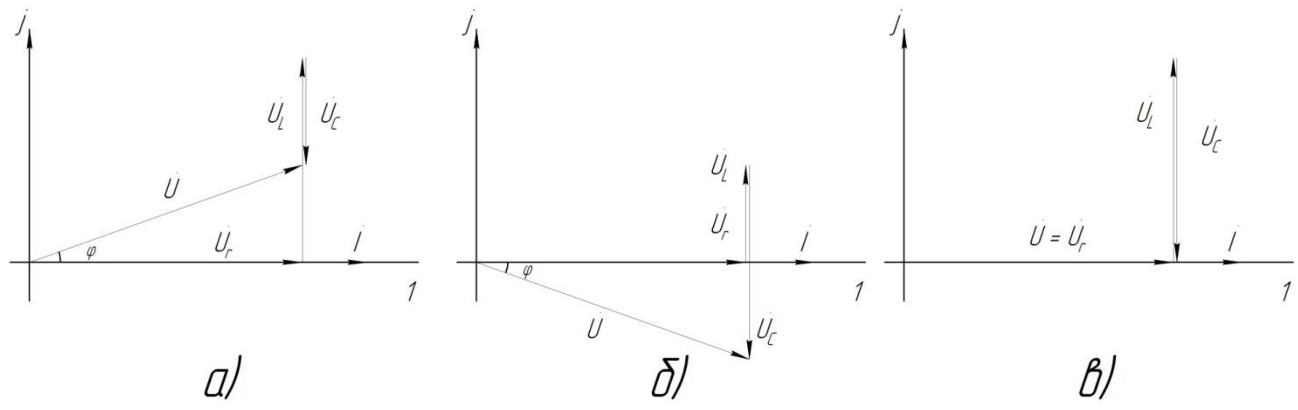


Рисунок 6.6 – Векторные диаграммы

Рисунок 6.6., а соответствует случаю, когда $x_L > x_c$, при этом ток по фазе отстает от напряжения на угол φ. Рисунок 6.6,б соответствует случаю, когда $x_L < x_c$, при этом ток по фазе опережает напряжение. Если $x_L = x_c$, то ток и приложенное к цепи напряжение по фазе совпадают, величина тока в этом случае определяется только величиной напряжения и активным сопротивлением r, и не зависит от величины индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим электрической цепи называют резонансом напряжений. При резонансе напряжений полная мощность равна активной ($\angle\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$), то есть из сети электрическая цепь реактивной мощности не потребляет.

Согласно классическому методу анализа переходных процессов решение неоднородного линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму его частного (принужденная составляющая) и общего решения, получаемого при равенстве нулю правой части (свободная составляющая). Принужденная составляющая определяется путем расчета установившегося режима в послекоммутационной схеме и представляет собой установившееся значение искомого переходного тока (напряжения). Свободная составляющая искомого тока (напряжения) обусловлена только внутренними источниками энергии электрического и магнитного поля.

При анализе переходного процесса в электрической цепи ***классическим*** *методом* можно рекомендовать следующий порядок расчета искомой величины:

1. Подготовить схему электрической цепи к расчету: выбрать направления токов в ветвях схемы при переходном процессе.

2. Определить независимые начальные условия – ток в индуктивности $i_L(0-)$ и напряжение на емкости $u_C(0-)$ из расчета цепи до коммутации. На основании

законов коммутации ток на индуктивности и напряжение на емкости не могут измениться скачком:

$$i_L(0-)=i_L(0+)=i_L(0),\ u_C(0-)=u_C(0+)=u_C(0). \qquad (6.24)$$

3. Представить искомую величину, например ток, в виде суммы двух составляющих: свободной и установившийся (принужденной) $i=i_{св}+i_у$.

4. Определить установившуюся составляющую искомой величины после коммутации, когда переходной процесс закончился.

5. Определить общий вид закона изменения свободной составляющей:

5.1 Составить характеристическое уравнение для заданной схемы. Для этого в цепи после коммутации необходимо разорвать ветвь с искомой величиной (или какую-либо другую ветвь, которая не содержит источника тока). Найти комплексное входное сопротивление цепи $\underline{Z}(j\omega)$ относительно точек разрыва. Заменить $j\omega$ на p, приравнять входное сопротивление к нулю, получив, таким образом, характеристическое уравнение $Z(p)=0$.

5.2 Определить корни характеристического уравнения.

5.3 Определить общий вид свободной составляющей в зависимости от вида корней характеристического уравнения, например, для тока:

– если корень характеристического уравнения один, вещественный, то $i_{св}=A\cdot e^{pt}$;

– если корней два, различных, вещественных, то $i_{св}=A_1\cdot e^{p_1t}+A_2\cdot e^{p_2t}$;

– если корней два, одинаковых, вещественных, то $i_{св}=A_1\cdot e^{pt}+A_2t\cdot e^{pt}$;

– если корней два, комплексных, сопряженных ($\underline{p}_{1,2}=\alpha\pm j\omega_{св}$), то $i_{св}=B\cdot e^{\alpha t}\sin(\omega_{св}+\beta)$.

6. Согласно п.3 записать общий вид искомого полного тока (напряжения).

7. Определить постоянные интегрирования, используя законы коммутации и систему дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для

момента времени t=0+. При этом учитывать п.2 и соотношения $i_C(0+)=C\frac{du_C(0+)}{dt}$, $u_L(0+)=L\frac{di_L(0+)}{dt}$.

Вопросы и задания к собеседованию:

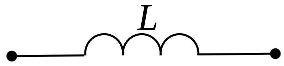
1. Как отличаются по фазе напряжение и ток в цепях с активным сопротивлением, с индуктивностью и с емкостью?
2. Что понимают под активным сопротивлением? Как определить его опытным путем в цепи переменного тока?
3. Как вычислить угловую частоту ω через круговую частоту *f*?
4. Что понимают под полным сопротивлением цепи переменного тока?
5. Как вычислить индуктивное сопротивление катушки опытным путем? Как оно зависит от индуктивности и частоты?
6. Как определить емкость конденсатора, включенного в цепь синусоидального тока, опытным путем?
7. Что понимают под полной, активной и реактивной мощностями? Каково между ними соотношение?
8. Что называют коэффициентом мощности в цепи синусоидального тока?
9. Что такое угол диэлектрических потерь?
10. Как вычислить активную и реактивную проводимости конденсатора через сопротивление его схемы замещения?
11. Как строятся векторные диаграммы тока и напряжения при последовательном соединении активных и реактивных элементов?
12. Что такое комплекс сопротивления участка электрической цепи?
13. Какой режим называют режимом резонанса напряжений? При каких условиях он возникает?
14. Что называют э.д.с. самоиндукции, в результате чего она возникает, от чего зависит ее величина.

15. Если ёмкостное сопротивление *C* – элемента X_c, то комплексное сопротивление $\underline{Z}_c$ этого элемента определяется как…

а) $\underline{Z}_C = C$ б) $\underline{Z}_C = X_c$

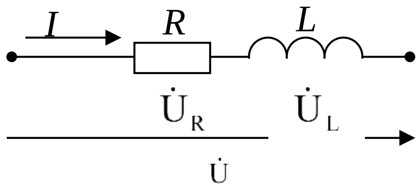
в) $\underline{Z}_C = -jX_C$ г) $\underline{Z}_C = j\,X_c$

16. Индуктивное сопротивление X_L при угловой частоте ω=314 рад/с и величине L=0,318 Гн, составит…

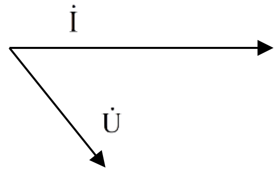


а) 0,318 Ом б) 100 Ом в) 0,00102 Ом г) 314 Ом

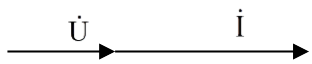
17. Представленной цепи соответствует векторная диаграмма…



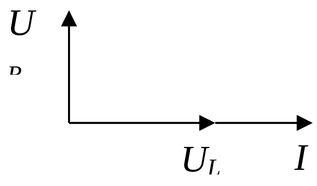
а)



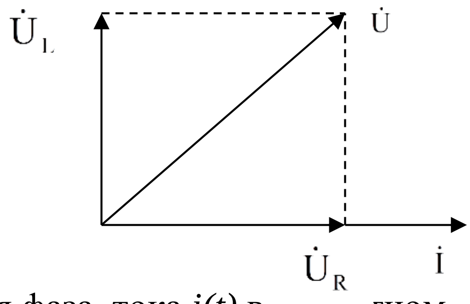
б)



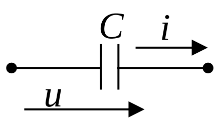
в)



г)



18. При напряжении *u(t)=100sin(314t)* В начальная фаза тока *i(t)* в ёмкостном элементе *C* составит…



а) *π/2* рад б) -*π/4* рад в) 0 рад г) 3π/4 рад

19. Если частота *f* увеличится в 2 раза, то ёмкостное сопротивление X_c…

а) не изменится б) увеличится в 2 раза

в) уменьшится в 4 раза г) уменьшится в 2 раза

20. Представленной векторной диаграмме соответствует…

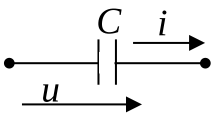
а) последовательное соединение резистивного *R* и индуктивного *L* элемента

б) ёмкостной элемент *C*

в) индуктивный элемент *L*

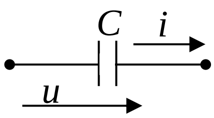
г) резистивный элемент *R*

21. Ёмкостное сопротивление X_C при величине *C*=100 мкФ и частоте *f* =50 Гц равно…



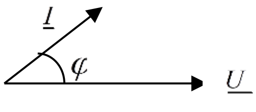
а) 31,84 Ом б) 31400 Ом в) 314 Ом г) 100 Ом

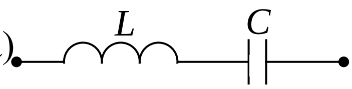
22.Начальная фаза напряжения *u(t)* в ёмкостном элементе *C* при токе *i(t)=0,1sin(314t)* А равна…

