МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине
«Математический анализ»
для направления подготовки 10.03.01 Информационная безопасность
направленность (профиль) Безопасность компьютерных систем

Пятигорск
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности.

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Математический анализ» проводятся в учебной аудитории с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
2	1.Способы задания последовательности. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Ограниченные и неограниченные последовательности.	1	1
2	2.Вычисление предела последовательности. Число е.	1	1
2	3-4.Вычисление предела функции. Односторонние пределы функций.	1	1
2	5.Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые.	1	1
3	6-7.Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования.	1	1
3	8-9.Дифференцирование сложной и обратной функций.	1	1
3	10.Геометрический и механический смысл производной.	2	2
3	11-12.Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.	2	2
4	13.Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции.	2	2
4	14-15.Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.	2	2
4	16.Исследование функций при помощи производных и построение их графиков.	2	2

5	17-18.Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.	2	2
	Итого за 1 семестр	18	18
6	19-20.Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.	4	4
7	21.Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.	2	2
7	22.Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций	2	2
8	23.Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	2	2
9	24.Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.	2	2
10	25.Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.	2	2
10	26.Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.	2	2
11	27.Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.	2	2
12	28.Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.	2	2
13	29.Приложения двойного интеграла.	2	2
14	30.Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.	2	2
15	31.Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	2	2
16	32.Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.	2	2
17	33.Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.	2	2
17	34.Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.	2	2
	Итого за 2 семестр	32	32

4. Содержание практических работ

Раздел 1. Введение в анализ.

Тема 2. Пределы и непрерывность.

Практическое занятие 2.1. Способы задания последовательности. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Если по некоторому закону каждому натуральному n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность: $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

a_n – члены последовательности занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров.

Примеры числовых последовательностей:

1) a, $a + d$, …, $a+(n-1)d$, … - арифметическая прогрессия.
2) b, bq, …,bq^{n-1}, … - геометрическая прогрессия.
3) 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, … - последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$, со все возрастающей точностью.

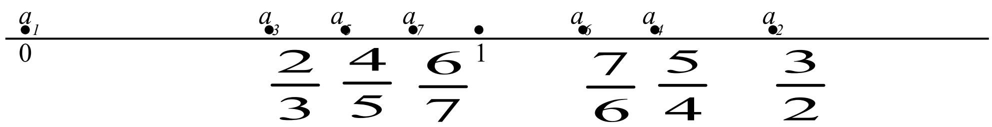
Иногда последовательность задается тем, что указано непосредственно выражением для a_n (пример 1, 2). В других случаях нам может быть неизвестно выражение для общего члена a_n, как в примере 3. Тем не менее: последовательность считается заданной, если мы владеем правилом, по которому может быть вычислен любой член последовательности лишь только известен его номер.

Предел числовой последовательности

Дана последовательность $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. Выпишем ее члены

n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
a_1=0	$a_2=\frac{3}{2}$	$a_3=\frac{2}{3}$	$a_4=\frac{5}{4}$	$a_5=\frac{4}{5}$	$a_6=\frac{7}{6}$	$a_7=\frac{6}{7}$

Изобразим члены этой последовательности на числовой оси:



Можно заметить, что члены последовательности a_n с ростом n как угодно близко приближаются к единице. При этом абсолютная величина разности $|a_n$-1$|$ становится все меньше и меньше. Действительно:

$|a_1-1| = |0-1| = 1$ $\qquad |a_2-1| = |\frac{3}{2}-1| = \frac{1}{2}$ $\qquad |a_3-1| = |\frac{2}{3}-1| = \frac{1}{3}$ и т.д.

$|a_n-1| = \left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| = \frac{1}{n}$, т.е. с ростом n $|a_n-1|$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа.

Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ если для любого сколь угодно малого положительного числа ε>0 существует такой номер N (зависящий от ε) N = N_ε, что для всех членов последовательности с номерами n>N верно неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$.

Иногда говорят, что если А есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, то эта последовательность сходится к А. Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа А. Важно отметить, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз и навсегда: он зависит от выбора числа ε. При уменьшении ε, соответствующий номер N_ε, вообще говоря увеличивается.

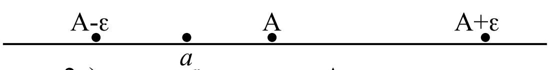
Для геометрической интерпретации понятия предела числовой последовательности распишем неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Изобразим числа А, А + ε, А-ε и значение a_n точками на числовой оси. Получим наглядно геометрическое истолкование предела последовательности:



Какой бы малый отрезок (длины 2ε) с центром в точке А ни взять, все точки a_n начиная с некоторой из них должны попасть внутрь этого отрезка (так, что вне его может остаться лишь конечное число этих точек).

<u>Пример</u>

Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

План решения:

1. По определению число a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\forall\varepsilon > 0$ неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ имеет решение $n > N(\varepsilon)$.

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Если решение имеет вид $n > N(\varepsilon)$, то a — предел числовой последовательности $\{a_n\}$.

Замечание. Если решение неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ нельзя представить в виде $n > N(\varepsilon)$, то число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Пример. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3-2} = 2.$$

Решение.

1. По определению число 2 называется пределом числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{2n^3}{n^3-2} - 2\right| < \varepsilon.$$

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$\left|\frac{2n^3}{n^3-2} - 2\right| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Неравенство имеет решение $n > N(\varepsilon) = \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$. Следовательно, 2 — предел числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$.

Ответ. $n > \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$.

Задачи

Задача 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

1. $a_n = \dfrac{2n-2}{3n-1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$ 2. $a_n = \dfrac{4n-2}{2n+3}, \quad a = 2.$

3. $a_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$ 4. $a_n = \dfrac{5n+2}{3n+1}, \quad a = \dfrac{5}{3}.$

5. $a_n = \dfrac{5n+2}{n+1}, \quad a = 5.$ 6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}, \quad a = 4.$

7. $a_n = \dfrac{3-n^3}{1+n^3}, \quad a = -1.$ 8. $a_n = \dfrac{6n-2}{2n+1}, \quad a = 3.$

9. $a_n = \dfrac{3+8n^2}{1+4n^2}, \quad a = 2.$ 10. $a_n = \dfrac{3n}{n+1}, \quad a = 3.$

Задача 2. Написать последовательности с общими членами:

1) $x_n = \frac{2n}{3n-2}$; 2) $x_n = n!$; 3) $x_n = \frac{1}{n}$;

4) $x_n = -2^n$; 5) $x_n = \frac{1}{2^n}$; 6) $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$;

7) $x_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$; 8) $x_n = \frac{\frac{\sin n\pi}{2}}{n}$;

9) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ для } n \text{ нечетных;} \\ \frac{n}{n+1} \text{ для } n \text{ четных;} \end{cases}$ 10) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Задача 3. Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \dots$;

2) $\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{5\cdot 6}, \frac{1}{7\cdot 8}, \frac{1}{9\cdot 10}, \dots$;

3) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$;

4) $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \dots$;

5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots$;

6) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots$;

7) $\frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \dots$

Вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Перечислите способы задания числовой последовательности.
3. Какая последовательность называется ограниченной; ограниченной сверху; ограниченной снизу; неограниченной? Приведите примеры перечисленных последовательностей.
4. Дайте определение предела последовательности.
5. Как называется последовательность, имеющая конечный предел?
6. Какая последовательность называется монотонной?
7. Привести примеры:

1) возрастающей ограниченной последовательности;
2) возрастающей неограниченной последовательности;
3) убывающей ограниченной последовательности;
4) убывающей неограниченной последовательности.

Практическое занятие 2.2. Вычисление предела последовательности. Число *e*.

Последовательность a_n имеющая своим пределом 0 называется бесконечно малой величиной или, просто, бесконечно малой.

Леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. Сумма любого конечного числа бесконечного малых есть также величина бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.

Бесконечная последовательность $|x_n|$ называется бесконечно большой, если она по абсолютной величине становится и остается большей сколь угодно большего наперед заданного числа E>0, начиная с некоторого места $|x_n| > E \quad (\text{для} \quad n > N_E)$.

Если последовательность $|x_n|$ является бесконечно большой и сохраняет определенный знак (+ или -) то в соответствии со знаком, говорят, что последовательность $|x_n|$ имеет предел +∞ или -∞ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad x_n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Если $|x_n|$ является бесконечно большой, то ее обратная величина $a_n = \frac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой (верно и обратно).

Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.

Теоремы о пределах. Предельный переход в равенствах и неравенствах

1. Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при всех их изменениях равны: $x_n = y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, то равны и эти пределы A= B.

2. Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ всегда выполняется неравенство $x_n \ge y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, то A ≥ B.

3. Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ всегда выполняются неравенства $x_n \le y_n \le z_n$ причем $x_n \to A$ $z_n \to A$ (т.е. к общему пределу A), то и последовательность $\{y_n\}$ имеет тот же предел, т.е. $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

Арифметические операции над полследовательностями

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$

2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то их произведение также имеют конечный предел $\lim x_n\ y_n = a \cdot b$

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ причем b≠0, то их отношение также имеет конечный предел $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281$$ - иррациональное число.

<u>Пример</u>

Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}.$$

Решение. Здесь $(2n+1)^2-(n+1)^2 = 3n^2+2n$ — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2) и n^2+n+1 — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2).

1. Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$(2n+1)^2-(n+1)^2 = n^2\left(3+\frac{2}{n}\right).$$

2. Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$n^2+n+1 = n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+2/n)}{n^2(1+1/n+1/n^2)}.$$

4. Сокращая n^2 и используя теорему о пределе частного, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3+2/n)}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n+1/n^2)} = 3.$$

Ответ. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = 3.$

Задачи. Вычислить пределы:
Задача 1.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)^2-(1+n)^2}{(1+n)^2-(2-n)^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n+2)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}$.

Задача 2.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n+5}\right)^{n+3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^3}$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3n^2+1}$.

Задача 3.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

Задача 4.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Вопросы

1. Дайте определение бесконечно малой последовательности. Приведите пример.
2. Сформулируйте леммы о бесконечно малых.
3. Какая последовательность называется бесконечно большой?
4. Охарактеризуйте взаимосвязь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.
5. Какие арифметические операции можно выполнять над последовательностями? Опишите алгоритм выполнения арифметических операций над последовательностями.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Практическое занятие 2.3-2.4. Вычисление предела функции. Односторонние пределы функций.

Число А называется пределом функции y=f(x) при x стремящемся к *a*, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что при $|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняем неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Число А называется правосторонним пределом или пределом справа функции f(x) в точке x=*a* если для $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, что при $0<x-a<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$

Число А называется левосторонним пределом или пределом слева функции f(x) в точках x=*a*, если для любого $\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, что при $0<a-x<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A$.

<u>Пример.</u> Показать, что $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$.

Пусть $\varepsilon>0$ – производное число. Найдем такое число $\delta>0$ что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-1|<\delta$ выполнялось бы неравенство $|x^2-1|<\varepsilon$

$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|(x-1)(x-1+2)|=|(x-1)^2+2(x-1)|\le|(x-1)^2|+2|x-1|\le\delta^2+2\delta<\varepsilon$

$\delta^2+2\delta-\varepsilon<0$ $\delta^2+2\delta-\varepsilon=0$

δ=-1 $\sqrt{1+\varepsilon}$ $\delta_{1,2}$=-1 $\pm\sqrt{1+\varepsilon}$ т.к $\delta > 0$

т.е. по любому ε=0,3 δ=-1+$\sqrt{1{,}3}$.

Функция α(x) называется бесконечно малой при x→a, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, т.е. если для ∀ε>0 существует δ>0, что для всех 0<|x-a|<δ, выполняется неравенство |α(x) |<ε. Бесконечно малую функцию |α(x) | называют также бесконечно малой величиной.

Функция f(x) называется бесконечно большой при x→a, если для ∀ M>0 существует такое δ>0, что $|f(x)| > M$ для всех x, удовлетворяющих неравенству 0<|x-a|<δ, обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

<u>Примеры вычисления предела</u>

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x(x-1)}=-3$ (разложение на множители).

3) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(\sqrt{x-4}-2)(\sqrt{x-4}+2)}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-4-4)}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)}=\dfrac{1}{4}$

(умножение на сопряжение).

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{3x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$ (деление на старшую степень).

Задачи. Вычислить предел функции:

Задача 1.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^2+x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+2}{x^2-x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3-14}{5x^4+x^3+x^2+x-1}$.

Задача 2.

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{x+3}=-1.$ 2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x+2}=-10.$

3. $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{6x^2+5x-1}{x+1/2}=-1.$ 4. $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{9x^2+12x+3}{x+1/3}=6.$

5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x+1}=-5.$ 6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5.$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-9x+3}{x-1}=3.$ 8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-15x+9}{x-3}=9.$

9. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6x^2+20x+6}{x+3}=-16.$ 10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-3x-2}{x-1}=7.$

Задача 3.

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$.

Вопросы

1. Дайте определение предела функции, предела функции слева (справа).
2. Дайте определение функции y=f(x) при x→∞.
3. Сформулируйте определение бесконечно малой (бесконечно большой) функции.
4. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
5. Охарактеризуйте связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.

6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Практическое занятие 2.5. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ (раскрывает неопределенность типа $\frac{0}{0}$).

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$.

