МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МАТЕМАТИКА»
для студентов направления подготовки /специальности
38.05.02 Таможенное дело, Таможенный контроль

(ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТ)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Программа дисциплины «Математические методы и модели в управлении» предназначена для бакалавров направления 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление».

Целью дисциплины является:

- ознакомление студентов с важнейшими методами и моделями классической математики, направленными на использование и применение их в управлении : методами линейной алгебры, методами дифференциального исчисления функции одной переменной, вероятностными и статистическими моделями и их приложениями в государственном и муниципальном управлении.

Основными задачами дисциплины являются:

- создание у студентов основ теоретической подготовки в области математических методов и моделей в управлении;
- овладение математическим аппаратом, необходимым для изучения дисциплин государственного и муниципального управления и решения теоретических и практических задач;
- развитие интеллекта и формирование у студентов логического и алгоритмического мышления;
- выработка навыков самостоятельного изучения учебной и научной литературы по математическим методам и моделям и их приложениям;
- повышение общей культуры студентов.

2. Методические рекомендации по организации практических занятий

Раздел 1. Линейная алгебра

Практическое занятие 1.

Тема занятия Матрицы и определители.

Цель занятия. Приобрести навык выполнения операций над матрицами и вычисления определителей**.**

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:

- виды матриц, действия над матрицами, виды определителей.

Умееть:

- выполнять операции над матрицами и вычислять определители 2-го,3-го и n-го порядков.

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Матрицы и определители широко применяется при решении многих экономических задач.

Теоретическая часть.

Прямоугольная таблица, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают$A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Сложение матриц

Пусть даны две матрицыA иB одинаковой размерности. Их суммой называется матрица$C = A + B$ той же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A+B=C=\begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов.

РазностьюB - A матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B-A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha a_{ij} \|$$

Пример. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\alpha A=3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицыB на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы$C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j– го столбца матрицы A.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Следует отметить, что умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. $AB \neq BA$.

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ -1\cdot(-2) + 3\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$

Вывод: $AB \neq BA$

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы А.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Число $a_{11}\ a_{22}$ - $a_{21}\ a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически вычисление определителя третьего порядка выглядит следующим образом (правило треугольников или правило Сарруса):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot 9 = 13-6-34-27 = -54$$

Данный определитель можно вычислить иным способом, применив элементарные преобразования к строкам определителя. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. получаем определитель вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24-30+36+12-36-60=-54.$$

Вопросы и задания.

1. Какие матрицы можно складывать и по какому правилу?
2. Какими свойствами обладает операция сложения матриц? Есть ли отличия от свойств сложения чисел?
3. Как умножить матрицу на число?
4. Какими свойствами обладают операция умножения матрицы на число? Есть ли отличия от свойств умножения чисел?
5. Что называется определителем квадратной матрицы?
6. Дайте определение минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
7. Как вычислить определитель, разлагая его по произвольной строке или столбцу? Сформулируйте соответствующую теорему и напишите формулы разложения определителя по i–ой строке (k–му столбцу).

1. Найти произведение матриц А и В.

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель

1. $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 26 & 56 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}$. 2. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$

5. $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. 6. $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 7 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 2.

Тема занятия. Методы решения систем линейных уравнений.

Цель занятия.Рассмотреть различные методы решенияи закрепить навыки решенияСЛАУ.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать: методы решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы, Крамера и Гаусса.

Уметь: пользоваться инструментарием для решения простейших математических задач.

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Приемы и методы решенияСЛАУприменяются для решения задач с экономическим содержанием.

Теоретическая часть.

Системаmлинейных уравнений спипеременными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

где a_{ij} (i = 1,2,...,m; j = 1,2, ...,n), b_k (k = 1,2, ...,m) - заданные действительные числа.

Числа a_{ij} (i = 1,2,...,m; j = 1,2, ...,n) называются коэффициентами системы, а числа b_k (k = 1,2, ...,m) - свободными членами системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Матрицы

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, которые составлены из коэффициентов при переменных и свободных членов системы, называют соответственно матрицей системы и расширенной матрицей системы.

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных; b_i - свободные члены (правые части) системы уравнений. Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*.

Решим систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Введём следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 - 3 - 6 - 4 - 3 = -26.$$

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, то матрицаA имеет обратную, а решение системы имеет вид: $X = A^{-1}B$.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицыA:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$$

Матрица A^{-1}, обратная кA, запишется следующим образом

$$A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матричное решение системы имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -78 \\ 130 \\ -52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

отсюда следует, что $x_1 = 3, \ x_2 = -5, \ x_3 = 2.$

При условии, что $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы выражается *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Решить по формулам Крамера следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -5 \end{cases}.$$

Вначале найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ = -10 - 40 - 21 - 8 -30+ +35 = - 74. $\Delta \neq 0$. Следовательно, рассматриваемая система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -5 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ = 40 + 50 - 14 + 10 - 20 - 140 = - 74, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix}$ = - 10 - 80 - 15 - 8 - 60 + 25 = - 148, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ = - 10 - 16 + 84 +32 -30 + +14=74. Таким образом, решение данной системы имеет вид: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-74}{-74} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-148}{-74} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{74}{-74} = -1$.

Рассмотрим решение СЛАУ методом Гаусса. Метод Гаусса заключаетсяв последовательном исключении неизвестных. Для удобства выпишем расширенную матрицуи приведем её к диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[S_1 \leftrightarrow S_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-S_1+S_2 \\ -2S_1+S_3}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-S_1+S_2 \\ -2S_1+S_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[S_2 \leftrightarrow S_3]{} \xrightarrow[S_2 \leftrightarrow S_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[-3S_2+S_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \end{array}\right).$$

Выполним обратный ход. Запишем систему,исходя из коэффициентов последней матрицы, и последовательно найдем неизвестные.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ -x_2 - 9x_3 = -13, \\ 26x_3 = 52, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 = 13 - 9x_3 = -5, \\ x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Вопросы и задания.

Используя формулы Крамера и метод обратной матрицы найти решения следующих СЛАУ:

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$.

Решить следующие системы методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18 \\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24 \\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13 \\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6 \end{cases}$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 3.

Тема занятия. Функции и пределы. Методы приближенного вычисления значений функций.

Цель занятия. Сформировать навыки вычисления пределов функций, а также вычисления приближенных значений функций.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:
-основные методы вычисления пределов функций, приближенных значений функций.

Уметь:
- вычислять пределы функций, приближенные значения функций.

Владеть:
- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций

Актуальность темы. Пределы функций используются в экономических расчетах при нахождении предельных экономических показателей.

Теоретическая часть.

Пусть функция $y=f(x)$ задана в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точкиa.

Число А называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ найдётся такое положительное число $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Дадим геометрическую иллюстрацию понятия предела функции в точке

(рис. 1.)

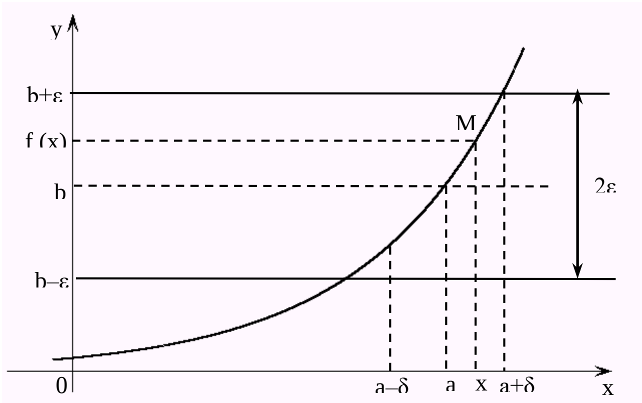

Рисунок 1.