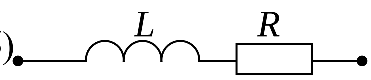


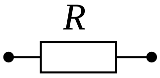
а) $\pi/4\,рад$ б) $\pi/2\,рад$ в) $0\,рад$ г) $-\pi/2\,рад$

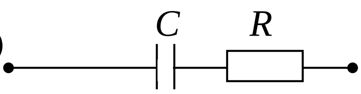
23. Векторной диаграмме соответствует схема…



а)


б)


в)


г)


24.В индуктивном элементе *L*…

а) напряжение $u_L(t)$ совпадает с током $i_L(t)$ по фазе

б) напряжение $u_L(t)$ и ток $i_L(t)$ находятся в противофазе

в) напряжение $u_L(t)$ отстаёт от тока $i_L(t)$ по фазе на $\pi/2\,рад$

г) напряжение $u_L(t)$ опережает ток $i_L(t)$ по фазе на $\pi/2\,рад$

25. В активном элементе R…

а) напряжение $u(t)$ совпадает с током $i(t)$ по фазе

б) напряжение $u(t)$ и ток $i(t)$ находятся в противофазе

в) напряжение $u(t)$ отстаёт от тока $i(t)$ по фазе на $\pi/2\,рад$

г) напряжение $u(t)$ опережает ток $i(t)$ по фазе на $\pi/2\,рад$

26. В емкостном элементе C…

а) напряжение $u_c(t)$ совпадает с током $i_c(t)$ по фазе

б) напряжение $u_c(t)$ и ток $i_c(t)$ находятся в противофазе

в) напряжение $u_c(t)$ отстаёт от тока $i_c(t)$ по фазе на $\pi/2\,рад$

г) напряжение $u_c(t)$ опережает ток $i_c(t)$ по фазе на $\pi/2\,рад$

Практическая работа №6.

Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка. Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка

Цель: Получить навыки расчета переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях первого порядка операторным методом.

Основы теории:

Сущность операторного метода анализа переходных процессов заключается в том, что действительные функции времени, описывающие процессы в электрических цепях и называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями с помощью преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\,. \tag{7.1}$$

Преобразование Лапласа приводит к замене операций дифференцирования и интегрирования оригиналов при решении дифференциальных уравнений на алгебраические операции умножения и деления изображений. Решив полученные алгебраические уравнения в операторной форме относительно изображений искомых величин, переходят к оригиналам, получают решения исходных дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс в электрической цепи.

При анализе переходного процесса в электрической цепи операторным методом рекомендуется следующий порядок расчета:

1. Из расчета цепи до коммутации найти токи в индуктивностях $i_L(0-)$ и напряжения на емкостях $u_C(0-)$.

2. По виду исследуемой электрической цепи после коммутации составить операторную схему (рисунок 7.1). По операторной схеме известными методами расчета цепей найти изображение искомой величины.

3. По изображению искомой величины найти оригинал, т. е. искомую функцию времени.

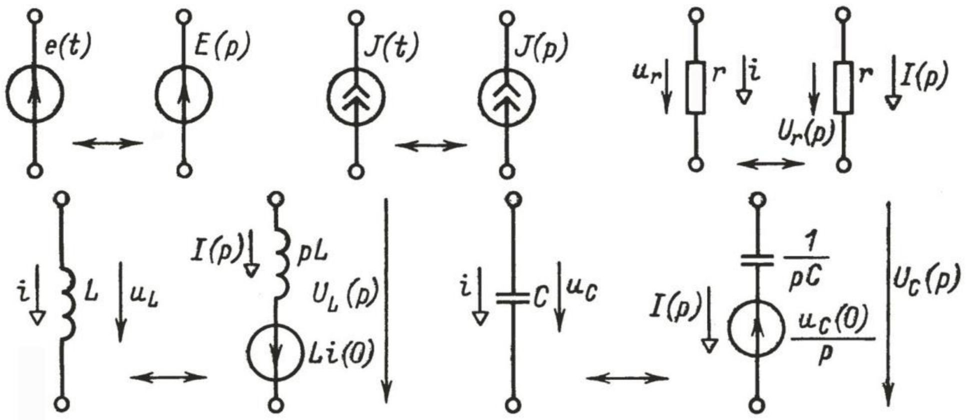


Рисунок 7.1– Операторная схема

Способы перехода от изображения к оригиналу

1. Применение теоремы разложения. Если изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + ... + a_k p^k + ... + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + ... + b_k p^k + ... + b_1 p + b_0}, \qquad (7.2)$$

где a_k и b_k – действительные числа; p_1, p_2... – действительные и различные корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \risingdotseq f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad . \tag{7.3}$$

Если многочлен $F_2(p)$ имеет один нулевой корень, т.е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \risingdotseq f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \quad . \tag{7.4}$$

Если многочлен $F_2(p)$ имеет n пар комплексных сопряженных корней, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \risingdotseq f(t) = \sum_{k=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right) \tag{7.5}$$

и при одном нулевом корне

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \risingdotseq f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right). \tag{7.6}$$

Если в цепи действует синусоидальная ЭДС, то задачу рекомендуется решать для свободных составляющих искомых величин. Далее, для полученной схемы рассчитать изображения искомых величин одним из известных ранее методов (контурных токов, узловых потенциалов и т.д.)

По найденному изображению определить оригинал искомой величины. Для этого воспользоваться либо таблицами соответствия (см. приложение), либо теоремой разложения, представленной выше.

Вопросы и задания к собеседованию:

1. Изложите сущность и этапы расчета операторным методом.
2. Как учитываются начальные условия в операторном методе?
3. Изобразите операторную схему замещения катушки индуктивности.
4. Изобразите операторную схему замещения конденсатора.
5. Как осуществляется переход от изображения к оригиналу?
6. О чём свидетельствует нулевой корень характеристического уравнения?
7. Запишите законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

8. Для схемы (рисунок 7.2) дано: $e = 50\sqrt{2}\sin(100t + 30^o)$ В; r_1=20 Ом; r=30 Ом; L=0,5 Гн. Найти операторным методом ток i после замыкания ключа. ($0{,}5e^{-60t}$ А).

9. Определить операторным методом ток i в схеме (рисунок 7.3) после замыкания ключа. Дано: J=6 А; r=10 Ом; L=0,25 Гн. ($6e^{-40t}$ А).

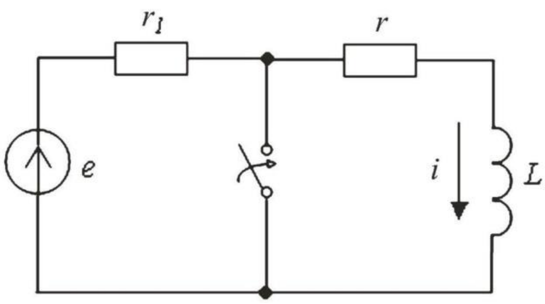


Рисунок – 7.3

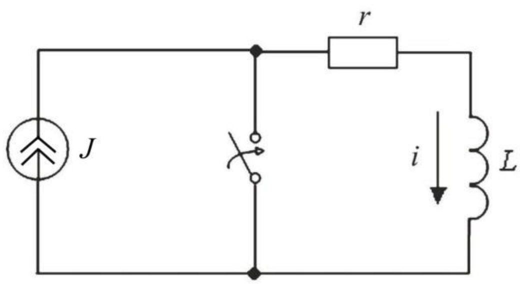
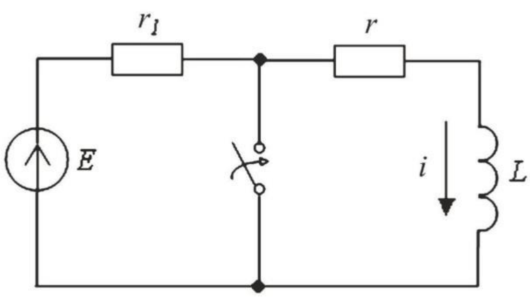


Рисунок – 7.4



10. В схеме рисунок 7.5 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: E=90 В; r_1=30 Ом; r=15 Ом; L=0,1 Гн. Найти и построить зависимость $i(t)$. ($2e^{-150t}$ А).

11. Последовательный контур rLC подключается к источнику постоянной ЭДС E рисунок 17.1. Определить напряжение u_C и ток i, а также их максимальные значения во время переходного процесса, если E=120 В; r=20 Ом; L=0,1 Гн; C=2,49 мкФ.

($120 - 120{,}1e^{-100t}\sin(2000t + 87{,}1^{\circ})$ В; $0{,}6e^{-100t}\sin 2000t$ А; 222,5 В; 0,555 А).

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

5.1.1 Перечень основной литературы:

1.Соколенко, Е. В. Теория функций комплексных переменных. Операционное исчисление: учебное пособие / Е. В. Соколенко. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. — 199 c. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/83226.html.

2.Моделирование в электроэнергетике: учебное пособие / А. Ф. Шаталов, И.Н.Воротников, М. А. Мастепаненко [и др.]. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, АГРУС, 2014. — 140 c. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/47317.html.

5.1.2. Перечень дополнительной литературы:

Митрофанов С.В. Моделирование в электроэнергетике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Митрофанов С.В., Семенова Л.А.— Электрон. текстовые данные.— Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2015.— 144 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61379.html.

5.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические рекомендации для подготовки к практическим занятиям.
2. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.

5.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. «Университетская библиотека онлайн» - http://biblioclub.ru
2. «Электронно-библиотечная система IPRbooks» http://www.iprbookshop.ru

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению контрольных работ
по дисциплине «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск 2025 г.

1. По заданной схеме изобразить граф электрической схемы,

выделить дерево графа и связи, пронумеровать ветви графа, присвоив ветвям дерева первые порядковые номера.

2. Составить матрицу соединений и матрицу контуров.

3. По заданным параметрам схемы рассчитать токи ветвей схемы, используя законы Кирхгофа.

4. Рассчитать токи ветвей схемы, используя матричный метод

контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора.

5. Построить потенциальную диаграмму для одного из контуров

6. Проверить выполненные расчеты, используя уравнения энергетического баланса

Вариант задания определяется по номеру в списке группы.