Возможно также применение следующих формул:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k.$$

Чтобы сравнить две бесконечно малые функции нужно найти предел их отношения, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0 \text{ тогда } \alpha(x) \text{ более высокого порядка, чем} \beta(x);\\ \infty \text{ - } \beta(x) \text{ более высокого порядка, чем } \alpha(x);\\ const \text{ - } \alpha(x) \text{ и } \beta(x) \text{ одного порядка малости;}\\ 1 \text{ - } \alpha(x) \text{ и } \beta(x) \text{ эквивалентные бесконечно малые.}\end{cases}$$

Эквивалентные бесконечно малые обозначаются $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема. Пусть $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$ и $\beta(x)\sim\beta'(x)$. Если существует предел отношения двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых.

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$

<u>Пример</u>. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$.

Задачи. Вычислить предел:
Задача 1.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+6x}{\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{\ln(1+x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 5x-\cos 3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{e^{2x^2}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{3\,\mathrm{arctg}\,2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{e^{2x}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1-2x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-2x)-1}$.

Задача 2.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 5x}{\sin^2 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{1+\cos 2\pi x}{\mathrm{tg}^2 2\pi x}$.

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 8\pi x}$.

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{\sin\pi x}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{\sin\pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}$.

Задача 3.

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x3^x}{1+x2^x}\right)^{1/x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x^23^x}{1+x^24^x}\right)^{1/\mathrm{tg}^3 x}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 3x}{1+\sin x\cos 2x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}(1-\ln\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}(2-5^{\sin^2 x})^{1/x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Вопросы

1. Сформулируйте первый замечательный предел.
2. Сформулируйте второй замечательный предел.
3. Как сравнивают бесконечно малые?
4. Какие бесконечно малые называют эквивалентными?
5. Сформулируйте теорему о замене эквивалентными бесконечно малыми.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Практическое занятие 3.1-3.2. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования.

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u=\varphi(x)$ *имеет в точке* x *производную* u', *то в этой точке*

$$(Cu)'=Cu'\quad(C=const).$$

Пример

$$y=5\cos x,\qquad y'=(5\cos x)'=5(\cos x)'=-5\sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

<u>Пример</u>

$$y=x^5-3x^2+2x-1,$$

$$y'=(x^5)'-(3x^2)'+(2x)'-(1)'=5x^4-6x+2.$$

III. Если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ имеют в точке x производные, то справедлива формула

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

<u>Пример</u>

$y=(x^2-3x)\sin x,$

$y'=(x^2-3x)'\sin x+(x^2-3x)(\sin x)'=(2x-3)\sin x+(x^2-3x)\cos x.$

<u>Пример</u>

$y=(x-1)(x-2)(x-3),$

$y'=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$

IV. Если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ имеют в точке x производные, причем в этой точке $v\neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

<u>Пример</u>

$y=\dfrac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x\neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$y=\frac{a}{u}$; $y'=-\frac{a}{u^2}\cdot u'$ (a — постоянная величина);

$y=u^n$; $y'=nu^{n-1}\cdot u'$

(n — любое действительное число)

$y=\sqrt{u}$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$;

$y=a^u$; $y'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$; $y=e^u$; $y'=e^u u'$; $a>0$, $a\neq 1$;

$y=\log_a u$; $y'=\frac{1}{u}u'\log_a e=\frac{u'}{u\ln a}$;

$y=\ln u$; $y'=\frac{1}{u}u'$;

$y=\sin u$; $y'=\cos u\cdot u'$;

$y=\cos u$; $y'=-\sin u\cdot u'$;

$y=\operatorname{tg} u$; $y'=\frac{1}{\cos^2 u}u'$;

$y=\operatorname{ctg} u$; $y'=-\frac{1}{\sin^2 u}u'$;

$y=\sec u$; $y'=\sec u\operatorname{tg} u\cdot u'$;

$y=\operatorname{cosec} u$; $y'=-\operatorname{cosec} u\cdot\operatorname{ctg} u\cdot u'$;

$y=\arcsin u$; $y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

$y=\arccos u$; $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

$y=\operatorname{arctg} u$; $y'=\frac{1}{1+u^2}u'$;

$y=\operatorname{arcctg} u$; $y'=-\frac{1}{1+u^2}u'$.

Задачи

Задача 1. Найти производную функции в точке x=0:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^3+x^2\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x^2\cos\dfrac{1}{9x}\right)+2x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x\cos\dfrac{1}{5x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\operatorname{tg}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}-1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. 1. $y=2x^3+5x^2-7x-4$
2. $y=\sqrt{x}$
3. $y=-ctg\,x-x$
4. $y=\dfrac{1}{x^2}$
5. $y=\sqrt[3]{x^2}$
6. $y=5\sin x+3\cos x$
7. $y=5(tg\,x-x)$
8. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$
9. $y=2^{x^2}$
10. $y=x\sqrt{x}$

Вопросы

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.

Практическое занятие 3.3-3.4. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x. С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x. В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x.

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u=\varphi(x)$.

<u>Пример</u> $y=u^3$. Если взять $u=x^2-3x+1$, то получим сложную функцию $y=\left(x^2-3x+1\right)^3$.

<u>Пример</u> $y=\sqrt{u}$, $u=2-x$. Тогда $y=\sqrt{2-x}$.

<u>Пример</u> $y=\dfrac{1}{u+|u|}$, $u=\sin x$. Тогда $y=\dfrac{1}{\sin x+|\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u', то существует и конечная производная от y по x, причем $y'=f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример $y = \left(1 + x^2\right)^5$. Положим $y = u^5$, $u = 1 + x^2$. $y' = 5u^4 u' = 5\left(1 + x^2\right)^4 \left(1 + x^2\right)' = 10x\left(1 + x^2\right)^4$.

Пример $y = \sin 3x$, т. е. $y = \sin u$, где $u = 3x$. $y' = \cos u \, u' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример $y = (1 + \sin 2x)^3$,
$y' = 3(1 + \sin 2x)^2 (1 + \sin 2x)' = 3(1 + \sin 2x)^2 \cos 2x (2x)' = 6(1 + \sin 2x)^2 \cos 2x$.

Пусть дана функция $y = f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, $\mathcal{E}$ - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения $\mathcal{E}$. Если функция $y = f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E, для которого $y = f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x = g(y)$, которую называют обратной для функции $y = f(x)$. Она имеет своей областью задания множество $\mathcal{E}$, а областью изменения E; E и $\mathcal{E}$ поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x) \neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Задачи

Задача 1. Найти производные заданных функций:

1. $y = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. 3. $y = \ln^2(1 - \cos x)$.

4. $y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$. 5. $y = \dfrac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + \ln^2 3}$. 6. $y = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y = \operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$. 9. $y = \ln(1 + \sqrt{\operatorname{th} x})$.

10. $y = \ln \sin 3 - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 2. Вычислить производную функции

а) $y = 5^x + x\ln x$, в точке $x_0 = 1$;

б) $y(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x - 4x^3 + 5$, в точке $x_0 = 1$;

в) $f(x) = 2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$;

г) $f(x) = 4x^3 + 6x + 3$ в точке $x_0 = 1$.

Задание 3. Вычислить производные:

а)

1) $y = \arcsin 5x$; **2)** $y = \arcsin \sqrt{x}\ (x > 0)$; **3)** $y = \arcsin mx$;

4) $y = \arccos 6x$; **5)** $y = \arccos(1 - x^2)$; **6)** $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.

б)

1) $y=\operatorname{arctg} 5x$; 2) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 3) $y=\operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y=\operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x^2}$.

в)

1) $y=\ln(ax+b)$; 2) $y=\ln^5 x$; 3) $y=\ln\sin x$;

4) $y=\ln\operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y=x\ln x$; 6) $y=\frac{\ln x}{x}$;

7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 8) $y=\ln(\ln x)$.

Вопросы

1. Какая функция называется сложной?
2. Объясните правила дифференцирования сложной функции.
3. Какая функция называется обратной данной?
4. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Практическое занятие 3.5. Геометрический и механический смысл производной.

Скорость v точки M, движущейся по прямой, есть производная от расстояния s по времени t, т. е.

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Угловой коэффициент касательной к непрерывной кривой $y=f(x)$ есть производная от y по x (в соответствующей точке):

$$tg\alpha=y'$$

или

$$tg\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

При этом если существует касательная, то существует и производная, и наоборот. Случаю касательной, не параллельной оси Oy, отвечает конечная производная; случаю касательной, параллельной оси Oy, отвечает бесконечная производная.

Пример Точка движется по прямой по закону $s=t^3$ (путь s измеряется в метрах, время t - в секундах). Найти ее скорость в момент $t=5$.

Решение. Скорость в любой момент t равна: $v=\frac{ds}{dt}=3t^2$.

Поэтому $v\big|_{t=5}=3\cdot 5^2=75\ м/сек$.

Пример Точка, оставаясь на прямой, совершает колебательное движение по закону $s=\sin t$. В какие моменты времени скорость обращается в нуль?

Решение. Скорость в любой момент имеет значение

$$v=\frac{ds}{dt}=\cos t$$

Поэтому $v=0$ при $t=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n=0,1,2,...$

Пример Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y=\frac{1}{x}$ в точке $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Угловой коэффициент касательной в любой точке дается формулой

$$k=y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Поэтому для точки $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ $k=-\frac{1}{4}$. Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0,y_0) с угловым коэффициентом k, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

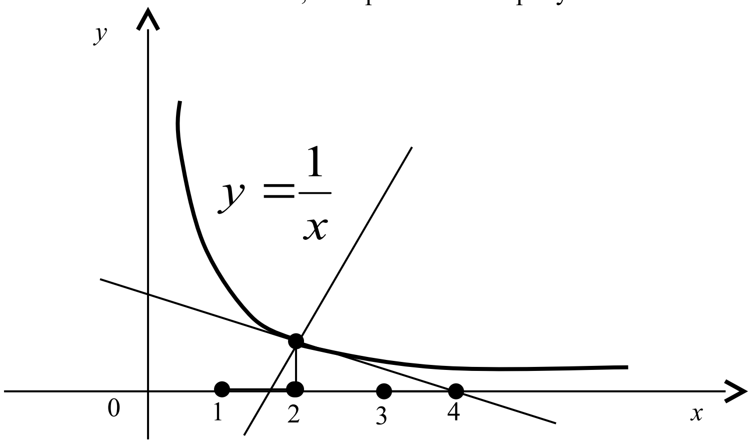
В нашем случае мы получаем

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),$$

или

$$x + 4y - 4 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой касательной, изображенной на рисунке.



Угловой коэффициент нормали к кривой в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ имеет значение

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = 4$$

(в силу условия перпендикулярности двух прямых). Следовательно, уравнение нужной нам нормали имеет вид

$$y - \frac{1}{2} = 4(x - 2)$$

или

$$8x - 2y - 15 = 0.$$

Задачи

Задача 1. Точка движется по прямой по закону $S = 5t^3 - 3t^2 + 4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t – в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = (1 + \Delta t)$, считая $\Delta t =$ 0,5; 0,3; 0,1. Определить также истинную скорость в момент t = 1 сек.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Задача 2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции *y* в точке:

1. $y = x - x^2, \quad a = 1.$
2. $y = x^2 + x + 1, \quad a = -1.$
3. $y = x^3 + x, \quad a = 1.$
4. $y = \sqrt{x} - 2, \quad a = 4.$
5. $y = x^2 + \sqrt{x^3}, \quad a = 1.$
6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 9, \quad a = -27.$
7. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}, \quad a = 9.$
8. $y = 32\sqrt[4]{x} - x, \quad a = 16.$
9. $y = x^2 - x - 1, \quad a = 1.$
10. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2}, \quad a = 2.$

Задача 3. Составить уравнения касательной и нормали к графикам функций, заданным параметрически:

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = 2t - t^2, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arcsin t, \quad t_0 = -1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin^2 t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x = t\sin t + \cos t, \\ y = \sin t - t\cos t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

Вопросы

1. Каков геометрический смысл производной?
2. Каков механический смысл производной?
3. Запишите уравнение касательной к графику функции в общем виде.

Практическое занятие 3.6-3.7. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Пусть необходимо вычислить производную функции, заданной параметрически, если зависимость *y* от *x* задана посредством параметра t:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

то зависимость y' от x задается посредством параметра t формулами

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}. \end{cases} \qquad (1)$$

Вычисляем $f'(t)$ и $g'(t)$, подставляем в формулу (1) и записываем ответ.

Пример

Найти производную y'_x, если

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln \dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}} \, \frac{\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - (1+\sqrt{1+t^2})}{t^2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получаем

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y' = \dfrac{1+t^2}{t}. \end{cases}$$

Если независимая переменная *x* и функция *y* связаны уравнением вида *f(x,y)=0*, которое не разрешено относительно *y*, то *y* называется неявной функцией *x*. Несмотря на то, что уравнение *f(x,y)=0* не разрешено относительно *y*, оказывается возможным найти производную от *y* по *x*. Прием вычисления производной неявной функции состоит в том, что обе части уравнения *f(x,y)=0* дифференцируются по *x* с учетом, что *y* есть функция *x*. Из полученного уравнения определяется y'.

Пример Найти производную от неявной функции 5x+3y-7=0.