Для всех точекx, отстоящих от точки a не дальше, чем на δ, точки M графика функции $f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon, y=b+\varepsilon.$

Рассмотрим некоторые *свойства пределов функций.*

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A, \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, C- постоянная величина ,тогда

1. $\lim\limits_{x\to a} C=C$,
2. $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x))=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=C\cdot A$,
3. $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x))=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=C\cdot A$,
4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=A+B$,
5. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\cdot B$,
6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

Два замечательных предела

Первый замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Рассмотрим примеры на вычисление пределов функций.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+5x}{-4x^2+7}$.

Решение

При подстановке предельного значения аргумента получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

В примерах подобного типа числитель и знаменатель делят почленно на x^n, где n -степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на на x^2. В результате получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+5x}{-4x^2+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\frac{5}{x}}{-4+\frac{7}{x^2}}=\frac{12+0}{-4+0}=-3,$$

Так как, при $x\to\infty$ функции $\frac{5}{x}$ и $\frac{7}{x^2}$ стремятся к нулю.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

При подстановке предельного значения аргумента получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, чтобы ее раскрыть разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)=(x-3)(x-3)(x+2)=(x-3)^2(x+2)$$

$$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x-3)=(x-3)(x-3)(x+1)=(x-3)^2(x+1)$$

$$\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-3)^2(x+1)}.$$

Сократим числитель и знаменатель на множитель $(x-3)^2$, в результате получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

При подстановке предельного значения аргумента получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, чтобы ее раскрыть умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю,а выражение, стоящее в знаменателе разложим на множители.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{\sqrt[3]{x-3}\sqrt[3]{x+3}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)^{\frac{1}{3}}}{(x+3)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}=0\cdot$$

Пример 4.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$.

Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, раскроем ее с помощью первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{4\cdot 3x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

Воспользуемся тригонометрическими формулами:

$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x;\ \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, в результате получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\frac{2\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1}=4$$

Пример 6.Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x-1}$.

Подстановка предельного значения приводит к неопределённости вида 1^{∞} .

Для её раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{3x}}{1+\frac{4}{3x}}\right)^{2x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{2x}}\cdot 1=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{-3x}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{3x}{4}}\right)^{\frac{8}{3}}}=\frac{e^{-\frac{2}{3}}}{e^{\frac{8}{3}}}=e^{-\frac{10}{3}}=\frac{1}{e^{\frac{10}{3}}}.$$

Вопросы и задания.

1. Определение предела функции.
2. Основные свойства пределов функций.
3. Методы вычисления пределов функций.
4. Первый замечательный предел.
5. Второй замечательный предел.

Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+5}{3x-4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{2x^2+5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x-8}{8x^2+6x^3+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-2x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 4.

Тема занятия. Производная и дифференциал функции одной переменной.

Цель занятия. Сформировать навыки вычисления производных сложной функции.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:
- таблицу производных и правила дифференцирования.

Уметь:
- находить производные сложных функций.

Владеть:
- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Производная сложной функции используется в управленческих задачах.

Теоретическая часть.

Определение производной

Производной функции y = f (x) называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то производная существует и функция f (x) называется дифференцируемой в точке x. Производная обозначаетсяy'(x) или $\frac{dy}{dx}$. Процесс нахождения производной называется дифференцированием функции.

Правила дифференцирования функций

Пусть$C \in \mathbf{R}$— постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные.

1.$C' = 0$.   2. $(Cu)' = C \cdot u'$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Правило дифференцирования сложной функции

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, а функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема по x, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ определяется формулой $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} u'$.

1*а*. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. 1*б*. $\left(u^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$. 2*а*. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

3. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$. 3*а*. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$. 5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$. 7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

8. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. 9. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

10. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$. 11. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Производные второго порядка

Производной второго порядка (*второй производной*) от функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Вторую производную также обозначают $y''(x)$ или $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка* и т. д. Производную *n*-го порядка обозначают $y^{(n)}(x)$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Покажем на примерах, как следует пользоваться приведенными выше формулами.

Пример1. Найти производную: $y = \cos^2(x^2)$.

$$y' = 2\cos(x^2) \cdot \left(\cos(x^2)\right)' = 2\cos(x^2) \cdot \left(-\sin(x^2)\right)' \cdot \left(x^2\right)' = -2x \cdot \sin(2x^2).$$

Пример 2. Найти производную: $y = \arcsin\sqrt{x}$,

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Пример 3. Найти производную: $y = \ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)$.

Решение.

$$y' = \frac{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)'} = \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$.

$$y' = \frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

Вопросы и задания.

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
3. Запишите таблицу производных.
4. Как определяется производная второго, *n*-го порядка?

Найти производную функции.

1. $y = \sqrt[4]{\left(3+4\sqrt[3]{2x}\right)^3}$. Ответ: $y' = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$.

2. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

3. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{1+x^2}$.Ответ: $y' = \dfrac{-2x}{2\cdot 2x^2 + x^4}$.

4. $y = \ln\dfrac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$. Ответ: $y' = \dfrac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$.

5. $y = \ln\ln \mathrm{tg} x$ Ответ: $y' = \dfrac{2}{\sin 2x \ln tgx}$.

6. $y = e^{\arcsin\frac{1}{x}}$ Ответ: $y' = -\dfrac{e^{\arcsin\frac{1}{x}}}{x\sqrt{x^2-1}}$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 5.

Тема занятия. **Методы исследования и построения графиков функций.**

Цель занятия. Формирование навыковприменения дифференциального исчисления к построению графиков функций.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:

-определение экстремума функции, точки перегиба, асимптот, схему исследования и построения графиков функций.

Уметь:

- проводить исследование и построение графиков функций.

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Исследование и построение графиков функций используется в экономических задачах.

Теоретическая часть.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную в точке x_0. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума) функции* $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Значение функции в точке максимума называется максимумом функции: $y_{\max} = f(x_{\max})$.Значение функции в точке минимума называется минимумом функции: $y_{\min} = f(x_{\min})$.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума функции*. Значения функции в точках экстремума называются *экстремумами функции.*

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует – *необходимое условие экстремума*. Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать только среди тех точек, в которых производная функции равна нулю или не существует, такие точки называются *критическими* или *стационарными* точками функции.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности (за исключением может быть, самой точки x_0) и если при переходе x через точку x_0 (слева направо):

1) $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то точка x_0 есть точка максимума функции,

2) $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то точка x_0 есть точка минимума функции,

3) $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 функция не имеет экстремума.

Если в критической точке x_0 функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема, то определить характер экстремума (если в точке x_0 функции имеет экстремум) можно по знаку второй производной:

1) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума функции,

2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции.

График функции y = f(x) называется выпуклым вверх на интервале (a; b) если в пределах этого интервала график функции y = f(x) лежит ниже любой своей касательной.

График функции y = f(x) называется выпуклым вниз на интервале (a; b) если в пределах этого интервала график функции y = f(x) лежит выше любой своей касательной.

Точка графика функции y = f(x) M_0 (x_0; f(x_0)) называется точкой *перегиба* графика, если при переходе x через x_0 график меняет направление выпуклости.

В точке перегиба x_0 вторая производная функции f равна нулю $f''(x_0) = 0$ (необходимое условие перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка x_0 есть точка перегиба её графика (достаточное условие перегиба).

Алгоритм исследования функции на выпуклость
и точки перегиба

1. Находим вторую производную функции $f''(x)$.

2. Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

3. Исследуем знак второй производной слева и справа от найденных точек и делаем вывод об интервалах выпуклости и наличии точек перегиба. Если вторая производная будет менять свой знак с плюса на минус или с минуса на плюс в исследуемой точке, то эта точка и будет точкой перегиба графика функции. Если вторая производная знака не меняет, то функция не имеет точек перегиба.

Асимптоты графика функции

Прямая Lназывается асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x; y)$ кривой до этой прямой Lстремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат. Прямая $x = a$является *вертикальной* асимптотой кривой $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty\ (или - \infty)$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty\ (или - \infty)$$

Прямая $y = kx + b$ наклонная асимптота кривой $y=f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если выполняются условия:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad и \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k\cdot x] = b$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad и \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k\cdot x] = b\right).$$

Частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$ и $b \neq \infty$ – *горизонтальная* асимптота $y = b$.

Общая схема исследования
и построения графикафункции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность и нечётность, периодичность.
3. Исследовать функцию на непрерывность и вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции на бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения функции с осями координат.
8. Построить график функции.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{3x^2 - x + 2}{x - 2}$.

Найдемобласть определения функции $D(y) = (-\infty\,; 2) \cup (2\,; +\infty)$.

$x_0 = 2$есть точка разрыва графика функции, через нее может проходить вертикальная асимптота.

Найдем $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} \frac{3x^2-x+2}{x-2} = \left[\frac{12}{-0}\right] = -\infty$,следовательно, прямая $x_0 = 2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту: $y = kx + b$

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{3x^2-x+2}{(x-2)x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left|\begin{array}{l}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x^2\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 3;$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(\frac{3x^2-x+2}{x-2} - 3x\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{3x^2-x+2-3x^2+6x}{x-2} =$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{5x+2}{x-2} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{5+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 5.$$

Нашли, что $k = 3$ и $b = 5$, следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = 3x + 5$.

Вопросы и задания.

1. Определение экстремума функции.
2. Определение точки перегиба графика функции.
3. Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.
5. Общая схема исследования и построения графика функции.

Найти экстремумы функций:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$. 2. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$.

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции:

1. $y = \frac{x^4}{12} - 2x^2$. 2. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

Найти асимптоты графиков следующих функций:

1. $y = \frac{2-x^2}{x+3}$. 2. $y = \frac{5x^2+2x-1}{1-x}$.

Исследовать функцию и построить её график.

1. $y = \dfrac{x^3}{3(x+2)^2}$. 2. $y = 3x(1-x^2)$.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 6.

Тема занятия. Вероятностные модели процессов управления.

Цельзанятия. Закрепить навыки применения вероятностых моделей в процессах управления.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:

- определение теорем сложения и умножения вероятностей.

Уметь:

- применять теоремы сложения и умножения вероятностей.

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Теория вероятностей используется в расчетах.

Теоретическая часть.

Классическое определение вероятности.

Вероятность события А определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных событий, благоприятствующих появлению события A, n — число всех элементарных событий, входящих в Ω.

Это определение называется *классическим определением вероятности*.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. *Вероятность достоверного события равна единице*.

Действительно, если событие достоверно, то все элементарные события благоприятствуют ему. В этом случае $m=n$ и, следовательно,

$$P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю*.
Действительно, если событие невозможно, то ни одно элементарное событие не благоприятствует ему. В этом случае $m=0$ и, следовательно,

$$P(\varnothing) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей*.
Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. В этом случае $0 < m < n$, а значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$ и, следовательно, $0 < P(A) < 1$
Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам

$$0 \le P(A) \le 1$$

Если пространство Ω содержит бесконечное множество элементарных событий, то используется геометрическое определение вероятности, когда вероятность попадания точки в любую область пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и формы.
$P(A) = \frac{mesg}{mesG}$, где mes – мера длины, площади, объема, g – часть области G.
Пример 1. Бросается игральный кубик. Пространство элементарных событий, отвечающее данному эксперименту, имеет следующий вид:. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$.
Пусть событие *A*состоит в появлении четного числа очков. Событие *A* есть подмножество. $\Omega, \grave{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.
Элементарные события, входящие в состав случайного события *A*называются событиями, *благоприятствующими* появлению события А. Два или несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо событие более возможным, чем любое другое.
Пример 2. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них 2 выигрыша по 50 руб., 5 – 20 руб., 10–10 руб., 25–5 руб. Некто купил один билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей.
<u>Решение</u>.
По условию: $1000 = 2_{50}+5_{20}+10_{10}+25_5+958_{\text{проигрыш}}$.
Пусть А- искомое событие. Выигрыш не менее 20 рублей – это выигрыш в 20 рублей, который встречается $m_1=5$ раз и выигрыш в 50 рублей, который встречается $m_2=2$ раза. Тогда $m=m_1 + m_2$.$n=1000$ - общее количество всех билетов. $\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{5+2}{1000} = 0{,}007.$
Пример 3. Из 90 случайно отобранных одинаковых деталей выявлено 3 бракованных. Относительная частота бракованных деталей равна

$$W(A) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$$

При увеличении числа испытаний (опытов) наблюдается устойчивость относительной частоты, т.е. существует некоторая постоянная величина, около которой группируется относительная частота и к которой она все больше приближается с увеличением числа испытаний. Эта постоянная величина называется *вероятностью случайного событи* и обозначаетсяР(А). Рассмотренное понятие вероятности случайного события является статистическим определением вероятности.

Пусть события *A* и *B* — несовместные, причем вероятности этих событий даны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие *A*, либо событие *B*, т.е. вероятность суммы этих событий *A*+*B*? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.*Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Следствие.*Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)\cdot$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. *Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B)\cdot$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие *A*)

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\cdot$$

Вероятность появления синего шара (событие *B*)

$$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}\cdot$$

События *A* и *B* несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot$$

Так как противоположные события вместе образуют достоверное событие, то

$$P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})=1,$$

поэтому
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Пример 2. Вероятность того, что день будет дождливым, равна $p = 0{,}3$. Найти вероятность того, что день будет ясным.
События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Пример 3.Мишень состоит из трех зон. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле равна 0,15; во вторую - 0,23; в третью - 0,17. Найти вероятность промаха.
Обозначим событие $\overline{\mathrm{A}}$- промах, А - попадание в мишень. Тогда $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3$, где $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ - попадание соответственно в первую, вторую и третью зоны. По теореме сложения вероятностей:
$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55$
откуда $\quad P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(A) = 0{,}45$

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может либо произойти (успех), либо не произойти (неудача). Будем считать, что вероятность события *A* в каждом испытании одна и та же, а именно равна *p*. Следовательно, вероятность ненаступления события *A* в каждом испытании также постоянна и равна *q*=1–*p*. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*.
В качестве таких испытаний можно рассматривать, например, производство изделий на определенном оборудовании при постоянстве технологических и организационных условий, в этом случае изготовление годного изделия — успех, бракованного — неудача. Эта ситуация соответствует схеме Бернулли, если считать, что процесс изготовления одного изделия не зависит от того, были годными или бракованными предыдущие изделия.
Другим примером является стрельба по мишени. Здесь попадание — успех, промах — неудача.
Поставим своей задачей вычислить вероятность того, что при *n* испытаниях событие *A* осуществится ровно *k* раз и, следовательно, не осуществится *n*—*k* раз, т.е. будет *k* успехов и *n*—*k* неудач.
Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.
Последовательность *n* независимых испытаний можно рассматривать как сложное событие, являющееся произведением *n* независимых событий. Следовательно, вероятность того, что в *n* испытаниях событие *A* наступит *k* раз и не наступит *n*—*k* раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна

$$p^k q^{n-k}.$$

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из *n* элементов по *k* элементов, т.е. C_n^k.

Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появление *k* раз события *A* в *n* испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Полученную формулу называют *формулой Бернулли*.

Пример 1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в течение 4 суток из ближайших 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии на продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = \frac{1215}{4096} \approx 0,297 \cdot$$

В ряде задач представляет интерес наивероятнейшее число успехов, т.е. такое число $\hat{m}$ успехов, вероятность которого самая большая среди вероятностей. Так как при увеличении *k* вероятности сначала возрастают, а затем, с определенного момента, начинают убывать, то для $\hat{m}$ имеют место соотношения

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} - 1)$$

и

$$P_n(\hat{m}) \geq P_n(\hat{m} + 1).$$

Используя формулу и соотношение $p + q = 1$, получаем соответственно неравенства

$$(n - \hat{m} + 1)p \geq \hat{m}q$$

и

$$(\hat{m} + 1)q \geq (n - \hat{m})p.$$

Окончательно получаем, что $\hat{m}$ лежит в интервале единичной длины:

$$np - q \leq \hat{m} \leq np + p.$$

Однако, стоит заметить, что использование формулы Бернулли при больших значениях *n* достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами.

Например, если $n = 50$, $k = 30$,, $p = 0,1$, то для отыскания вероятности $P_{50}(30)$ надо вычислить выражение $P_{50}(30) = \frac{50!}{30! \cdot 20!} \cdot (0,1)^{30} \cdot (0,9)^{20}$, где

$50! = 30414093 \cdot 10^{57}; 30! = 26525286 \cdot 10^{25}; 20! = 24329020 \cdot 10^{11}$.

Локальная теорема Лапласа. *Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(k)$ *того, что событие А появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x) \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

При этом следует учитывать, что $\phi(-x) = \phi(x)$, так как функция $\phi(x)$ четная.

Следовательно, вероятность того, что событие *А* появится в *n* независимых испытаниях ровно *k* раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x),$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 1. Найти вероятность того, что событие *А* наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Воспользуемся формулой (4.7):

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{8} \cdot \phi(x) \cdot$$

Вычислим определяемое данными задачи значение *x:*

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0 \cdot$$

По таблице находим $\phi(0) = 0,3989$.

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986 \cdot$$

Пусть теперь требуется вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие *А* появится в *n* испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»). Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Интегральная теорема Лапласа. *Если вероятность р наступления события А* *в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(k_1,k_2)$ *того, что событие A появится в n испытаниях от* k_1 *до* k_2 *раз, приближенно равна определенному интегралу*

$$P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ *и* $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальной таблицей для интеграла $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для $x \ge 0$, а для $x < 0$ воспользуемся нечетностью функции $\Phi(x)$, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *функцией Лапласа*.

Итак, вероятность того, что событие *A* появится в *n* независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, равна

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример 2. Вероятность того, что организация не прошла проверку налоговой инспекции, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных организаций не прошедших проверку окажется от 70 до 100 организаций.

Решение. По условию $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$ Воспользуемся формулой (4.9):

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938; \quad \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(70,100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p*. Для определения вероятности *k* появлений события в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же *n* велико, то пользуются локальной теоремой Лапласа. Однако она дает большую погрешность, если вероятность события мала $(p \le 0{,}1)$.

Если сделать допущение, что произведение np при $n \to \infty$ сохраняет постоянное значение, а именно $np = \lambda$, то вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно *k* раз, находится по следующей формуле:

$$P_n(\mathrm{k}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Эта формула выражает закон распределения *Пуассона* вероятностей массовых (*n* велико) и маловероятных (*p* мало) событий. Имеются специальные таблицы для распределения Пуассона.

Пример 3. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 поврежденных изделия.

<u>Решение</u>. По условию $n = 5000, p = 0{,}0002, k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

Искомая вероятность по формуле (5.2) равна:

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06$$

Вопросы и задания.

1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
2. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
3. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
4. Схема испытаний Бернулли.
5. Формула Бернулли.
6. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.
7. Приближенная формула Пуассона.
8. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
9. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Задание 1. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков – чётное число, причём на грани хотя бы одной из костей появилась шестёрка.

Задание2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причём неизвестно какая. Извлечённая наугад после этого деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Задание3. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

Задание 4. Вероятности появления каждого из двух независимых событий А и В соответственно равны 0,6 и 0,5. Найти вероятность появления только одного из них.

Задание 5. В ящике среди 100 деталей находится 1 бракованная. Из ящика наудачу извлечены 10 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажется бракованная.

Задание 6. Монета бросается пять раз. Найти вероятность того, что орел выпадет 2 раза.

Задание 7. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди них 2 мальчика, если вероятность рождения мальчика равна 0,51.

Вероятность обнаружения опечатки на странице книги равна 0,01. Найти вероятность того, что в 500-страничной книге не будет обнаружено опечаток (обнаружение опечаток на различных страницах считать независимыми событиями).

Задание 8. Вероятность изготовления детали высшего сорта равна *0.4*. Найти вероятность того, что из 260 деталей половина будет высшего сорта.

Задание 9. Вероятность изготовления изделия высшего качества равна 0,8. Найти вероятность того, что среди взятых 60 изделий 30 окажутся высшего качества.

Задание10. Вероятность появления события А в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится не более 74 раз.

Задание 11. Вероятность некоторого события в единичном испытании оставляет 0,004. Найти вероятность того, что в 2500 испытаниях данное событие произойдёт ровно 4 раза.

Задание 12. Вероятность наступления события А в одном опыте равна 0,6. Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях.

Задание 13. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит не менее четырех раз при 5 испытаниях.

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 7.

Тема занятия. Корреляционно-регрессионный метод исследования случайных величин.

Цель занятия. Закрепить навыки применения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:

- определение числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин, этапы корреляционно-регрессионного метода

Уметь:

- находить числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин, коэффициент корреляции, строить линию регрессии

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин используются в расчетах связанных с управлением.

Теоретическая часть.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а удобнее пользоваться некоторыми количественными показателями, которые дают достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называются *числовыми характеристиками случайной величины*.

Основными из этих характеристик являются: *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение*. *Математическое ожидание* характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности и обозначается через *M(X)*.

Пусть случайная величина *X* принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание *M(X)* случайной величины *X* определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает бесконечное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \cdot$$

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание по формуле равно

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$$

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание. *Отклонением случайной величины* называется разность $X - M(X)$.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно воспользоваться следующей формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Пример 2. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Математическое ожидание $M(X)$ равно:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Закон распределения случайной величины X^2 имеет вид:

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

Математическое ожидание $M(X^2)$ равно:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомая дисперсия равна

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05$.

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения служит также среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 3.Случайная величина X задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Математическое ожидание *M(X)* равно:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4.$$

Математическое ожидание $M(X^2)$ равно:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 100 \cdot 0{,}5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - (6{,}4)^2 = 13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61.$$

Дискретная случайная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Однако такой способ задания неприменим для непрерывных случайных величин.

Например, рассмотрим случайную величину *X*, возможные значения которой сплошь заполняют интервал $(a,\ b)$. Очевидно, что невозможно составить перечень всех возможных значений *X*. Поэтому целесообразно дать общий способ задания любых типов случайных величин, для чего вводятся функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x — действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее *x*, т.е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Если x изменяется, то изменяется и $F(x)$, т.е. $F(x)$ — функция от *x*.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки *x*.

