МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МАТЕМАТИКА
для студентов специальности
38.05.01 «Экономическая безопасность»
Специализация:
«Финансово-экономическое обеспечение федеральных государственных органов, обеспечивающих безопасность Российской Федерации»

Пятигорск
2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» относится к базовой части дисциплин блока Б1 ОП ВО по специальности 38.05.01 Экономическая безопасность. Ее освоение происходит в 1, 2 семестрах.

Целью дисциплины является:

- ознакомление студентов с важнейшими методами и моделями классической математики, направленными на использование и применение их в таможенном деле: методами линейной алгебры, методами дифференциального исчисления функции одной переменной, вероятностными и статистическими моделями и их приложениями в таможенном деле.

Основными задачами дисциплины являются:

- создание у студентов основ теоретической подготовки в области математических методов и моделей в таможенном деле;
- овладение математическим аппаратом, необходимым для изучения дисциплин таможенного дела и решения теоретических и практических задач;
- развитие интеллекта и формирование у студентов логического и алгоритмического мышления;
- выработка навыков самостоятельного изучения учебной и научной литературы по математическим методам и моделям и их приложениям;
- повышение общей культуры студентов.

2. Методические рекомендации по организации практических занятий

Практическое занятие 1.

Тема занятия. Матрицы и определители.

Цель занятия. Приобрести навык выполнения операций над матрицами и вычисления определителей**.**

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: виды матриц, действия над матрицами, виды определителей.

Уметь: выполнять операции над матрицами и вычислять определители 2-го,3-го и n-го порядков.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Матрицы и определители широко применяется при решении многих экономических задач.

Теоретическая часть.

Прямоугольная таблица, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают$A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Сложение матриц

Пусть даны две матрицыA иB одинаковой размерности. Их суммой называется матрица$C = A + B$ той же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матрицA и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, тогда

$$A+B=C=\begin{pmatrix}1+2 & -2+1 & 5-3\\ 4+1 & 1-2 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -1 & 7\end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов.

Разностью B - A матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$. Тогда

$$X=B-A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 4 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \,\|\, a_{ij} \,\| = \|\, \alpha a_{ij} \,\|$$

Пример. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\alpha A=3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 9 & 15\end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j– го столбца матрицы A.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Следует отметить, что умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. $AB \neq BA$.

Пример 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

Имеем $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 5\\ -1\cdot(-2)+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ -11 & 14\end{pmatrix}$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1-1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+1\cdot 3\\ 3\cdot 1+5\cdot(-1) & 3\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 21\end{pmatrix}$$

Вывод: AB ≠ BA

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы А.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Число $a_{11}\ a_{22}$ - $a_{21}\ a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически вычисление определителя третьего порядка выглядит следующим образом (правило треугольников или правило Сарруса):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot 9=13-6-34-27=-54$$

Данный определитель можно вычислить иным способом, применив элементарные преобразования к строкам определителя. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. получаем определитель вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24-30+36+12-36-60=-54.$$

Вопросы и задания.

1. Какие матрицы можно складывать и по какому правилу?
2. Какими свойствами обладает операция сложения матриц? Есть ли отличия от свойств сложения чисел?
3. Как умножить матрицу на число?
4. Какими свойствами обладают операция умножения матрицы на число? Есть ли отличия от свойств умножения чисел?
5. Что называется определителем квадратной матрицы?
6. Дайте определение минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
7. Как вычислить определитель, разлагая его по произвольной строке или столбцу? Сформулируйте соответствующую теорему и напишите формулы разложения определителя по i–ой строке (k–му столбцу).

1. Найти произведение матриц А и В.

1. А=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 5 & 6 & 1\\ -2 & 1 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 8 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

2. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель

1. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 8 & 26 & 56\\ 3 & -4 & 6\end{vmatrix}$. 2. $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+b\end{vmatrix}$

5. $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{vmatrix}$. 6. $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 3 & -2\\ -4 & 2 & 7 & 2\\ -5 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 2 & -1\end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & -2\\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 2.

Тема занятия. Медоды решения систем линейных уравнений.

Цель занятия. Рассмотреть различные методы решения и закрепить навыки решения СЛАУ.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: методы решения систем линейных уравнений

Уметь: решать системы линейных методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Приемы и методы решения СЛАУ применяются для решения задач с экономическим содержанием.

Теоретическая часть.

Системаmлинейных уравнений сnпеременными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

где a_{ij} (i = 1,2,...,m; j = 1,2, ...,n), b_k (k = 1,2, ...,m) - заданные действительные числа.

Числа a_{ij} (i = 1,2,...,m; j = 1,2, ...,n) называются коэффициентами системы, а числа b_k (k = 1,2, ...,m) - свободными членами системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

которые составлены из коэффициентов при переменных и свободных членов системы, называют соответственно матрицей системы и расширенной матрицей системы.

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $x_1,\ x_2,\ x_3$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных; b_i - свободные члены (правые части) системы уравнений. Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*.

Решим систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 - 3 - 6 - 4 - 3 = -26.$$

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, то матрица *A* имеет обратную, а решение системы имеет вид: $X = A^{-1}B$.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы *A*:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5.$$

Матрица A^{-1}, обратная кA, запишется следующим образом

$$A^{-1}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}.$$

Матричное решение системы имеет вид:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-78\\ 130\\ -52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 2\end{pmatrix},$$

отсюда следует, что $x_1=3,\ x_2=-5,\ x_3=2.$

При условии, что $\Delta\neq 0$, то единственное решение системы выражается *формулами Крамера*:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Решить по формулам Крамера следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-4\\ 3x_1+2x_2+5x_3=2\\ 4x_1-7x_2-5x_3=-5\end{cases}.$$

Вначале найдем определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & -7 & -5\end{vmatrix}$ = -10 - 40 - 21 - 8 -30+ +35 = - 74. Δ $\neq$0. Следовательно, рассматриваемая система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$.

$\Delta_1=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 5\\ -5 & -7 & -5\end{vmatrix}$ = 40 + 50 - 14 + 10 - 20 - 140 = - 74, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & -5 & -5\end{vmatrix}$ = - 10 - 80 - 15 - 8 - 60 + 25 = - 148, $\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ 3 & 2 & 2\\ 4 & -7 & -5\end{vmatrix}$ = - 10 - 16 + 84 +32 -30 + +14=74. Таким образом, решение данной системы имеет вид: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-74}{-74}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-148}{-74}=2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{74}{-74}=-1$.

Рассмотрим решение СЛАУ методом Гаусса. Метод Гаусса заключаетсяв последовательном исключении неизвестных. Для удобства выпишем расширенную матрицуи приведем её к диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[S_1 \leftrightarrow S_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-S_1+S_2 \\ -2S_1+S_3}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-S_1+S_2 \\ -2S_1+S_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[S_2 \leftrightarrow S_3]{} \xrightarrow[S_2 \leftrightarrow S_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[-3S_2+S_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход. Запишем систему,исходя из коэффициентов последней матрицы, и последовательно найдем неизвестные.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ -x_2 - 9x_3 = -13, \\ 26x_3 = 52, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 = 13 - 9x_3 = -5, \\ x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Вопросы и задания.

Используя формулы Крамера и метод обратной матрицы найти решения следующих СЛАУ:

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

Решить следующие системы методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 3.

Тема занятия. Функции и пределы.

Цель занятия. Сформировать навыки вычисления пределов функций, а также пределов с использованием формул двух замечательных пределов.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: основные методы вычисления пределов функций, вид первого и второго замечательных пределов.

Уметь: вычислять пределы функций.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Пределы функций используются в экономических расчетах при нахождении предельных экономических показателей.

Теоретическая часть.

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки*a*, за исключением, может быть, самой точки*a*.

Число А называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае записывают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Дадим геометрическую иллюстрацию понятия предела функции в точке

(рис. 1.)

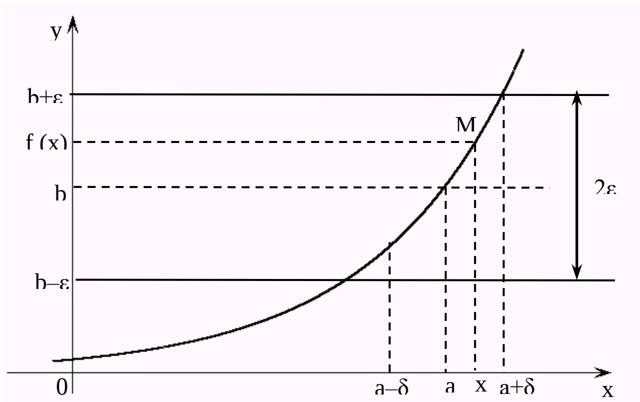


Рисунок 1.

Для всех точек*x,* отстоящих от точки *a* не дальше, чем на δ, точки M графика функции $f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon,\ y = b + \varepsilon.$

Рассмотрим некоторые *свойства пределов функций.*

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, С- постоянная величина ,тогда

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$,
2. $\lim\limits_{x \to a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = C \cdot A$,
3. $\lim\limits_{x \to a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = C \cdot A$,
4. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = A + B$,
5. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \cdot B$,
6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Два замечательных предела

Первый замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Рассмотрим примеры на вычисление пределов функций.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+5x}{-4x^2+7}$.

Решение

При подстановке предельного значения аргумента получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

В примерах подобного типа числитель и знаменатель делят почленно на x^n, где n -степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на на x^2. В результате получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+5x}{-4x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\frac{5}{x}}{-4+\frac{7}{x^2}}=\frac{12+0}{-4+0}=-3,$$

Так как, при $x\to\infty$ функции $\frac{5}{x}$ и $\frac{7}{x^2}$ стремятся к нулю.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

При подстановке предельного значения аргумента получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, чтобы ее раскрыть разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)=(x-3)(x-3)(x+2)=(x-3)^2(x+2)$$

$$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x-3)=(x-3)(x-3)(x+1)=(x-3)^2(x+1)$$

$$\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-3)^2(x+1)}.$$

Сократим числитель и знаменатель на множитель $(x-3)^2$, в результате получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

При подстановке предельного значения аргумента получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, чтобы ее раскрыть умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а выражение, стоящее в знаменателе разложим на множители.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{\sqrt[3]{x-3}\sqrt[3]{x+3}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)^{\frac{1}{3}}}{(x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=0\cdot$$

Пример 4.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$.

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, раскроем ее с помощью первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{4\cdot 3x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

Воспользуемся тригонометрическими формулами:

$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x;\ \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, в результате получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\frac{2\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1}=4$$

Пример 6.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x-1}$.

Подстановка предельного значения приводит к неопределённости вида 1^∞.

Для её раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{3x}}{1+\frac{4}{3x}}\right)^{2x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{2x}}\cdot 1=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{-3x}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{8}{3}}}=\frac{e^{-\frac{2}{3}}}{e^{\frac{8}{3}}}=e^{-\frac{10}{3}}=\frac{1}{e^{\frac{10}{3}}}.$$

Вопросы и задания.

1. Определение предела функции.
2. Основные свойства пределов функций.
3. Методы вычисления пределов функций.
4. Первый замечательный предел.
5. Второй замечательный предел.

Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+5}{3x-4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{2x^2+5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x-8}{8x^2+6x^3+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-2x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 4.

Тема занятия. Производная и дифференциал функции одной переменной.

Цель занятия. Сформировать навыки вычисления производных сложной функции.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: таблицу производных и правила дифференцирования.

Уметь: находить производные сложных функций.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Производная сложной функции используются в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Определение производной

Производной функции y = f (x) называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то производная существует и функция f (x) называется дифференцируемой в точке x. Производная обозначаетсяy'(x) или $\frac{dy}{dx}$. Процесс нахождения производной называется дифференцированием функции.

Правила дифференцирования функций

Пусть$C \in \mathbf{R}$— постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные.

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = C \cdot u'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Правило дифференцирования сложной функции

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема поu, а функция $u = \varphi(x)$дифференцируема по x, то производная сложной функции$y = f(\varphi(x))$ определяется формулой $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} u'$.

1*а*. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

1*б*. $\left(u^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

2*а*. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

3. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

3*а*. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

7. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. 9. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

10. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$. 11. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Производные второго порядка

Производной второго порядка (*второй производной*) от функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Вторую производную также обозначают $y''(x)$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка* и т. д. Производную n-го порядка обозначают $y^{(n)}(x)$ или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Покажем на примерах, как следует пользоваться приведенными выше формулами.

Пример1. Найти производную: $y = \cos^2(x^2)$.

$$y' = 2\cos(x^2)\cdot(\cos(x^2))' = 2\cos(x^2)\cdot(-\sin(x^2))'\cdot(x^2)' = -2x\cdot\sin(2x^2).$$

Пример 2. Найти производную: $y = \arcsin\sqrt{x}$,

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Пример 3. Найти производную: $y = \ln(\mathrm{arctg}\sqrt{x-1})$.

Решение.

$$y' = \frac{(\mathrm{arctg}\sqrt{x-1})'}{\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{(\sqrt{x-1})'}{1+(\sqrt{x-1})'} = \frac{1}{\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = arctg\dfrac{2x^4}{1-x^8}$.

$$y' = \frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

Если укак функция от x задается посредством соотношения

$$F(x,y)=0,$$

где $F(x,y)=0$ - выражение, содержащее x и y, то y называется неявной функцией от x. Производная от y по x при неявном способе задания функции определяется следующим способом.