Дифференцируя по x обе части равенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна 0, получаем $5 + 3y' = 0;\ 3y' = -5;\ y' = -\dfrac{5}{3}$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка. Эта производная сама является *функцией* от x и, может быть, в свою очередь имеет производную. Производную от функции $y' = f'(x)$ называют *второй* производной (или производной *второго порядка*) от функции $y=f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y'',\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad f''(x),\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Может случиться, что и вторая производная в свою очередь имеет производную; эту производную называют *третьей* производной (или производной *третьего порядка*) от функции $y=f(x)$ и обозначают каким-либо из символов

$$y''',\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad f'''(x),\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x).$$

Аналогично вводится *четвертая, пятая* и другие производные - производные любого порядка. Для обозначения производной n-го порядка употребляются символы:

$$y^{(n)},\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

Иногда для указания той переменной, по которой берется производная, пишут

$$y''_{xx},\quad y'''_{xxx},\quad \ldots$$

или, более коротко,

$$y''_{x^2},\quad y'''_{x^3},\quad \ldots$$

Пример

$$y=2x^3,\quad y'=6x^2,\quad y''=12x,\quad y'''=12,\quad y^{(4)}=y^{(5)}=\ldots=0.$$

Пример

$$y=2x^3-5x^2+1,\quad y'=6x^2-10x,\quad y''=12x-10,\quad y'''=12,\quad y^{(4)}=y^{(5)}=\ldots=0.$$

Пример

$y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,\quad y^{(4)}=\sin x$, значения последующих производных чередуются в том же порядке.

Чтобы имело смысл говорить о конечном или бесконечном значении $y^{(n)}$ в точке x_0, нужно, чтобы $y^{(n-1)}$ как функция от x была определена и конечна в некотором промежутке, содержащем точку x_0. Таким образом, когда говорят, что в точке x_0 имеется конечная или бесконечная *n*-я производная, то тем самым подразумевают существование конечной $(n-1)$-й производной в некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Задачи

Задача 1. Вычислить производную функции:

а)

1) $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right);$

2) $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right);$

3) $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right).$

б)

1. $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$. 2. $y=x^x3^{\sqrt{x}}$.

5. $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln x}$. 6. $y=x^{\sqrt{x}}2^{\sin x}$.

7. $y=x^{2^{\cos x}}$. 8. $y=x^{\operatorname{tg}x}$.

9. $y=(\sin 3x)^{\ln\sin 3x}$. 10. $y=x^{2^x}3^x$.

Задание 2. Найти производные n-го порядка заданных функций:

1. $y=\sin 2x+\cos 3x$. 2. $y=\sin(3x+1)+\cos 2x$. 3. $y=2^{3x}$.

4. $y=\ln(2x+4)$. 5. $y=\frac{x}{x+1}$. 6. $y=\frac{x+1}{2x+3}$.

7. $y=3^{2x+1}$. 8. $y=\ln(3x+1)$. 9. $y=5^{2x+4}$.

10. $y=\sqrt{x}$.

Вопросы

1. Какая функция считается заданной неявно?

2. Запишите формулы дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Для дифференцирования каких функций целесообразно применение метода логарифмического дифференцирования?
4. Дайте определение производной порядка n. Как обозначаются производные высших порядков?
5. Опишите особенности дифференцирования функций, заданных параметрически.

Тема 4. Приложения производной.

Практическое занятие 4.1. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции.

Речь пойдет о вычислении предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших. В первом случае говорят, что имеют дело с «неопределенностью типа $\frac{0}{0}$», во втором случае – с «неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$». Конечно, сами по себе символы $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ лишены смысла, и их используют лишь для обозначения типа неопределенности.

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}$ – неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-1}{2x^3+3}$ – неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Следующая теорема основывается на теореме Коши и дает полезное общее правило для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, в литературе обычно называющееся *правилом Лопиталя*:

Пусть при $x\to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если второй предел (конечный или бесконечный) существует. При этом предполагается, что в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может, самой этой точки) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x)\neq 0$ при $x\neq a$.

Правило сохраняет силу и тогда, когда рассматриваются лишь значения $x<a$ или $x>a$, а также в случае $a=\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{\sec^2 x}=5.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos \pi x}{\frac{1}{x}}=-\pi$$

Пример.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x-3)}=4.$$

Может случиться, что отношение производных опять приводит к неопределенности. Но к отношению производных можно снова применить установленное правило (если, конечно, выполнены условия его применимости), т.е. перейти к отношению вторых производных. Если и здесь получается неопределенность, то переходим к третьим производным, и т. д. Коль скоро на каком-то шаге мы получим предел, который сможем вычислить, то найденное его значение и будет искомым пределом отношения функций.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Имеется еще ряд особых случаев вычисления пределов, однако все они легко сводятся к случаям неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$, где $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ – случай неопределенности типа $0\cdot\infty$;

б) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$, где $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ – случай $\infty-\infty$;

в) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$, где либо $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ – случай 0^0, либо $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to 0$ – случай ∞^0, либо $f(x)\to 1$ и $g(x)\to\infty$ – случай 1^∞.

<u>Пример</u>. $\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0$

<u>Пример</u>. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}(\cos x\cdot\sin x)=0$

Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен *n*-й степени

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n \tag{1}$$

($c_0, c_1, c_2\ldots c_n$ – постоянные). Продифференцируем эту функцию *n* раз:

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1},$$
$$f''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3x+\ldots+(n-1)nc_nx^{n-2},$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3+\ldots+(n-2)(n-1)nc_nx^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot nc_n.$$

Если во всех этих формулах положить $x=0$, то получим $f(0)=c_0$, $f'(0)=c_1$, $f''(0)=2!c_2$, $f'''(0)=3!c_3,\ldots,$ $f^{(n)}(0)=n!c_n$,

откуда

$$c_0=f(0),\ c_1=\frac{f'(0)}{1!},\ c_2=\frac{f''(0)}{2!},\ c_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставив эти значения в равенство (1), найдем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты многочлена выражены через его значение и значения его производных в точке $x=0$.

Оказывается справедливой и более общая формула. Пусть *a* – какое-нибудь число. Положим $x-a=t$, t – новая переменная. Тогда

$$f(x)=f(t+a)=c_0+c_1(t+a)+c_2(t+a)^2+c_3(t+a)^3+\ldots+c_n(t+a)^n;$$

это – многочлен степени *n* относительно *t*. Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим

$$f(x)=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+\ldots+C_nt^n$$

($C_0, C_1, C_2, C_3\ldots C_n$ – новые коэффициенты) или, вернувшись к переменной *x*,

$$f(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\ldots+C_n(x-a)^n. \tag{3}$$

Таким образом, *каково бы ни было a, многочлен степени n всегда можно записать в виде* (3). Эта формула носит название *формулы Тейлора* для многочлена и содержит формулу (2) как частный случай (при $a=0$); формулу (2) называют часто *формулой Маклорена*.

Формула Тейлора для любой n раз дифференцируемой функции:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

Формула Тейлора имеет важные применения во многих вопросах математического анализа и его приложений. В частности, во многих случаях она позволяет функцию сложной природы с большой степенью точности заменить многочленом, т.е. функцией более простой, дает простой способ приближенного вычисления значений функции.

Задачи

Задача 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^{x}$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Задача 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x \to +0} (-\ln x)^{x}$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Задача 3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 5}$;

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$ и $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$;

4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$; 5) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{a + x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{\sqrt{x - a}}$; 7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$; 9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

Задача 4. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \operatorname{tg} x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2} \sec x\right)$.

Задача 5. Разложить многочлен по степеням $x - x_0$, если:

а) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8, \quad x_0 = -1$;

б) $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2, \quad x_0 = 2.$

Задача 6. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Задача 7. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = 2^x$ в точке $x_0 = \log_2 3$.

Вопросы

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
2. Неопределенности какого вида можно «раскрывать» при помощи правила Лопиталя?
3. Записать формулу Тейлора для многочлена. Привести пример практического приложения формулы.
4. Запишите формулу Маклорена. Объясните взаимосвязь формул Тейлора и Маклорена для многочлена.
5. Запишите формулу Тейлора для любой дифференцируемой n раз функции.

Практическое занятие 4.2-4.3. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Точки, в которых функция имеет экстремумы, следует искать среди тех внутренних точек ее области задания, где либо $f'(x) = 0$, *либо* $f'(x) = \infty$, *либо* $f'(x)$ *не существует*. Все эти случаи реализуются, например, для функций $y = x^2$, $y = x^{2/3}$, $y = |x|$, каждая из которых имеет минимум при $x = 0$.

Точки указанного вида условимся называть критическими точками. Не в каждой критической точке обязательно будет экстремум. Действительно, точка x = 0 будет критической для каждой из функций $y = x^3$ ($y' = 3x^2$, $y' = 0$ при x=0), $y = \sqrt[3]{x}$ ($y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y' = \infty$ при x=0),

Следующие теоремы позволяют определить, имеется в данной критической точке экстремум или нет, и если имеется, то максимум или минимум.

Теорема 1. *Пусть* x_0 *—критическая точка и функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке. Если в некоторой окрестности точки* x_0*:*

1) $f'(x) > 0$ *при x<* x_0 *и* $f'(x) < 0$ *при x>* x_0*, т. е. при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с плюса на минус, или*

2) $f'(x) < 0$ *при x<* x_0 *и* $f'(x) > 0$ *при x<* x_0*, т. е. при переходе через* x_0 *производная меняет знак с минуса на плюс, или*

3) производная не меняет знака при переходе через x_0*, то в случае 1) имеет место максимум, в случае 2) —минимум, в случае 3) экстремума нет.*

Пример. $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Функция всюду дифференцируема. Следовательно, все критические точки находятся из уравнения

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0.$$

Отсюда

$$x^2 - 1 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

— две критические точки.

1) $x_1 = -1$. При x < — 1 имеем: $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$; при $x > -1$ (но x<1): $f'(x) < 0$. Следовательно, в точке $x_1 = -1$ имеет место *максимум*.

2) $x_2 = 1$. При x<1 (но x> -1): $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$; при x>1 имеем: $f'(x) > 0$. Следовательно, в точке $x_2 = 1$ имеет место *минимум*.

Теорема 1 позволяет высказать следующие практически полезные соображения.

Пусть речь идет об отыскании экстремумов функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке и имеющей в нем *конечное* множество критических точек.

Найдя все критические точки, расположим их в порядке возрастания абсцисс:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b \tag{1}$$

(a и b — концы рассматриваемого промежутка). В каждом из интервалов

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \tag{2}$$

существует конечная $f''(x) \neq 0$ (поскольку все точки, где $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или где $f'(x)$ не существует, вошли в число точек x_1, x_2, ... , x_n). Предполагая $f'(x)$ непрерывной в каждом из частичных интервалов (2) — на практике это обычно так и бывает, — нетрудно прийти к выводу, что $f'(x)$ *сохраняет знак* внутри каждого такого интервала (если бы $f'(x)$ *меняла* знак внутри какого-нибудь из интервалов (2), то по свойству непрерывных функций она обращалась бы в нуль в некоторой *внутренней* точке этого интервала, что невозможно). Чтобы найти этот знак, достаточно, например, установить его для какой-нибудь *конкретной* точки соответствующего интервала.

В результате интервалам (2) будет соответствовать некоторая последовательность знаков плюс и минус, характер чередования которых в силу теоремы 1 позволяет судить о наличии максимума (смена плюса на минус), минимума (смена минуса на плюс) или об отсутствии экстремума (сохранение знака) в соответствующих точках.

Пример. $f(x) = (x+1)^2(x-1)^3$. Функция задана и непрерывна во всем бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$. Ее производная

$$f'(x) = 2(x+1)(x-1)^3 + 3(x+1)^2(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^2(5x+1) = 5(x+1)(x-1)^2\left(x + \frac{1}{5}\right) \tag{3}$$

всюду существует и конечна. Следовательно, критическими точками будут *лишь* те, для которых

$$f'(x)=0,$$

т. е.

$$x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{5},\ x_3=1.$$

Промежуток задания функции тем самым разбивается на интервалы

$$(-\infty,-1),\ \left(-1,-\frac{1}{5}\right),\ \left(-\frac{1}{5},1\right),\ (1,+\infty).$$

Соответствующая последовательность знаков производной имеет вид

$$+,\ -,\ +,\ +.$$

Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(-1)=0$; в точке $x_2=-\frac{1}{5}$ - минимум, причем $f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{16}{25}\cdot\frac{216}{125}=-\frac{3456}{3125}$, в точке $x_3=1$ экстремума нет.

Теорема 2. *Пусть в критической точке x функция* $f(x)$ *n раз дифференцируема* (*n* > 1), *причем* $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, *но* $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. *Если n четное, то имеет место экстремум, а именно: при* $f^{(n)}(x_0)<0$ *—максимум, при* $f^{(n)}(x_0)>0$*—минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет*.

Отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна в некотором промежутке. Если этот промежуток не является отрезком, то, как мы знаем, среди значений $f(x)$ может и не быть наибольшего или наименьшего. Однако можно указать простой признак, когда такие значения заведомо существуют.