Пример 4. Случайная величина *X* задана следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le -1 \\ x/4 + 1/4 & при \quad -1 < x \le 3 \\ 1 & при \quad x > 3 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(0,\ 2)$: $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$.

<u>Решение</u>. Так как на интервале $(0,\ 2)$, по условию, $F(x) = x/4 + 1/4$,

То $F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2$. Итак, $P(0 < X < 2) = 1/2$.

Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которая называется функцией плотности.

Функцией плотности непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$ — первая производная от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Отсюда следует, что функция распределения является первообразной для функции плотности. Для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины функция плотности неприменима.

Зная функцию плотности, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a,\ b)$, равна определенному интегралу от функции плотности, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 5. Задана функция плотности случайной величины *X*:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ 2x & при \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & при \quad x > 1 \end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(0{,}5;\ 1)$.

Решение. Искомая вероятность по формуле равна

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0{,}5}^{1} 2x\,dx = x^2 \Big|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Зная функцию плотности распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется следующий определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx \cdot$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется следующий определенный интеграл

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)\, dx \cdot$$

Для вычисления дисперсии более удобны соответственно следующие формулы

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\, dx - [M(X)]^2$$

и

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - [M(X)]^2 \cdot$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для дискретной случайной величины, следующим равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Пример 6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ x & при \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & при \quad x > 1 \end{cases} \cdot$$

Решение. Найдем функцию плотности:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ 1 & при \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & при \quad x > 1 \end{cases} \cdot$$

Найдем математическое ожидание по формуле (8.1):

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = x^2/2 \;\Big|_0^1 = 1/2 \cdot$$

Найдем дисперсию по формуле (8.5):

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - [1/2]^2 = x^3/3 \;\Big|_0^1 - 1/4 = 1/12 \cdot$$

Найдем среднее квадратическое отклонение по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1/12}\approx 0{,}29.$$

Корреляционный анализ и регрессионный анализ являются смежными разделами математической статистики и предназначены для изучения по выборочным данным статистической зависимости случайных величин. Две случайные величины могут быть связаны либо функциональной зависимостью, либо статистической зависимостью, либо быть независимыми.

Строгая функциональная зависимость реализуется редко, так как обе величины или одна из них подвержены еще действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие для обеих величин, т.е. такие факторы, которые воздействуют как на X, так и на Y. В этом случае возникает статистическая зависимость. *Статистической* называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость.

Если статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из рассматриваемых случайных величин изменяется среднее значение другой случайной величины, то такая статистическая зависимость называется *корреляционной*.

Для анализа корреляционной зависимости воспользуемся *методом наименьших квадратов*. При использовании этого метода сумма квадратов отклонений Y_i-y_i ($i=1,2,\ldots,n$), где Y_i — вычисленная по уравнению (14.5) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i, а y_i — наблюдаемая ордината, соответствующая x_i, должна быть минимальной. Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция этих параметров:

$$F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2$$

или

$$F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)^2.$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\rho}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)\,x_i=0\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)=0\end{cases}.$$

Решив эту систему двух линейных уравнений относительно ρ и b, найдем искомые параметры:

$$\rho_{yx}=\left(n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\Bigg/\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right);$$

$$b=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\Bigg/\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right).$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y=\rho_{xy}\,y+c,$$

где ρ_{xy} — выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Пример 1. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным $n=5$ наблюдений:

Т а б л и ц а 1.

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Составим следующую расчетную таблицу 2.
Найдем искомые параметры из соотношений (14.9) и (14.10):

$$\rho_{yx}=(5\cdot 26{,}975-15\cdot 8{,}15)/(5\cdot 57{,}5-15^2)=0{,}202;$$

$$b=(57{,}5\cdot 8{,}15-15\cdot 26{,}975)/(5\cdot 57{,}5-15^2)=1{,}024.$$

Напишем искомое уравнение прямой линии регрессии Y на X:

$$y=0{,}202\,x+1{,}024.$$

Т а б л и ц а 2.

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum_{i=1}^{n}x_i$ =15	$\sum_{i=1}^{n}y_i$ =8,15	$\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ =57,50	$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ =26,975

При большом числе наблюдений одно и тоже значение x может встретится n_x раз, одно и тоже значение y — n_y раз, одна и та же пара чисел $(x,\,y)$ может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений следует группировать, для этого подсчитываются частоты n_x, n_y, n_{xy}. Все сгруппированные данные записываются в виде таблицы (например, таблица 3), которая называется *корреляционной*.

Т а б л и ц а 3.

Y	X				n_y
	10	20	30	40	
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n=60$

В первой строке корреляционной таблицы указаны наблюдаемые значения (10; 20; 30; 40) признака X, а в первом столбце — наблюдаемые значения (0,4; 0,6; 0,8) признака Y. На пересечении строк и столбцов находятся частоты n_{xy} наблюдаемых пар значений признаков.

В последнем столбце записаны суммы частот строк, а в последней строке — суммы частот столбцов. В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот, т.е. общее число всех наблюдений n. Очевидно, что $\sum n_x = \sum n_y = n$.

Теперь определим параметры выборочного уравнения прямой линии регрессии Y на X в случае, когда получено большое число данных (практически для удовлетворительной оценки искомых параметров должно быть хотя бы 50 наблюдений), среди них есть повторяющиеся, и они сгруппированы в виде корреляционной таблицы.

Из системы (14.8) можно получить следующую систему:

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Для простоты приняв обозначения $\sum x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ и воспользовавшись соотношениями $\bar{x} = \sum x \big/ n$, $\bar{y} = \sum y \big/ n$,

$\overline{x^2} = \sum x^2 \big/ n$, $\sum xy = \sum n_{xy} xy$ (в предположении, что пара чисел $(x,\, y)$ наблюдалась n_{xy} раз), получаем

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho_{yx} + n\bar{x}b = \sum n_{xy}xy \\ \bar{x}\rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases}.$$

Второе уравнение системы (14.13) преобразуем к виду $b = \bar{y} - \bar{x}\rho_{yx}$ и подставив правую часть этого равенства в уравнение $\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$, получим следующее соотношение

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}).$$

найдем из системы выборочный коэффициент регрессии ρ_{yx}:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right)} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}.$$

Умножим обе части этого равенства на дробь $\tilde{\sigma}_x \big/ \tilde{\sigma}_y$:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}.$$

Обозначим правую часть равенства (14.15) через r_B:

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}.$$

Тогда получаем

$$\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}.$$

Окончательно получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B\,\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}(x - \bar{x}).$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_B\,\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}(y - \bar{y}).$$

Вопросы и задания.

1. Числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.
2. Математическое ожидание дискретных и непрерывных случайных величин.
3. Дисперсия дискретных и непрерывных случайных величин.
4. Среднее квадратическое отклонение дискретных и непрерывных случайных величин.
5. Метод наименьших квадратов.
6. Корреляционная таблица.
7. Выборочное уравнение прямой линии регрессии.

Задание 1. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Задание 2. В партии 10 % нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины – числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Задание 3. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$ $x_2 = 6$, с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(\mathrm{X}) = 8$.

Задание 4. Дан перечень значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1, x_1 = 0, x_3 = 1$, а также известны математические ожидания самой этой величины и её квадрата: $M(\mathrm{X}) = 0,1, \mathrm{M}(\mathrm{X}^2) = 0,9.$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3..

Задание 5. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & -1 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases};$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины; б) вероятность того, что в результате испытания величина примет значение, заключённое в интервале (2,3).

Задание 6. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным, приведённым в следующей таблице:

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	0
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 8.