1. Находим производную от левой части равенства $F(x,y)=0$, рассматривая при этом y как функцию от x, и приравниваем ее к нулю.
2. Решаем полученное уравнение относительно y'. В результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде $y' = f(x,y)$

Пример 1. Найти $\frac{dy}{dx}$ для данной неявной функции $5x^2+3xy-2y^2+2=0$.

$$5\cdot 2x + 3(x'y+xy') - 2\cdot 2y\cdot y' = 0$$

$$10x+3y+3xy'-4yy'=0$$

$$y'(3x-4y) = -10x-3y$$

$$y' = \frac{-10x-3y}{3x-4y} = \frac{10x+3y}{4y-3x}.$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция y от аргумента x задана параметрически, т.е. $\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t), \end{cases}$ где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции и $\varphi'(t)\neq 0$, то производная y'_x вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример 2. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = a\cdot(t-\sin t); \\ y = a\cdot(1-\cos t), \end{cases}$$

Воспользуемся формулой: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$,

$$\begin{cases} x_t' = a\cdot(1-\cos t), \\ y_t' = a\cdot\sin t. \end{cases}$$

$$y_x' = \frac{a\sin t}{a\cdot(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\,\frac{t}{2},\ (t\neq 2k\pi).$$

Метод логарифмического дифференцирования

Иногда бывает целесообразно, прежде чем дифференцировать заданную функцию, найти ее логарифм, затем определить производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную от заданной функции. Такой прием называется методом *логарифмического дифференцирования.*

Метод логарифмического дифференцирования позволяет легко найти производную от сложной функции вида $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

Пример 3. Найти производную функции $y = (\sin x)^{tgx}$

Прологарифмируем обе части равенства $\ln y = tgx\ln\sin x$, затем продифференцируем

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + tgx\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1.$$

Окончательно, получим: $y' = y\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1\right) = (\sin x)^{tgx}\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1\right).$

Пример 4. Найти $\frac{dy}{dx}$ для данной неявной функции $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$.

$$5\cdot 2x + 3(x'y + xy') - 2\cdot 2y\cdot y' = 0$$

$$10x + 3y + 3xy' - 4yy' = 0$$

$$y'(3x - 4y) = -10x - 3y$$

$$y' = \frac{-10x - 3y}{3x - 4y} = \frac{10x + 3y}{4y - 3x}.$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция y от аргумента x задана параметрически, т.е. $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная y'_x вычисляется по формуле:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

Пример 5. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически

$$\begin{cases} x = a\cdot(t - \sin t); \\ y = a\cdot(1-\cos t), \end{cases}$$

Воспользуемся формулой: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$,

$$\begin{cases} x'_t = a\cdot(1-\cos t), \\ \quad y'_t = a\cdot\sin t. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{a\sin t}{a\cdot(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\frac{t}{2},\ (t \neq 2k\pi).$$

Метод логарифмического дифференцирования

Иногда бывает целесообразно, прежде чем дифференцировать заданную функцию, найти ее логарифм, затем определить производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную от заданной функции. Такой прием называется методом *логарифмического дифференцирования.*

Метод логарифмического дифференцирования позволяет легко найти производную от сложной функции вида $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

Пример 6. Найти производную функции $y = (\sin x)^{tgx}$

Прологарифмируем обе части равенства $\ln y = tgx\ln\sin x$, затем продифференцируем

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + tgx\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1.$$

Окончательно, получим: $y' = y\cdot\left(\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1\right) = (\sin x)^{tgx}\left(\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1\right).$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 5.

Тема занятия. Исследование и построение графиков функций.

Цель занятия. Формирование навыков применения дифференциального исчисления к исследованию функций и и построению графиков функций.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: определение экстремума функции, точки перегиба, асимптот, схему исследования и построения графиков функций.

Уметь: проводить исследование и построение графиков функций.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Исследование и построение графиков функций используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в точке x_0. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума) функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Значение функции в точке максимума называется максимумом функции: $y_{\max} = f(x_{\max})$.Значение функции в точке минимума называется минимумом функции: $y_{\min} = f(x_{\min})$.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума функции*. Значения функции в точках экстремума называются *экстремумами функции.*

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует – *необходимое условие экстремума*. Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать только среди тех точек, в которых производная функции равна нулю или не существует, такие точки называются *критическими* или *стационарными* точками функции.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности (за исключением может быть, самой точки x_0) и если при переходе x через точку x_0 (слева направо):

1) $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то точка x_0 есть точка максимума функции,
2) $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то точка x_0 есть точка минимума функции,
3) $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 функция не имеет экстремума.

Если в критической точке x_0 функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема, то определить характер экстремума (если в точке x_0 функции имеет экстремум) можно по знаку второй производной:

1) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции,
2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции.

График функции y = f(x) называется выпуклым вверх на интервале (a; b) если в пределах этого интервала график функции y = f(x) лежит ниже любой своей касательной.

График функции y = f(x) называется выпуклым вниз на интервале (a; b) если в пределах этого интервала график функции y = f(x) лежит выше любой своей касательной.

Точка графика функции y = f(x) M_0 (x_0; f(x_0)) называется точкой *перегиба* графика, если при переходе x через x_0 график меняет направление выпуклости.

В точке перегиба x_0 вторая производная функции f равна нулю $f''(x_0) = 0$ (необходимое условие перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка x_0 есть точка перегиба её графика (достаточное условие перегиба).

Алгоритм исследования функции на выпуклость
и точки перегиба

1. Находим вторую производную функции $f''(x)$.
2. Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба. Если вторая производная будет менять свой знак с плюса на минус или с минуса на плюс в исследуемой точке, то эта точка и будет точкой перегиба графика функции. Если вторая производная знака не меняет, то функция не имеет точек перегиба.

Асимптоты графика функции

ПрямаяLназывается асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x;\ y)$ кривой до этой прямой Lстремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат. Прямая $x = a$является *вертикальной* асимптотой кривой $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \ (или - \infty)$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty \ (или - \infty)$$

Прямая $y = kx + b$ наклонная асимптота кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если выполняются условия:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad и \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = b$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad и \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = b\right).$$

Частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$ и $b \neq \infty$ – *горизонтальная* асимптота $y = b$.

Общая схема исследования
и построения графикафункции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность и нечётность, периодичность.
3. Исследовать функцию на непрерывность и вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции на бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения функции с осями координат.
8. Построить график функции.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{3x^2 - x + 2}{x-2}$.

Найдемобласть определения функции $D(y) = (-\infty\,;2)\cup(2\,;+\infty)$.

$x_0 = 2$ есть точка разрыва графика функции, через нее может проходить вертикальная асимптота.

Найдем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{3x^2 - x + 2}{x - 2} = \left[\dfrac{12}{-0}\right] = -\infty$,следовательно, прямая $x_0 = 2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту: $y = kx + b$

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{3x^2 - x + 2}{(x-2)x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left|\begin{matrix}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 3;$$

$$b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left[f(x) - k \cdot x\right] = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(\frac{3x^2 - x + 2}{x - 2} - 3x\right) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{3x^2 - x + 2 - 3x^2 + 6x}{x - 2} =$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{5x + 2}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{5 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 5.$$

Нашли, что $k = 3$ и $b = 5$, следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = 3x + 5$.

Вопросы и задания.

1. Определение экстремума функции.
2. Определение точки перегиба графика функции.
3. Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.
5. Общая схема исследования и построения графика функции.

Найти экстремумы функций:

1. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$. 2. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x$.

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции:

1. $y = \dfrac{x^4}{12} - 2x^2$. 2. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

Найти асимптоты графиков следующих функций:

1. $y = \dfrac{2 - x^2}{x + 3}$. 2. $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 1}{1 - x}$.

Исследовать функцию и построить её график.

1. $y = \dfrac{x^3}{3(x+2)^2}$.   2. $y = 3x\left(1 - x^2\right)$.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 6.

Тема занятия. Производные, дифференциалы им экстремумы функции нескольких переменных.

Цель занятия. Формирование навыков вычисления частных производных и полного дифференциала.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: методы нахождения частных производных и полного дифференциала.

Уметь: вычислять частные производные функций и находить полный дифференциал.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Частные производные используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Частные производные функции нескольких переменных

Пусть дана функциядвух переменных z = z (x, y).*Частной производной функции двух переменных* по одному из её аргументов называется предел отношения частного приращения функции по этому аргументу к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$ –*частная производная функции z по аргументу x*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$ – *частная производная функции z по аргументу y.*

Чтобы вычислить частную производную функции нескольких переменных по одному из её аргументов, нужно все другие её аргументы считать постоянными и проводить дифференцирование по правилам дифференцирования функции одного аргумента.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = x^3 - 3x^2y + 2y^3$.

При нахождении частной производной по *x* будем рассматривать *y* как величину постоянную. Тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy.$$

Аналогично, рассматривая *x* как величину постоянную, найдем частную производную по *y:*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6y^2.$$

Пример 2. Найти частные производные функции

$$z = \arcsin\frac{y}{x}$$

При нахождении частной производной по x будем рассматривать y как величину постоянную. Тогда получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Аналогично, рассматривая x как величину постоянную, найдем частную производную по y

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Сложная функция нескольких переменных и ее дифференцирование

Если $z=f(x,y)$ - дифференцируемая функция аргументов x и y, а x и y – дифференцируемые функции аргумента t: $x=x(t)$, $y=y(t)$, то производная сложной функции $z=z(x(t),y(t))$ находится по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Пример 3. $z=x^3-xy$, где $x=1-t^2$, $y=t^4$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

Находим производные

$$\frac{dx}{dt}=-2t,\ \frac{dy}{dt}=4t^3.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x.$$

Окончательно, получаем

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=(3x^2-y)\cdot(-2t)+(-x)\cdot4t^3=\left(3(1-t^2)^2-t^4\right)(-2t)-(1-t^2)\cdot4t^3=\\&=2t(-3+6t^2-3t^4+t^4)-2t(2t^2-2t^4)=2t(-3+6t^2-2t^4-2t^2+2t^4)=\\&=2t(4t^2-3).\end{aligned}$$

Если $z=z(u,v)$ - дифференцируемая функция аргументов u и v, а u и v в свою очередь, являются функциями аргументов x и y:

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y)$$

и имеют конечные частные производные по этим аргументам, то частные производные сложной функции $z=z(u(x,y),v(x,y))$ находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пример 4. Найти частные производные сложной функции

$$z = u^3 e^v \text{, где } u = xy, v = x^2 - y^2.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 e^v \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v} = u^3 e^v;$$

частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y.$$

По данным в указании формулам получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 e^v \cdot y + u^3 e^v \cdot 2x = 3x^2 y^2 e^{x^2-y^2} \cdot y + x^3 y^3 e^{x^2-y^2} \cdot 2x = 3x^2 y^3 e^{x^2-y^2} +$$

$$+ 2x^4 y^3 e^{x^2-y^2} = x^2 y^3 e^{x^2-y^2}\left(3 + 2x^2\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 e^v \cdot x + u^3 e^v \cdot (-2y) = 3x^2 y^2 e^{x^2-y^2} \cdot x + x^3 y^3 e^{x^2-y^2} \cdot (-2y) =$$

$$= 3x^3 y^2 e^{x^2-y^2} - 2x^3 y^4 e^{x^2-y^2} = x^3 y^2 e^{x^2-y^2} \cdot \left(3 - 2y^2\right).$$

Полный дифференциал

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ вычисляется поформуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Частные производные функций нескольких переменных, заданных неявно

Если уравнение, с помощью которого задается функция одной переменной х, не разрешено относительно у, то эта функция называется *неявной*: $F(x, y) = 0.$

Формула для производной неявной функции имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}.$$

Пример 1. Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $e^{xy} - x - y = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

Для $F(x, y) = e^{xy} - x - y$ имеем: $F_x' = ye^{xy} - 1$, $F_y' = xe^{xy} - 1$ и согласно формуле для производной неявной функции, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}$.

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами

$$z''_{x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),,\qquad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),,\quad z''_{y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$ Частные производные z_{xy}'' и z_{yx}'', отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными* второго порядка.

Здесь $z_{xy}''=z_{yx}''$. Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Смешанные производные второго порядка равны, если они непрерывны:* $f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)$.

Пусть имеется функция $z=f(x,y)$ независимых переменных хи у, обладающая непрерывными частными производными второго порядка.

Дифференциалы второго, третьего и т.д. порядков определяются формулами $d^2z=d(dz),\ d^3z=d(d^2z)$ и т.д. Они выражаются через частные производные. Например, дифференциал второго порядка имеет вид:

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Вопросы и задания.

Найти частные производные следующих функций

1. $z=\dfrac{x}{y}$. 2. $z=\dfrac{y-2x}{x+2y}$.

3. $z=arctg\,\dfrac{x}{y}$. 4. $z=ye^{-xy}$

5. $u=xy^2z^3$

Для данных сложных функций найти производные $\dfrac{dz}{dt}$.

1. $z=e^{x-3y},\ x=\sin t,\ y=t^2$.
2. $z=\arcsin(x-y),\ x=4t^2,\ y=t^3$.

Найти полный дифференциал функции $z=\dfrac{y}{x^2-y^2}$.

Найти вторые частные производные функции $z=\ln(x^2+y^2)$. Убедитесь, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=arctgx+\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Экстремумы функций нескольких переменных

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

то точка M_0 называется *точкой максимума*.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

то точка M_0 называется *точкой минимума.*

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует. Эти условия называют необходимыми условиями экстремума. Точку (x_0, y_0) будем называть *критической точкой.*

Однако не все стационарные точки обязательно являются точками экстремума. Каждая из этих точек должна быть проверена на экстремум с помощью достаточных условий экстремума.

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = \Delta = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y) \right]^2.$$

1. Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.
2. Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума.
3. В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + 9xy$.

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 9y, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 + 9x.$$

$$f''_{x^2}(x, y) = 6x; \; f''_{xy}(x, y) = 9; \; f''_{y^2}(x, y) = 6y$$

Приравнивая к нулю первые производные, получим систему уравнений для определения критических точек:

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0, \\ 3y^2 + 9x = 0. \end{cases}$$

Решая систему находим две критические точки $M_1(0, 0)$, $M_2(-3, -3)$.