Теорема 3. *Если в данном промежутке имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.*

Если наибольшее или наименьшее значение достигается во *внутренней* точке отрезка, то оно *необходимо* будет одним из максимумов или минимумов и, следовательно, будет достигаться в одной из критических точек. Но оно может достигаться и в конце отрезка. Отсюда следует, что для отыскания наибольшего или наименьшего значений $f(x)$ достаточно сравнить между собой ее значения во всех критических точках и в точках a и b; *наибольшее* из всех этих чисел будет *наибольшим значением* $f(x)$ на отрезке $|a,b|$; *наименьшее* из этих чисел даст *наименьшее значение* $f(x)$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ имеет областью существования отрезок [-1,1]. Ее наибольшее и наименьшее значения, очевидно, достигаются в тех же точках, что и для функции $g(x)=(1-x^2)(1+2x^2)$ (рассматриваемой на упомянутом отрезке). Из уравнения

$$g'(x)=-2x(1+2x^2)+(1-x^2)\cdot 4x=2x(1-4x^2)=0$$

находим $x_1=0$, $x_2=-0{,}5$, $x_3=0{,}5$. В этих точках $g(x)$ имеет значения:

$$g(0)=1,\ g(-0{,}5)=g(0{,}5)=1{,}125.$$

Если сопоставим эти значения со значениями в концах $g(-1)=g(1)=0$, то увидим, что наибольшим значением для $g(x)$ на отрезке [-1, 1] будет 1,125 (при x=±0,5), наименьшим будет 0 (при x=± 1). Для функции $f(x)$ наибольшим значением будет тогда $\sqrt{1{,}125}$ (при x=±0,5), наименьшим — по-прежнему 0 (при x = ± 1).

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$ и в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, не параллельную оси *Oy*.

Если в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над этой касательной, то говорят, что кривая в точке x_0 выпукла вниз. *Аналогично, если в некоторой окрестности* x_0 *кривая* *лежит* под *касательной, то говорят, что она в точке* x_0 выпукла вверх. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 кривая лежит по одну сторону упомянутой касательной, а справа от x_0 — по другую сторону, то говорят, что x_0 есть *точка перегиба* кривой.

Теорема 4. *Если в точке* x_0 *существует конечная производная* $f''(x_0)$, *причем* $f''(x_0) > 0$, *то в точке* x_0 *кривая выпукла вниз, если же* $f''(x_0) < 0$, *то кривая выпукла вверх.*

Теорема 5. *Пусть* $f''(x)$ *существует и конечна в некоторой окрестности точки* x_0. *Если* $f''(x)$ *меняет знак при переходе x через точку* x_0, *то* x_0*—точка перегиба. Если же* $f''(x)$ *в окрестности* x_0 *сохраняет знак, то в точке* x_0 *перегиба нет.*

<u>Пример</u>. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Вычисляем: $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Уравнение $y'' = 6x - 6 = 0$ дает $x = 1$. При $x < 1$, очевидно, $y'' < 0$ (кривая выпукла вверх), если же $x > 1$, то $y'' > 0$ (кривая выпукла вниз). Точка $x = 1$ является точкой перегиба.

Отыскание асимптот

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Может случиться, что при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ кривая неограниченно приближается к некоторой фиксированной прямой $y = kx + b$, называемой *асимптотой* для данной кривой. Точнее говоря, *прямая* $y = kx + b$ *называется асимптотой для кривой* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| f(x) - kx - b \right| = 0$.

Из высказанного определения следует, что кривая $y = f(x)$ имеет *горизонтальную* асимптоту $y = b$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (или соответственно при $x \to -\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| f(x) - kx \right| = b$. (При $k = 0$ получаем опять горизонтальную асимптоту.)

<u>Пример</u>. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x \right] = 2$$

Следовательно, имеется асимптота (и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$): $y = x + 2$.

<u>Пример</u>. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке [-2;1].

Решение. Функция *f*(*x*) непрерывна на заданном отрезке [-2;1], как многочлен. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки, для чего продифференцируем функцию.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

Тогда $f'(x) = 0$, если $x = 0$ или $x = -1$ или $x = 1$.

Получили две критические точки $x = 0$ и $x = -1$ принадлежащие данному промежутку [-2;1]. Точка $x = 1$ не является внутренней и поэтому не критическая.

Вычислим значения функции на концах промежутка и в критических точках и выберем из них наибольшее и наименьшее.

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

$$f(1)=1-2+3=2$$
$$f(0)=3$$
$$f(-1)=1-2+3=2$$
Следовательно, $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=2$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=11$.

Задачи

Задача 1. Найти значения x, при которых функция $f(x)=4x+\dfrac{9}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 2. Найти значения x, при которых функция $f(x)=3x^2+\dfrac{48}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 3. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=x^3+1{,}5x^2+2$.

Задача 4. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Задача 5. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}-x$.

Задача 6. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\dfrac{-3x^2-5x-4}{x+1}$.

Задача 7. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\dfrac{x^2+3x-12}{x+5}$.

Задача 8. Найти все критические точки функции $f(x)=2x^2-6|x+1|+5$.

Задача 9. Найти все критические точки х функции $f(x)=x^2-5|x|+6$.

Вопросы

1.Сформулируйте условия монотонности функции.
2. Какие точки называются стационарными; критическими; точками экстремума?
3. Сформулируйте необходимые условие экстремума.
4. Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
5. Что такое точка перегиба?
6. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
7. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба.
8. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот Вы знаете?
9. Как определить наличие вертикальной асимптоты?
10. В каком случае прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции?

Практическое занятие 4.4. Исследование функций при помощи производных и построение их графиков.

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции, точки разрыва и интервалы непрерывности.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность (где возможно).
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
4. Определить интервалы монотонности, точки локальных экстремумов, экстремальные значения функции.
5. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции этих точках, установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Исследовать поведение функции на границах ее области определения. Найти асимптоты графика функции.
7. Вычислить по необходимости значения функции в некоторых дополнительных точках.
8. Используя все полученные свойства в пунктах 1-7, построить график функция.

Этот порядок при исследовании функции можно изменять.

Пример. Постройте график функции:

1. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

Исследование.

1) Функция определена и непрерывна при всех $x \in (-\infty; -3) \cup (-3;3) \cup (3;+\infty)$.

2) Функция нечетная, т.к. $\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 9}$, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию на промежутке [0;+∞), Легко заметить , что точка O(0;0) - единственная точка пересечения с осями координат.

3) Найдем асимптоты.

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{x^3}{x^2 - 9} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3+0} \frac{x^3}{x^2 - 9} = +\infty.$$

Поэтому прямая x=3 является вертикальной асимптотой.

Найдем теперь наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 9} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 9} - 9 \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x}{x^2 - 9} = 0.$$

Получили наклонную асимптоту $y=x$.

4) Найдем интервалы монотонности функции и точки экстремума, для чего продифференцируем ее:

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 9} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 9) - 2xx^3}{(x^2 - 9)^2} = \frac{3x^4 - 27x^2 - 2x^4}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^2(x^2 - 27)}{(x^2 - 9)^2}$$

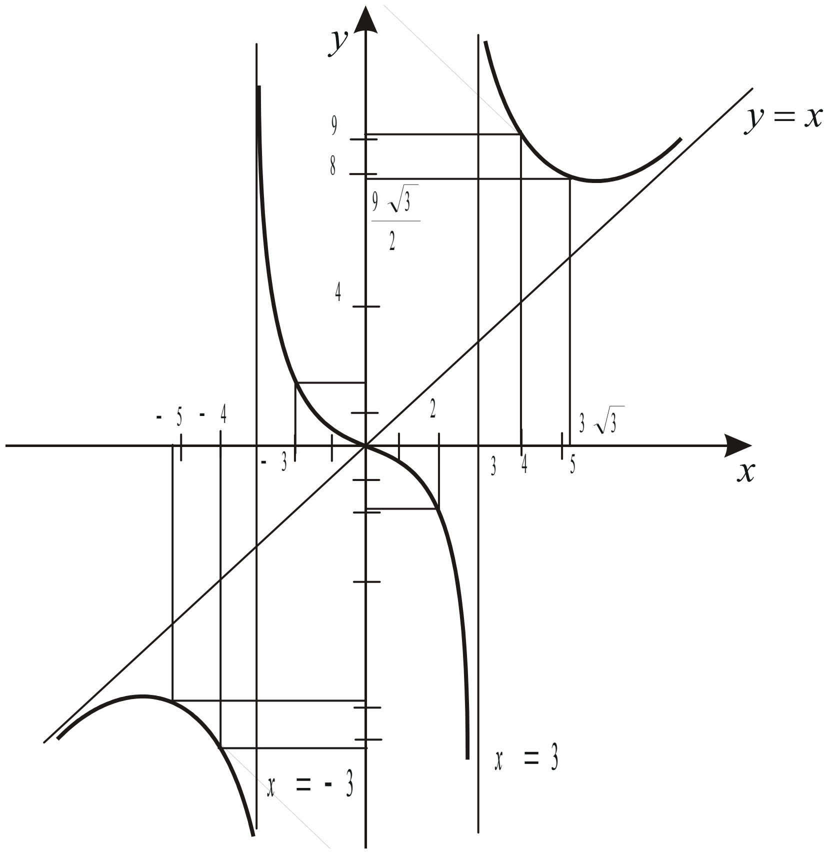
Тогда $y' = 0$, если x=0 или $x = 3\sqrt{3}$ и y' не существует, если $x = 3$. Но $x = 3 \in D(y)$. Поэтому критическими точками являются $x = 0$ и $x = 3\sqrt{3}$. Составим таблицу.

X	0	$(0;3)$	$(3;3\sqrt{3})$	$3\sqrt{3}$	$(3\sqrt{3};+\infty)$
y'	0	-	-	0	+
Y	0	↓	↓	$\min = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$	↑

6) Вычислим значение функции в некоторых дополнительных точках.

$f(2) = \dfrac{8}{4 - 9} = -\dfrac{8}{5} = -1\dfrac{3}{5}$, $\quad f(4) = \dfrac{4^3}{4^2 - 9} = \dfrac{64}{7} = 9\dfrac{1}{7}$

7) Используя результаты исследования, строим график:



Тема 5. Дифференциал функции.
Практическое занятие 5.1-5.2. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.

Приращение функции $y = f(x)$, имеющей в точке *x* конечную производную, представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где α - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ в правой части формулы пропорционально величине Δx (коэффициентом пропорциональности служит число $f'(x)$). Если $f'(x) \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

а это означает, что за исключением случая, когда $f'(x) = 0$, упомянутое слагаемое $f'(x)\Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой *того же* порядка, что и Δx.

Полагаем $dy = f'(x)\Delta x$ и назовем эту величину дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке *x*. Для дифференциала употребляется также обозначение $df(x)$. Дифференциалом независимой переменной *x* называют ее приращение, т. е. *полагают* $dx = \Delta x$.

Следовательно, можем писать $dy = f'(x)dx$.

Таким образом, *дифференциалом функции в точке x называется произведение производной в этой точке на дифференциал независимой переменной* (*т. е. на приращение независимой переменной*).

Например, для функции $y = x^2$ дифференциал в любой точке *x* дается формулой

$$dy = 2xdx.$$

Обычно структура дифференциала функции значительно проще структуры ее приращения, к поэтому формулой широко пользуются в приближенных вычислениях.

Например, для функции $y = x^3$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3,$$

в то время как

$$dy = 3x^2 \cdot \Delta x.$$

Если взять x=2, $\Delta x = 0{,}01$, то

$$\Delta y = 3\cdot 4\cdot 0{,}01 + 3\cdot 2\cdot 0{,}0001 + 0{,}000001 = 0{,}120601,$$

$$dy = 3\cdot 4\cdot 0{,}01 = 0{,}12.$$

Таким образом, абсолютная ошибка

$$|dy - \Delta y| = 0{,}000601,$$

относительная ошибка

$$\left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000601}{0{,}120601} \approx 0{,}05\left(\frac{1}{2}\%\right).$$

Когда хотят вычислить значение $f(x+\Delta x)$, зная $f(x)$, то часто поступают так: *точное* равенство $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$ заменяют приближенным равенством $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$ и этим упрощают выкладки.

Так, возвращаясь опять к функции $y = x^3$, получаем $(x+\Delta x)^3 \approx x^3 + \underbrace{3x^2\cdot\Delta x}_{dy}$

и, в частности, $(2{,}01)^3 = (2+0{,}01)^3 \approx 2^3 + 0{,}12 = 8{,}12$.

Если $y = \sqrt{x}$, то $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x}_{dy}$

и, в частности, $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{2}$ — довольно известная приближенная формула.

Геометрический смысл дифференциала: значение дифференциала функции, отвечающее некоторому приращению независимой переменной, совпадает с соответствующим приращением ординаты касательной к графику функции.

Основные правила вычисления дифференциала функции:

I. $dC = 0\ (C = \text{const})$.

II. $d(Cu) = C\,du\ (C = \text{const})$.

III. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

IV. $d(uv) = du\cdot v + u\cdot dv$.

V. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\cdot v - u\cdot dv}{v^2}$.