Вар	Рис.	R1	R2	R3	R4	R5	R6	E1	E2	E3	E4	E5	E6
		Ом						В					
1	1.5	20	8	3	12	17	30	24	0	30	0	0	0
2	1.6	12	15	9	30	32	10	0	0	30	0	0	50
3	1.14	6	20	14	15	8	36	0	0	32	0	15	0
4	1.8	18	53	33	10	15	20	51	0	18	0	0	0
5	1.9	6	17	7	20	11	15	15	0	0	50	0	0
6	1.15	8	15	18	10	12	21	30	0	0	0	0	38
7	1.16	20	60	90	100	165	60	0	26	0	38	0	0
8	1.7	83	120	150	60	105	200	0	0	125	300	0	0
9	1.19	10	18	6	15	220	20	0	0	15	48	0	0
10	1.20	165	90	68	20	120	100	21	0	0	0	0	54
11	1.25	30	120	150	60	225	60	0	300	210	0	0	0
12	1.4	23	18	15	12	12	10	0	0	0	30	0	24
13	1.12	6	10	15	5	30	30	0	0	30	0	0	51

14	1.10	14	30	24	20	45	32	0	75	27	0	0	0
15	1.11	6	3	5	4	5	2	0	0	6	0	0	15
16	1.1	6	12	9	5	20	16	0	69	0	0	22	0
17	1.2	15	27	8	16	12	4	0	0	52	0	0	44
18	1.18	45	60	33	30	21	20	0	0	50	0	0	20
19	1.13	8	10	15	5	24	42	45	33	0	0	0	0
20	1.21	9	7	12	20	10	12	45	0	0	0	0	20
21	1.21	7	3	1	4	6	10	0	0	0	7	10	0
22	1.22	2	4	3	2	7	7	0	19	0	74	0	0
23	1.23	10	40	50	40	75	20	0	66	0	0	125	0
24	1.18	22	64	96	110	155	68	32	0	0	0	24	0
25	1.25	16	34	20	26	47	30	0	0	0	70	0	25