Вычисляем значения частных производных второго порядка в этих точках, введя обозначения:

$$A_1 = f''_{xx}(0, 0) = 0, \; B_1 = f_{xy}(0, 0) = 9, \; C_1 = f_{yy}(0, 0) = 0,$$

$$A_2 = f_{xx}(-3, -3) = -18, \; B_2 = f_{xy}(-3, -3) = 9, \; C_2 = f_{yy}(-3, -3) = -18.$$

Затем находим определитель:

$$\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - 9^2 = -81;$$

$$\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = (-18) \cdot (-18) - 9^2 = 243.$$

В силу достаточных условий заключаем, что в точке M_1 нет экстремума, так как $\Delta_1 < 0$, а в точке M_2 функция имеет максимум, так как $\Delta_2 > 0$ и $A_2 < 0$, причем $\max f(x, y) = f(-3, -3) = 27$.

Производная в данном направлении. Градиент функции

*Градиентом*функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке *M*, имеющим своими координатами частныепроизводные функции *z*:

$$\overrightarrow{grad}z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{наиб} = \left|\overrightarrow{grad}z\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

1.Экстремумы функций нескольких переменных.
2.Необходимые условия экстремума.
3.Достаточные условия экстремума.
4.Производная в данном направлении. Градиент функции.

Даны: функция трех переменных *u* = *f* (*x*, *y*, *z*), точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{a}\,(a_1, a_2,, a_3)$.

Найти:

1) *grad u* в точке M_0;

2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

1. $u = \sqrt{x^2 - 2y + 4z}$; M_0 (1; -2; 1) ; $\vec{a}$ (-1; 2; 2) .

2. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x + y + z}}$; M_0 (1; 1; 2) ; $\vec{a}$ (-3; 0; 4)

Найти экстремумы функции:

1. $z = x^3 + y^3 - 9xy$. 2. $z = x^2 + y^2 - 8x - 2$

3. $z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5$ .4. $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + y$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 7.

Тема занятия. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования.

Цель занятия. Формирование навыков непосредственного интегрирования и метода замены переменной.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: таблицу основных интегралов, метод непосредственного интегрирования и метод замены переменной.

Уметь: находить интегралы методом непосредственного интегрирования и методом замены переменной.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Метод непосредственного интегрирования и метод замены переменной используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Пусть функция F(x) –первообразная функции f(x) на множестве X. Тогда совокупность функций вида F(x)+C, где C – любая константа, называется *неопределенным интегралом* функции f(x) на множестве X.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$

. $\int$ – символ интеграла, f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1. *Постоянный множитель* можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx .$$

2. *Интеграл алгебраической суммы функций* равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3. *Дифференцирование интеграла*

Производная неопределенного интеграла по переменной интегрирования равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

Это свойство является единственным критерием проверки правильности результата интегрирования.

4.*Дифференциал неопределенного интеграла* равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

Символы неопределенного интеграла и дифференциала, стоящие рядом взаимно уничтожаются

$$\int dF(x) = F(x) + C .$$

Таблица интегралов основных элементарных функций

1.$\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \left(\alpha \neq -1\right)$

2.$\int dx = x + C$

3.$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, x \neq 0$

4.$\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C, x \neq 0$

5.$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$7. \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq \pi k$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, |x| \neq a$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x < a$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Непосредственное интегрирование

При непосредственном интегрировании используют таблицы интегралов, свойства интегралов и простейшие алгебраические преобразования подынтегрального выражения.

Пример1.

$$\int\left(5x - 3\sqrt[4]{x} + \frac{4}{x^5}\right)dx = \int 5xdx - \int 3\sqrt[4]{x}dx + \int \frac{4}{x^5}dx = 5\int xdx - 3\int x^{1/4}dx + 4\int x^{-5}dx =$$

$$= 5\frac{x^2}{2} - 3x^{5/4} / (5/4) + 4\frac{x^{-4}}{(-4)} + C = \frac{5}{2}x^2 - \frac{12}{5}x^{5/4} - x^{-4} + C.$$

Пример 2.

$$\int(1-x)(2+3x)dx = \int\left(2 + x - 3x^2\right)dx = 2\int dx + \int xdx - 3\int x^2dx =$$

$$2x + \frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + C = 2x + \frac{x^2}{2} - x^3 + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^5}dx = \int\left(\frac{x^{1/3}}{x^5}-\frac{x}{x^5}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{3}-5}-x^{1-5}\right)dx =$$

$$= \int x^{-14/3}dx - \int x^{-4}dx = x^{-11/3}/\left(-11/3\right) - \frac{x^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{3}{11}x^{-11/3} + \frac{x^{-3}}{3} = C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{6^x}dx = \int\left[3\left(\frac{2}{6}\right)^x - 2\left(\frac{3}{6}\right)^x\right]dx = 3\int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx - 2\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$$

$$= 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(1/3\right)} - 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(1/2\right)} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{4}arctg\frac{x}{4} + C.$$

Пример 6. Найти $\int(3\cos x - x^4 + \frac{2}{x^2+1} - 2)dx$

$$\int(3\cos x - x^4 + \frac{2}{x^2+1} - 2)dx = 3\int\cos x dx - \int x^4 dx + 2\int\frac{dx}{x^2+1} - 2\int dx =$$

$$= 3\sin x - \frac{x^5}{5} + 2arctgx - 2x + C$$

Пример 7. Найти $\int tg^2 x dx$

Используя тригонометрическую формулу

$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, получим

$$\int tg^2 x dx = \int(\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C$$

Пример 8. Найти $\int\frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx$

$$\int\frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx = \int\frac{3dx}{5+x^2} - \int\frac{\sqrt{5+x^2}}{5+x^2} = 3\int\frac{dx}{5+x^2} - \int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}} - \ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right| + C$$

Пример 9. Найти $\int\frac{32^x - 2^x}{4^x}dx$

$$\int\frac{32^x - 2^x}{4^x}dx = \int\left(\frac{32}{4}\right)^x dx - \int\left(\frac{2}{4}\right)^x dx = \int 8^x dx - \int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} - \frac{(0{,}5)}{\ln(0{,}5)} + C$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

Формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(x)dx = \left|x=\varphi(t)\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1.

$$\int (x+3)^4\,dx = \begin{vmatrix} u = x+3 \\ du = dx \end{vmatrix} = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(x+3)^5}{5} + C.$$

Пример 2.

$$\int \sqrt{x+5}dx = \begin{vmatrix} u = x+5 \\ du = dx \end{vmatrix} = \int u^{1/2}du = u^{3/2}\frac{2}{3} + C = (x+5)^{3/2}\frac{2}{3} + C.$$

Пример 3.

$$\int \sin(x+1)dx = \begin{vmatrix} u = x+1 \\ du = dx \end{vmatrix} = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(x+1) + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x-6)} = \begin{vmatrix} u = x-6 \\ du = dx \end{vmatrix} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C = tg(x-6) + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{x^4dx}{x^5+9}$$

Полагая $x^5+9=t$ и дифференцируя обе части равенства, получим $5x^4dx=dt$. Отсюда $x^4dx=\frac{1}{5}dt$ и

$$\int \frac{x^4dx}{x^5+9} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln\left|x^5+9\right| + C$$

Пример 7.

$$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

Полагая $\sqrt{x}=t$ и дифференцируя обе части равенства, получим $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$. Тогда $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt$.

Следовательно,

$$\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int 3^t dt = 2 \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 8.

$$\int \frac{\sqrt[4]{arctgx}}{1+x^2} dx$$

Полагая $arctgx = t$ и дифференцируя обе части равенства, получим $\frac{dx}{1+x^2} = dt$.

Следовательно, $\int \frac{\sqrt[4]{arctgx}}{1+x^2} dx = \int t^{1/4} dt = \frac{4}{5}\sqrt[4]{t^5} + C = \frac{4}{5}\sqrt[4]{arctg^5 x} + C$

Пример 9.

$$\int x^2 e^{1-x^3} dx.$$

Полагая $1 - x^3 = t$ и дифференцируя обе части равенства, получим $-3x^2 dx = dt$. Тогда $x^2 dx = -\frac{1}{3} dt$.

Следовательно, $\int x^2 e^{1-x^3} dx = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C$.

Вопросы и задания.

1. Понятие неопределенного интеграла.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод замены переменной.

Найти интегралы, используя метод непосредственного интегрирования

1. $\int \frac{dx}{16 - x^2}$.
2. $\int \frac{dx}{x^2 - 16}$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}$.
5. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}} + 5x^{\frac{3}{2}} \right) dx$
6. $\int \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx$.

Найти интегралы, используя метод замены переменной

1. $\int \cos 3x dx$.
2. $\int e^{-\frac{x}{2}} dx$
3. $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$.
4. $\int \frac{dx}{6x - 1}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

6. $\int \frac{\sin 5x\ dx}{9-\cos^2 5x}$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$

8. $\int x\cdot \mathrm{tg}x^2 dx$

Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные на множестве X. Тогда на этом множестве имеет место равенство

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x).$$

Формула используется, когда подынтегральную функцию удается представить в виде двух сомножителей u и dv, причем эти сомножители должны быть такими, чтобы сравнительно легко по dv можно было найти v, и чтобы интеграл $\int vdu$ был проще исходного $\int udv$.

Классы функций, интегрируемых по частям

Тип I	*Тип II*	*Тип III*
$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$	$\int Q_r(x)\ln xdx$	$\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$
$\int P_n(x)\sin\alpha xdx$	$\int Q_r(x)\ln^n xdx$	$\int e^{\alpha x}\sin\alpha xdx$
$\int P_n(x)\cos\alpha xdx$	$\int Q_r(x)\arcsin\alpha xdx$	$\int \cos(\ln x)dx$
$u=P_n(x)$	$\int Q_r(x)arctg\alpha xdx$	
	$dv=Q_r(x)dx$	

$P_n(x)$ - многочлен целой степени относительно x

$Q_r(x)$ - целая или иррациональная алгебраическая функция

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1.

$$\int(2x+3)\cos 5xdx=\left|\begin{array}{l}u=2x+3, du=2dx,\\ dV=\cos 5xdx, V=\frac{1}{5}\sin 5x\end{array}\right|=(2x+3)\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{5}\int\sin 5x\cdot 2dx=$$

$$=(2x+3)\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{2}{25}\cos 5x+C.$$

Пример 2.

$$\int\left(x^2+2x-1\right)e^{3x}dx=\left|\begin{matrix}U=x^2+2x-1, dU=\left(2x+2\right)dx,\\ dV=e^{3x}dx, V=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)e^{3x}-\frac{2}{3}\int\left(x+1\right)e^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}U=x+1, du=dx,\\ dV=e^{3x}dx, V=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\left(x+1\right)e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)e^{3x}-\frac{2}{9}\left(x+1\right)e^{3x}+\frac{2}{9}\frac{1}{3}e^{3x}+C=\frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2+12x-13\right)+C.$$

Пример3.

$$\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left|\begin{matrix}U=\ln x, dU=\frac{dx}{x},\\ dV=x^{-\frac{2}{3}}dx, V=3x^{\frac{1}{3}}\end{matrix}\right|=3x^{\frac{1}{3}}\ln x-3\int\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}dx=3x^{\frac{1}{3}}\ln x-3\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$

$$=3x^{\frac{1}{3}}\ln x-3x^{\frac{1}{3}}3+C=3x^{\frac{1}{3}}\left(\ln x-3\right)+C.$$

Пример 4.

$$\int x\cdot arctgx dx=\left|\begin{matrix}U=arctgx, dU=\frac{dx}{1+x^2},\\ dV=xdx, V=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Пример5.

$$\int arctgx dx$$

Полагая $U=arctgx, \quad dV=dx$, найдем $dU=\frac{dx}{1+x^2}, \quad V=x$.

Следовательно,

$$\int arctgx dx=xarctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}$$

Найдем $\int\frac{xdx}{1+x^2}$

Для этого сделаем замену $t=1+x^2$. Тогда $dt=2xdx$, т.е. $xdx=\frac{1}{2}dt$. Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$$

и

$$\int arctgxdx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример6.

$$\int e^{2x}\sin xdx$$

Полагая $U = e^{2x}, \quad dV = \sin xdx$, найдем $dU = 2e^{2x}dx, \quad V = \int \sin xdx = -\cos x$

Следовательно,

$$\int e^{2x}\sin xdx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos xdx$$

К последнему интегралу еще раз применим формулу интегрирования по частям.

Полагая $U = e^{2x}, \quad dV = \cos xdx$, найдем $dU = 2e^{2x}dx, \quad V = \int \cos xdx = \sin x$.

Следовательно,

$$\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin xdx$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (1.3.2), приходим к уравнению с неизвестным интегралом $\int e^{2x}\sin xdx$

$$\int e^{2x}\sin xdx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin xdx$$

Перенося искомый интеграл в левую часть, получим

$5\int e^{2x}\sin xdx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x$ и. окончательно получаем:

$$\int e^{2x}\sin xdx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$$

Вопросы и задания.

1. Формула интегрирования по частям.
2. Классы функций, интегрируемых по частям.

1. $\int (x^2+1)\cdot\cos x\,dx$	2. $\int \ln 2x\,dx$
3. $\int (x-1)\cdot\sin(x-1)\,dx$	4. $\int arctg2x\cdot dx$
5. $\int e^x\cdot x^2\cdot dx$	6. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
7. $\int (x^2+3)\mathrm{e}^{5x}\,dx$	8. $\int \arccos(4x-1)\,dx$
9. $\int \cos(\ln x)dx$	10. $\int e^{2x}\cos xdx$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 8.

Тема занятия. Определенный интеграл. Основные методы интегрирования.

Цель занятия. Формирование навыков непосредственного интегрирования и интегрирования заменой переменной в определенном интеграле.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: методы непосредственного интегрирования и интегрирования заменой переменной в определенном интеграле.

