МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

СКФУ СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Методические указания

по выполнению самостоятельных работ
по дисциплине
«Строительная механика»
для студентов направления подготовки
07.03.03 «Дизайн архитектурной среды»
Направленность (профиль): «Проектирование городской среды»

2020 г.

Содержание

Введение

Целью методических рекомендаций по изучению дисциплины является закрепление и углубление знаний, полученных при изучении теоретического материала по дисциплине «Строительная механика ».

Целью проведения практических занятий является:

1. Обобщение, систематизация, закрепление полученных теоретических знаний по темам конкретным требованиям дисциплины
2. Формирование умений применять полученные знания на практике
3. Выработка оптимальных решений при решении практических задач предметной области

Ведущей целью практических занятий по дисциплине Теоретическая механика является формирование профессиональных компетенций и умений – выполнение определенных действий, необходимых в предметной области.

Методические рекомендации призваны обеспечить эффективность самостоятельной работы студентов с литературой, на основе рациональной организации ее изучения, облегчить подготовку студентов к сдаче дифференцированного зачета, сориентировать их в направлении изучения материала по поставленным вопросам, дать возможность отработать навыки составления и оформления различных видов документов, как под контролем преподавателя, так и самостоятельно.

Перед подготовкой к занятию студенты должны ознакомиться с планом практического (семинарского) занятия, а также с учебной программой по данной теме Что поможет студенту сориентироваться при проработке вопроса и правильно составить план ответа. Следующий этап – изучение конспекта лекций, разделов учебников, ознакомление с дополнительной литературой, рекомендованной к занятию. Студенты должны готовить краткий конспект ответов на все вопросы, знать определения основных категорий.

Практическое занятие 1

Тема: Определение реакций опор балки

Цель: научиться определять реакции опор балки

Знать: реакции связей, условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

Уметь: использовать законы и методы теоретической механики как основы описания и расчетов механизмов транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования.

Актуальность темы объясняется основными принципами определения реакций возникающих в опорах реальных балок.

***Теоретическая часть*:**

Механика изучает законы механического движения.

Теоретическая механика - раздел механики, в котором изучаются движения механических систем и общие свойства этих движений.

Теоретическая механика рассматривает абстрактные *модели* тел. *Моделями теоретической механики являются:* а) материальная точка;

б) абсолютно твердое тело;

в) механическая система.

Статика - раздел теоретической механики, в котором изучается механическое взаимодействие материальных тел между собой без учета их механического движения. ***Механическое движение*** - изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или частей данного тела.

Материальной точкой называют геометрическую точку, обладающая массой.

Системой материальных точек называется такая их совокупность, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных точек данной системы. Часто систему материальных точек называют ***механической системой***. Частным случаем механической системы является абсолютно твердое тело.

Абсолютно твердым называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным (т.е. это абсолютно прочное и недеформируемое тело).

Свободным называют твердое тело, движение которого не ограничено другими телами. ***Несвободным*** называют тело, движение которого, так или иначе, ограничено другими телами. Последние в механике называются ***связями***.