Схемы для расчёта

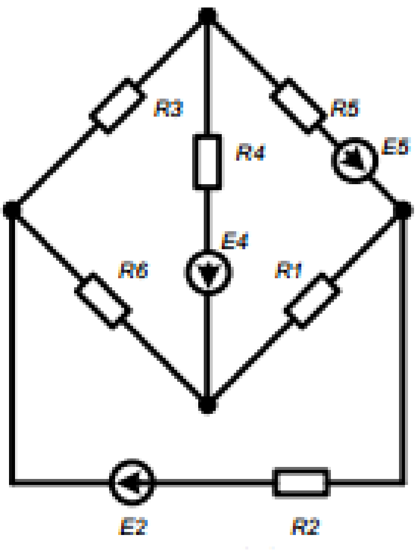


Рис. 1.1

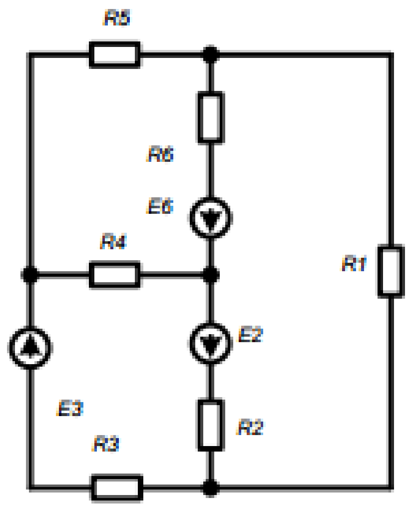


Рис. 1.2

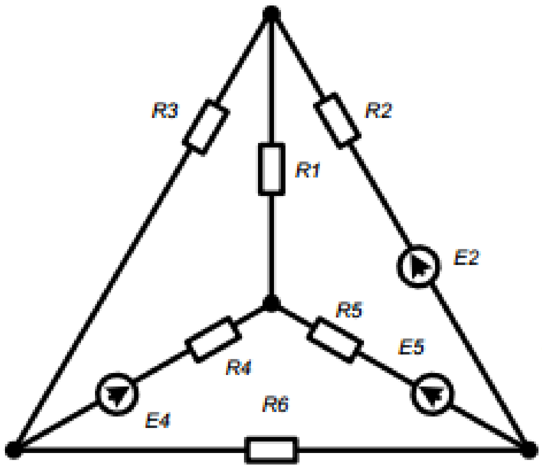


Рис. 1.3

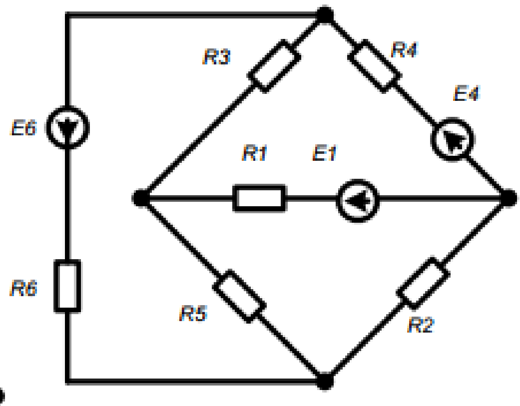


Рис. 1.4

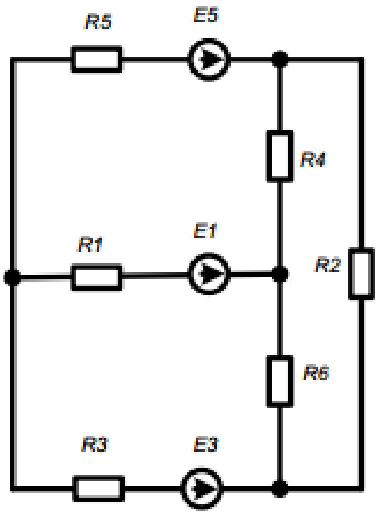


Рис. 1.5

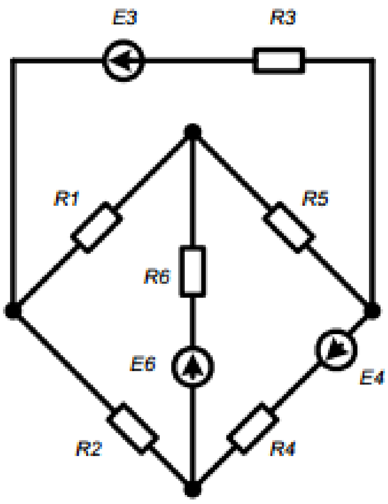


Рис. 1.6

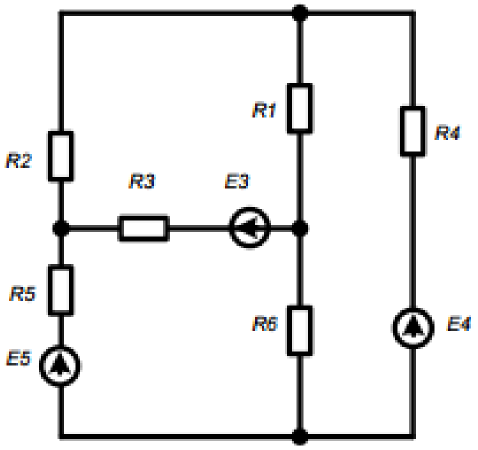


Рис. 1.7

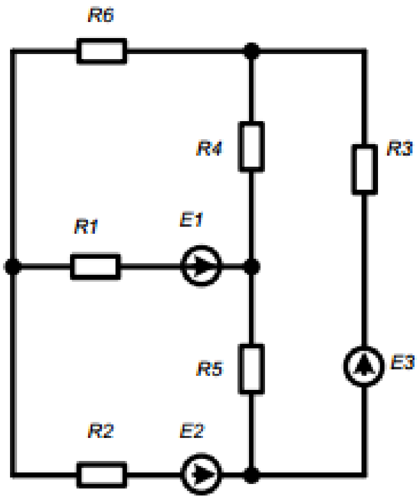


Рис. 1.8

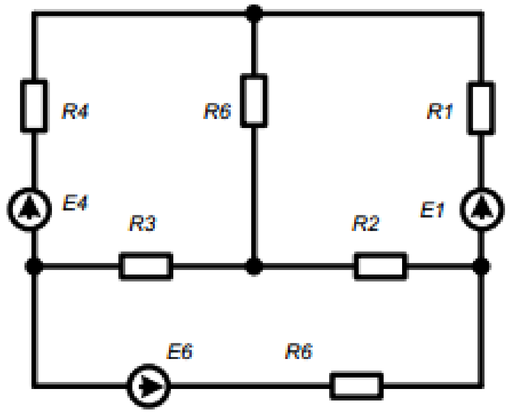


Рис. 1.9

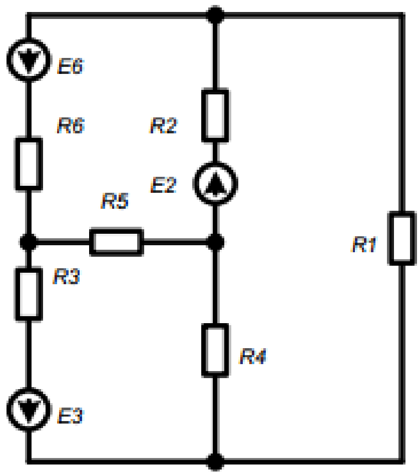


Рис. 1.10

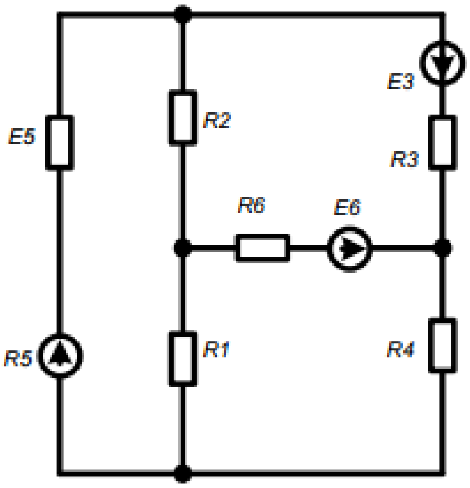


Рис. 1.11

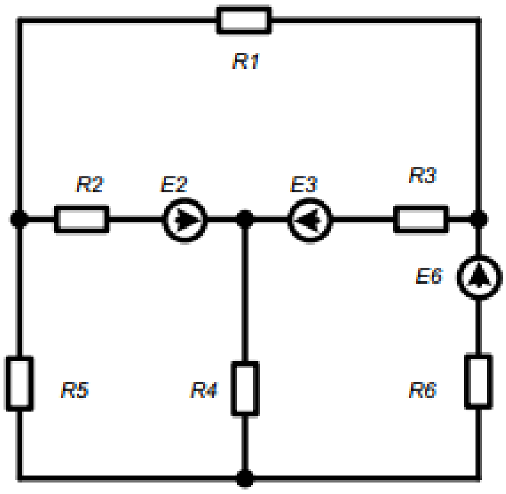


Рис. 1.12

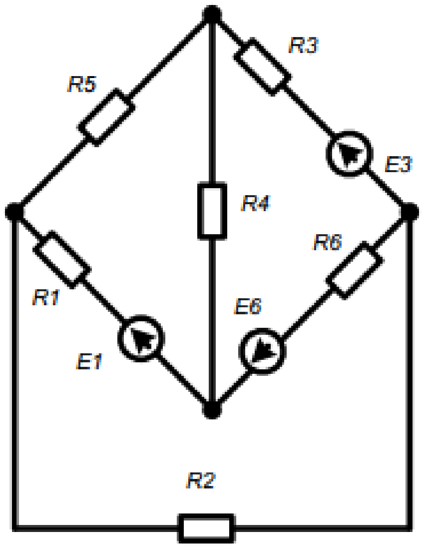


Рис. 1.13

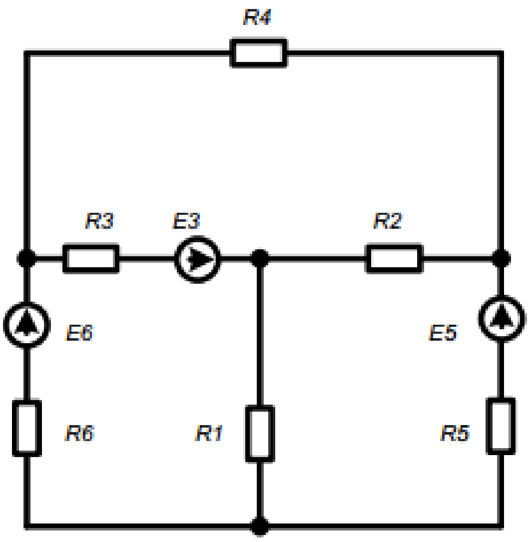


Рис. 1.14

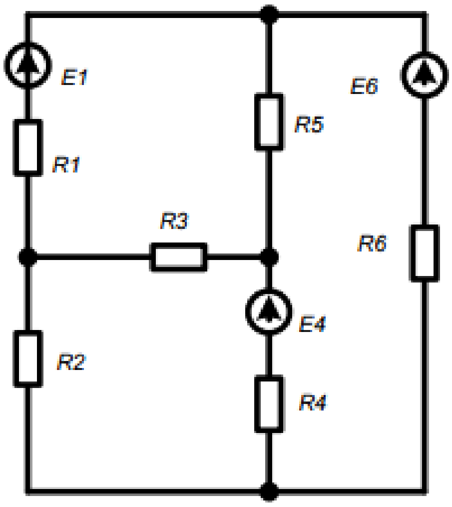


Рис. 1.15

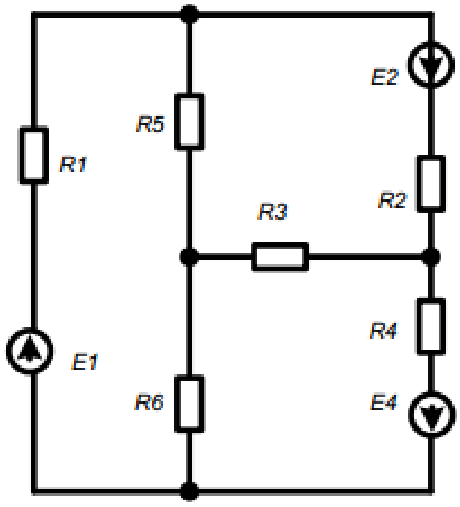


Рис. 1.16

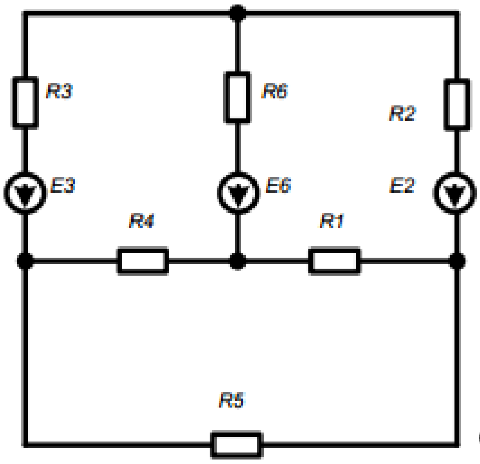


Рис. 1.17

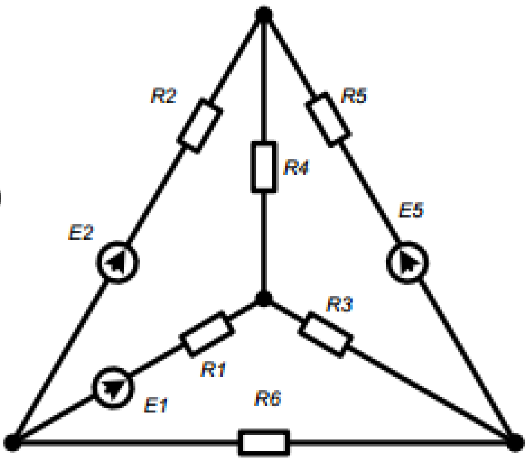


Рис. 1.18

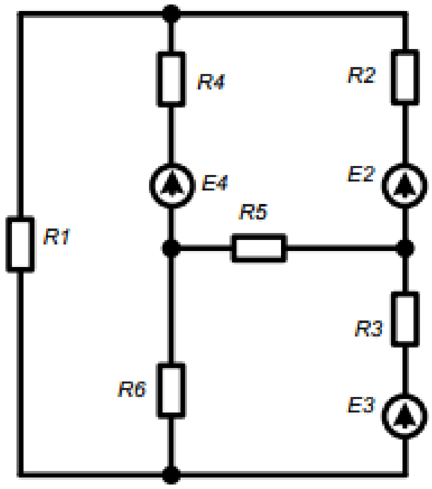


Рис. 1.19

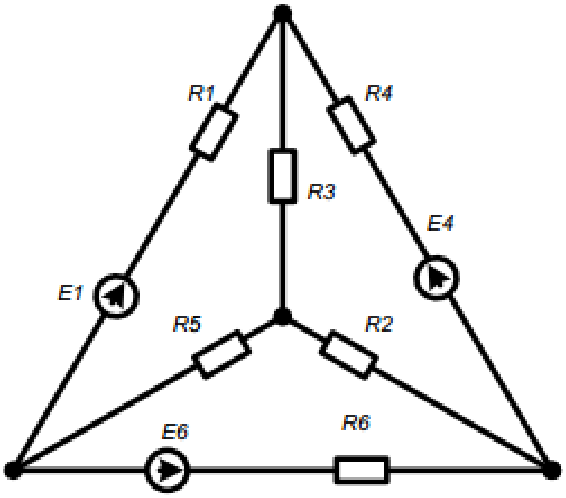


Рис. 1.20

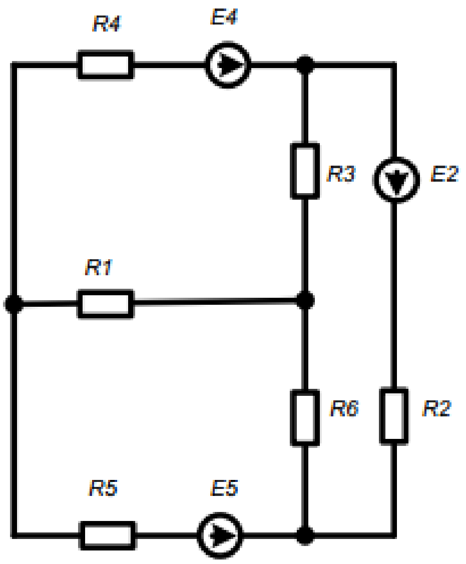


Рис. 1.21

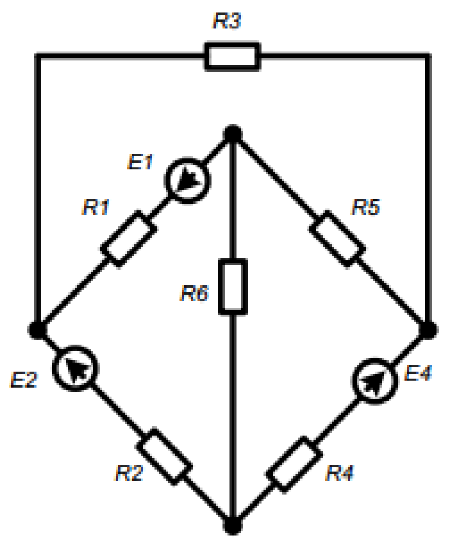


Рис. 1.22

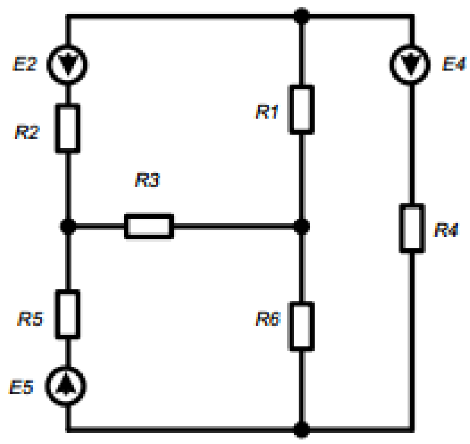


Рис. 1.23

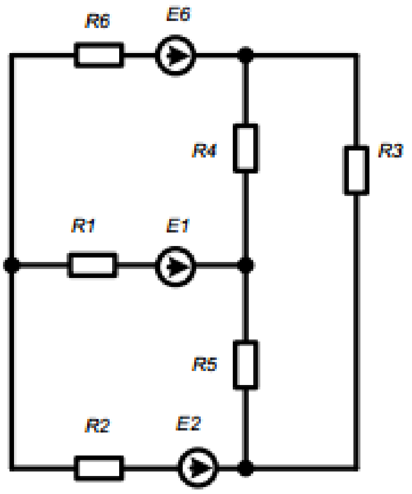


Рис. 1.24

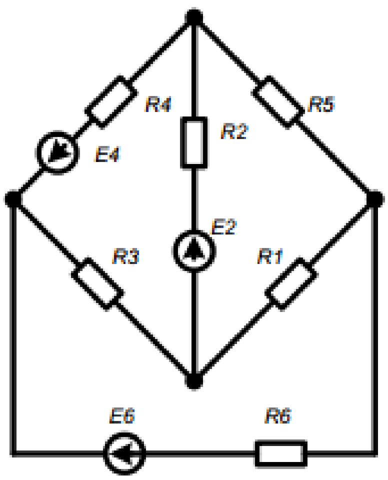


Рис. 1.25

Теоретическая часть

- Составление системы уравнений Кирхгофа

– Задать произвольно направление токов в ветвях схемы.