Уметь:находить интегралы методом непосредственного интегрирования и интегрирования заменой переменной в определенном интеграле.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Методы непосредственного интегрирования и метод замены переменной в определенном интеграле используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Вычисление определённого интеграла метод непосредственного интегрирования

Для вычисления определённого интеграла от функции f(x) на отрезке $[a;b]$ применяют формулу Ньютона-Лейбница, которая имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо найти соответствующий неопределённый интеграл, а затем вычислить разность значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx$.

Найдём одну из первообразных для функции $f(x) = x^2$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, т.е. $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Окончательно, имеем:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1) = \frac{7}{3}.$$

Пример 2.Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx$.

Находим вначале неопределённый интеграл

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tg(x) - x + C .$$

Далее используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx = (tg(x) - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (tg0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = 1 - \frac{\pi}{4} .$$

Метод замены переменной (подстановки)

Сущность метода замены переменной (подстановки) состоит в замене переменной интегрирования другой переменной, связанной с ней какими-либо функциональными соотношениями с целью упрощения подынтегрального выражения.

Пусть $f(x)$ - некоторая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$.

Введём новую переменную t, положив $x = t^6$,тогда $dx = 6t^5 dt$.

Найдём пределы интегрирования для новой переменной t:

$$0 = t^6 \Rightarrow t = 0;$$

$$1 = t^6 \Rightarrow t = 1.$$

Заменяя переменную в определённом интеграле, получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int\limits_0^1 \frac{t^3+1}{t^2+1} 6t^5 dt = 6\int\limits_0^1 \left(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + arctg(t) \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) = 3\ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{59}{70}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x\, dx$.

Введем новую переменную, пусть $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x\, dx$.

Если $x = 0$, то $t = 0$, если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = 1$.

Выполняя замену, получаем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x\, dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} .$$

Для любых непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

или, в обозначениях $\left|\begin{matrix} u = f(x) & dv = g'(x)dx \\ du = f'(x)dx & v = g(x) \end{matrix}\right|,$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 1. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^e \frac{\ln xdx}{x^2}.$$

Пусть

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx;$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}.$$

Тогда

$$\int_1^e \frac{\ln xdx}{x^2} = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^1 \arcsin xdx = \left|\begin{matrix} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{matrix}\right| = (x\arcsin x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{\pi}{2}(w^{1/2})\Big|_1^0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^e x\ln xdx$.

$$\int_1^e x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e -$$

$$-\int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = (\frac{e^2}{2}\ln e -$$

$$-\frac{1}{2}\ln 1) - \frac{1}{4}(e^2-1) = (\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0) - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Пример 4.Вычислить определенный интеграл: $\int_0^\pi x\sin 2xdx$.

$$\int_0^\pi x\sin 2xdx = \begin{vmatrix} u=x & du=x'dx=dx \\ dv=\sin 2x & v=\int\sin 2x=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi -$$

$$-\int_0^\pi -\frac{1}{2}\cos 2xdx = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi = (-\frac{\pi}{2}\cos 2\pi +$$

$$+\frac{0}{2}\cos 0) + \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = -\frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0 + \frac{1}{4}(0-0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Вопросы и задания.

1. Вычисление определённого интеграла метод непосредственного интегрирования.
2. Метод замены переменной (подстановки) в определенном интеграле.

1. $\int_0^4 3x^2dx$
2. $\int_0^{\pi/6} \sin 3xdx$
3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$
4. $\int_0^1 e^{2x}dx$
5. $\int_1^2 \frac{dx}{1-2x}$
6. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2xdx$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы

1	1	1	1,2

Практическое занятие 9.
Тема занятия. Приложения интегрального исчисления.

Цель занятия. Формирование навыков использования определенного интеграла в экономических расчетах

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: приложения определенного интеграла в экономике

Уметь: находить площади, объемы, длины дуг с помощью определенного интеграла

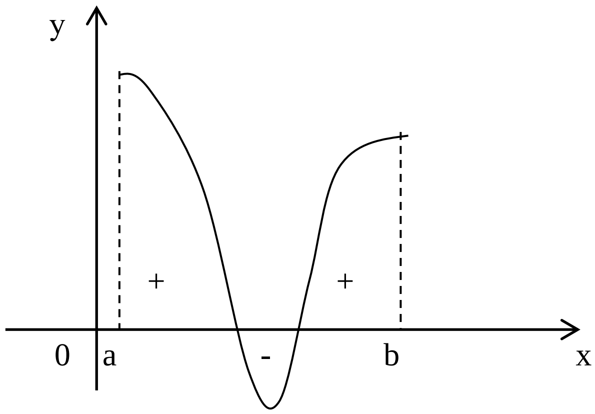
Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Приложения определенного интеграла используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

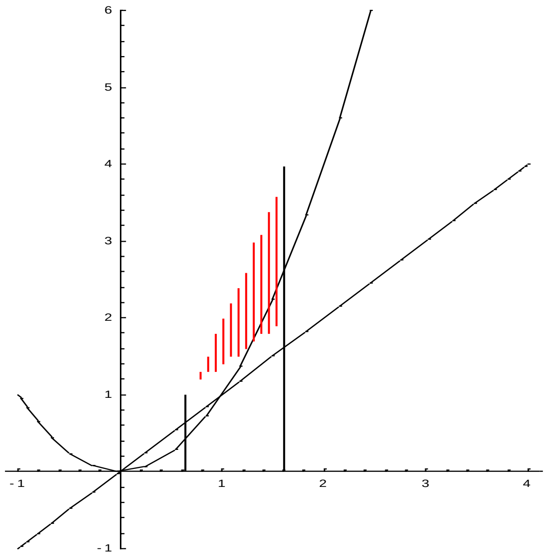


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

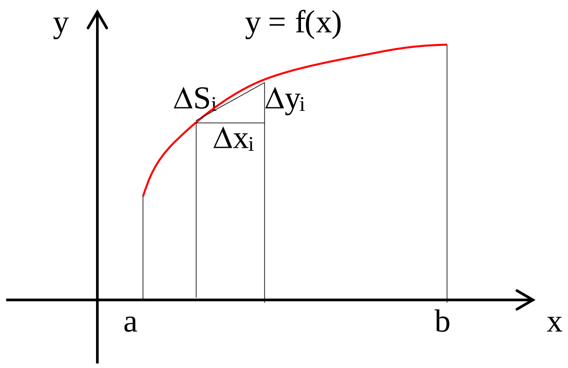
Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$,
$x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\text{(ед}^2\text{)}$$

Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S=\lim_{\max \Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать, что

$$S=\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Т.е. $S=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\, dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тогда $\dfrac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \cdot \arcsin \dfrac{x}{r}\Big|_0^r = r\dfrac{\pi}{2}$

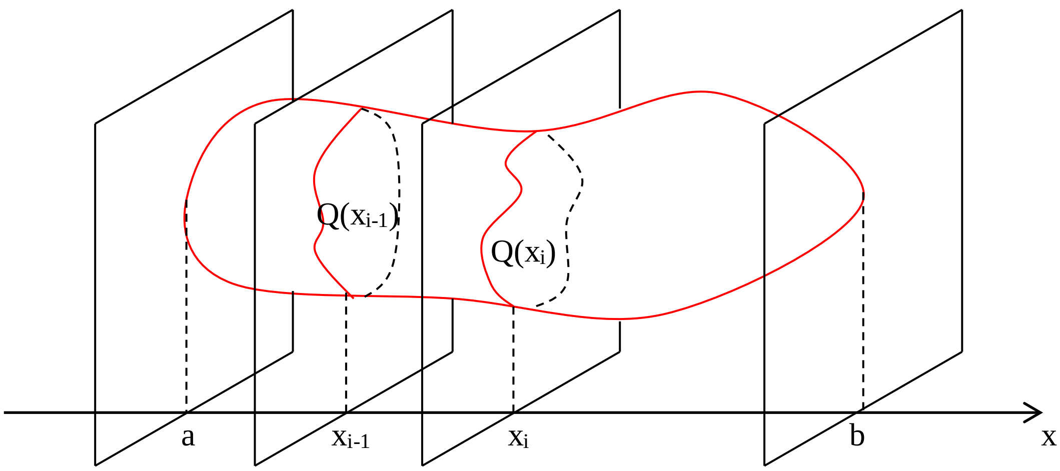
Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r, $\rho' = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\, d\varphi = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

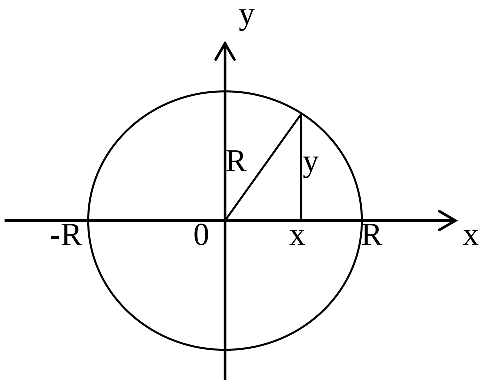
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

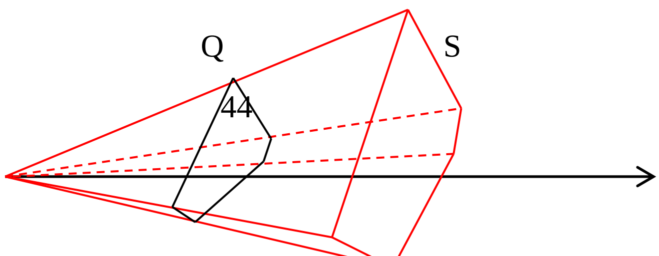
<u>Пример:</u> Найти объем шара радиуса R.



В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.
Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R}\pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

<u>Пример:</u> Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.



x H x

При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

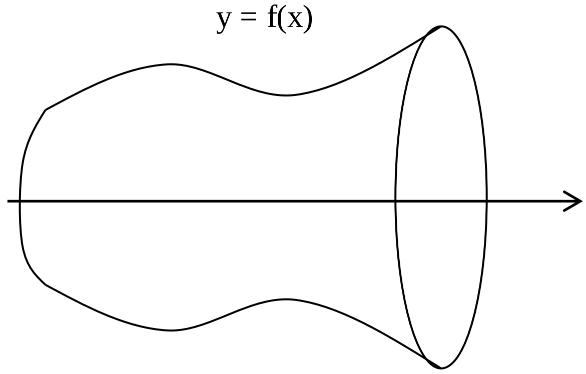
$$\frac{Q}{S}=\left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x)=\frac{S}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V=\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH$

Объем тел вращения.

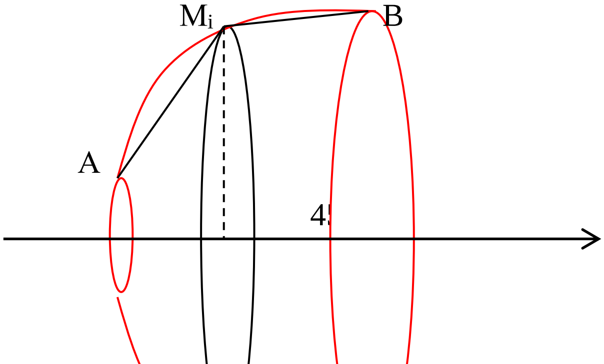
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R=|f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



x

x_i

<u>Определение:</u> Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу АВ на n частей точками M_0, M_1, M_2, … , M_n. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ - формула вычисления площади поверхности тела вращения.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 10.

Тема занятия. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Цель занятия. Формирование навыков решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейные дифференциальных уравнений.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: методы решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и линейные дифференциальных уравнений.

Уметь: решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид:

$y' = f(x)\cdot g(y)$ или $M(x)\cdot N(y)\cdot dx + P(x)\cdot Q(y)\cdot dy = 0$.

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только *x*, а в другую только *y* и затем проинтегрировать обе части.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $x\cdot dx + y\cdot dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

Разделим переменные: $x\cdot dx = -y\cdot dy$. Теперь проинтегрируем левую и правую части:

$\int xdx = -\int y\cdot dy$, получаем $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C_1$, или, обозначив $2C_1$ через C^2, будем иметь $x^2+y^2=C^2$ - общий интеграл. Это уравнение семейства концентрических окружностей с центром в начале координат и радиуса *C*. Для решения задачи Коши подставим в общий интеграл начальные условия $x=1,\quad y=0$: $1^2+0^2=C^2$,откуда $C^2=1$, а тогда искомое частное решение $x^2+y^2=1$ (частный интеграл) представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом равным 1. Это интегральная кривая, проходящая через точку М (1,0).

Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её первой производной. Линейное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x).$$

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию *y* заменить произведением двух пока неизвестных вспомогательных функций. Пусть *y=u(x)·v(x),* где *u(x)* и*v(x)* – неизвестные функции от *x*, одна из которых, например *v(x),* может быть выбрана произвольно. Подставляя в уравнение $y=u\cdot v,\quad y'=u'\cdot v+u\cdot v'$, после преобразования получаем

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + P(x) \cdot v) = Q(x). \qquad (1)$$

Определим $v(x)$ из условия $v' + P(x) \cdot v = 0$, выбирая в качестве $v(x)$ одно из частных решений этого уравнения. Затем из уравнения (1) находим функцию *u(x, C)* и общее решение линейного уравнения *y=u(x, C)·v(x)*.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - y \cdot ctg\, x = \frac{1}{\sin x}$$

Будем искать решение дифференциального уравнения в виде $y = u \cdot v$, тогда

$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и данное уравнение примет вид

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cdot ctg\, x = \frac{1}{\sin x} \text{ или}$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' - v \cdot ctg\, x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Пусть $v' - v \cdot ctg\, x = 0$, разделим переменные $\frac{dv}{dx} = v \cdot ctg\, x$, $\frac{dv}{v} = ctg\, x \cdot dx$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем *v=sinx*. Подставляя *v=sinx* в уравнение, получим уравнение относительно *u(x):*

$u' \cdot \sin x = \frac{1}{\sin x}$. Разделяя переменные, находим $\frac{du}{dx} \cdot \sin x = \frac{1}{\sin x}$ или $du = \frac{1}{\sin^2 x} dx$. Интегрируя это уравнение, получаем *u= - ctgx +C*. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y=uv=(- ctgx+C) \sin x= - \cos x+C\sin x.$$

Вопросы и задания.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
2. Линейные дифференциальные уравнения.