Тема занятия. Основы выборочного метода и элементы статистической теории оценивания.

Цель занятия. Закрепить понятия выборочной совокупности, выборочной функции распределения.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:

- определение выборочной совокупности, выборочной функции распределения.

Уметь:

- понятие о гистограмме, полигоне частот.

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Выборочная совокупность и выборочная функция распределения используются в экономических расчетах.

Теоретическая часть.

Предметом математической статистики является создание методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей, и ее цель — оценить характеристики генеральной совокупности по выборочным данным.

Если требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого признака, характеризующего эти объекты, то естественным является проведение сплошного обследования, т.е. обследование каждого из объектов совокупности относительно этого признака. На практике, однако, проведение сплошного обследования по тем или иным причинам часто бывает невозможным. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или просто *выборкой* называется совокупность случайно отобранных объектов. *Генеральной совокупностью* называется совокупность объектов, из которых производится выборка. Например, если все студенты Налоговой академии — это генеральная совокупность, то студенты какой-либо группы являются выборкой.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В зависимости от этого выборки подразделяются на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность. *Бесповторной* называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть *репрезентативной* (*представительной*).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности в предположении, что все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Статистическое распределение графически можно изобразить различными способами, в частности, в виде полигона и гистограммы.

Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ... , $(x_k;\ n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ... , $(x_k;\ W_k)$. Полигон относительных частот строится аналогичным полигону частот образом. На рис. изображен полигон относительных частот следующего распределения:

Таблица 1

x_i	2	4	6	8
W_i	0,1	0,5	0,25	0,15

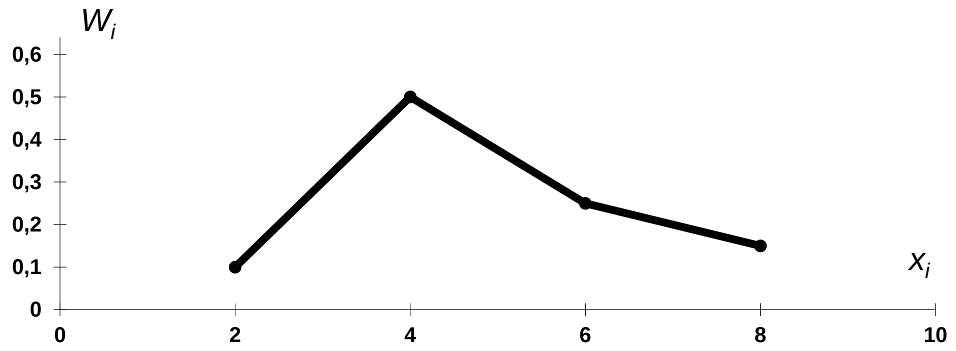

Рис. 1. Полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивается на несколько частичных интервалов длиной h и для каждого частичного интервала находится n_i — сумма частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс следует отложить частичные интервалы, а над ними провести отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h n_i/h = n_i$ — сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки*.

Таблица 2

Частичный интервал длиною h= 5	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

На рис.2 изображена гистограмма частот распределения, заданных в таблице.

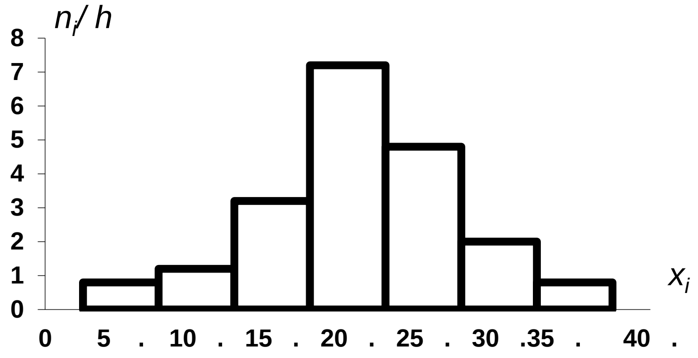

Рис.2. Гистограмма частот распределения.

Гистограммой относительных частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению W_i/h. Гистограмма относительных частот строится аналогичным гистограмме частот образом. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h = W_i$ — сумме относительных частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице*.

Если требуется изучить количественный признак генеральной совокупности, то возникает задача оценки параметров, которыми определяется распределение этого признака. Например, если наперед известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить (приближенно найти) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно имеются лишь данные выборки, например, значения количественного признака x_1, x_2, ... , x_n, полученные в результате n наблюдений, причем эти наблюдения предполагаются независимыми. Через эти данные и выражается оцениваемый параметр. Рассматривая x_1, x_2, ... , x_n как независимые случайные величины X_1, X_2, ... , X_n, можно сказать, что нахождение статистической оценки неизвестного параметра теоретического распределения равносильно нахождению функции от наблюдаемых случайных величин, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра. Например, для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$, которая является средним арифметическим наблюдаемых значений признака.

Таким образом, *статистической оценкой неизвестного параметра* θ

теоретического распределения называется функция $\overline{\theta} = \overline{\theta}(n) = \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от наблюдаемых случайных величин, которая в определенном статистическом смысле близка к истинному значению этого параметра.

Важнейшими свойствами статистической оценки, определяющими ее близость к истинному значению оцениваемого параметра, являются свойства несмещенности, состоятельности и эффективности.

Пусть генеральная совокупность изучается относительно количественного признака *X*.

Генеральной средней $\overline{x}_Г$ называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то генеральная средняя равна

$$\overline{x}_Г = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N .$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то в этом случае генеральная средняя равна

$$\overline{x}_Г = (x_1N_1 + x_2N_2 + \ldots + x_kN_k)/N .$$

Если рассматривать обследуемый признак *X* генеральной совокупности как случайную величину, то можно сделать вывод, что математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака:

$$\overline{x}_Г = M(X).$$

Пусть теперь для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака *X* извлечена выборка объема n.

Выборочной средней $\overline{x}_В$ называется среднее арифметическое наблюдаемых значений признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то выборочная средняя равна

$$\overline{x}_В = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то в этом случае выборочная средняя равна

$$\overline{x}_В = (x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k)/n$$

или

$$\overline{x}_В = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \right) \Big/ n.$$

Генеральной дисперсией $D_Г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\bar{x}_Г$.

Если все значения x_1, x_2, ... , x_N признака генеральной совокупности объема N различны, то генеральная дисперсия равна

$$D_Г = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}_Г\right)^2 \right) \Big/ N .$$

Если же значения признака x_1, x_2, ... , x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, ... , N_k, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то в этом случае генеральная дисперсия равна

$$D_Г = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_Г\right)^2 N_i \right) \Big/ N .$$

Генеральным средним квадратическим отклонением называется квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г} .$$

Пример 1. Генеральная совокупность задана следующей таблицей распределения:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Найти генеральную дисперсию и генеральное среднее квадратическое отклонение.

Решение. Найдем генеральную среднюю:

$$\bar{x}_Г = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4 .$$

Найдем генеральную дисперсию:

$$D_Г = \frac{(2-4)^2 \cdot 8 + (4-4)^2 \cdot 9 + (5-4)^2 \cdot 10 + (6-4)^2 \cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8 .$$

Найдем генеральное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г} = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}34 .$$

Выборочной дисперсией D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака выборочной совокупности от их среднего значения $\bar{x}_B$.