– Упростить заданную схему заменив источники тока (ИТ) на источники напряжения (ИН) по выражению:

$$E_{k_i} = I_{k_i} R_i , \tag{1.1}$$

где I_{k_i} – ток ИТ;

R_i –сопротивление подключенное параллельно с ИТ.

– Составить уравнения по первому и второму законам Кирхгофа.

По первому закону для всех узлов схемы справедливо:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 , \tag{1.2}$$

где i – номер ветви для данного узла;

n – число ветвей, соединенных в узел.

Знак тока при направлении к узлу принимается положительным, а от узла – отрицательным.

Уравнения составляются для m *-1* узла, где m – общее число узлов схемы.

– Определить замкнутые контуры схемы для составления уравнений по второму закону. В контурах схемы произвольно задать направления обходов (обычно по часовой стрелке). Для каждого контура справедливо:

$$\sum_{i=1}^{k} R_i I_i = \sum_{i=1}^{L} E_i , \tag{1.3}$$

где R_i, I_i – сопротивление и ток в цепи по направлению обхода контура;

k – количество сопротивлений по направлению обхода;

E_i – ЭДС в цепях по направлению обхода контура;

L – количество источников ЭДС в контуре.

Знаки токов и ЭДС принимаются положительными, если их направления совпадают с направлениями обхода и отрицательными, если направления тока и ЭДС не совпадают с направлением обхода.

Уравнения составляются для всех контуров, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} RI_i = \sum_{i=1}^{l} E_i \end{cases} . \qquad (1.4)$$

После решения системы уравнений определяются токи ветвей. К недостаткам метода решения уравнений по правилам Кирхгофа можно отнести большое число уравнений в системе, равное количеству неизвестных токов, что может создать трудности при решении задач.

Меньшее число уравнений составляется по методу контурных токов.

- Метод контурных токов

Согласно методу предполагается, что в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток.

Независимыми называются контуры, которые имеют хотя бы одну новую ветвь, не входящую в другие контуры.

Число независимых контуров схемы равно числу уравнений, которые нужно составить по второму закону Кирхгофа:

$$n = N_B - (N_Y - 1) - N_T , \qquad (1.5)$$

где N_B – число ветвей схемы; N_Y – число узлов; N_T – число источников тока.

В схеме, представленной на рисунке 1.12, число независимых контуров $n = 3$.

Предположение о контурных токах приводит к тому, что число неизвестных, и, соответственно, число уравнений, необходимых для определения этих неизвестных уменьшается по сравнению с полной системой уравнений Кирхгофа и равно числу независимых контуров. Этот метод является фактически записью второго закона Кирхгофа через контурные токи.

Пусть имеем схему, содержащую n независимых контуров. Согласно методу контурных токов в каждом *k-м* независимом контуре протекает контурный ток I_{KK} . В общем случае система уравнений для расчета контурных токов имеет вид:

$$
\begin{array}{l}
I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + ... + I_{nn}R_{1n} = E_{11}; \\
I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + ... + I_{nn}R_{2n} = E_{22}; \\
------------------------- \\
I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + I_{33}R_{n3} + ... + I_{nn}R_{nn} = E_{nn},
\end{array}
\qquad (1.6)
$$

где R_{KK} – полное (собственное) сопротивление *k-го* контура, равное сумме всех сопротивлений, входящих в этот контур;

R_{ik} – сопротивления смежных контуров;

$E_{kk} = \sum_{k=1}^{p} E_K$ – алгебраическая сумма ЭДС, входящих в *к-ый* контур.

Полное (собственное) сопротивление R_{KK} всегда положительное. Если контурные токи в общей (смежной) ветви протекают согласно (сонаправлены), то сопротивления смежных контуров R_{ik} принимается положительным и, если контурные токи направлены встречно, то R_{ik} принимается отрицательным. Со знаком «плюс» берутся ЭДС, направление которых совпадает с контурным током I_{KK}, а со знаком «минус» направление которых не совпадают с I_{KK}.

Контурные токи определяются после решения системы уравнений. Истинный ток (искомый ток) в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этой ветви. Со знаком «плюс» берутся контурные токи, совпадающие с истинным током; со знаком «минус» – несовпадающие с искомым током.

Метод контурных токов целесообразно применять, когда схема содержит много узлов, но мало независимых контуров.

- Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов рационально применять, когда в схеме узлов меньше, чем независимых контуров.

В основе метода узловых потенциалов лежит первый закон Кирхгофа и закон Ома для участка цепи с ЭДС.

Пусть схема имеет число узлов N_Y. Число уравнений, которые должны быть составлены по 1-му закону Кирхгофа, равно $N_Y - 1$.

Принимаем потенциал одного из узлов равным нулю, т.е. условно заземляем его.

Пусть $\varphi_{n+1} = 0$. В общем виде уравнения, составленные по методу узловых потенциалов, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} + \ldots \varphi_n G_{1n} = \sum_{K=1}^{m} E_K G_K ;\\
&\varphi_2 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} + \ldots \varphi_n G_{2n} = \sum_{K=1}^{m} E_K G_K ;\\
&-----------------------------\\
&\varphi_1 G_{n1} + \varphi_2 G_{n2} + \varphi_3 G_{n3} + \ldots \varphi_n G_{n1n} = \sum_{K=1}^{m} E_K G_K ,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где G_{KK} – собственная проводимость *k-го* узла, равная сумме проводимостей всех ветвей, присоединенных к *k-му* узлу:

$$G = \sum_k G_k , \quad G_k = \frac{1}{R_k} , \tag{1.8}$$

G_{kn} – общая проводимость узлов *«k»* и *«n»,* равная сумме проводимостей ветвей, соединяющих узлы *«k»* и *«n»*. Общая проводимость узлов всегда отрицательная:

$$G_{kn} = G_{nk} = -\sum_{kn} G_k , \tag{1.9}$$

$\sum_{1}^{m,} E_K G_K$ – алгебраическая сумма произведений ЭДС источников на проводимости тех ветвей, которые присоединены к узлу *«k»* и содержат источники ЭДС.

Произведение $E_K G_K$ берется со знаком «плюс» в том случае, если в рассматриваемой ветви ЭДС направлена к узлу *«k»,* и со знаком «минус», когда ЭДС направлена от узла *«k»* .

Решая систему (1.7), находят потенциалы всех узлов. Истинные токи рассчитывают по закону Ома для участка цепи, по найденной разности потенциалов двух узлов к которым подсоединена данная ветвь.

- Составление уравнения энергетического баланса или уравнения баланса мощностей

Уравнение баланса мощностей имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{k} E_i \cdot I_i = \sum_{j=1}^{m} I_j^{\,2} \cdot R_j \,, \tag{1.10}$$

где k – количество источников ЭДС; m – количество сопротивлений в схеме.

При составлении уравнения баланса мощностей необходимо учитывать, что в тех ветвях цепи, где направление тока совпадает с направлением ЭДС, соответствующий источник ЭДС следует рассматривать как генератор энергии, а в тех ветвях, где направления ЭДС и тока противоположны, источник ЭДС следует рассматривать как потребитель энергии, и в уравнение баланса он входит со знаком минус. Все сопротивления, независимо от направления протекающего через них тока, являются потребителями энергии.

- Построение потенциальной диаграммы

Потенциальная диаграмма позволяет определить потенциалы во всех точках и узлах схемы. Используется при диагностике возможных неисправностей в работе схемы. Потенциальные диаграммы строятся для выделенных контуров в функции от сопротивления цепи от произвольно выбранного узла. При построении диаграммы принимаем потенциал выбранного узла равным нулю $\varphi_i = 0$. Расчет потенциалов остальных точек производим согласно выбранному направлению обхода контура (по часовой стрелке). Значения токов принимаются в соответствии с рассчитанными в предшествующих пунктах задания со своими знаками направлений.

Построение диаграммы осуществляется в масштабах напряжений

$m_u = \dfrac{В}{мм}$ и сопротивлений $m_r = \dfrac{Ом}{мм}$. На диаграмме по оси абсцисс откладываются значения сопротивлений участков в последовательности расположения их в контуре; по оси ординат – потенциалы соответствующих точек.

Пример потенциальной диаграммы приведён на рисунке 1.11.

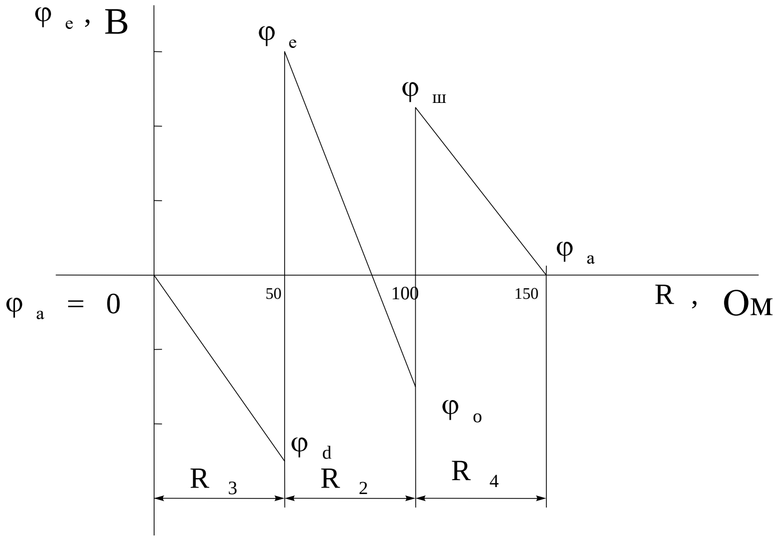


Рисунок 1.11 – Потенциальная диаграмма контура цепи

- Пример расчёта

В таблице 1.3 приведены исходные данные для расчёта параметров разветвлённой цепи на рисунке 1.12.