Решить дифференциальные уравнения:

1. $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
2. $y' + y \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$.
3. $y' - y \cdot ctg\, x = \frac{1}{\sin x}$.
4. $y' = \frac{dy}{dx} = tgx(y+1)$

Однородные уравнения могут быть записаны в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для решения однородного дифференциального уравнения применяется подстановка $u=\dfrac{y}{x}$ или $y=u\cdot x$, где u – функция от x, подлежащая определению; при этом $y'=u'x+u$.

Пример 1. Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения:

$$\left(x^2+y^2\right)dx-xy\,dy=0.$$

Разделив обе части уравнения на dx, приведём его к виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy} \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Применив подстановку $y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$, найдём:

$$u'x+u=u+\frac{1}{u}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int u\cdot du=\int\frac{dx}{x};\quad \frac{u^2}{2}=\ln|x|+C.$$

Учитывая, что $u=\dfrac{y}{x}$, получим: $\dfrac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$. Это – общий интеграл. Кроме того, $x=0$ – интеграл данного уравнения.

Окончательно: $\dfrac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C;\quad x=0.$

Уравнение Бернулли является одним из наиболее известных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Оно записывается в виде $y'+P(x)\cdot y=Q(x)\,y^n$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции. Если m = 0, то уравнение Бернулли становится линейным дифференциальным уравнением. В случае, когда m= 1, уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае, когда $m\neq 0, 1$, уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки

$$z=y^{1-m}$$

Новое дифференциальное уравнение для функции $z(x)$ может быть решено способами, описанными ранеедля линейных дифференциальных уравнений.

Вопросы и задания.

1. Уравнение Бернулли.
2. Однородные дифференциальные уравнения.

Решить дифференциальные уравнения:

1. $y'=\dfrac{y+2\cdot\sqrt{xy}}{x}$.
2. $y^2=2\cdot x\cdot y-x^2\cdot y'$.
3. $2x^2\cdot y'=x^2+y^2$.

4. $x \cdot y' - y = x \cdot \ln x$.

5. $x \cdot y \cdot y' = y^2 + x^2$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 11.

Тема занятия. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Цель занятия. Формирование навыков решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уметь: решать линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентамииспользуются в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Уравнение $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, где *p*и*q*действительные числа. При *f(x)=0* уравнение называется однородным.Общее решение $y_{о.н.}$ неоднородного уравнения есть сумма общего решения $y_{о.о.}$ соответствующего однородного уравнения и какого – либо частного решения $y_{ч.н.}$ данного неоднородного уравнения, то есть $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$.

Однородные линейные уравнения

Однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y_{о.о.} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$,
где $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ - линейно независимые частные решения этого уравнения, а C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Для отыскания общего решения уравнения составляется алгебраическое уравнение

$$k^2 + p \cdot k + q = 0,$$

которое называется характеристическим уравнением. Это алгебраическое уравнение получается заменой в дифференциальном уравнении производных искомой функции соответствующими степенями *k*, причём сама функция*y* заменяется единицей. В зависимости от вида корней характеристического уравнения общее решение уравнения будет иметь разный вид. Возможны три случая:

1. Если корни характеристического уравнения k_1, k_2 действительные и различные, то частными решениями уравнения будут функции $y_1(x) = e^{k_1 \cdot x}$ *и* $y_2(x) = e^{k_2 \cdot x}$.

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}.$$

2. Если $k_1 = k_2 = k$ действительные и равные, то $y_1(x) = e^{k \cdot x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{k \cdot x}$. Общее решение уравнения имеет вид:

$$y_{o.o.} = C_1 e^{k \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x}.$$

3. Если корни характеристического уравнения комплексно – сопряжённые числа $k_1 = \alpha + i \cdot \beta$, $k_2 = \alpha - i \cdot \beta$, тогда частными решениями уравнения будут $y_1(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$, $y_2(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x).$$

Неоднородные линейные уравнения

Неоднородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$. Общее решение этого уравнения задаётся формулой $y_{o.н.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$, в которой способ получения функции $y_{o.o.}$ уже описан ранее. Теперь задача сводится к отысканию частного решения $y_{ч.н.}$ неоднородного уравнения. В общем случае интегрирование уравнения можно осуществить методом вариации произвольных постоянных. Если же правая часть уравнения имеет специальный вид, то $y_{ч.н.}$ находят методом неопределённых коэффициентов. Укажем вид частного решения $y_{ч.н.}$ для некоторых частных случаев правой части *f(x)*.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ - некоторый многочлен степени *n*, тогда

а) если корни характеристического уравнения $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x).$$

Здесь $Q_n(x)$ - многочлен с неопределёнными коэффициентами той же степени, что и многочлен $P_n(x)$.

б) если один из корней характеристического уравнения равен нулю, например, $k_1 = 0, k_2 \neq 0$, то

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x).$$

в) если оба корня характеристического уравнения равны нулю $k_1 = k_2 = 0$, то

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x).$$

Для того чтобы определить коэффициенты многочлена $Q_n(x)$, частное решение подставляют в дифференциальное уравнение и уравнивают коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях уравнения.

2. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{a \cdot x}$. Тогда
а) еслиa не является корнем характеристического уравнения, то есть
$k_1 \neq a, k_2 \neq a$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

б) если один из корней характеристического уравнения равен a, например, $k_1 = a, k_2 \neq a$, то

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

в) если оба корня характеристического уравнения равны a, то есть
$k_1 = k_2 = a$, то

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot \cos bx + T_m(x) \cdot \sin bx$, где $P_n(x),\quad T_m(x)$ - многочлены степени nи m. Тогда
а) если корни характеристического уравнения не равны $\pm bi$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_s(x) \cdot \cos bx + R_s(x) \cdot \sin bx,$$

где $Q_s(x),\quad R_s(x)$ - многочлены s степени с неопределёнными коэффициентами (s наибольшая из степенейn иm).
б) если корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm bi$, то частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.} = x \cdot (Q_s(x) \cdot \cos bx + R_s(x) \cdot \sin bx).$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения, $y'' - 5y' + 6y = -78 \sin 3x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.
Решение. Решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$. Для его решения составим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$. Его корни $k_1 = 2,\ k_2 = 3$, следовательно,

$$y_{о.о.} = C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x}.$$

Частное решение исходного уравнения согласно П. 3. а) ищем в виде
$y_{ч.н.} = A \cos 3x + B \sin 3x$, так как $k_{1,2} \neq \pm 3 \cdot i$.
Находим $y'_{ч.н.} = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y''_{ч.н.} = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$.
Подставляя $y_{ч.н.},\quad y'_{ч.н.},\quad y''_{ч.н.}$ в исходное уравнение, получим

$$(-3A - 15B) \cos 3x + (15A - 3B) \sin 3x = -78 \sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при синусе и косинусе в левой и правой частях уравнения, получим систему уравнений:

$$-3A - 15B = 0, \qquad 15A - 3B = -78.$$

Решая систему, найдём: A= -5, B=1, то есть частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.} = -5 \cos 3x + \sin 3x.$$

Значит, общее решение заданного уравнения будет иметь вид

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x} - 5 \cos 3x + \sin 3x.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, найдём производную $y'_{о.н.} = 2C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + 3C_2 \cdot e^{3 \cdot x} + 3\cos 3x + 15\sin 3x$. Подставим начальные условия $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ в общее решение и в его производную:

$$y(0) = C_1 + C_2 - 5 = 0, y'(0) = 2C_1 + 3C_2 + 3 = 0.$$

Откуда получаем $C_1 = 18, \quad C_2 = -13$. Таким образом, искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, получится из общего решения при найденных значениях произвольных постоянных:

Ответ: $y = 18 \cdot e^{2 \cdot x} - 13 \cdot e^{3 \cdot x} - 5\cos 3x + \sin 3x$.

Вопросы и задания.

1. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Однородные линейные уравнения.
3. Неоднородные линейные уравнения.

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = a_0; \quad y'(0) = a_1$:

1. $y'' + y = 4 \cdot e^{x}; \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3..$
2. $y'' - 4 \cdot y' = 8 \cdot x + 4; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$
3. $y'' - 2 \cdot y' + 10y = 74 \cdot \sin 3x; \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3.$
4. $y'' - 3 \cdot y' + 2y = 10 \cdot \sin x; \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 4.$
5. $y'' + 2 \cdot y' + 2y = x \cdot e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 12.

Тема занятия. Вероятность случайного события.

Цель занятия. Закрепить навык применения формул комбинаторики и основных формул вычисления вероятностей.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: определения комбинаторики.

Уметь: применять формулы комбинаторики.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Комбинаторика используется в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Правило суммы. Если некоторый объект***a*** можно выбрать m способами, а объект ***b***n способами, причем никакой выбор***a*** не пересекается ни с одним из выборов ***b***, то один из объектов ***a*** или***b***можно выбрать m + n способами.

*Правило произведения****.*** Если объект ***a*** можно выбрать *m* способами и при каждом выборе объекта***a*** объект***b***можно выбратьn способами, то выбор пары (***a, b)***можно осуществить $m\cdot n$ способами.

Общее правило произведения. Если объект a_1можно выбрать m_1 способами, объект a_2 - m_2 способами, …, a_k - m_k, то выбор упорядоченной системы объектов ($a_1, a_2 ,..., a_k$) можно найти$m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$ способами.

n! (n-факториал) есть произведение всех натуральных чисел от*1* до *n* включительно.

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ... \cdot n$

$1!=1,\ 0!=1,\ 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

Перестановками называются комбинации, составленные из *n* различных элементов данного множества и отличающихся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок определяется формулой

$$P_n = n!$$

Размещениями называются комбинации из *n* различных элементов множества по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений находится по правилу умножения в виде:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

т.е. равно произведению m последовательно убывающих на единицу натуральных чисел, начиная с *n.* Используя обозначение *n*!, формулу для числа размещений можно представить в виде:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещения с повторениями. Размещением с повторениями из п элементов по k называется любое упорядоченное множество вида$\{a_1, a_2,\dots, a_k\}$, где $a_1, a_2,\dots, a_k$ - элементы множества (не обязательно разные). Число всех размещений с повторениями обозначается $\overline{A}_n^к$ (возможно k>п) и равно $\overline{A}_n^к = n^к$. Размещения с повторениями из п элементов по k называют также упорядоченными k-выборками с возвращением из п-множества.

Сочетаниями из *n*элементов по m элементов называются группы по *m* элементов , взятые из данных *n* элементов, рассматриваемые без учета их порядка ($m\leq n$). Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.\ \text{При этом:}\ C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^m = C_n^{n-m},\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

Сочетания с повторениями. Сочетанием с повторением из *n элементов* по k называется любое множество вида $\{a_1, a_2,\dots, a_k\}$, где$a_1, a_2,\dots, a_k$ - элементы множества (не обязательно разные). Число всех сочетаний с повторениями из *n* элементов по k обозначается $\tilde{N}_i^k$

(возможно *k>n)* и равно $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Классическое определение вероятности.

Вероятность события А определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных событий, благоприятствующих появлению события *А,* n — число всех элементарных событий, входящих в Ω.

Это определение называется *классическим определением вероятности.*

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то все элементарные события благоприятствуют ему. В этом случае $m=n$ и, следовательно,

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*
Действительно, если событие невозможно, то ни одно элементарное событие не благоприятствует ему. В этом случае $m=0$ и, следовательно,

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*
Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. В этом случае $0<m<n$, а значит, $0<\frac{m}{n}<1$ и, следовательно,

$$0<P(A)<1$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0\le P(A)\le 1$$

Если пространство Ω содержит бесконечное множество элементарных событий, то используется геометрическое определение вероятности, когда вероятность попадания точки в любую область пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и формы.

$P(A)=\frac{mesg}{mesG}$, где mes – мера длины, площади, объема, g – часть области G.

Пример 1. Бросается игральный кубик. Пространство элементарных событий, отвечающее данному эксперименту, имеет следующий вид:. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\}$.

Пусть событие *А*состоит в появлении четного числа очков. Событие *А* есть подмножество.

$\Omega, A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

Элементарные события, входящие в состав случайного события *А*называются событиями, *благоприятствующими* появлению события А. Два или несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо событие более возможным, чем любое другое.

Пример 2. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них 2 выигрыша по 50 руб., 5 – 20 руб., 10–10 руб., 25–5 руб. Некто купил один билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.

<u>Решение</u>.

По условию: $1000 = 2_{50}+5_{20}+10_{10}+25_5+958_{\text{проигрыш}}$.

Пусть А- искомое событие. Выигрыш не менее 20 рублей – это выигрыш в 20 рублей, который встречается $m_1=5$ раз и выигрыш в 50 рублей, который встречается $m_2=2$ раза. Тогда $m=m_1+m_2$.n=1000 - общее количество всех билетов. $\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}=\frac{5+2}{1000}=0,007$.

Пример 3. Из 90 случайно отобранных одинаковых деталей выявлено 3 бракованных. Относительная частота бракованных деталей равна

$$W(A)=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}.$$

При увеличении числа испытаний (опытов) наблюдается устойчивость относительной частоты, т.е. существует некоторая постоянная величина, около которой группируется относительная частота и к которой она все больше приближается с увеличением числа испытаний. Эта постоянная величина называется *вероятностью случайного событи* и обозначаетсяР(А). Рассмотренное понятие вероятности случайного события является статистическим определением вероятности.