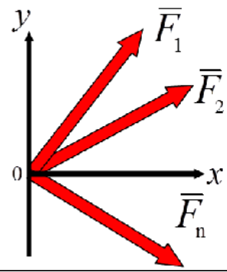
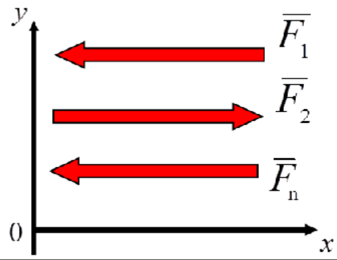
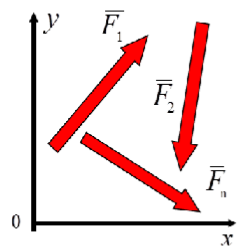
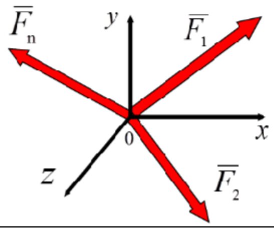
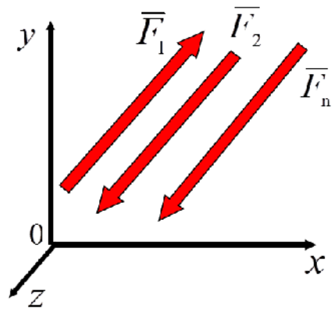
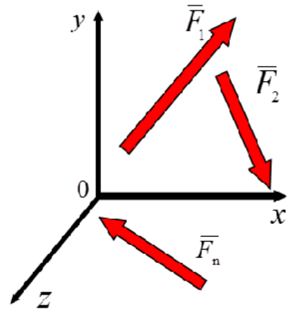
Силой называют меру механического действия одного тела на другое. Поскольку взаимодействие тел определяется не только своей интенсивностью, но и направлением - сила является величиной векторной и на чертежах изображается направленным отрезком (вектором). За единицу силы в системе ***СИ*** принят ***ньютон (Н)***. Обозначают силы

$$\vec{F},\ \vec{P},\ \vec{Q}...).$$

заглавными буквами латинского алфавита (Численные значения (или модули векторных величин) будем обозначать теми же буквами, но без верхних стрелок *(F, P, Q ...)*.

Линией действия силы называется прямая, вдоль которой направлен вектор силы. ***Системой сил*** называется любая конечная совокупность сил, действующих на механическую систему. Принято делить системы сил на ***плоские*** (все силы действуют в одной плоскости) и ***пространственные***. Каждая из них, в свою очередь, может быть или ***произвольной, параллельной*** (линии действия всех сил параллельны) или ***системой сходящихся сил*** (линии действия всех сил пересекаются в одной точке).

Таблица 1 Виды систем сил

Тип	Сходящаяся	Параллельная	Произвольная
Плоская			
Пространственная			

Две системы сил называются ***эквивалентными***, если их действия на механическую систему одинаково (т.е. замена одной системы сил на другую не изменяет характера движения механической системы).

Если некоторая система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется ***равнодействующей*** данной системы сил. Отметим, что далеко не всякая система сил имеет равнодействующую. Сила, равная равнодействующей по величине, противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется ***уравновешивающей*** силой.

Система сил, под действием которой свободное твердое тело находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, называется ***уравновешенной*** или ***эквивалентной нулю.***

Для того чтобы система сил находилась в равновесии необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия равновесия этой системы сил.

Необходимым и достаточным условием равновесия системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента системы сил:

С учетом выражения главного вектора и главного момента системы сил эти равенства можно записать в виде:

$$\sum_{=}^{N} \overline{F}_i = 0; \ \sum_{=}^{N} M_0(\overline{F}_i) = 0,$$

где i - индекс суммирования; N - число сил, входящих в систему.

При решении задач вместо этих векторных условий используются скалярные условия, получающиеся из них при проектировании на оси декартовой системы координат (таблица 2).

Таблица 2 Основная форма аналитических условий равновесия

Системы сил	Сходящиеся	Параллельная	Произвольная
Плоская	$\sum_{=} \overline{F}_{ix} = 0;$ $\sum_{i=1} \overline{F}_{iy} = 0;$	$\sum_{=} (\overline{\ }) = 0;$ $\sum_{=} \overline{F}_{ix} = 0;$	$\sum_{=} \overline{F}_{ix} = 0;$ $\sum \ =$ $\sum_{=} \overline{\ }$. $0;$ $(\ ) = 0$
Пространственная	$\sum_{=} \overline{\ } = 0;$ $\sum_{=} \overline{F}_{ix} = 0;$	$\sum (\overline{\ }) = 0;$	$\sum_{=}^{N} \overline{F}_{iz} = 0;$ $\sum \overline{F}_{iy} = 0;$ $\sum_{=} M_x(\overline{F}_i) = 0;$ $\sum_{=} (\ ) = 0;$ $\sum_{=} (\overline{\ }) = 0.$ $\sum_{i=1} \overline{F}_{ix} = 0;$