VI. $d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$.

VII. $d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}du$.

VIII. $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

IX. $d(a^u) = a^u \ln a\cdot du$ ($a = \text{const} > 0$, $a \neq 1$).

X. $d(e^u) = e^u du$.

XI. $d(\lg_a u) = \frac{du}{u}\lg_a e$.

XII. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$

XIII. $d(\sin u) = \cos u\cdot du$.

XIV. $d(\cos u) = -\sin u\cdot du$.

XV. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u}$.

XVI. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$.

XVII. $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

XVIII. $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

XIX. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2}$.

XX. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{du}{1+u^2}$.

XXI. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u\cdot du$.

XXII. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u\cdot du$.

XXIII. $d(\operatorname{th} u) = \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u}$.

XXIV. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{du}{\operatorname{sh}^2 u}$.

Всюду здесь u и v — произвольные дифференцируемые функции от x.

Пример.

$$d\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{d\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Пример.

$$d(\ln\sin x)=\frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{\cos xdx}{\sin x}=\mathrm{ctg}xdx.$$

Пример.

$$d\left(\mathrm{sh}e^x\right)=\mathrm{ch}e^x d\left(e^x\right)=\mathrm{ch}e^x\cdot e^x\cdot dx.$$

Задачи

Задача 1. Найти дифференциалы функции:

а) $y=\frac{1}{\ln^2 x}$; б) $y=\ln(ax^2+bx+c)$; в) $y=\frac{3ctgx}{e^x-1}$; г) $y=e^x tgx$; д) $y=\frac{tgx}{\sin x+2}$; е) $y=\ln^3 x$; ж) $y=\arccos\left(x^2-1\right)$; з) $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$; и) $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$; к) $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$; л) $y=\frac{1+x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции в данной точке:

1. $y=x^5,\quad x=2,001.$
2. $y=\sqrt{4x-3},\quad x=0,98.$
3. $y=\sqrt{x^3},\quad x=1,02.$
4. $y=x^3,\quad x=2,999.$
5. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=1,03.$
6. $y=\sqrt{x},\quad x=3,996.$
7. $y=\sqrt{1+\sin x},\quad x=0,02.$
8. $y=\sqrt{2x+\cos x},\quad x=0,01.$
9. $y=\sqrt[3]{2x-\sin\frac{\pi x}{2}},\quad x=1,03.$
10. $y=\sqrt{4x+1},\quad x=1,97.$

Вопросы

1. Что такое дифференциал функции?
2. Каков геометрический смысл дифференциала?
3. Приведите формулу для вычисления дифференциала функции.
4. Как определяются дифференциалы высших порядков?
5. Приведите примеры практического приложения дифференциала.

Раздел 3. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 6. Неопределенный интеграл.

Практическое занятие 6.1-6.2. Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

Первообразная функция.

Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a,b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx=F(x)+C.$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx;$
3. $\int dF(x)=F(x)+C;$

4. $\int(u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx$;

<u>Пример:</u> $\int(x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int\sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$;

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgxdx$	-ln∣cosx∣+C	9	$\int e^x dx$	e^x + C
2	$\int ctgxdx$	ln∣sinx∣+ C	10	$\int\cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int\sin xdx$	-cosx + C
4	$\int\frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	12	$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int\frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha\neq -1$	15	$\int\frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int\frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int\frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int\frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int\frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются другие способы интегрирования.

Задачи:

Задача 1.Найти неопределенные интегралы:

1) $\int(x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\,dx$;

2) $\int (3x^3+5x^2-8)(9x^2+10x)\,dx$; 3) $\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2x\,dx$;

4) $\int (2x^2+7)^3 x\,dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^3+8}\,x^2\,dx$; 6) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx$.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}}dx$; 8) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;

9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}dx$.

Задача 3. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

2) $\int \frac{2x}{x^2+5}dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2}dx$;

5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3}dx$;

8) $\int \frac{x}{1+x}dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x}dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2}dx$.

Вопросы:
1. Что такое первообразная функция?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Запишите по памяти таблицу основных неопределенных интегралов.
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

Тема 7. Методы и способы интегрирования.

Практическое занятие 7.1. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt*.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2+1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$= \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{Bmatrix} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$

$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Задачи:

Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x\,dx.$
2. $\int \arcsin x\,dx.$
3. $\int x^2\sin x\,dx.$
4. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx.$
5. $\int x\ln x\,dx.$
6. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$
7. $\int e^{2x}\cos x\,dx.$
8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$
9. $\int \sin\ln x\,dx.$
10. $\int x^2e^x\,dx.$

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$);

2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left(\text{подстановка } x = \frac{1}{z}\right)$.

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Вопросы:

1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?

Практическое занятие 7.2. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование элементарных дробей.

Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \ge 2$, $n \ge 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t=ax+ b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{\begin{matrix} u=6x-5; & du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} u=x+3; & du=dx; \\ x=u-3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln|u^2-49| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} u=x-3; & du=dx; \\ x=u+3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{aligned} &dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ &v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{aligned}\right\}$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n\int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{\begin{aligned} &u = 2ax+b; \quad du = 2adx; \\ &x = \frac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac-b^2; \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью *n*, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{\begin{aligned} &u = x-2; \quad du = dx; \\ &x = u+2; \end{aligned}\right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{aligned} &t = u^2+3; \\ &dt = 2udu; \end{aligned}\right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.
Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$

$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases}A+B+C=9\\-4A-2B-6C+D=-30\\4A+4B+8C-6D=28\\-16A-8B+8D=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B\\2A+2B+4C-3D=14\\2A+B-D=11\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14\\2A+B-24+2A+4B=11\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\4A+5B=35\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\50-10B+5B=35\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\B=3\end{cases}\qquad\begin{cases}A=5\\B=3\\C=1\\D=2\end{cases}$$

Итого:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$

$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Задачи:

Задача 1. Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби:

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}$.

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$.

Задача 2.

Вычислить:

$$1)\ \int\frac{dx}{x-13};\quad 2)\ \int\frac{dx}{15-3x};\quad 3)\ \int\frac{dx}{4-7x};\quad 4)\ \int\frac{dx}{3-8x};\quad 5)\ \int\frac{3dx}{4x-9}.$$

Задача 3.
Вычислить:

$$1)\ I_1=\int\frac{dx}{x^2+4x+14};\ 2)\ I_2=\int\frac{dx}{x^2+x+1};\ 3)\ I_3=\int\frac{dx}{x^2+3x+6};$$

$$4)\ I_4=\int\frac{dx}{x^2-9x+25};\ 5)\ I_5=\int\frac{dx}{x^2-7x+14};\ 6)\ I_6=\int\frac{dx}{x^2-x+14}.$$

Задача 4.
Вычислить:

$$1)\ \int\frac{dx}{5x^2+9x+10};\qquad 2)\ \int\frac{dx}{7x^2-3x+5};$$

$$3)\ \int\frac{dx}{9x^2+x+12};\qquad 4)\ \int\frac{dx}{6x^2+7x+15};$$

$$5)\ \int\frac{dx}{3x^2-11x+17}.$$

Задача 5.
Вычислить:

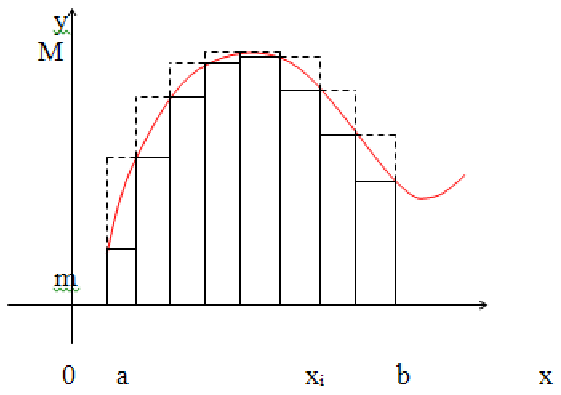
$$1)\ I_3=\int\frac{dz}{(1-z^2)^3};\quad 2)\ I_4=\int\frac{dx}{(1+x^2)^4};\quad 3)\ I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}.$$

Вопросы:
1. Какие дроби называют простейшими?
2. Какая дробь называется рациональной?
3. Какая рациональная дробь называется правильной?
4. Как разложить правильную дробь на простейшие?
5. В чем сущность метода неопределенных коэффициентов?

Тема 8. Определенный интеграл.

Практическое занятие 8.1. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b] .



Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int\limits_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx,$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t). Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u>

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{Bmatrix} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

<u>Пример.</u>

$\int\limits_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \left| tgx = t \right| = \int\limits_0^{0} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

<u>Интегрирование по частям.</u>

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Задачи:

Задача 1.Вычислить определенные интегралы.

.1. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$

2. $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\cos 3x\,dx.$

3. $\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+4x+3\right)\cos x\,dx.$

4. $\int\limits_{-2}^{0}\left(x+2\right)^2\cos 3x\,dx.$

5. $\int\limits_{-4}^{0}\left(x^2+7x+12\right)\cos x\,dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(2x^2+4x+7\right)\cos 2x\,dx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(9x^2+9x+11\right)\cos 3x\,dx.$

8. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(8x^2+16x+17\right)\cos 4x\,dx.$

9. $\int_{0}^{2\pi}\left(3x^2+5\right)\cos 2x dx.$

10. $\int_{0}^{2\pi}\left(2x^2-15\right)\cos 3x dx.$

11. $\int_{0}^{2\pi}\left(3-7x^2\right)\cos 2x dx.$

12. $\int_{0}^{2\pi}\left(1-8x^2\right)\cos 4x dx.$

13. $\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx.$

14. $\int_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)\sin 2x dx.$

15. $\int_{0}^{\pi}\left(x^2-3x+2\right)\sin x dx.$

16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2-5x+6\right)\sin 3x dx.$

17. $\int_{-3}^{0}\left(x^2+6x+9\right)\sin 2x dx.$

18. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2+17,5\right)\sin 2x dx.$

19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-5x^2\right)\sin x dx.$

20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{3}\left(3x-x^2\right)\sin 2x dx.$

Задача 2.
Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

2. $\int_{0}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}.$

3. $\int_{0}^{1}\frac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx.$

4. $\int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{x^2+4}.$

5. $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

6. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx.$

7. $\int_{0}^{1/2}\frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

8. $\int_{1}^{4}\frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx.$

9. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{x^4+1}.$

10. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

11. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

12. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}dx.$

13. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$

14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2+1} dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

16. $\int\limits_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$

17. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

18. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx.$

19. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

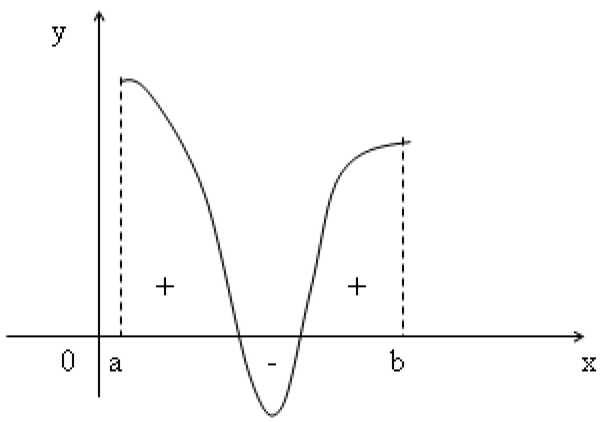
20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx.$

Вопросы:

1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.
6. Формула Ньютона – Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Тема 9. Приложения определенного интеграла.
Практическое занятие 9.1. Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.