Вопросы и задания.

1. Правило сумм и произведений.
2. Размещения.
3. Сочетания.
4. Перестановки.
5. Классическое определение вероятности.
6. Геометрическое определение вероятности.

Задание1. На плоскости даны 9 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через них?

Задание2. В пространстве даны 8 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколькими способами можно провести через эти точки плоскость

Задание 3. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

Задание 4. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 2, 2?

Задание5. В отделе работают 11 сотрудников. Требуется выбрать двоих из них для выполнения некоторой работы. Сколькими способами можно это сделать?Пусть событияA и B — несовместные, причем вероятности этих событий даны. Как найти вероятность того, что наступит либо событиеA, либо событие B, т.е. вероятность суммы этих событий $A+B$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.*Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Следствие.*Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. *Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B).$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

СобытияA и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Так как противоположные события вместе образуют достоверное событие, то

$$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

поэтому

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Пример 2. Вероятность того, что день будет дождливым, равна $p = 0{,}3$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Пример 3.Мишень состоит из трех зон. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле равна 0,15; во вторую - 0,23; в третью - 0,17. Найти вероятность промаха.

Обозначим событие $\overline{\text{A}}$- промах, A - попадание в мишень. Тогда $\text{A} = \text{A}_1 + \text{A}_2 + \text{A}_3$, где $\text{A}_1, \text{A}_2, \text{A}_3$ - попадание соответственно в первую, вторую и третью зоны. По теореме сложения вероятностей:

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55$

откуда $P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(A) = 0{,}45$

Предположим, что событие*A* может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, которые назовем *гипотезами*. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P(A/H_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Так как $A\Omega = A$, то

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Из несовместности $H_1, H_2, \ldots, H_n$ вытекает несовместность событий $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$.

Применяя формулу, имеем

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Согласно формуле, так как события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ могут быть и зависимыми, заменив каждое слагаемое $P(AH_i)$ в правой части последнего выражения произведением $P(A/H_i)P(H_i)$, получим *формулу полной вероятности:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Из формулы имеем

$$P(H_k / A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)}.$$

Далее, из формулы (3.4) получаем

$$P(AH_k) = P(H_k)P(A/H_k).$$

Отсюда и из предыдущего соотношения, применяя формулу полной вероятности, выводим *формулу Байеса*:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Пример 1. В ящике находятся 6 белых, 4 чёрных и 2 красных шара. Шары извлекаются по одному без возвращения. Определить вероятность того, что белый шар появится раньше, чем чёрный.

Решение.По условию задачи после появления белого шара извлечения прекращаются, после появления красного шара проводится следующее извлечение, чёрный шар не должен появляться. Если А– случайное событие – белый шар появился раньше, чем чёрный, то

$$A = A_1 + C_1 A_2 + C_1 C_2 A_3,$$

где A_i– появление белого шара при i-ом извлечении (i = 1, 2, 3), C_i– появление красного шара при i-ом извлечении (i = 1, 2). Здесь события-слагаемые – несовместные события, а события-сомножители – зависимые события, так как шары извлекаются без возвращения и, возможность извлечь шар какого-то конкретного цвета зависит от результатов предыдущих извлечений. Поэтому

$P(A) = P(A_1) + P(C_1)P(A_2 /C_1) + P(C_1)P(C_2 /C_1)P(A_3 /C_1 C_2)=$

$= \frac{6}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$

Теперь перейдем к случаю, когда событияA и B — независимые, и найдем вероятность произведения этих событий.

Так как событиеA не зависит от события B, то его условная вероятность $P(A/B)$ равна его безусловной вероятности $P(A)$, т.е.

$P(A/B) = P(A)$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 13.

Тема занятия. Независимые испытания.

Цель занятия. Закрепить навык применения схемы испытаний Бернулли и нахождение наиболее вероятного числа успехов в схеме Бернулли.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: определение схемы испытаний Бернулли.

Уметь: производить вычисления по схеме Бернулли.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Формула Бернулли используется в различных экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо произойти (успех), либо не произойти (неудача). Будем считать, что вероятность события A в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события A в каждом испытании также постоянна и равна q=1–p. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли.*

В качестве таких испытаний можно рассматривать, например, производство изделий на определенном оборудовании при постоянстве технологических и организационных условий, в этом случае изготовление годного изделия — успех, бракованного — неудача. Эта ситуация соответствует схеме Бернулли, если считать, что процесс изготовления одного изделия не зависит от того, были годными или бракованными предыдущие изделия.

Другим примером является стрельба по мишени. Здесь попадание — успех, промах — неудача.

Поставим своей задачей вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится $n—k$ раз, т.е. будет k успехов и $n—k$ неудач.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Последовательность n независимых испытаний можно рассматривать как сложное событие, являющееся произведением n независимых событий. Следовательно, вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n—k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна

$$p^k q^{n-k}.$$

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k.

Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появление k раз события A в n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли.*

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в течение 4 суток из ближайших 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии на продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = \frac{1215}{4096} \approx 0,297 \cdot$$

В ряде задач представляет интерес наивероятнейшее число успехов, т.е. такое число $\hat{m}$ успехов, вероятность которого самая большая среди вероятностей. Так как при увеличении k вероятности сначала возрастают, а затем, с определенного момента, начинают убывать, то для $\hat{m}$ имеют место соотношения

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} - 1)$$

и

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m}+1)\,.$$

Используя формулу и соотношение $p+q=1$, получаем соответственно неравенства

$$(n-\hat{m}+1)\,p \geq \hat{m}q$$

и

$$(\hat{m}+1)q \geq (n-\hat{m})\,p\,.$$

Окончательно получаем, что $\hat{m}$ лежит в интервале единичной длины:

$$np-q \leq \hat{m} \leq np+p\,.$$

Однако, стоит заметить, что использование формулы Бернулли при больших значениях *n* достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если $n=50$, $k=30$,, $p=0{,}1$, то для отыскания вероятности $P_{50}(30)$ надо вычислить выражение $P_{50}(30)=\dfrac{50!}{30!\cdot 20!}\cdot(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}$, где $50!=30414093\cdot 10^{57}$; $30!=26525286\cdot 10^{25}$; $20!=24329020\cdot 10^{11}$.

Вопросы и задания.

1. Схема испытаний Бернулли.
2. Формула Бернулли.
3. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.

Задание 1. Монета бросается пять раз. Найти вероятность того, что орел выпадет 2 раза.

Задание 2. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди них 2 мальчика, если вероятность рождения мальчика равна 0,51.

Вероятность обнаружения опечатки на странице книги равна 0,01. Найти вероятность того, что в 500-страничной книге не будет обнаружено опечаток (обнаружение опечаток на различных страницах считать независимыми событиями).

Задание 3. Вероятность изготовления детали высшего сорта равна *0.4.* Найти вероятность того, что из 260 деталей половина будет высшего сорта.

Задание 4. Вероятность изготовления изделия высшего качества равна 0,8. Найти вероятность того, что среди взятых 60 изделий 30 окажутся высшего качества.

Локальная теорема Лапласа.*Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(k)$ *того, что событие А появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции*

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x)^{при}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. При этом следует учитывать, что $\phi(-x)=\phi(x)$, так как функция $\phi(x)$ четная.

Следовательно, вероятность того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях ровно *k* раз, приближенно равна

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 1. Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Воспользуемся формулой (4.7):

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{8} \cdot \phi(x) \cdot$$

Вычислим определяемое данными задачи значение *x:*

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0 \cdot$$

По таблице находим $\phi(0) = 0,3989$.

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986 \cdot$$

Пусть теперь требуется вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие *A* появится в *n* испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»). Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Интегральная теорема Лапласа. *Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(k_1, k_2)$ *того, что событие A появится в n испытаниях от* k_1 *до* k_2 *раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ *и* $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальной таблицей для интеграла $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для $x \geq 0$, а для $x < 0$ воспользуемся нечетностью функции $\Phi(x)$, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа.*

Итак, вероятность того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 2. Вероятность того, что организация не прошла проверку налоговой инспекции, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных организаций не прошедших проверку окажется от 70 до 100 организаций.

Решение. По условию $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $p = 0,2$; $q = 0,8$ Воспользуемся формулой (4.9):

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938; \quad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(70,100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p*. Для определения вероятности *k* появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же *n* велико, то пользуются локальной теоремой Лапласа. Однако она дает большую погрешность, если вероятность события мала $(p \le 0{,}1)$.

Если сделать допущение, что произведение np при $n \to \infty$ сохраняет постоянное значение, а именно $np = \lambda$, то вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно *k* раз, находится по следующей формуле:

$$P_n(\mathrm{k}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Эта формула выражает закон распределения *Пуассона* вероятностей массовых (*n* велико) и маловероятных (*p* мало) событий. Имеются специальные таблицы для распределения Пуассона.

Пример 3. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 поврежденных изделия.

Решение. По условию $n = 5000,\ p = 0{,}0002, k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

Искомая вероятность по формуле (5.2) равна:

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 14.

Тема занятия. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

Цель занятия. Закрепить навык применения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: определение числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин.

Уметь: находить числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин используются в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а удобнее пользоваться некоторыми количественными показателями, которые дают достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называются *числовыми характеристиками случайной величины*.

Основными из этих характеристик являются: *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение*. *Математическое ожидание* характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности и обозначается через *M(X)*.

Пусть случайная величина *X* принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание *M(X)* случайной величины *X* определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Если дискретная случайная величина *X* принимает бесконечное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot$$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины *X*, зная закон ее распределения

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание по формуле равно

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$$

Пусть *X* — случайная величина и *M(X)* — ее математическое ожидание. *Отклонением* *случайной величины* называется разность $X - M(X)$.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно воспользоваться следующей формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Пример 2. Найти дисперсию случайной величины *X*, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Математическое ожидание *M(X)* равно:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Закон распределения случайной величины X^2 имеет вид:

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

Математическое ожидание $M(X^2)$ равно:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомая дисперсия равна

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения служит также среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 3.Случайная величина *X* задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Математическое ожидание *M(X)* равно:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4.$$

Математическое ожидание $M(X^2)$ равно:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - (6{,}4)^2 = 13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61.$$

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Однако такой способ задания неприменим для непрерывных случайных величин.

Например, рассмотрим случайную величину *X*, возможные значения которой сплошь заполняют интервал $(a,\ b)$. Очевидно, что невозможно составить перечень всех возможных значений *X*. Поэтому целесообразно дать общий способ задания любых типов случайных величин, для чего вводятся функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть *x* — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что *X* примет значение, меньшее *x*, т.е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Если *x* изменяется, то изменяется и $F(x)$, т.е. $F(x)$ — функция от *x*.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина *X* в результате испытания примет значение, меньшее *x*, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки *x*.

Пример 4. Случайная величина *X* задана следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le -1 \\ x/4 + 1/4 & \textit{при} \quad -1 < x \le 3 \\ 1 & \textit{при} \quad x > 3 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(0,\ 2)$: $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$.

<u>Решение</u>. Так как на интервале $(0,\ 2)$, по условию, $F(x) = x/4 + 1/4$,

То $F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2$. Итак, $P(0 < X < 2) = 1/2$.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которая называется функцией плотности.

Функцией плотности непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$ — первая производная от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Отсюда следует, что функция распределения является первообразной для функции плотности. Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины функция плотности неприменима.

Зная функцию плотности, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу* $(a,\ b)$, *равна определенному интегралу от функции плотности, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 5. Задана функция плотности случайной величины *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 2x & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}5;\ 1)$.

Решение. Искомая вероятность по формуле равна

$$P(0{,}5<X<1)=\int_{0{,}5}^{1}2x\,dx=x^2\Big|_{0{,}5}^{1}=1-0{,}25=0{,}75.$$

Зная функцию плотности распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(z)\,dz.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называется следующий определенный интеграл

$$M(X)=\int_a^b x f(x)\,dx.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, называется следующий определенный интеграл

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Для вычисления дисперсии более удобны соответственно следующие формулы

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2$$

и

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для дискретной случайной величины, следующим равенством

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример 6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной следующей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x & при \quad 0<x\le 1\\ 1 & при \quad x>1\end{cases}.$$

Решение. Найдем функцию плотности:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 1 & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}.$$

Найдем математическое ожидание по формуле (8.1):

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = x^2/2 \;\Big|_0^1 = 1/2.$$

Найдем дисперсию по формуле (8.5):

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-[1/2]^2 = x^3/3 \;\Big|_0^1 -1/4 = 1/12.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1/12}\approx 0{,}29.$$

Вопросы и задания.

1. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.
2. Математическое ожидание дискретных и непрерывных случайных величин.
3. Дисперсия дискретных и непрерывных случайных величин.
4. Среднее квадратическое отклонение дискретных и непрерывных случайных величин.

Задание 1. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Задание 2. В партии 10 % нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины – числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Задание 3. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью $p_1=0,5$ $x_2=6$, с вероятностью $p_2=0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(\mathrm{X})=8$.

Задание 4. Дан перечень значений дискретной случайной величины X: $x_1=-1, x_1=0, x_3=1$, а также известны математические ожидания самой этой величины и её квадрата: $M(\mathrm{X})=0,1, \mathrm{M}(\mathrm{X}^2)=0,9.$. Найти вероятности $p_1, p_2, p_3.$.

Задание 5. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(\mathrm{x})=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4} & -1<x\le 5\\ 1 & x>5\end{cases};$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины; б) вероятность того, что в результате испытания величина примет значение, заключённое в интервале (2,3).

Рекомендуемые источники информации (№ источника)

Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 15.

Тема занятия. Закон больших чисел.