Если все значения x_1, x_2, ... , x_n признака выборки объема n различны, то выборочная дисперсия равна

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2 \right) \Big/ n .$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то в этом случае выборочная дисперсия равна

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}_B \right)^2 \right) \Big/ n \cdot$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \ .$$

Пример 2. Выборочная совокупность задана следующей таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

Решение. Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_B = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2 .$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_B = \frac{(1-2)^2 \cdot 20 + (2-2)^2 \cdot 15 + (3-2)^2 \cdot 10 + (4-2)^2 \cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1} = 1.$$

Теперь пусть требуется по данным выборки оценить неизвестную генеральную дисперсию $D_Г$. Выборочная дисперсия D_B является смещенной оценкой $D_Г$, так как

$$M\left(D_B\right) = \frac{n-1}{n} D_Г \cdot$$

Если же в качестве оценки генеральной дисперсии принять *исправленную дисперсию* s^2, которая получается путем умножения D_B на дробь $n/(n-1)$, то она будет несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Получаем

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{n}{n-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_B \right)^2 n_i \right)}{n} = \left(\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_B \right)^2 n_i \right) \Big/ (n-1)$$

и

$$M\left(s^2\right) = M\left(\frac{n}{n-1} D_B \right) = \frac{n}{n-1} M\left(D_B\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_Г = D_Г \cdot$$

Имеется два способа оценки параметров: точечный и интервальный. Точечные методы указывают лишь точку, около которой находится неизвестный оцениваемый параметр. С помощью интервальных способов можно найти интервал, в котором с некоторой вероятностью находится неизвестное значение параметра.

Точечной называется оценка, которая определяется одним числом. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называется оценка, которая определяется двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика $\overline{\theta}$ служит оценкой неизвестного параметра θ. Если $\delta > 0$ и $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$, то оценка $\overline{\theta}$ тем точнее определяет параметр θ, чем меньше δ. *Точность оценки* характеризуется положительным числом δ.

Однако нельзя категорически утверждать, что оценка $\overline{\theta}$ удовлетворяет неравенству $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$. Статистические методы позволяют лишь говорить о вероятности, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по $\overline{\theta}$ называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$, т.е.

$$P\left(\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta\right) = \gamma.$$

В качестве γ берется число, близкое к единице.

Из неравенства $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$ легко можно получить двойное неравенство

$$\overline{\theta} - \delta < \theta < \overline{\theta} + \delta.$$

Тогда соотношение принимает следующий вид

$$P\left(\overline{\theta} - \delta < \theta < \overline{\theta} + \delta\right) = \gamma.$$

Это соотношение означает следующее: вероятность того, что интервал $(\overline{\theta} - \delta,\ \overline{\theta} + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ, равна γ.

Интервал $(\overline{\theta} - \delta,\ \overline{\theta} + \delta)$ называется *доверительным интервалом*, который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью γ.

Пусть количественный признак *X* генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения и з в е с т н о. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\overline{x}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочную среднюю $\bar{x}$ как случайную величину $\bar{X}$ ($\bar{x}$ изменяется от выборки к выборке) и выборочные значения признака x_1, x_2, ... , x_n — как одинаково распределенные случайные величины X_1, X_2, ... , X_n (эти числа также изменяются от выборки к выборке). Математическое ожидание каждой из этих величин равно a и среднее квадратическое отклонение — σ..

Получаем, что параметры распределения $\bar{X}$ следующие:

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \delta\right) = \gamma,$$

где γ — заданная надежность.

Используя формулу с заменой X на $\bar{X}$ и σ на $\sigma(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$, нетрудно получить соотношение

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma) = 2\Phi(t),$$

где $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$.

Найдя из последнего равенства $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, можно написать

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < t\sigma/\sqrt{n}\right) = 2\Phi(t).$$

Обозначая для общности выборочную среднюю вновь через $\bar{x}$, получаем соотношения

$$\Phi(t) = \gamma/2$$

и

$$P\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right) = \gamma.$$

Значит, с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \quad \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр a, при этом точность оценки равна $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, а число t определяется из равенства по таблице функции Лапласа.

Пример 3. Случайная величина *X*имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}$, если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Найдем t. Из соотношения (13.8) получаем $\Phi(t) = 0{,}475$ и по таблице функции Лапласа находим $t = 1{,}96$.

Найдем точность оценки:

$$\delta = t\sigma/\sqrt{n} = (1{,}96 \cdot 3)/\sqrt{36} = 0{,}98.$$

Доверительный интервал таков: $(\bar{x} - 0{,}98; \ \bar{x} + 0{,}98)$. Например, если $\bar{x} = 4{,}1$, то доверительный интервал имеет следующие доверительные границы:

$$\bar{x}-0{,}98=4{,}1-0{,}98=3{,}12; \quad \bar{x}+0{,}98=4{,}1+0{,}98=5{,}08.$$

Вопросы и задания.

1. Выборочная совокупность.
2. Выборочная функция распределения.
3. Гистограмма, полигон частот.
4. Способы составления выборки.
5. Вычисление точечных оценок параметров распределения.
6. Вычисление интервальных оценок параметров распределения.
7. Выборочная средняя $\overline{x}_B$.
8. Выборочная дисперсия D_B.
9. Исправленная дисперсия S^2.

Задание 1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
p_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

Задание 2. Найти функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	2	5
p_i	10	4	6

Задание 3. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	8
p_i	11	19	8	12

Задание 4. Найти функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	2	5
p_i	10	4	6

Задание 5. Найти методом моментов точечную оценку параметра p геометрического распределения $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x}_i)=(1-\mathrm{p})^{x_i-p}\cdot p$, где x_i - число испытаний, проведённых до появления события, p - вероятность появления события в одном испытании.

Задание 6. Найти методом моментов точечную оценку параметра p геометрического распределения $P(X = x_i) = (1-p)^{x_i - p} \cdot p$, если в четырёх опытах событие появилось соответственно после двух, четырёх, шести и восьми испытаний.

Задание 7. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 50$:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти несмещённую оценку генеральной средней.

Задание 8. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки:

x_i	1240	1250	1270	1280
n_i	6	2	1	1

Задание 9. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	2	3	7	8
n_i	4	2	3	1

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

Практическое занятие 9.

Тема занятия. Статистическая гипотеза. Методы статистической проверки гипотез.

Цель занятия. Закрепить методы статистической проверки гипотез.

В результате освоения темы обучающийся должен:

Знать:

- методы статистической проверки гипотез, гипотезу о равенстве генеральных средних.

Уметь:

- применять методы статистической проверки гипотез.

Владеть:

- способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-6);
- навыками сбора, обработки информации и участия в информатизации деятельности соответствующих органов власти и организаций (ПК-26)

Актуальность темы. Методы статистической проверки гипотез используются в расчетах связанных с управлением.

Теоретическая часть.

Пусть требуется определить закон распределения генеральной совокупности и назовем его *А*. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид, выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону *А*. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр Θ равен определенному значению Θ_0, то выдвигают гипотезу: $\Theta = \Theta_0$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения.

Статистической называется гипотеза о виде неизвестного распределения или гипотеза о параметрах известных распределений. Например, статистическими являются гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй — о параметрах двух известных распределений.

Нулевой (основной) называется выдвинутая гипотеза H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называется гипотеза H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 10$; т.е. $H_0 : a = 10$; $H_1 : a \neq 10$.

Простой называется гипотеза, содержащая только одно предположение. Например, гипотеза H_0: математическое ожидание нормального распределения равно 3 (σ известно) — простая.

Сложной называется гипотеза, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H : \lambda > 5$ состоит из бесчисленного множества простых гипотез вида $H_i : \lambda = b_i$, где b_i — любое число, большее 5.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость *статистической* (производимой статистическими методами) проверки этой гипотезы. В итоге статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используется специально подобранная случайная величина, точное или приближенное распределение которой известно. Эта случайная величина обозначается через K и называется *статистическим критерием* (или просто *критерием*).