Таблица 1.3 – Данные для расчёта

Сопротивления, Ом						Источники, В, А		
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	$I_{к2}$
130	40	60	80	110	45	12	13	0,3

Для преобразование заданной схемы в расчетную необходимо произвести замену источника тока на источник напряжения. На рисунке 1.13 приведён принцип замены.

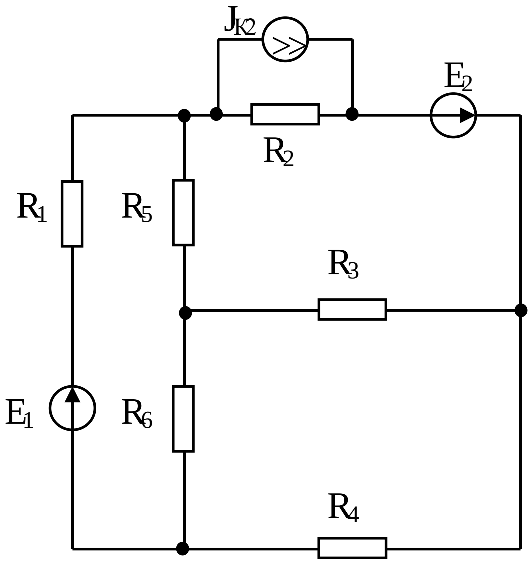


Рисунок 1.12 – Электрическая цепь

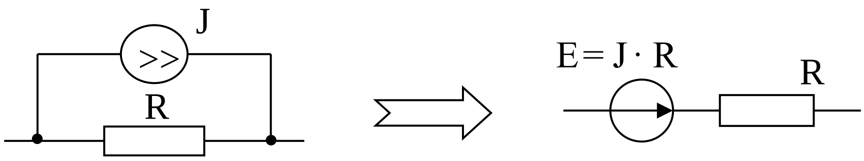


Рисунок 1.13 – Принцип замены источника тока на источник напряжения

Подставив значения из таблицы 1.3, получим:

$$E_2' = R_2 \cdot I_{K2} = 40 \cdot 0{,}3 = 12\ B\,.$$

На рисунке 1.14 приведена расчётная схема после замены источника тока J_{K2} на источник напряжения E_2'.

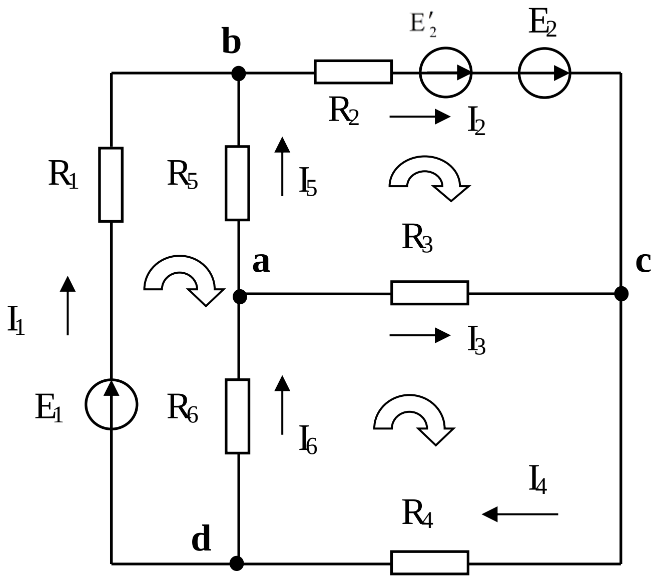


Рисунок 1.14 - Расчётная схема электрической цепи

– Определение токов в ветвях схемы по правилам Кирхгофа

Требуется произвольно задать условно положительное направление токов в ветвях. Определить замкнутые контуры в схеме и произвольно наметить направление их обхода при составлении уравнений (рисунок 1.14).

Уравнения по первому правилу Кирхгофа составляются по выражению (1.2):

$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$, для всех узлов.

$$\begin{aligned} &\text{Узел a:} \quad -I_5 + I_6 - I_3 = 0; \\ &\text{Узел b:} \quad -I_2 + I_5 + I_1 = 0; \\ &\text{Узел c:} \quad I_2 + I_3 - I_4 = 0. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Количество узловых уравнений должно быть на одно меньше количества узлов, так как последнее узловое уравнение будет являться тождеством.

Уравнения по второму правилу Кирхгофа составляются по выражению (1.3):

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = \sum_{i=1}^{m} E_i .$$

$$\begin{aligned} &\text{I контур:} \quad I_1R_1 - I_5R_5 - I_6R_6 = E_1; \\ &\text{II контур:} \quad -I_3R_3 + I_5R_5 + I_2R_2 = E_2' + E_2; \\ &\text{III контур:} \quad I_6R_6 + I_3R_3 + I_4R_4 = 0. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Таким образом, количество уравнений по правилам Кирхгофа равно числу неизвестных токов. После подстановки значений параметров:

$$\begin{cases} -I_5 + I_6 - I_3 = 0; \\ -I_2 + I_5 + I_1 = 0; \\ I_2 + I_3 - I_4 = 0; \\ I_1 \cdot 130 - I_5 \cdot 110 - I_6 \cdot 45 = 12; \end{cases} \qquad (1.13)$$

$$-I_3 \cdot 60 + I_5 \cdot 110 + I_2 \cdot 40 = 25;$$

$$I_6 \cdot 45 + I_3 \cdot 60 + I_4 \cdot 80 = 0.$$

Решение системы уравнений осуществляется с помощью прикладных программ: EUREKA, Mathcad, приложения Excel, или – калькулятора (методом Крамера).

После решения численные величины токов:

$$I_1 = 0{,}147\,A;\, I_2 = 0{,}227\,A;\, I_3 = -\,0{,}118\,A;\, I_4 = 0{,}109\,A;\, I_5 = 0{,}080\,A;\, I_6 = -\,0{,}038\,A.$$

Отрицательный знак для токов I_3, I_6 означает, что истинное направление тока противоположно направлению, выбранному первоначально в качестве положительного.

– Определение токов в ветвях методом контурных токов

Уравнения составляют только по II правилу Кирхгофа для, так называемых, фиктивных (контурных) токов, предполагая, что ток одинаковый для всех участков выбранного контура. Направление контурных токов принимается такое же, как направление обхода по предыдущей задаче (рисунок 1.14).

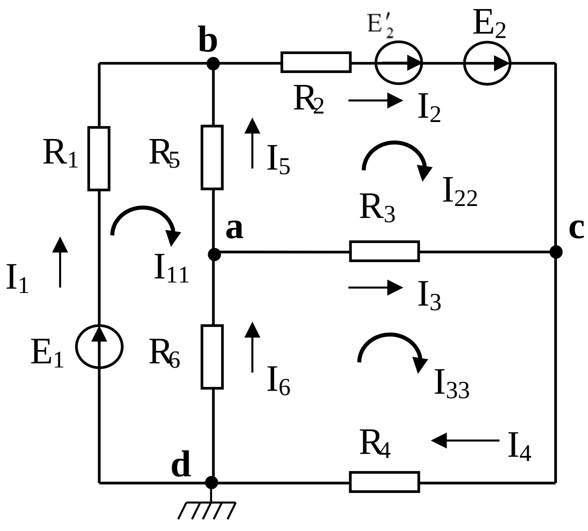


Рисунок 1.15 – Расчётная схема для определения контурных токов

I_{11}, I_{22}, I_{33} – контурные токи.

$$I_{11}\left(R_1 + R_5 + R_6\right) - I_{22}R_5 - I_{33}R_6 = E_1; \tag{1.15}$$

$$I_{22}\left(R_2+R_3+R_5\right)-I_{11}R_5-I_{33}R_3=E_2'+E_2\,;$$
$$I_{33}\left(R_3+R_4+R_6\right)-I_{11}R_6-I_{22}R_3=0\,.$$

После подстановок значений параметров:

$$\begin{cases} I_{11}285-I_{22}110-I_{33}45=12\,; \\ I_{22}210-I_{11}10-I_{33}60=25\,; \\ I_{33}185-I_{11}45-I_{22}60=0\,. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Решение системы из составленных уравнений позволяет определить величину контурных токов: $\mathrm{I}_{11}=0{,}147\,\mathrm{A}$; $\mathrm{I}_{22}=0{,}227\,\mathrm{A}$; $\mathrm{I}_{33}=0{,}109\,\mathrm{A}$.

Для определения фактических токов в ветвях составим уравнения, учитывая, что истинный ток (искомый ток) в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по этой ветви. Со знаком «плюс» берутся контурные токи, совпадающие с истинным током; со знаком «минус» – несовпадающие с искомым током:

$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_{11}=0{,}147\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_2=\mathrm{I}_{22}=0{,}227\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_3=\mathrm{I}_{33}-\mathrm{I}_{22}=0{,}109-0{,}227=-0{,}118\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_4=\mathrm{I}_{33}=0{,}109\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_5=\mathrm{I}_{22}-\mathrm{I}_{11}=0{,}227-0{,}147=0{,}080\,\mathrm{A}$;

$\mathrm{I}_6=\mathrm{I}_{33}-\mathrm{I}_{11}=0{,}109-0{,}147=-0{,}038\,\mathrm{A}$.

– Определение токов в ветвях методом узловых потенциалов

Один из узлов заземляется $\varphi_d=0$ (рисунок 1.15). Уравнения составляются для узловых токов по первому правилу Кирхгофа согласно (1.7, 1.8, 1.9):

узел a: $\varphi_a G_a-\varphi_b G_5-\varphi_c G_3=0$;

узел b: $\varphi_b G_b-\varphi_a G_5-\varphi_c G_2=-(E_2'+E_2)\cdot G_2+E_1\cdot G_1$; (1.17) узел с: $\varphi_c G_c - \varphi_b G_2 - \varphi_a G_3 = (E_2' + E_2) \cdot G_2$,

где $G_a = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$; $G_b = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$; $G_c = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}$.