Цель занятия. Закрепить навык применения закона больших чисел и теорем Чебышева, Бернулли, Ляпунова.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: определение теорем Чебышева, Бернулли, Ляпунова и закона больших чисел.

Уметь: применять неравенство Чебышева.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Закон больших чисел и теоремы Чебышева, Бернулли, Ляпунова используются в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли.

Теоремы, относящиеся к закону больших чисел, устанавливают условия сходимости среднего арифметического n случайных величин к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Если известна дисперсия случайной величины, то с ее помощью можно оценить вероятность отклонения этой величины на заданное значение от своего математического ожидания, причем оценка вероятности отклонения зависит лишь от дисперсии. Соответствующую оценку вероятности дает *неравенство П.Л.Чебышева*:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Из этого неравенства в качестве следствия можно получить следующее неравенство

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пример 1. Оценить вероятность отклонения случайной величины X от своего математического ожидания на величину, превышающую утроенное среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Решение. По условию, $\varepsilon = 3\sigma(X)$. Учитывая, что $D(X) = [\sigma(X)]^2$, из формулы (9.1) получаем

$$P(|X - M(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{D(X)}{9[\sigma(X)]^2} = \frac{1}{9}.$$

Теорема. Закон больших чисел в форме Чебышева. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ *— последовательность независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены сверху одним и тем же числом с:* $D(X_i) \leq c$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *имеет место*:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Из этой теоремы вытекает справедливость закона больших чисел для среднего арифметического независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей.

Закон больших чисел для независимых случайных величин с одинаковым математическим ожиданием отражает сходимость среднего арифметического случайных величин в сериях независимых испытаний к общему математическому ожиданию этих случайных величин.

Таким образом, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин* (дисперсии которых равномерно ограничены) *утрачивает характер случайной величины*. Объясняется это тем, что отклонения каждой из этих величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они погашаются. Закон больших чисел имеет многочисленные практические приложения. Пусть, например, производится n независимых измерений некоторой величины, истинное значение которой равно a. Результат каждого измерения является случайной величиной X_i. Если измерения выполняются без систематической погрешности, то математическое ожидание случайных величин X_i можно считать равным истинному значению измеряемой величины, $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \ldots$. Дисперсию результатов измерений часто можно считать ограниченной некоторым числом c.

Тогда случайные результаты измерений удовлетворяют условиям неравенства П.Л.Чебышева и, следовательно, среднее арифметическое n измерений при большом числе измерений практически не может сильно отличаться от истинного значения измеряемой величины a. Этим обосновывается выбор среднего арифметического измерений в качестве истинного значения измеряемой величины.

Для относительной частоты успехов в независимых испытаниях справедлива следующая теорема.

Теорема. Закон больших чисел в форме Бернулли. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то для числа успехов m в этих испытаниях при любом* $\varepsilon > 0$ *имеет место*:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$. Пусть $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$. Образуем последовательность Y_n, $n = 1, 2, \ldots$, центрированных и нормированных сумм случайных величин:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Согласно центральной предельной теореме, при достаточно общих предположениях о законах распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ последовательность функций распределения центрированных и нормированных сумм случайных величин Y_n при $n \to \infty$ сходится для любых x к функции распределения стандартной нормальной случайной величины.

Теорема. Центральная предельная теорема. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ — *последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечную дисперсию* $D(X_i) = \sigma^2$, *и пусть* $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда для любого* x $(-\infty < x < \infty)$ *имеет место*:

$$\lim_{n \to \infty} P(Y_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \cdot$$

Вопросы и задания.

1. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.
2. Неравенство Чебышева.
3. Теорема Бернулли.
4. Теореме Ляпунова.

Нормально распределённая случайная величина X задана плотностью $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X .

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 16.

Тема занятия. Основы выборочного метода и элементы статистической теории оценивания.

Цель занятия. Закрепить понятия выборочной совокупности, выборочной функции распределения.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: определение выборочной совокупности, выборочной функции распределения. Имеет понятие о гистограмме, полигоне частот.

Уметь: использовать выборочную совокупность, выборочную функцию распределения.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Выборочная совокупность и выборочная функция распределения используются в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Предметом математической статистики является создание методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей, и ее цель — оценить характеристики генеральной совокупности по выборочным данным.

Если требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого признака, характеризующего эти объекты, то естественным является проведение сплошного обследования, т.е. обследование каждого из объектов совокупности относительно этого признака. На практике, однако, проведение сплошного обследования по тем или иным причинам часто бывает невозможным. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называется совокупность случайно отобранных объектов. *Генеральной совокупностью* называется совокупность объектов, из которых производится выборка. Например, если все студенты Налоговой академии — это генеральная совокупность, то студенты какой-либо группы являются выборкой.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N=1000$, а объем выборки $n=100$.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В зависимости от этого выборки подразделяются на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность. *Бесповторной* называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть *репрезентативной* (*представительной*).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности в предположении, что все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Статистическое распределение графически можно изобразить различными способами, в частности, в виде полигона и гистограммы.

Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ... , $(x_k;\ n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ... , $(x_k;\ W_k)$. Полигон относительных частот строится аналогичным полигону частот образом. На рис. изображен полигон относительных частот следующего распределения:

Т а б л и ц а 1

x_i	2	4	6	8
W_i	0,1	0,5	0,25	0,15

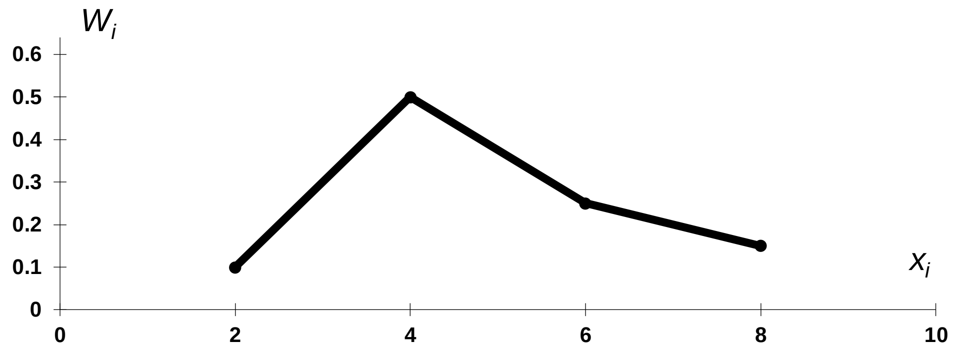


Рис. 1. Полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивается на несколько частичных интервалов длиной h и для каждого частичного интервала находится n_i — сумма частот вариант, попавших в *i*-й интервал.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс следует отложить частичные интервалы, а над ними провести отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь *i*-го частичного прямоугольника равна $h\,n_i/h = n_i$ — сумме частот вариант *i*-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки*.

Т а б л и ц а 2

Частичный интервал длиною *h*= 5	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

На рис.2 изображена гистограмма частот распределения, заданных в таблице.

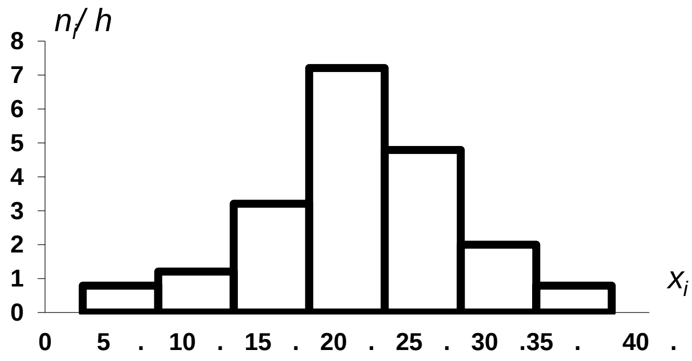


Рис.2. Гистограмма частот распределения.

Гистограммой относительных частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h. Гистограмма относительных частот строится аналогичным гистограмме частот образом.

Площадь *i*-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h = W_i$ — сумме относительных частот вариант *i*-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице*.

Вопросы и задания.

1. Выборочная совокупность.
2. Выборочная функция распределения.
3. Гистограмма, полигон частот.
4. Способы составления выборки.

Задание 1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
p_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

Задание 2. Найти функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	2	5
p_i	10	4	6

Задание 3. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	8
p_i	11	19	8	12

Задание 4. Найти функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	2	5
p_i	10	4	6

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 17.

Тема занятия. Статистические исследования зависимостей.

Цель занятия. Закрепить навык проведения статистических исследований зависимостей.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: сущность статистических исследований зависимостей.

Уметь: находить выборочный коэффициент корреляции.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Статистические исследования используются в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Корреляционный анализ и регрессионный анализ являются смежными разделами математической статистики и предназначены для изучения по выборочным данным статистической зависимости случайных величин. Две случайные величины могут быть связаны либо функциональной зависимостью, либо статистической зависимостью, либо быть независимыми.

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называется *функцией случайного аргумента* X:

$$Y = \varphi(X),$$

а зависимость между случайными величинами X и Y называется *функциональной зависимостью*.

Строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе величины или одна из них подвержены еще действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие для обеих величин, т.е. такие факторы, которые воздействуют как на X, так и на Y. В этом случае возникает статистическая зависимость.*Статистической* называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость.

Если статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из рассматриваемых случайных величин изменяется среднее значение другой случайной величины, то такая статистическая зависимость называется *корреляционной*.

Приведем пример случайной величины Y, которая не связана с величиной X функционально, а связана корреляционно. Пусть Y — урожай зерна, X — количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т.е. Y не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов, таких, как осадки, температура воздуха и др. С другой стороны, средний урожай является функцией от количества удобрений, т.е. Y связан с X корреляционной зависимостью.

Условным средним $\overline{y}_x$ называется среднее арифметическое наблюдавшихся значений Y, соответствующих $X = x$. Например, если при $x_1 = 2$ величина Y приняла значения $y_1 = 5,\ y_2 = 6,\ y_3 = 10$, то условное среднее равно $\overline{y}_{x_1} = (5+6+10)/3 = 7$.

Условным средним $\overline{x}_y$ называется среднее арифметическое наблюдавшихся значений X, соответствующих $Y = y$.

Как видно из определения, условное среднее $\overline{y}_x$ является функцией от x; обозначив эту функцию через $\bar{f}(x)$, получим уравнение

$$\overline{y}_x = \bar{f}(x).$$

Это уравнение называется *выборочным уравнением регрессии* Y *на* X; функция $\bar{f}(x)$ называется *выборочной регрессией* Y *на* X, а ее график — *выборочной линией регрессии* Y *на* X.

Аналогично уравнение

$$\overline{x}_y = \overline{\varphi}(y)$$

называется *выборочным уравнением регрессии* X *на* Y; функция $\overline{\varphi}(y)$ называется *выборочной регрессией* X *на* Y, а ее график — *выборочной линией регрессии* X *на* Y.

В связи с вышеизложенным возникают две задачи теории корреляции. Первая — нахождение по данным наблюдений параметров функций $\bar{f}(x)$ и $\overline{\varphi}(y)$ при условии, что известен их вид. Вторая — оценка силы (тесноты) связи между случайными величинами X и Y и установление наличия корреляционной зависимости между этими величинами.

Пусть изучается система количественных признаков (X, Y). В результате n независимых опытов получены n пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).

Найдем по данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии регрессии. Для определенности будем искать уравнение

$$\overline{y}_x = kx + b$$

регрессии Y на X.

Поскольку различные значения x признака X и соответствующие им значения y признака Y наблюдались по одному разу, то группировать данные нет необходимости. Также нет надобности использовать понятие условной средней, поэтому уравнение (14.3) можно записать следующим образом:

$$y = kx + b.$$

Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X называется *выборочным коэффициентом регрессии* Y на X и обозначается через ρ_{yx}. Следовательно, искомое выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X следует искать в виде

$$y = \rho_{yx} x + b.$$

Нужно найти такие параметры ρ_{yx} и b,, при которых точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n), построенные по данным наблюдений, на плоскости xOy лежали как можно ближе к прямой.

использовании этого метода сумма квадратов отклонений $Y_i - y_i$ ($i = 1,2,\dots,n$), где Y_i — вычисленная по уравнению (14.5) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i, а y_i — наблюдаемая ордината, соответствующая x_i, должна быть минимальной. Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция этих параметров:

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$$

или

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2 .$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)\, x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{cases} .$$

Решив эту систему двух линейных уравнений относительно ρ и b, найдем искомые параметры:

$$\rho_{yx} = \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right);$$

$$b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right).$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} y + c,$$

где ρ_{xy} — выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Пример 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным $n = 5$ наблюдений:

Т а б л и ц а 1.

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Составим следующую расчетную таблицу 2.
Найдем искомые параметры из соотношений (14.9) и (14.10):

$$\rho_{yx} = (5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15)/(5 \cdot 57{,}5 - 15^2) = 0{,}202;$$

$$b = (57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975)/(5 \cdot 57{,}5 - 15^2) = 1{,}024.$$

Напишем искомое уравнение прямой линии регрессии Y на X:

$$y = 0{,}202\,x + 1{,}024.$$

Т а б л и ц а 2.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum_{i=1}^{n} x_i$ =15	$\sum_{i=1}^{n} y_i$ =8,15	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ =57,50	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ =26,975

При большом числе наблюдений одно и тоже значение x может встретится n_x раз, одно и тоже значение y — n_y раз, одна и та же пара чисел $(x,\ y)$ может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений следует группировать, для этого подсчитываются частоты n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записываются в виде таблицы (например, таблица 3), которая называется *корреляционной*.

Т а б л и ц а 3.

Y	X				n_y
	10	20	30	40	
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

В первой строке корреляционной таблицы указаны наблюдаемые значения (10; 20; 30; 40) признака X, а в первом столбце — наблюдаемые значения (0,4; 0,6; 0,8) признака Y. На пересечении строк и столбцов находятся частоты n_{xy} наблюдаемых пар значений признаков.