<u>Вычисление площадей плоских фигур.</u>

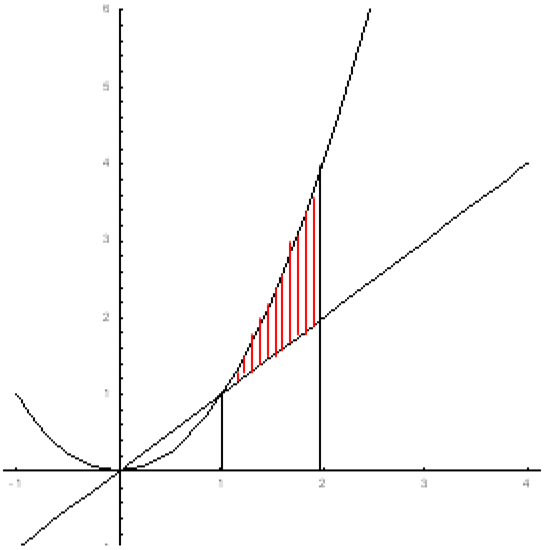


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ох, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ох, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left| \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

<u>Пример.</u> Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

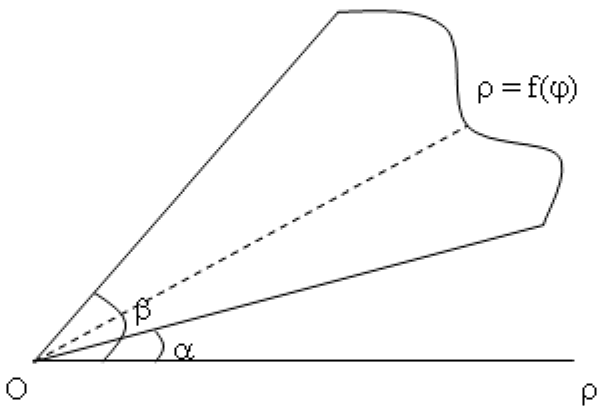
$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (ед}^2\text{)}$$

<u>Нахождение площади криволинейного сектора.</u>

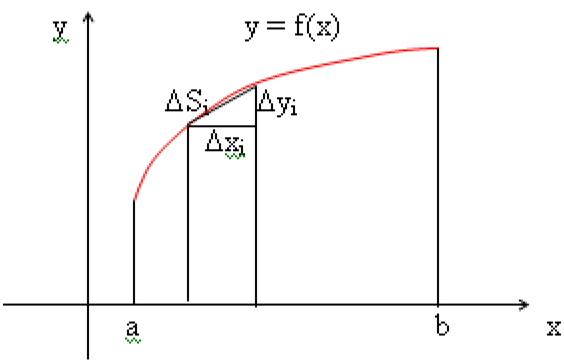
Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид ρ = f(φ), где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi) d\varphi$$



<u>Вычисление длины дуги кривой.</u>



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции получаем:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[Z'(t)]^2}\,dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi,\quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

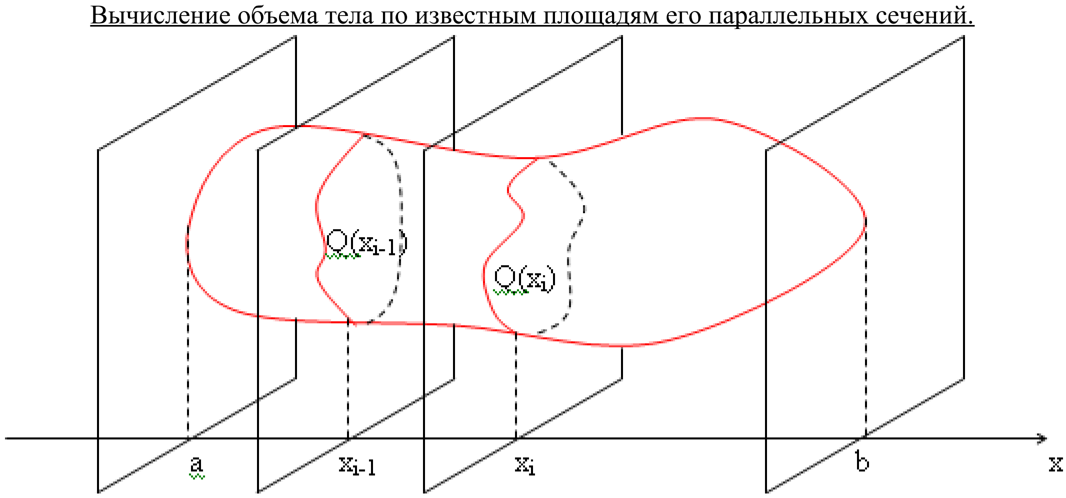
1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Найдем производную $y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

Тогда $\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}$. Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r, $\rho'=\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=0$ тогда $S=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+r^2}\,d\varphi=r\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi r$.

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

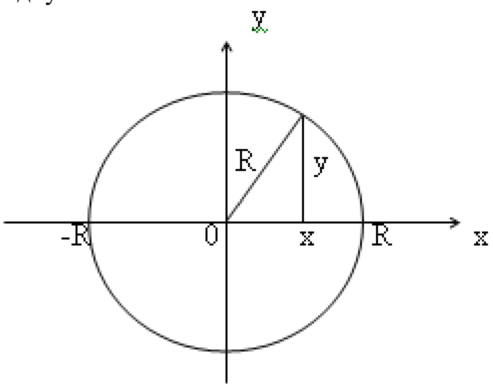
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\int_a^b Q(x)dx.$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx\,.$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.



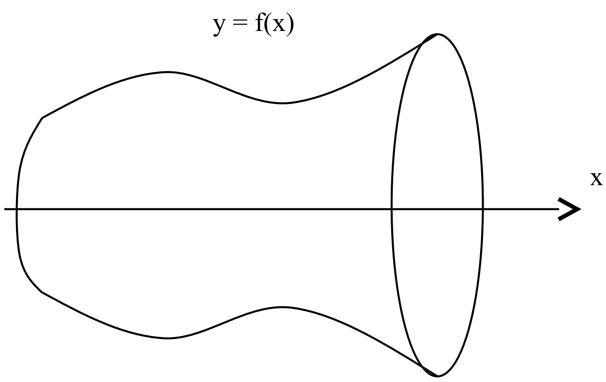
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Объем тел вращения.

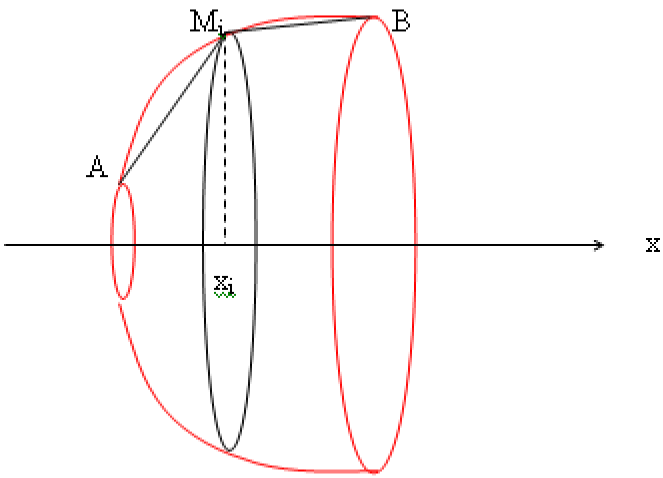
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = \left|f(x)\right|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx\,.$$

Площадь поверхности тела вращения.



Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i \ .$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i \ .$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Задачи:

Задача 1. Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций:

1. $y = 32 - x^2, \quad y = -4x.$
2. $y = 3\sqrt{x}, \quad y = 3/x, \quad x = 4.$
3. $x = 5 - y^2, \quad x = -4y.$
4. $y = \sqrt{e^x - 1}, \quad y = 0, \quad x = \ln 4.$
5. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \ \ (x \geq 0).$
6. $y = \sqrt{x}, \quad y = 1/x, \quad x = 16.$
7. $x = 27 - y^2, \quad x = -6y.$
8. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \ \ (x \leq 0).$
9. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3/2.$
10. $y = 2/x, \quad y = 5e^x, \quad y = 2, \quad y = 5.$

Задача 2. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}.$
2. $y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$
3. $y = e^x, \quad \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}.$
4. $y = \ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
5. $y = 2\sqrt{x}, \quad 1/3 \leq x \leq 1/8.$
6. $y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
7. $y = x^2/2, \quad 0 \leq x \leq 1.$
8. $y = 1 - \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$
9. $y = 1 - \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 3.$
10. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1/2.$

Задача 3. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

2. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/3.$

3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

4. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

Задача 4. Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

1. $z = 4x^2 + 9y^2, \quad z = 6.$
2. $z = 9x^2 + 4y^2, \quad z = 6.$
3. $z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$
4. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$
5. $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$
6. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - 3z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$
7. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 2z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$

Задача 5. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX областей, ограниченных графиками заданных функций.

1. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0.$ 2. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x.$
3. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$ 4. $y = x^2, \quad y = 2x.$
5. $y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad x = 0 \quad (0 \le x \le \pi/4).$
6. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = \pi/2 \quad (0 \le x \le \pi/2).$
7. $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1.$
8. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e.$
9. $y = \dfrac{2}{x}, \quad y = 1, \quad x = 1.$
10. $y = \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2).$

Вопросы.

1. Запишите известные вам формулы вычисления площадей плоских фигур.
2. Как вычисляется площадь плоской фигуры при помощи определенного интеграла?
3. Что такое криволинейная трапеция?
4. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, заданной параметрически?
5. Что такое криволинейный сектор? Как вычислить площадь криволинейного сектора?
6. Как вычислить длину дуги кривой?
7. Как вычислить объем тела при помощи определенного интеграла?
8. Как найти площадь поверхности вращения?
9. Какие физические (механические) приложения определенного интеграла вы знаете?

Раздел 4. Функции нескольких переменных

Тема 10. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Практическое занятие 10.1. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x. Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad f'_x(x, y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t),\ y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t,\ s),\ y = y(t,\ s)$, то:

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds.$$

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y):

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

<u>Пример</u>. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz\ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{x^2} = \left(f'_x\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^3} = \left(f''_{x^2}\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^2 y} = \left(f''_{x^2}\right)'_y, \ \ldots$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m f,$$

где $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ - оператор дифференцирования.

Задачи:

Задача 1.

Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

1. $z = e^{xy}$.
2. $z = x\ln(x/y)$.
3. $z = \sin(xy)$.
4. $z = e^x \cos y$.
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \ln(x^2 + y)$.
7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
8. $z = \ln \sqrt[3]{xy}$.
9. $z = x\cos y + y\sin x$.
10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$.

Задача 2.

Найти производные функции z=z(u,v):

z'_x и z'_y, $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$.

1. $z = u^2 + v^2, \quad u = x + y, \quad v = x - y.$
2. $z = \ln(u^2 + v^2), \quad u = xy, \quad v = x/y.$
3. $z = u^v, \quad u = \sin x, \quad v = \cos y.$
4. $z = u^2 + 2v^3, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = e^{xy}.$
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v), \quad u = x\sin y, \quad v = x\cos y.$
6. $z = \ln(u - v^2), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = y.$
7. $z = u^3 + v^2, \quad u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg}(y/x).$
8. $z = \sqrt{uv}, \quad u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = xy^2.$
9. $z = e^{uv}, \quad u = \ln x, \quad v = \ln y.$
10. $z = \ln(u/v), \quad u = \sin(x/y), \quad v = \sqrt{x/y}.$

Задача 3.

Найти производные функций, заданных неявно:

1. $y^x = x^y$.
2. $y = 1 + y^x$.
3. $y = x + \ln y$.
4. $x + y = e^{x-y}$.
5. $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.
6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
7. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.
8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.
9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Вопросы:

1.Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.

2.Что такое полное приращение функции?

3.Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?

4.Поясните геометрический смысл частной производной.

5.Что такое дифференциал функции нескольких переменных?

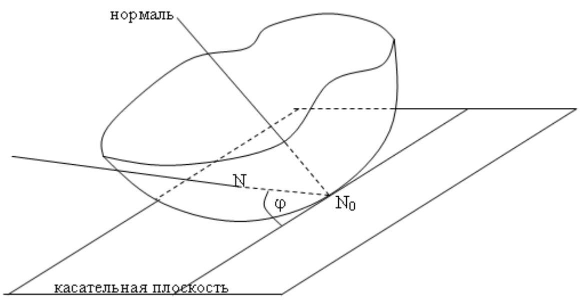
6.Что такое линеаризация функций?

7.Пояните правила дифференцирования сложных и неявных функций.

8. Как найти частные производные второго, третьего,…, n-го порядка?

9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Практическое занятие 10.2. Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1};$$

Градиент функции вычисляется по формуле:

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример. Найти градиент функции

$$u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$$

в точке М (2,1,1).

1. Находим частные производные функции $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{1+(y+z)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{1}{1+(y+z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$f'_x(2,1,1)=4,\quad f'_y(2,1,1)=-\frac{1}{5},\quad f'_z(2,1,1)=-\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)}=\left\{f'_x(2,1,1),\ f'_y(2,1,1),\ f'_z(2,1,1)\right\}=\left\{4,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\right\}.$$

Ответ. $\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)}=\left\{4,-\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right\}.$

Производная по направлению, определяемому вектором:

$$\bar{l}=\cos\alpha\cdot\bar{i}+\sin\alpha\cdot\bar{j}$$

определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,\quad \frac{\partial f}{\partial l}=grad\ f\cdot\bar{l}.$$

Задачи:

Задача 1.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.

1. $z=x^2+y^2,\quad M(1,-2,5).$
2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0,\quad M(4,3,4).$
3. $z=\sin x\cos y,\quad M(\pi/4,\pi/4,1/2).$
4. $z=e^{x\cos y},\quad M(1,\pi,1/e).$
5. $z=y\operatorname{tg} x,\quad M(\pi/4,1,1).$
6. $z=\operatorname{arctg}(x/y),\quad M(1,1,\pi/4).$
7. $x(y+z)(z-xy)=8,\quad M(2,1,3).$
8. $2^{x/z}+2^{y/z}=8,\quad M(2,2,1).$
9. $x^2+y^2+z^2-16=0,\quad M(2,2,2\sqrt{2}).$
10. $x^2+y^2-z^2=-1,\quad M(2,2,3).$

Задача 2.

Найти градиент функции в точке.