После подстановок получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_a\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{110} + \frac{1}{45}\right) - \varphi_b \frac{1}{110} - \varphi_c \frac{1}{60} = 0; \\ \varphi_b\left(\frac{1}{130} + \frac{1}{40} + \frac{1}{110}\right) - \varphi_a \frac{1}{110} - \varphi_c \frac{1}{40} = -(12+13) \cdot \frac{1}{40} + 12 \cdot \frac{1}{130}; \\ \varphi_c\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{80} + \frac{1}{60}\right) - \varphi_b \frac{1}{40} - \varphi_a \frac{1}{60} = (12+13) \cdot \frac{1}{40}. \end{cases} \quad (1.18)$$

После решения системы потенциалы узлов равны:

$$\varphi_a = 1{,}69 \text{ В}; \quad \varphi_b = -7{,}14 \text{ В}; \quad \varphi_c = 8{,}77 \text{ В}.$$

Для определения токов в ветвях составляются уравнения для каждой ветви.

Уравнения составляются по схеме:

– выбирается один из узлов, условно его потенциал принимается больше потенциалов других узлов;

– от потенциала выбранного узла отнимаются падения напряжений на сопротивлениях выбранной ветви;

– прибавляются напряжения источников ЭДС, включённых в данную ветвь;

– результирующее напряжение уравновешивается потенциалом второго узла в конце ветви.

Ток, направленный от выбранного узла, принимается со знаком минус,
а ЭДС – со знаком плюс.

$$\begin{gathered} \varphi_a - R_5 I_5 = \varphi_b; \\ \varphi_b + E_2' + E_2 - R_2 I_2 = \varphi_c; \\ \varphi_c + R_3 I_3 = \varphi_a; \\ \varphi_c - I_4 R_4 = 0; \\ \varphi_a + I_6 R_6 = 0; \end{gathered} \quad (1.19)$$

$$\varphi_b + I_1 R_1 - E_1 = 0 .$$

После подстановок:

$$I_5 = (\varphi_a - \varphi_b)/R_5 = (1{,}69 - (-7{,}14))/110 = 0{,}08\,A;$$

$$I_2 = (\varphi_b - \varphi_c + E_2' + E_2)/R_2 = (-7{,}14 - 8{,}77 + 12 + 13)/40 = 0{,}227\,A;$$

$$I_3 = (\varphi_a - \varphi_c)/R_3 = (1{,}69 - 8{,}77)/60 = -0{,}118\,A;$$

$$I_4 = \varphi_c / R_4 = 8{,}77/80 = 0{,}109\,A;$$

$$I_6 = -\varphi_a / R_6 = -1{,}69/45 = -0{,}0375\,A;$$

$$I_1 = (E_1 - \varphi_b)/R_1 = (12 - (-7{,}14))/130 = 0{,}147\,A.$$

– Для проверки результатов вычислений токов проверим баланс мощностей по зависимости (1.10):

$$\sum_{i=1}^{k} E_i \cdot I_i = \sum_{j=1}^{m} I_j^{\,2} \cdot R_j .$$

При составлении уравнения баланса мощностей необходимо поменять направления токов в ветвях с отрицательными значениями, учитывать, что в тех ветвях цепи, где направление тока совпадает с направлением ЭДС, их произведение будет положительным, т.е. мощность генерируется. В ветвях, где направления ЭДС и тока противоположны, источник ЭДС следует рассматривать как потребитель энергии (например - аккумулятор), и в уравнение баланса он входит со знаком минус. Все сопротивления, независимо от направления протекающего через них тока, являются потребителями энергии:

$$E_2' \cdot I_2 + E_2 \cdot I_2 + E_1 \cdot I_1 = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 \qquad (1.20)$$

После подстановки значений параметров:

$$12 \cdot 0{,}227 + 13 \cdot 0.227 + 12 \cdot 0{,}147 = 0{,}021 \cdot 130 + 0{,}051 \cdot 40 + 0{,}013 \cdot 60 + 0{,}011 \cdot 80 +$$
$$+ 0{,}0064 \cdot 110 + 0{,}0014 \cdot 45.$$

$$7{,}439 \approx 7{,}197 .$$

Разница составляет менее 4%, следовательно, расчёты выполнены правильно.

Сравнение результатов, полученных в результате использования двух методов приведено в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Сравнение результатов расчёта

№ тока	Значения токов, полученные с использованием метода контурных токов	Значения токов, полученные с использованием метода узловых потенциалов	Разница в вычислениях
I_1	0,147А	0,147А	0
I_2	0,227А	0,227А	0
I_3	-0,118А	-0,118	0
I_4	0,109А	0,109	0
I_5	0,08	0,08	0
I_6	-0,038	-0,0375	0,0005

Из таблицы видно, что значения токов практически одинаковые, следовательно, можно сделать вывод, что вычисления проведены, верно.

Вычисления выполнялись с помощью вычислительной программы «Эврика».

– Потенциальная диаграмма

Выбираем для построения потенциальной диаграммы контур с наличием источника ЭДС – ***dabd.*** На рисунке 1,16,а приведена схема контура, а на рисунке 1.16,б – потенциальная диаграмма.

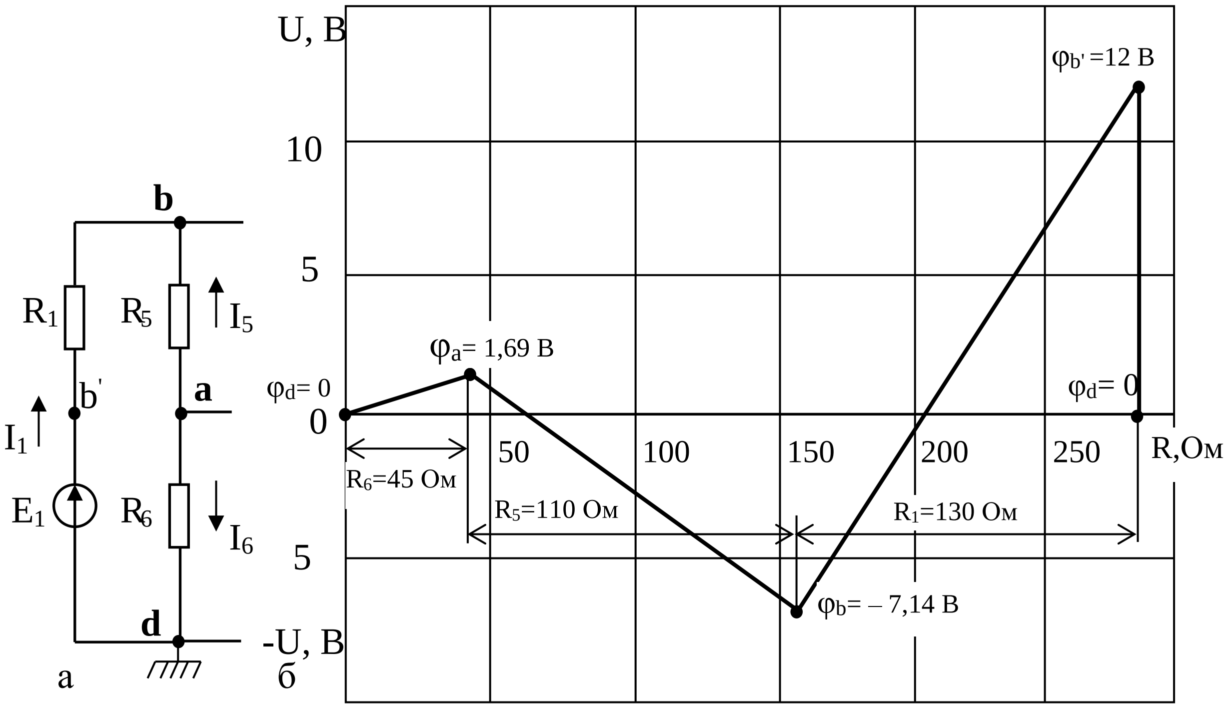


Рисунок 1.16 – Потенциальная диаграмма

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1.Соколенко, Е. В. Теория функций комплексных переменных. Операционное исчисление: учебное пособие / Е. В. Соколенко. — Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. — 199 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/83226.html.

2.Моделирование в электроэнергетике: учебное пособие / А. Ф. Шаталов, И.Н.Воротников, М. А. Мастепаненко [и др.]. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, АГРУС, 2014. — 140 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/47317.html.

Дополнительная литература:

Митрофанов С.В. Моделирование в электроэнергетике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Митрофанов С.В., Семенова Л.А.— Электрон. текстовые данные.— Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2015.— 144 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/61379.html.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. *Университетская библиотека онлайн* http://www.biblioclub.ru
2. *Электронно-библиотечная система IPRbooks» -* http://www.iprbookshop.ru/

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Пятигорск 2025 г.

Содержание

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента.

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. В соответствии с рабочей программой дисциплины «Электроэнергетические системы и сети» предусмотрены следующие виды самостоятельной работы студента:

- самостоятельное изучение литературы;
- самостоятельное решение задач;
- выполнение курсового проекта и контрольной работы.

Цель самостоятельного изучения литературы – самостоятельное овладение знаниями, опытом исследовательской деятельности.

Задачами самостоятельного изучения литературы являются:

- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов.

Цель самостоятельного решения задач - овладение профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю будущей деятельности.

Задачами самостоятельного решения задач являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-3 Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	ИД-2$_{\text{ОПК-3}}$ Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений	Знает методы и алгоритмы применения методов математического аппарата теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений. Владеет математическим аппаратом для разработки математических моделей процессов и явлений при исследовании и решении прикладных задач электроэнергетики и электротехники.
	ИД-3$_{\text{ОПК-3}}$ Применяет математический аппарат теории вероятностей и математической статистики	Знает методы и алгоритмы применения методов теории вероятностей и математической статистики в области электроэнергетики и электротехники. Применяет соответствующий математический аппарат для решения задач электроэнергетики и электротехники.

2. ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Коды реалезуемых копетенций (индикатора)	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
Очная форма обучения 2 семестр						
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по темам 1- 8	Конспект	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	84,48	8,62	93,1
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Подготовка к лекциям	Конспект	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	1,44	0,16	1,6
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Конспект	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	2,88	0,32	3,2
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа	Комплект заданий для контрольной работы	12	2	14
			Итого:	**100,8**	**11,2**	**112**
очно-заочная форма обучения 2 семестр						
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по темам 1- 8	Конспект	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	111,46	8,94	120,4
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Подготовка к лекциям	Конспект	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,72	0,08	0,8
ОПК-3 ИД-2ОПК-3 ИД-3ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Конспект	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	0,72	0,08	0,8
ОПК-3 ИД-2ОПК-3	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа	Комплект заданий для	12	2	14

ИД-3ОПК-3			контрольной работы			
			Итого:	**124,9**	**11,1**	**136**

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ВИДЫ ОТЧЕТНОСТИ ПО НИМ

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

При проведении текущего контроля рейтинговая оценка знаний студента оценивается следующим образом:

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки іполнения	Количество баллов
2 семест			
1	Практическое занятие 2	6	15
2	Практическое занятие 4	10	25
3	Практическое занятие 7	16	15
	Итого за 2 семестр:		**55**

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	**Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)**
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Самостоятельная работа студента начинается с внимательного ознакомления с содержанием учебного курса.

Изучение каждой темы следует начинать с внимательного ознакомления с набором вопросов. Они ориентируют студента, показывают, что он должен знать по данной теме. Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие вопросы темы учебного курса и с какой глубиной раскрыты в конкретном учебном материале, а какие вообще опущены. Требуется творческое отношение и к самому содержанию дисциплины.

Вопросы, составляющие ее содержание, обладают разной степенью важности. Есть вопросы, выполняющие функцию логической связки содержания темы и всего курса, имеются вопросы описательного или разъяснительного характера, а также исторического экскурса в область изучаемой дисциплины. Все эти вопросы не составляют сути понятийного, концептуального содержания темы, но необходимы для целостного восприятия изучаемых проблем.

Изучаемая дисциплина имеет свой категориально-понятийный аппарат. Научные понятия — это та база, на которой строится каждая наука. Понятия — узловые, опорные пункты как научного, так и учебного познания, логические ступени движения в учебе от простого к сложному, от явления к сущности. Без ясного понимания понятий учеба крайне затрудняется, а содержание приобретенных знаний становится тусклым, расплывчатым.

Студент должен понимать, что самостоятельное овладение знаниями является главным, определяющим. Высшая школа создает для этого необходимые условия, помогает будущему высококвалифицированному специалисту овладеть технологией самостоятельного производства знаний.

В самостоятельной работе студентам приходится использовать литературу различных видов: первоисточники, монографии, научные сборники, хрестоматии, учебники, учебные пособия, журналы и др. Изучение курса предполагает знакомство студентов с большим объемом научной и учебной литературы, что, в свою очередь, порождает необходимость выработки у них рационально-критического подхода к изучаемым источникам.

Чтобы не «утонуть» в огромном объеме рекомендованных ему для изучения источников, студент, прежде всего, должен научиться правильно их читать. Правильное чтение рекомендованных источников предполагает следование нескольким несложным, но весьма полезным правилам.

Предварительный просмотр книги включает ознакомление с титульным листом книги, аннотацией, предисловием, оглавлением. При ознакомлении с оглавлением необходимо выделить разделы, главы, параграфы, представляющие для вас интерес, бегло их просмотреть, найти места, относящиеся к теме (абзацы, страницы, параграфы), и познакомиться с ними в общих чертах.

Научные издания сопровождаются различными вспомогательными материалами — научным аппаратом, поэтому важно знать, из каких основных элементов он состоит, каковы его функции.

Знакомство с книгой лучше всего начинать с изучения аннотации — краткой характеристики книги, раскрывающей ее содержание, идейную, тематическую и жанровую направленность, сведения об авторе, назначение и другие особенности. Аннотация помогает составить предварительное мнение о книге.

Глубже понять содержание книги позволяют вступительная статья, в которой дается оценка содержания книги, затрагиваемой в ней проблематики, содержится информация о жизненной и творческой биографии автора, высказываются полемические замечания, разъясняются отдельные положения книги, даются комментарии и т.д. Вот почему знакомство с вступительной статьей представляется очень важным: оно помогает студенту сориентироваться в тексте работы, обратить внимание на ее наиболее ценные и важные разделы.

Той же цели содействует знакомство с оглавлением, предисловием, послесловием. Весьма полезными элементами научного аппарата являются сноски, комментарии, таблицы, графики, списки литературы. Они не только иллюстрируют отдельные положения книги или статьи, но и сами по себе являются дополнительным источником информации для читателя.

Если читателя заинтересовала какая-то высказанная автором мысль, не нашедшая подробного освещения в данном источнике, он может обратиться к тексту источника, упоминаемого в сноске, либо к источнику, который он может найти в списке литературы, рекомендованной автором для самостоятельного изучения.

Существует несколько форм ведения записей:

— план (простой и развернутый) — наиболее краткая форма записи прочитанного, представляющая собой перечень вопросов, рассматриваемых в книге или статье. Развернутый план представляет собой более подробную запись прочитанного, с детализацией отдельных положений и выводов, с выпиской цитат, статистических данных и т.д. Развернутый план —

неоценимый помощник при выступлении с докладом на конкретную тему на семинаре, конференции;

— тезисы — кратко сформулированные положения, основные положения книги, статьи. Как правило, тезисы составляются после предварительного знакомства с текстом источника, при его повторном прочтении. Они помогают запомнить и систематизировать информацию.

Составление конспектов

Большую роль в усвоении и повторении пройденного материала играет хороший конспект, содержащий основные идеи прочитанного в учебнике и услышанного в лекции. Конспект — это, по существу, набросок, развернутый план связного рассказа по основным вопросам темы.

В какой-то мере конспект рассчитан (в зависимости от индивидуальных особенностей студента) не только на интеллектуальную и эмоциональную, но и на зрительную память, причем текст конспекта нередко ассоциируется еще и с текстом учебника или записью лекции. Поэтому легче запоминается содержание конспектов, написанных разборчиво, с подчеркиванием или выделением разрядкой ключевых слов и фраз.

Самостоятельно изученные темы предоставляются преподавателю в форме конспекта, по которому происходит собеседование. Теоретические темы курса (отдельные вопросы), выносимые на самостоятельное изучение, представлены ниже.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ

Изучение дисциплины «Методы решения задач электроэнергетики и электротехники» завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

При подготовке к экзамену необходимо использовать конспекты лекций по дисциплине, учебники и учебные пособия (из списка основной и дополнительной литературы) или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Вопросы к экзамену

Знать

1. Основные понятия, определения и теоремы теории графов
2. Связь между графом и матрицей
3. Матрица и уравнения сечений
4. Матрица и уравнения фундаментальных контуров
5. Граф электрической цепи
6. Основы теории сигнальных графов

7. Методика проведения анализа электрической цепи с помощью сигнальных графов
8. Комплексные числа
9. Геометрическое представление комплексных чисел
10. Модуль и аргумент комплексного числа
11. Тригонометрическая форма комплексного числа
12. Показательная форма комплексного числа
13. Алгебраические критерии устойчивости
14. Частотные критерии устойчивости
15. Транспортная задача
16. Топологические (геометрические) свойства электрической цепи

Уметь

1. Преобразования фундаментальных матриц
2. Методы расчета, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа
3. Сложение комплексных чисел
4. Вычитание комплексных чисел
5. Умножение комплексных чисел
6. Деление комплексных чисел
7. Определение параметров нагрузки в разветвленной цепи
8. Определение фактических токов электрической цепи
9. Определение токов в ветвях с использованием метода узловых потенциалов

Владеть

1. Матричный метод расчета
2. Метод расчета, основанный на применении законов Кирхгофа
3. Метод контурных токов
4. Метод узловых потенциалов
5. Потенциальная диаграмма
6. Метод эквивалентного генератора
7. Энергетический баланс в электрической цепи
8. Построение векторной диаграммы
9. Переход от комплексных величин к временным функциям
10. Применение закона Кирхгофа для определения тока в ветвях цепи
11. Построение потенциальной диаграммы для контура

1.Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание дисциплины освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание дисциплины освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Перечень основной литературы:

1. Кобелев А.В. Режимы работы электроэнергетических систем [Электронный ресурс] : учебное пособие для бакалавров и магистров направления «Электроэнергетика» / А.В. Кобелев, С.В. Кочергин, Е.А. Печагин. — Электрон. текстовые данные. — Тамбов: Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2015. — 80 с. — 978-5-8265-1411-5. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/64564.html

2. Ананичева, С. С. Анализ электроэнергетических сетей и систем в примерах и задачах : учебное пособие / С. С. Ананичева, С. Н. Шелюг. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 176 с. — ISBN 978-5-7996-1784-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/65910.html

3. Моделирование в электроэнергетике [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Ф. Шаталов [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, АГРУС, 2014. — 140 с. — 978-5-9596-1059-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/47317.html

4. Короткевич, М. А. Эксплуатация электрических сетей : учебник / М. А. Короткевич. — Минск : Вышэйшая школа, 2014. — 351 с. — ISBN 978-985-06-2397-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/35574.html

Перечень дополнительной литературы:

1. Фадеева, Г. А. Проектирование распределительных электрических сетей : учебное пособие / Г. А. Фадеева, В. Т. Федин ; под редакцией В. Т. Федин. — Минск : Вышэйшая школа, 2009. — 365 с. — ISBN 978-985-06-1597-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/20124.html

2. Русина, А. Г. Балансы мощности и выработки электроэнергии в электроэнергетической системе : учебно-методическое пособие / А. Г. Русина, Т. А. Филиппова. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2012. — 55 с. — ISBN 978-5-7782-1935-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/45078.html.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. http://www.biblioclub.ru -ЭБС "Университетская библиотека онлайн"

2. http://www.iprbookshop.ru/ - Электронно- библиотечная система IPRbooks
3. http://e.lanbooks.com - Электронно-библиотечная система Лань
4. http://docs.cntd.ru/ Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации ТЕХЭКСПЕРТ
5. Профессиональные справочные системы Техэксперт http://vuz.kodeks.ru/