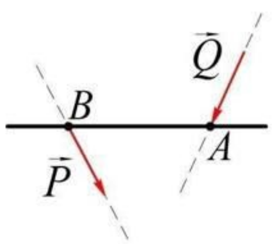
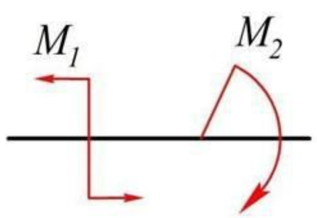
	$\sum_{i=1} \overline{F}_{iz} = 0.$	$\sum_{=} \quad (\overline{\ }) = 0.$ $\sum_{=} \overline{F}_{iz} = 0;$ $=$	

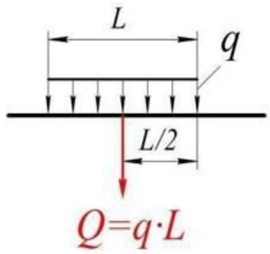
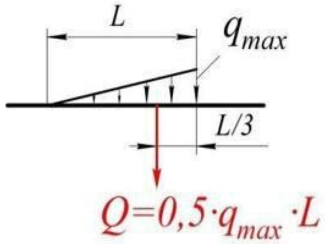
Внутренними силами называют силы взаимодействия между материальными точками одной механической системы.

Внешние силы - это силы взаимодействия точек данной механической системы с материальными точками другой системы.

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется ***сосредоточенной***. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются ***распределенными*** (по объему и по поверхности соответственно). Силовые характеристики механического воздействия на тело приведены в таблице 3.

Таблица 3 Силовые характеристики механического воздействия

Наименование	**Условное изображение**	**Определение действия на тело**
Сосредоточенная сила		1) Числовым значением или модулем силы; 2) Линией действия силы (изображается прямой, вдоль которой направлен вектор силы); 3) Точкой приложения силы.
Момент пары сил		1) Числовым значением или модулем момента пары сил; 2).Плоскостью пары сил, проведенной через линии действия сил пары; 3).Направлением вращения пары сил.

Распределенная нагрузка	 	1) Интенсивностью; 2) Длиной участка, на котором приложена распределенная нагрузка; 3) Направлением ее действия.

Связи.

Связями называют заранее заданные ограничения, налагаемы на положение (в общем случае на движение) тел механической системы. Если на тело не наложено никаких связей, то тело называется *свободным*.

Свободное тело на плоскости обладает 3-мя степенями свободы (два линейных перемещения и угол поворота, а в пространстве 6-ю (три линейных перемещения и три угла поворота).

Степень свободы – число независимых параметров, определяющих положение системы относительно земли.

В механике используют аксиому о связях или принцип освобождаемости (см. ниже): всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями связей.

Каждая связь обладает статической и кинематической характеристикой. Статическая характеристика – вид и количество реакций, которыми можно заменить связь.
Кинематическая характеристика – число степеней свободы, уничтожаемых связью.

Вопросы:

1. Сформулируйте аксиомы статики.
2. Что называется связью, наложенной на твердое тело?
3. Что называется силой реакции связи?
4. Сформулируйте принцип освобождаемости от связей.
5. Что называется силой реакции связи?

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев – Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 – 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. _ М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006._116 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш.
шк., 2003. – 719 с.

3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим
доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 2

Тема: Система сходящихся сил.

Цель: научить определять и складывать сходящиеся силы.

Знать: теории пар сил

Уметь: применять знания, полученные по теоретической механике при изучении дисциплин профессионального цикла;

Актуальность темы объясняется основными принципами определения и сложения реакций возникающих в сходящихся системах.