1. $u=x+\ln(z^2+y^2),\quad M(2,1,1).$
2. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2},\quad M(1,5,-2).$
3. $u=\sin(x+2y)+2\sqrt{xyz},\quad M(\pi/2,3\pi/2,3).$

4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1,1,0).$

5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1,1,0).$

6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z, \quad M(1,3,2).$

7. $u = x^2y^2z - \ln(z-1), \quad M(1,1,2).$

8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1,-1,2).$

9. $u = xy - x/z, \quad M(-4,3,-1).$

10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1,-3,4).$

Задача 3.
Найти производную функции u в точке A по направлению к точке B.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \qquad A(2,1,1), \qquad B(0,2,0).$
2. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}, \qquad A(1,5,-2), \qquad B(1,7,-4).$
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right), \quad B\left(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 3\right).$
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad A(1,1,0), \qquad B(1,2,-1).$
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \qquad A(1,1,0), \qquad B(3,3,-1).$
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z, \qquad A(1,3,2), \qquad B(0,5,0).$
7. $u = x^2y^2z - \ln(z-1), \qquad A(1,1,2), \qquad B(6,-5,2\sqrt{5}+2).$
8. $u = \ln(x^2 + y^2), \qquad A(1,-1,2), \qquad B(2,-2,3).$
9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \qquad A(1,-3,4), \qquad B(-1,-4,5).$
10. $u = xy - \frac{x}{z}, \qquad A(-4,3,-1), \qquad B(1,4,-2).$

Вопросы:
1.Что такое касательная плоскость к поверхности?
2.Что такое нормаль?
3.Как составить уравнение касательной плоскости и нормали?
4. Дайте определение градиента функции.
5. Дайте определение производной по направлению для функции нескольких переменных. Запишите соответствующие формулы.

Тема 11. Исследование функции нескольких переменных.
Практическое занятие 11.1. Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума.

В случае, если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию $u = f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x,y)=0$, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Задачи:

1.Найти экстремум функции:

1. $z = x^2 - xy + y^2$.   2. $z = x^2 - xy - y^2$.

3. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.   4. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.

5. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.   6. $z = 4x + 2y - x^2 - y^2$.

7. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.   8. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

9. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$.   10. $z = x/y + 1/x + y$.

2. Найти условный экстремум функций:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 3 = 0$ при $x + y + 3 = 0$;

2) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12(x > 0, y > 0, z > 0)$;

3) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Вопросы:

1.Дайте определение локального максимума (минимума) функции в точке.

2.Сформулируйте необходимые условия экстремума.

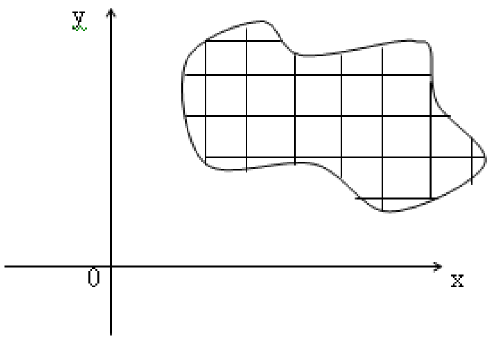
3. Сформулируйте достаточные условия экстремума.

4. Объясните понятие экстремума функции в области.

Тема 12. Двойной интеграл.

Практическое занятие 12.1. Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой f(x,y)=0.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ. С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)dxdy.$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\sum_{\Delta} f(x, y)\Delta y\Delta x.$$

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

1. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ существует.

2. Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ существует.

Свойства двойного интеграла.

1) $\iint_{\Delta}\left[f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)\right]dydx = \iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx + \iint_{\Delta} f_2(x, y)dydx - \iint_{\Delta} f_3(x, y)dydx.$

2) $\iint_{\Delta} kf(x, y)dydx = k\iint_{\Delta} f(x, y)dydx.$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \iint_{\Delta_1} f(x, y)dydx + \iint_{\Delta_2} f(x, y)dydx.$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = f(x_0, y_0)\cdot S$$

5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ, то $\iint_{\Delta} f(x, y)dydx \geq 0.$

6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y)dydx.$

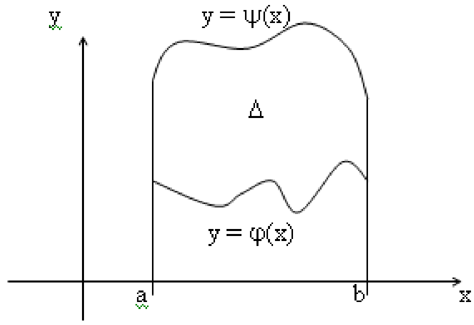
7) $\left|\iint_{\Delta} f(x, y)dydx\right| \leq \iint_{\Delta}\left|f(x, y)\right|dydx.$

Вычисление двойного интеграла.

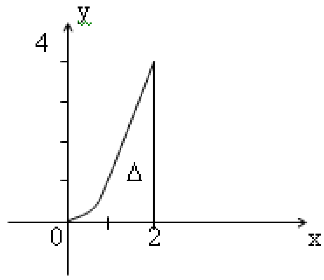
Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и*

φ ≤ ψ, тогда

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy .$$



<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint_{\Delta}(x - y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.



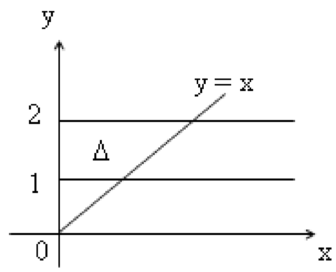
$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2}(x - y)dy = \int_0^2 (xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 (x^3 - \frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4 - 3{,}2 = 0{,}8$$

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint_{\Delta}(x^2 + y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



$$\iint_{\Delta}(x^2 + y^2)dxdy = \int_1^2 dy \int_0^x (x^2 + y^2)dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Big|_0^y dy = \int_1^2 \frac{4}{3} y^3 dy = \frac{4}{12} y^4 \Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2}(3x^2 - 2xy + y)dx = \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{244}{21}$$

Задачи:

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{2^x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_1^{2/x} f(x,y)\,dy.$

2. $\int\limits_{1/4}^1 dy \int\limits_{1/y}^4 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^2}^4 f(x,y)\,dy.$

3. $\int\limits_{-6}^{-3} dy \int\limits_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-3}^0 dy \int\limits_0^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x,y)\,dy.$

4. $\int\limits_0^{16} dy \int\limits_{-y/4}^0 f(x,y)\,dx + \int\limits_{16}^{32} dy \int\limits_{-\sqrt{32-y}}^0 f(x,y)\,dx.$

5. $\int\limits_0^{\sqrt{6}} dx \int\limits_0^{\sqrt[4]{6x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{12-x^2}} f(x,y)\,dy.$

6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^2}^0 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x,y)\,dx.$

Задача 2. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями:

1. $\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy, \qquad y = x^2,\ \ y = \sqrt{x}.$

2. $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy, \qquad y = 2-x^2,\ \ y = 2x-1.$

3. $\iint\limits_D (y\ln x)\,dx\,dy, \qquad y = \frac{1}{x},\ \ y = \sqrt{x},\ \ x = 2.$

4. $\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y)\,dx\,dy, \qquad y = \frac{\pi}{4} - x,\ \ y = 0,\ \ x = 0.$

5. $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad y = x,\ \ y = \frac{\pi}{2},\ \ x = 0.$

6. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \qquad y = \frac{1}{x},\ \ y = x,\ \ x = 2.$

7. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy, \qquad y = x^2,\ \ y = \sqrt{x}.$

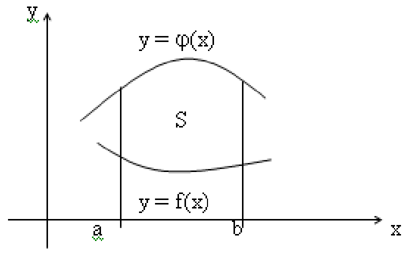
Вопросы:

1.Дайте определение двойного интеграла.
2. Поясните геометрический смысл двойного интеграла.
3.Перечислите свойства двойного интеграла.
4.Что такое повторный интеграл?
5.Опишите процесс вычисления двойного интеграла в декартовых координатах.

Тема 13. Приложения двойного интеграла.

Практическое занятие 13.1. Приложения двойного интеграла.

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.

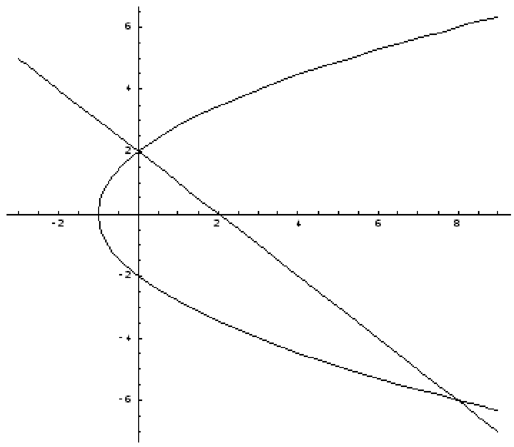


Площадь S, показанная на рисунке, может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S=\int_a^b\int_{f(x)}^{\varphi(x)}dydx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y – 2 = 0$.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от $x=\dfrac{y^2-4}{4}$ до $x = 2 – y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

$$S=\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}dxdy=\int_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\int_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)dy=\frac{1}{4}\int_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{4y^2}{2}+12y\right)\Bigg|_{-6}^{2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-8+24-\left(\frac{36\cdot 6}{3}-\frac{4\cdot 36}{2}-12\cdot 6\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}$$

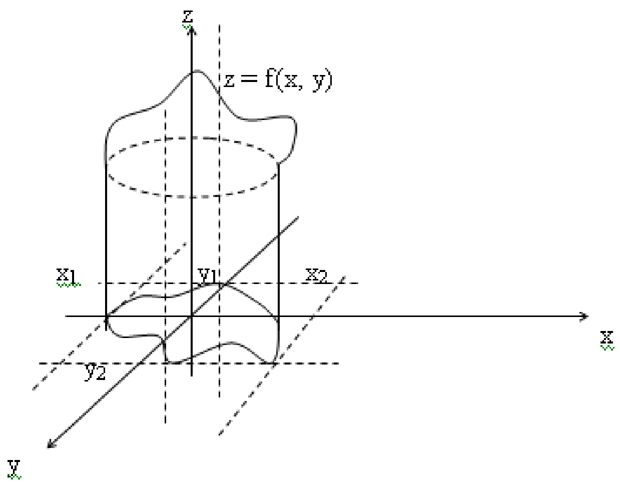
2) Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S=\int_\tau\int\rho d\rho d\theta=\int_\Delta\int dydx=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)}\rho d\rho d\theta$$

3) Вычисление объемов тел.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью ху, а сверху– поверхностью z = f(x,y), а с боков – цилиндрической поверхностью. Такое тело называется **цилиндроид.**

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum\sum_{\Delta} z\Delta y\Delta x=\int_\Delta\int zdydx=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}zdydx$$



Пример. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси OX: $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}$; $y_2 = \sqrt{1 - x^2}$;

по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}} (3 - x - y)dydx = 3\pi;$$

4) Вычисление площади кривой поверхности.

Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dydx$$

Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением $z = \varphi(x, y)$, то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx$$

5)Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой f(x,y) = 0. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ох: $I_x = \iint_{\Delta} y^2 dydx$

- относительно оси Оу: $I_y = \iint_{\Delta} x^2 dydx$

- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dydx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

6) Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wx\,dy\,dx}{\iint\limits_{\Delta} w\,dy\,dx}; \qquad y_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wy\,dy\,dx}{\iint\limits_{\Delta} w\,dy\,dx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).

Задачи:

Задача 1. Найти объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

1. $x = \sqrt{y}, \quad x = 2\sqrt{y}, \quad z = 1 - y, \quad z = 0.$
2. $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 6 - x, \quad z = 0.$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = x + y + 1, \quad z = 0.$
4. $y = x^2, \quad y = 1, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$
5. $y = 6 - 3x/2, \quad y = 6 - 3x, \quad y = 0, \quad z = 6 - x - y, \quad z = 0.$
6. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = xy, \quad z = 0 \quad (x \geq 0,\ y \geq 0).$
7. $y = \sqrt{x/2}, \quad y = 0 \quad z = 4 - x - 2y, \quad z = 0.$
8. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad z = 4 - x^2, \quad z = 0.$
9. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$
10. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = 2x, \quad z = 4x.$

Задача 2. Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1. $y = 2/x, \ \ y = 4e^x, \ \ y = 2, \ \ y = 4.$
2. $y = 1/x, \ \ y = 2e^x, \ \ y = 1, \ \ y = 2.$
3. $y = 2/x, \ \ y = 2\sqrt{x}, \ \ x = 4.$
4. $x^2 + y^2 = 2, \ \ y = -x^2 \ \ (y \leq 0).$
5. $y = \sqrt{x}, \ \ y = 0, \ \ x = 4.$
6. $x = 2 - y^2, \ \ x = -y.$
7. $y = \sin x, \ \ y = \cos x, \ \ x = 0, \ \ x = \pi/4.$
8. $y = 2x^2 - 1, \ \ y = x.$
9. $x = \sqrt{4 - y^2}, \ \ x = y^2/3.$
10. $y = \ln x, \ \ y = e/x, \ \ x = 1.$

Задача 3. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью μ, где D ограничена заданными линиями:

1. $\mu = 2x + y^2, \qquad x = 4, \;\; y = 0, \;\; y = \sqrt{x}.$

2. $\mu = x^2 + y, \qquad x = 1, \;\; y = 0, \;\; y = 2\sqrt{x}.$

3. $\mu = x^2 + 2y, \qquad x = 0, \;\; y = 4, \;\; y = x^2 \;\; (x \geq 0).$

4. $\mu = x + y^2, \qquad x = 0, \;\; y = 1, \;\; y = x^2/4 \;\; (x \geq 0).$

5. $\mu = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0, \;\; y \leq 0).$

6. $\mu = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 5 \quad (x \leq 0, \quad y \geq 0).$

7. $\mu = \dfrac{y - x}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (x \leq 0, \quad y \geq 0).$

8. $\mu(x, y) = y, \qquad y = 0, \quad y = x\sqrt{3}, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 9 \quad (y \geq 0, \quad y \leq x\sqrt{3}).$

Вопросы:
1.Перечислите геометрические и физические приложения двойного интеграла.
2.Опишите, как вычислить площадь кривой поверхности с помощью двойного интеграла.
3.Что такое полярный момент инерции? Как можно вычислить полярный момент инерции?
4. Запишите формулу для вычисления центров тяжести площадей плоских фигур.