Приведем пример статистического критерия. Если проверяется гипотеза о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия K принимается отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F = s_1^2 \big/ s_2^2 .$$

Наблюдаемым значением $K_{набл}$ называется значение критерия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2 = 20$ и $s_2^2 = 5$, то наблюдаемое значение критерия F равно

$$F_{набл} = s_1^2 \big/ s_2^2 = 20/5 = 4.$$

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивается на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая — при которых она принимается.

Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называется совокупность значений критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

Поскольку критерий K — одномерная случайная величина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называются точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называется критическая область, определяемая неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ — положительное число.

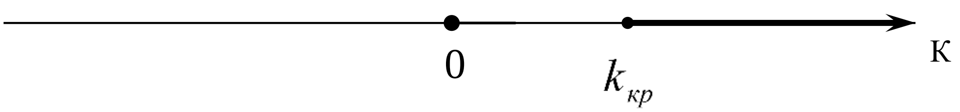

Рис.1.

Левосторонней называется критическая область, определяемая неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ — отрицательное число.

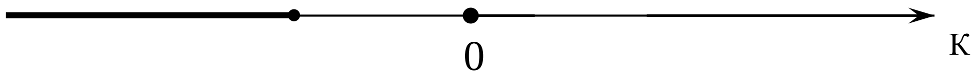

Рис.2.

Односторонней называется правосторонняя или левосторонняя критическая область.

Двусторонней называется критическая область, определяемая неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $K < -k_{кр}$) $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$, или равносильным неравенством $|K| > k_{кр}$.

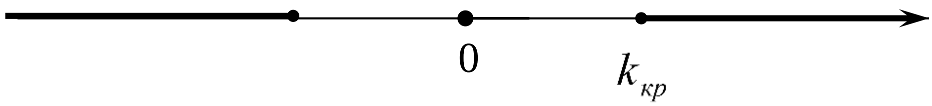

Рис.3.

Для нахождения критической области достаточно найти критическую точку (точки). Для нахождения же такой точки задается достаточно малая вероятность — *уровень значимости* α. Затем критическая точка $k_{кр}$ ищется исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значения из критической области, была равна принятому уровню значимости.

Например, для правосторонней критической области должно выполняться соотношение

$$P(K > k_{кр}) = \alpha,$$

для левосторонней —

$$P(K < k_{кр}) = \alpha,$$

а для двусторонней —

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha.$$

Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находится критическая точка.

Если распределение критерия симметрично относительно нуля и имеются основания выбрать симметричные относительно нуля точки $-k_{кр}$ и $k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$), то $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$. Учитывая это соотношение, из для двусторонней критической области получим соотношение

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2.$$

Мощностью критерия называется вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Пусть для проверки гипотезы принят определенный уровень значимости, и выборка имеет фиксированный объем. Если β — вероятность ошибки второго рода, т.е. события «принята нулевая гипотеза, причем справедлива конкурирующая», то мощность критерия равна $1-\beta$.

Пусть мощность $1-\beta$ возрастает; следовательно, уменьшается вероятность β совершить ошибку второго рода. Таким образом, чем мощность больше, тем меньше вероятность ошибки второго рода.

Итак, если уровень значимости уже выбран, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Это позволит минимизировать ошибку второго рода.

Далее нам потребуется распределение Фишера – Снедекора.

Если U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

имеет распределение, которое называется*распределением* F *Фишера – Снедекора* со степенями свободы k_1 и k_2.

Функция плотности этого распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ C_0 \dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{(k_1+k_2)/2}} & при \quad x > 0 \end{cases},$$

где

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}.$$

Распределение F определяется двумя параметрами — числами степеней свободы k_1 и k_2.

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии известны. По независимым выборкам с объемами, соответственно равными n_1 и m, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 : M(X) = M(Y).$$

Учитывая, что выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних, т.е.

$$M(\bar{x}) = M(X), \quad M(\bar{y}) = M(Y),$$

нулевую гипотезу можно записать так:

$H_0 : M(\bar{x}) = M(\bar{y})$.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных средних принимается нормированная нормальная случайная величина

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Первый случай. Нулевая гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

В этом случае строится двусторонняя критическая область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия Z в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Поскольку распределение Z симметрично относительно нуля, то критические точки симметричны относительно нуля, т.е. если обозначить через $z_{кр}$ правую критическую точку, то $-z_{кр}$ будет левой критической точкой.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна $\alpha/2$:

$$P(Z < -z_{кр}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{кр}) = \alpha/2.$$

Для того, чтобы найти правую границу $z_{кр}$ двусторонней критической области, достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-\alpha)/2$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2.$$

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$.

Если $|Z_{набл}| < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|Z_{набл}| > z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Второй случай. Нулевая гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$. Конкурирующая гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

В этом случае строится правосторонняя критическая область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия Z в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha.$$

Для того, чтобы найти границу $z_{кр}$ правосторонней критической области, достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное $(1-2\alpha)/2$:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2.$$

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $Z_{набл}$.

Если $Z_{набл} < z_{кр}$ — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $Z_{набл} > z_{кр}$ — нулевая гипотеза отвергается.

Вопросы и задания.

1. Статистическая гипотеза.
2. Мощность критерия.
3. Критическая область.

Задание 1. Техническая норма предусматривает в среднем 40 сек. на выполнение определенной технологической операции на конвейере по производству часов. От работниц, работающих на этой операции, поступили жалобы, что они в действительности затрачивают на эту операцию больше времени. Для проверки данной жалобы произведены хронометрические измерения времени выполнения этой технологической операции у 36 работниц, занятых на этой операции, и получено среднее время выполнения операции 42 сек. Можно ли (предполагая время выполнения технологической операции случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону) по имеющимся хронометрическим данным на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ отклонить гипотезу о том, что среднее время выполнения этой операции соответствует норме, если известно, что среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности σ составляет 3,5 сек.?

Задание 2. Экономический анализ производительности труда предприятий отрасли позволил выдвинуть гипотезу о наличии двух типов предприятий с различной средней величиной показателя производительности труда. Выборочное обследование 42-х предприятий первой группы дало следующие результаты: средняя производительность труда составила 119 деталей. По данным выборочного обследования 35-и предприятий второй группы средняя производительность труда составила 107 деталей. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 126,91 ; D(Y) = 136,1. Считая, что выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y, на уровне значимости 0,05 проверьте, случайно ли полученное различие средних показателей производительности труда в группах или же имеются два типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Среди случайно отобранных 200 изделий проверяемой партии оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ принять партию?

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	1	1,2	1,2

3.СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

3.1 Основная литература:

1. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. И доп. – М. : Юрайт, 2014. – 607 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – На учебнике гриф: Рек.УМО. – ISBN 978-5-9916-3325-3

3.2. Дополнительная литература:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко ; Моск. Гос. Ун-т тех. И упр. Им. К.Г. Разумовского. – 5-е изд., перераб. И доп. – М. : Юрайт, 2014. – 396 с. : ил. – (Бакалавр. Базовый курс). – На учебнике гриф: Доп.МО. – ISBN 978-5-9916-3467-0

3.3. Методическая литература

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математические методы и модели в управлении» для бакалавров направления подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление».

2. Методические указания для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «Математические методы и модели в управлении» для бакалавров направления подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление».

3.4. Интернет-ресурсы

1. http://www.matburo.ru – Сайт Математического Бюро
2. http://www.studfiles.ru – Сайт «Все Для Учебы»