***Теоретическая часть*:**

Последовательность решения задачи:

1. Выбрать тело (точку), равновесие которого следует рассматривать.
2. Освободить тело (шарнир *B*) от связей и изобразить действующие на него активные силы и реакции отброшенных связей. Причем реакции стержней следует направить от шарнира *B*, так как принято предполагать, что стержни растянуты.
3. Выбрать оси координат и составить уравнения равновесия, используя условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости $\sum X_i = 0\,;\ \sum Y_i = 0.$ Выбирая оси координат, следует учитывать, что полученные уравнения будут решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно одной из неизвестных сил.
4. Определить реакции стержней из решения указанной системы уравнений.
5. Проверить правильность полученных результатов, решив уравнения равновесия относительно заново выбранных координат *x* и *y*.

Пример 1. Определить реакции стержней, удерживающих грузы $F_1 = 70$ кН и $F_2 = 100$ кН (рис. 1). Массой стержней пренебречь.

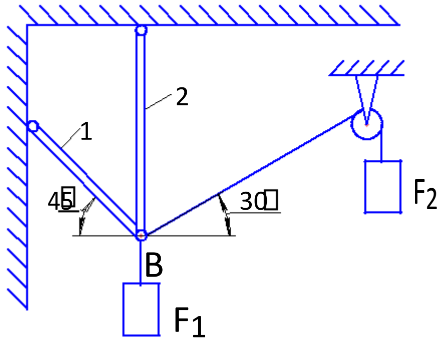
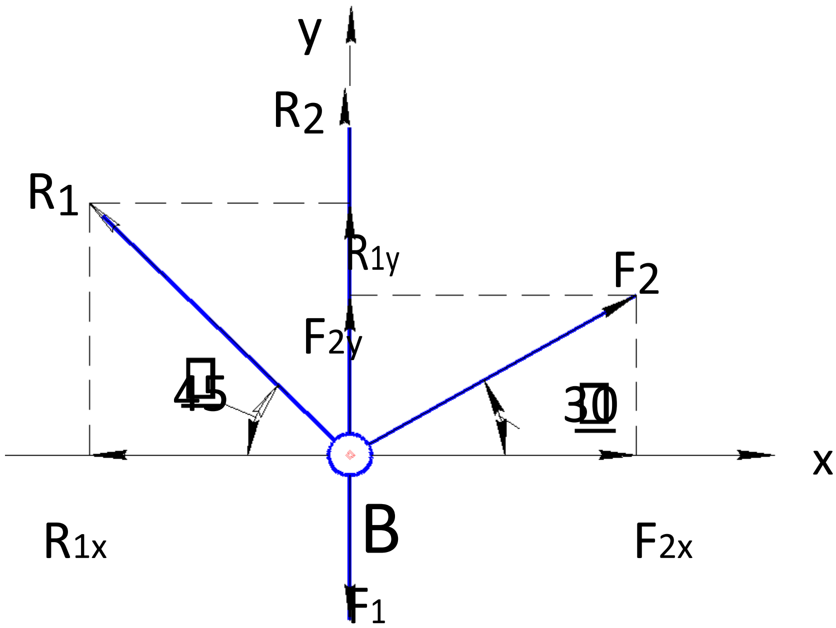


Рисунок 1

Решение.

1. Рассматриваем равновесие шарнира *B* (рис. 1).



$R_1 =$ [illegible] cos = 100· 0, 866 707= 122 кН.

Подставляя найденное значение R_1 в уравнение (2), получаем

$R_2 = F_1 - F_2 \cdot \sin 30° - R_1 \cdot \cos 45° = 70 - 100 \cdot 0{,}5 - 122 \cdot 0{,}707 = -66{,}6$ кН.

Знак минус перед значением R_2

РисунокОсвобождаем шарнир *B* от связей и изображаем действующие на него активные силы и реакции связей (рис. 2).