Раздел 5. Дифференциальные уравнения.

Тема 14. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Практическое занятие 14.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.** Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$y\cos y dy = -2xdx$$
$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$
$$\int y\cos y dy = \begin{cases} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{cases} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$
$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$
$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.
$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$
$$y^{-2/3}dy = dx$$
$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$
$$3y^{1/3} = x + C$$
$27y = (x+C)^3$ - общий интеграл

$y = \frac{1}{27}(x+C)^3$ - общее решение

Линейные уравнения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:
$$y' + P(x)y = Q(x),$$
при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x)\neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:
$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$
$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1\cdot 2x^2$; $y = 2\cdot x^2$; $y = 2x\cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$. Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции u в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Задачи:

Задача 1. Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений:

1. $y\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$
2. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$
3. $y'\,y = -2x\sec y.$
4. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$
5. $y\,(1+x^2)\,y' + x\,(1+y^2) = 0.$
6. $e^x\,dx - (1+e^x)\,y\,dy = 0.$
7. $y' = 2e^x\cos x.$
8. $y' = y\ln y.$
9. $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}.$
10. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Задача 2. Найти общее решений дифференциального уравнения:

1. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}.$
2. $y' = \dfrac{y}{x} - 1.$
3. $x^2y' = xy + y^2e^{-x/y}.$
4. $x\cos\dfrac{y}{x}\,dy + \left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)\,dx = 0.$
5. $(x^2+2xy)\,dx + xy\,dy = 0.$
6. $xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = x + y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right).$
7. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$
8. $(4y^2+x^2)\,y' = xy.$
9. $xy'\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + x = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right).$
10. $xy + y^2 = (2x^2+xy)\,y'.$

Задача 3. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $xy' + y - e^x = 0, \qquad y(1) = 0.$
2. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}, \qquad y(0) = 0.$
3. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \qquad y(0) = 0.$

4. $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x, \qquad y(0) = 0.$

5. $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x \ln x, \qquad y(e) = \dfrac{e^2}{2}.$

6. $y' \sin x - y \cos x = 1, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

7. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x, \qquad y(0) = 0.$

Вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Что называют общим (частным) решением дифференциального уравнения?
4. В чем сущность задачи Коши?
5. Приведите пример дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6. Опишите ход решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение называют однородным?
8. Какое дифференциальное уравнение называют линейным?
9. Опишите метод Бернулли решения линейных дифференциальных уравнений.

Тема 15. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Практическое занятие 15.1. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

………………………………………………………………

$$y = \int dx \int dx .... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0;\ y_0 = 1;$

$y_0' = -1; \quad y_0'' = 0.$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно *k* раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right)dx = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0*.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$

Замена переменной: $p = y'$; $\quad y'' = \frac{dp}{dy}p$;

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0;$$

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0$; $\quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y}$;

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u; \qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int\frac{dy}{y}; \qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \qquad u = 4\ln|C_1y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1y|)}{\ln|C_1y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1y|\right| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1y|\right| = 4x + C$;

2) $p = 0$; $\quad y' = 0$; $\quad y = C$;

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ вида:

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x);$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Задачи.

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' = 1 - y'^2$.	2. $xy'' + y' = 0$.
3. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.	4. $x^2y'' + xy' = 1$.
5. $xy''' + y'' = 1 + x$.	6. $y'''^2 + y''^2 = 1$.
7. $y'(1+y'^2) = y''$.	8. $y'' = -x/y'$.
9. $x\,y'' + y' + x = 0$.	10. $y'''^2 = 4y''$.

Задача 2. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1.	$y''y^3 = 1$,	$y(1/2) = 1$,	$y'(1/2) = 1$.
2.	$y\,y'' + y'^2 = 1$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
3.	$y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 2$.
4.	$y^2 + y'^2 - 2y\,y'' = 0$,	$y(0) = 1$,	$y'(0) = 1$.
5.	$3y'\,y'' = y + y'^3 + 1$,	$y(0) = -2$,	$y'(0) = 0$.

Задача 3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y = \cos x$.
2. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.
3. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.
4. $y'' + y = 3\sin x$.
5. $y'' + y = 4x\cos x$.
6. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
7. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$.
8. $y'' - 2y = 2x\, e^x(\cos x - \sin x)$.
9. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
10. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.

Вопросы:

1. Какие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка Вы знаете?
2. Какую замену переменной необходимо провести, если в уравнении явно не содержится искомая функция; независимая переменная?
3. Какое уравнение называют линейным с постоянными коэффициентами?
4. Как строится общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Как найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

Тема 16. Системы дифференциальных уравнений.

Практическое занятие 16.1. Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.

Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2',..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2',..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2,..., y_n, y_1', y_2',..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, y_1, $y_2,...,y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2,..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2,..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2,..., y_n) \end{cases}$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

<u>**Теорема.**</u> (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2,..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2,..., y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2,..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2,..., y_n$, *то для любой точки* $(x_0.y_{10}, y_{20},..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям* $x_0.y_{10}, y_{20},..., y_{n0}$.

Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2,..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2,..., C_n)$, ... $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2,..., C_n)$, которые при подстановке в систему обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases}$$

Решения системы обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$
$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы:

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Пример. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5 - k & 2 \\ 2 & 2 - k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5 - k)(2 - k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5 - 1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2 - 1)\beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases}(5-6)\alpha_2+2\beta_2=0\\ 2\alpha_2+(2-6)\beta_2=0\end{cases}$ $\begin{cases}-1\alpha_2+2\beta_2=0\\ 2\alpha_2-4\beta_2=0\end{cases}$

Полагая $\alpha_2=2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2=1$.

Общее решение системы: $\begin{cases}x=C_1e^t+2C_2e^{6t}\\ y=-2C_1e^t+C_2e^{6t}\end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x''=5x'+2y'$;

Подставим в это выражение производную $y'=2x+2y$ из второго уравнения.

$$x''=5x'+4x+4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x''=5x'+4x+2x'-10x$$

$$x''-7x'+6x=0$$

$$k_1=6;\qquad k_2=1$$

$$x=Ae^t+Be^{6t};\qquad x'=Ae^t+6Be^{6t};$$

$$2y=x'-5x=Ae^t+6Be^{6t}-5Ae^t-5Be^{6t};$$

$$y=-2Ae^t+\frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A=C_1$; $\frac{1}{2}B=C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases}x=C_1e^t+2C_2e^{6t}\\ y=-2C_1e^t+C_2e^{6t}\end{cases}$.

Задачи.

Задача 1. Найти общее решений системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+y+2\sin t-3\cos t\\ \frac{dy}{dt}&=-6x+4y+7\sin t-20\cos t\end{aligned}\right\}.$$

Задача 2. Найти решения систем, удовлетворяющие заданным условиям:

1) $\left.\begin{aligned}x'&=y-z\\ y'&=x+y\\ z'&=x+z\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x(0)&=1;\\ y(0)&=2;\\ z(0)&=3.\end{aligned}$

2) $\left.\begin{aligned}x'&=6x-72y+44z\\ y'&=-4x+40y-22z\\ z'&=-6x+57y-31z\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x(0)&=9;\\ y(0)&=5;\\ z(0)&=7.\end{aligned}$

Вопросы:

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Что называют общим решением системы дифференциальных уравнений?
4. Какая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется линейной однородной?
5. Как составляется характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений?
6. Какими свойствами обладают решения системы дифференциальных уравнений?

Раздел 6. Ряды.

Тема 17. Числовые ряды.

Практическое занятие 17.1. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

при этом числа $u_1, u_2, \ldots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n > 0, \quad v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при ρ < 1 ряд сходится, а при ρ > 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Признак Коши. (радикальный признак)</u>

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

<u>**Следствие.**</u> Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ne 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

<u>Интегральный признак Коши.</u>

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … =* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

<u>Пример.</u> Ряд $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Задачи.

Задача 1. Найти сумму ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{n^2+5n+6}$.
2. $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\dfrac{3}{n^2-5n+6}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{30}{25n^2+5n-6}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{4n^2-1}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{18}{n^2+3n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{90}{4n^2+8n-5}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{9n^2-3n-2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{16}{16n^2-8n-3}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{n(n+1)(n+2)}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

Задача 2. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4-2\sin n}{n-\ln n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+\cos n}{n^2+3}$.
4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2\ln n}{n^3-2}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5-2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n}{n^2+1}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}+1}}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Задача 3. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(n!)^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n^5-1)}{n!}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n n!}{(2n)!}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n+2}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(2n+2)!}{(3n)!}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+3}\right)^{n^2}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\left(\dfrac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{2n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-1}{9n+1}\right)^{n/2}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n+1}e^{-n}$.

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называют знакопостоянным?
3. Что такое сумма ряда?

4. Какой ряд называют сходящимся?
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Сформулируйте известные Вам достаточные признаки сходимости рядов.

Практическое занятие 17.2. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$*, то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,\ldots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Задачи.

Задача 1. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n(n+2)}$.   2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2}{n^5+n^2+1}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+3n^2+2}}$.   4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n^2\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2-1}{3n^3}$.   6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.   8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^{n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^2\frac{\pi}{3^n}$.   10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}$.

Вопросы:

1. Какой ряд называется знакочередующимся (знакопеременным)?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какой ряд называется абсолютно сходящимся (условно сходящимся)?
4. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.
5. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

5. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

5.1. Перечень основной литературы:

Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2011. — 415 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28122.html

5.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математический анализ»
для студентов направления подготовки 10.03.01 Информационная безопасность
направленность (профиль) Безопасность компьютерных систем

Пятигорск, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Математический анализ» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Математический анализ» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов

ОПК-3: Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	**ИД-1**$_{\text{ОПК-3}}$ Знает необходимые математические методы для решения задач обеспечения защиты информации. **ИД-2**$_{\text{ОПК-3}}$ Умеет применять совокупность необходимых математических методов для решения задач обеспечения защиты информации. **ИД-3**$_{\text{ОПК-3}}$ Наделен навыками применения совокупности необходимых математических методов для решения задач обеспечения защиты информации.	Применяет необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности.

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и

выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (акад.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-3 (ИД-1, ИД-2, ИД-3)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	1,62	0.8	1,8
ОПК-3 (ИД-1, ИД-2, ИД-3)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	3,24	0,36	3,6
ОПК-3 (ИД-1, ИД-2, ИД-3)	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-5	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	27,54	3,06	30,6
		Итого за 1 семестр	**32,4**	**3,6**	**36**
2 семестр					
ОПК-3 (ИД-1, ИД-2, ИД-3)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	2,88	0,32	3,2
ОПК-3 (ИД-1, ИД-2, ИД-3)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	5,76	0,64	6,4
ОПК-3 (ИД-1, ИД-2, ИД-3)	Самостоятельное изучение литературы по темам 6-18	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	63,36	7,04	70,4
		Итого за 2 семестр	**72**	**8**	**80**
		Итого	**104,4**	**11,6**	**116**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль

Рейтинговая оценка знаний студента

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1.	Практическое занятие 5	5 неделя	15

2.	Практическое занятие 10	10 неделя	20
3.	Практическое занятие 15	15 неделя	20
	Итого за 1 семестр		**55**
1.	Практическое занятие 5	5 неделя	15
2.	Практическое занятие 10	9 неделя	20
3.	Практическое занятие 15	13 неделя	20
	Итого за 2 семестр		**55**

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55.** Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	***Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)***
Отличный	***100***
Хороший	***80***
Удовлетворительный	***60***
Неудовлетворительный	***0***

Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в форме **экзамена** предусматривает проведение обязательной экзаменационной процедуры и оценивается 40 баллами из 100. В случае если рейтинговый балл студента по дисциплине по итогам семестра равен 60, то программой автоматически добавляется 32 премиальных балла и выставляется оценка «отлично». Положительный ответ студента на экзамене оценивается рейтинговыми баллами в диапазоне от **20** до **40**, оценка **меньше 20** баллов считается неудовлетворительной.

Шкала соответствия рейтингового балла экзамена 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	**Оценка по 5-балльной системе**
35 – 40	Отлично
28 – 34	Хорошо
20 – 27	Удовлетворительно

Итоговая оценка по дисциплине, изучаемой в одном семестре, определяется по сумме баллов, набранных за работу в течение семестра, и баллов, полученных при сдаче экзамена:

Шкала пересчета рейтингового балла по дисциплине
в оценку по 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	***Оценка по 5-балльной системе***
88-100	*Отлично*
72-87	*Хорошо*
53-71	*Удовлетворительно*
<53	*Неудовлетворительно*

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2011. — 415 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28122.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.