В последнем столбце записаны суммы частот строк, а в последней строке — суммы частот столбцов. В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот, т.е. общее число всех наблюдений n. Очевидно, что $\sum n_x = \sum n_y = n$.

Теперь определим параметры выборочного уравнения прямой линии регрессии Y на X в случае, когда получено большое число данных (практически для удовлетворительной

оценки искомых параметров должно быть хотя бы 50 наблюдений), среди них есть повторяющиеся, и они сгруппированы в виде корреляционной таблицы.
Из системы (14.8) можно получить следующую систему:

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Для простоты приняв обозначения $\sum x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ и воспользовавшись соотношениями $\bar{x} = \sum x \big/ n$, $\bar{y} = \sum y \big/ n$, $\overline{x^2} = \sum x^2 \big/ n$, $\sum xy = \sum n_{xy} xy$ (в предположении, что пара чисел $(x,\ y)$ наблюдалась n_{xy} раз), получаем

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho_{yx} + n\bar{x}b = \sum n_{xy} xy \\ \bar{x}\rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases}.$$

Второе уравнение системы (14.13) преобразуем к виду $b = \bar{y} - \bar{x}\rho_{yx}$ и подставив правую часть этого равенства в уравнение $\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$, получим следующее соотношение

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}).$$

найдем из системы выборочный коэффициент регрессии ρ_{yx}:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right)} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}.$$

Умножим обе части этого равенства на дробь $\tilde{\sigma}_x \big/ \tilde{\sigma}_y$:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}.$$

Обозначим правую часть равенства (14.15) через r_B :

$$r_B = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}.$$

Тогда получаем

$$\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}.$$

Окончательно получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}(x - \overline{x}).$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_B \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}(y - \overline{y}).$$

Вопросы и задания.

1. Метод наименьших квадратов.
2. Корреляционная таблица.
3. Выборочное уравнение прямой линии регрессии.

Задание 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным, приведённым в следующей таблице:

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	0
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

Задание 2. Найти выборочное уравнение регрессии $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ по данным, приведённым в следующей корреляционной таблице:

Y	X			n_y
	2	3	5	
25	20	-	-	20
45	-	30	1	31
110	-	1	48	49
n_x	20	31	49	$n = 100$

Вопросы и задания.

1. Задачи корреляционного и регрессионного анализа.
2. Какая зависимостьназывается статистической.
3. Выборочный коэффициент регрессии.
4. Выборочное уравнение регрессии.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Практическое занятие 18.

Тема занятия. Статистическая гипотеза. Методы статистической проверки гипотез.

Цель занятия. Закрепить методы статистической проверки гипотез.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: Методы статистической проверки гипотез, гипотезу о равенстве генеральных средних.

Уметь: применять методы статистической проверки гипотез.

Владеть: способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач

Актуальность темы. Методы статистической проверки гипотез используются в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Пусть требуется определить закон распределения генеральной совокупности и назовем его *А*. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид, выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону *А*. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр Θ равен определенному значению Θ_0, то выдвигают гипотезу: $\Theta = \Theta_0$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения.

Статистической называется гипотеза о виде неизвестного распределения или гипотеза о параметрах известных распределений. Например, статистическими являются гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй — о параметрах двух известных распределений.

Нулевой (основной) называется выдвинутая гипотеза H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называется гипотеза H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 10$; т.е. $H_0: a = 10$; $H_1: a \neq 10$.

Простой называется гипотеза, содержащая только одно предположение. Например, гипотеза H_0: математическое ожидание нормального распределения равно 3 (σ известно) — простая.

Сложной называется гипотеза, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H: \lambda > 5$ состоит из бесчисленного множества простых гипотез вида $H_i: \lambda = b_i$, где b_i — любое число, большее 5.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость *статистической* (производимой статистическими методами) проверки этой гипотезы. В итоге статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используется специально подобранная случайная величина, точное или приближенное распределение которой известно. Эта случайная величина обозначается через K и называется *статистическим критерием* (или просто *критерием*).

Приведем пример статистического критерия. Если проверяется гипотеза о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимается отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F = s_1^2 \big/ s_2^2 .$$

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называется значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 20$ и $s_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия F равно

$$F_{набл} = s_1^2 \big/ s_2^2 = 20/5 = 4.$$

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивается на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая — при которых она принимается.

Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называется совокупность значений критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

Поскольку критерий K — одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называются точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называется критическая область, определяемая неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ — положительное число.

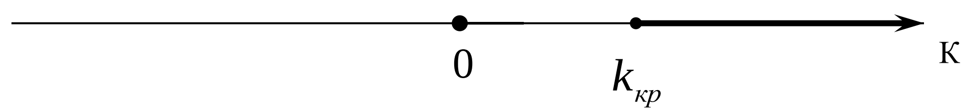


Рис.1.

Левосторонней называется критическая область, определяемая неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ — отрицательное число.

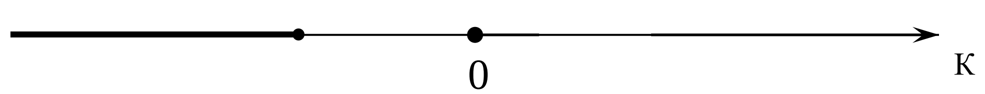


Рис.2.

Односторонней называется правосторонняя или левосторонняя критическая область.

Двусторонней называется критическая область, определяемая неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $K < -k_{кр}$) $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$, или равносильным неравенством $|K| > k_{кр}$.

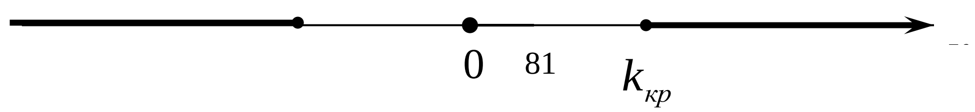


Рис.3.

Для нахождения критической области достаточно найти критическую точку (точки). Для нахождения же такой точки задается достаточно малая вероятность — *уровень значимости* α. Затем критическая точка $k_{кр}$ ищется исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значения из критической области, была равна принятому уровню значимости.

Например, для правосторонней критической области должно выполняться соотношение

$$P(K > k_{кр}) = \alpha,$$

для левосторонней —

$$P(K < k_{кр}) = \alpha,$$

а для двусторонней —

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha.$$

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находится критическая точка.

Если распределение критерия симметрично относительно нуля и имеются основания выбрать симметричные относительно нуля точки $-k_{кр}$ и $k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$), то $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$. Учитывая это соотношение, из для двусторонней критической области получим соотношение

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2.$$

Мощностью критерия называется вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Пусть для проверки гипотезы принят определенный уровень значимости, и выборка имеет фиксированный объем. Если β — вероятность ошибки второго рода, т.е. события «принята нулевая гипотеза, причем справедлива конкурирующая», то мощность критерия равна $1-\beta$.

Пусть мощность $1-\beta$ возрастает; следовательно, уменьшается вероятность β совершить ошибку второго рода. Таким образом, чем мощность больше, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Итак, если уровень значимости уже выбран, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Это позволит минимизировать ошибку второго рода.

Далее нам потребуется распределение Фишера – Снедекора.

Если U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

имеет распределение, которое называется *распределением* F *Фишера – Снедекора* со степенями свободы k_1 и k_2.

Функция плотности этого распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0 \\ C_0\dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} & при \quad x>0 \end{cases},$$

где

$$C_0=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}.$$

Распределение F определяется двумя параметрами — числами степеней свободы k_1 и k_2.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии известны. По независимым выборкам с объемами, соответственно равными n_1 и m, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0\colon M(X)=M(Y).$$

Учитывая, что выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних, т.е.

$$M(\bar{x})=M(X),\quad M(\bar{y})=M(Y),$$

нулевую гипотезу можно записать так:

$H_0\colon M(\bar{x})=M(\bar{y}).$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных средних принимается нормированная нормальная случайная величина

$$Z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}}.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0\colon M(X)=M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1\colon M(X)\ne M(Y)$.

В этом случае строится двусторонняя критическая область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия Z в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Поскольку распределение Z симметрично относительно нуля, то критические точки симметричны относительно нуля, т.е. если обозначить через $z_{кр}$ правую критическую точку, то $-z_{кр}$ будет левой критической точкой.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$:

$$P(Z < -z_{кр}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{кр}) = \alpha/2.$$

Для того, чтобы найти правую границу $z_{кр}$ двусторонней критической области, достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-\alpha)/2$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2.$$

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$.

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

В этом случае строится правосторонняя критическая область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия Z в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha.$$

Для того, чтобы найти границу $z_{кр}$ правосторонней критической области, достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-2\alpha)/2$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2.$$

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$.

Если $Z_{набл} < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} > z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Вопросы и задания.

1. Статистическая гипотеза.
2. Мощность критерия.
3. Критическая область.

Задание 1. Техническая норма предусматривает в среднем 40 сек. на выполнение определенной технологической операции на конвейере по производству часов. От работниц, работающих на этой операции, поступили жалобы, что они в действительности затрачивают на эту операцию больше времени. Для проверки данной жалобы произведены хронометрические измерения времени выполнения этой технологической операции у 36 работниц, занятых на этой операции, и получено среднее время выполнения операции 42 сек. Можно ли (предполагая время выполнения технологической операции случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону) по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, если известно, что среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности σ составляет 3,5 сек.?

Задание 2. Экономический анализ производительности труда предприятий отрасли позволил выдвинуть гипотезу о наличии двух типов предприятий с различной средней величиной показателя производительности труда. Выборочное обследование 42-х предприятий первой группы дало следующие результаты: средняя производительность труда составила 119 деталей. По данным выборочного обследования 35-и предприятий второй группы средняя производительность труда составила 107 деталей. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 126,91 ; D(Y) = 136,1. Считая, что выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y, на уровне значимости 0,05 проверьте, случайно ли полученное различие средних показателей производительности труда в группах или же имеются два типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Среди случайно отобранных 200 изделий проверяемой партии оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,02$ принять партию?

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально. По независимым выборкам с объемами, соответственно равными n_1 и n_2, извлеченным из этих совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0: D(X) = D(Y).$$

Учитывая, что исправленные дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий, т.е.

$$M(s_X^2) = D(X), \quad M(s_Y^2) = D(Y),$$

нулевую гипотезу можно записать так:

$$H_0: M(s_X^2) = M(s_Y^2).$$

На практике задача сравнения дисперсий возникает, если требуется сравнить точность приборов, инструментов, самих методов измерений и т.д. Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент и метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т.е. наименьшую дисперсию.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий принимается отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т.е. случайная величина

$$F = s_б^2 \big/ s_м^2 .$$

Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера – Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 — объем выборки, по которой вычислена большая исправленная дисперсия, n_2 — объем выборки, по которой найдена меньшая исправленная дисперсия.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

В этом случае строится правосторонняя критическая область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия F в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(F > F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)) = \alpha .$$

Критическая точка $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ находится по таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) > D(Y)$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т.е.

$$F_{набл} = s_б^2 / s_м^2 ,$$

и по таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора, по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1 — число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$.

Если $F_{набл} < F_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Пример 1. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 11{,}41$ и $s_Y^2 = 6{,}52$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) > D(Y)$

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{набл} = 11{,}41/6{,}52 = 1{,}75 .$$

Конкурирующая гипотеза имеет вид $D(X) > D(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя.

По таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $k_1 = 12 - 1 = 11$ и $k_2 = 15 - 1 = 14$ находим критическую точку $F_{кр}(0{,}05;\ 11;\ 14) = 2{,}56$.

Так как $F_{набл} < F_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0 : D(X) = D(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

В этом случае строится двусторонняя критическая область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия F в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α ..

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$.

Если обозначить через F_1 левую границу критической области и через F_2 — правую, то должны иметь место соотношения:

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2 .$$

Для обеспечения попадания критерия F в двустороннюю критическую область с вероятностью, равной принятому уровню значимости α, в случае конкурирующей гипотезы $H_1: D(X) \neq D(Y)$ достаточно найти критическую точку $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$.

Правило 2.Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе $H_1: D(X) \neq D(Y)$, надо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т.е. по таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора, по заданному уровню значимости $\alpha/2$ (вдвое меньшем заданного) и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1 — число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$.

Если $F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $F_{набл} > F_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1	1,2

Список рекомендуемой литературы и Интернет - источников

Основная литература:

1. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. И доп. – М. : Юрайт, 2014. – 607 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – На учебнике гриф: Рек.УМО. – ISBN 978-5-9916-3325-3

Дополнительная литература:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко ; Моск. Гос. Ун-т тех. И упр. Им. К.Г. Разумовского. – 5-е изд., перераб. И доп. – М. : Юрайт, 2014. – 396 с. : ил. – (Бакалавр. Базовый курс). – На учебнике гриф: Доп.МО. – ISBN 978-5-9916-3467-0

2. Балдин, К.В. Математика : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – Москва : Юнити, 2015. – 543 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114423 – Библиогр. в кн. – ISBN 5-238-00980-1. – Текст : электронный.

3. Малахов, А. Н. Высшая математика : учебное пособие / А. Н. Малахов, Н. И. Максюков, В. А. Никишкин. — Москва : Евразийский открытый институт, 2009. — 396 с. — ISBN 978-5-374-00194-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/10643.html

Методическая литература

1. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математика».

2. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

Интернет-ресурсы

1. http://www.matburo.ru – Сайт Математического Бюро

2. http://www.studfiles.ru – Сайт «Все Для Учебы»

Электронные библиотечные системы:

1. http://biblioclub.ru/ - Университетская библиотека ONLINE
2. http://www.iprbookshop.ru – Электронная библиотечная система «IPRbooks»

Информационные справочные системы:

1. Справочно-правовая система **Консультант Плюс.**