3. Выбираем систему координат, совместив ось y по направлению с реакцией R2 (рис. 2) и составляем уравнения равновесия для системы сил, действующих на шарнир *B* (приравниваем к нулю суммы проекций всех сил на координатные оси):

(1)

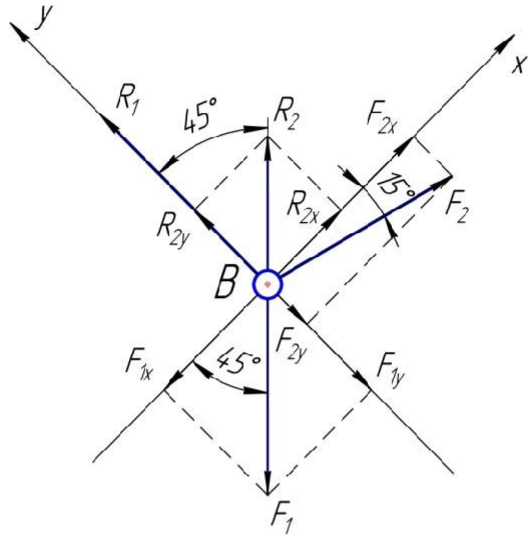
(2)

$$\sum X_i = -R_{1x} + F_{2x} = -R_1 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = R_{1y} + R_2 + F_{2y} - F_1 = R_1 \cdot \sin 45^\circ + R_2 + F_2 \cdot \sin 30^\circ - F_1 = 0.$$

4. Определяем реакции стержней R_1 и R_2, решая уравнения (1), (2). Из уравнения (1)

указывает на то, что истинное направление реакции будет противоположно первоначально предполагаемому направлению, изображенному на рис. 2, т.е. реакция в действительности R_2 направлена к шарниру *B*.



Проверяем правильность полученных результатов, выбрав новое расположение осей координат x и y (рис. 3). Относительно этих осей составляем уравнения равновесия:

$$\sum X_i = R_{2x} + F_{2x} - F_{1x} = R_2 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 15^\circ - F_1 \cdot \cos 45^\circ = 0\ ;$$ (3)

$$\sum Y_i = R_1 - F_{1y} + R_{2y} - F_{2y} = R_1 - F_1 \cdot \cos 45^\circ + R_2 \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot \cos 75^\circ = 0.$$ (4)

Из уравнения (3) находим

, полученные при решении уравнений (1) и (2), совпадают по величине и направлению со значениями, найденными из уравнений (3) и (4), следовательно, задача решена правильно.

Вопросы:

1. Что называется равнодействующей системы сил?
2. Как сложить силы:

а) геометрически,

б) аналитически?

3. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
4. Проецирование реакций на оси координат?

Литература

Основная литература:

1. Строительная механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс строительной механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с. _
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для

$$R_2 = \frac{F_1 \cdot \cos 45° + F_2 \cdot \cos 15°}{\cos 45°} = \frac{70 \cdot 0{,}707 + 100 \cdot 0{,}965}{0{,}707} = -66{,}6 \text{ кН}.$$

Подставляя найденное значение R_2 в уравнение (4), получаем

$$R_1 = F_1 \cdot \cos 45° - R_2 \cdot \cos 45° + F_2 \cdot \cos 75° = = 70 \cdot 0{,}707 + 66{,}6 \cdot 0{,}707 + 100 \cdot 0{,}258 = 122 \text{ кН}$$

Значения реакций R_1 и R_2

вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс строительной механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс строительной механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Строительная механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы:

1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/
2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/
3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/
4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 3
Тема: Плоская система сил.

Цель: научить определять реакции опор в плоской системе сил. **Знать:**
реакции связей,
условий равновесия плоской и пространственной систем сил, теории
пар сил;

Уметь: использовать законы и методы теоретической механики как основы описания и расчетов механизмов транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования. применять знания, полученные по теоретической механике при изучении дисциплин профессионального цикла; приводить систему сил к простейшему виду;
составлять и решать уравнения равновесия;

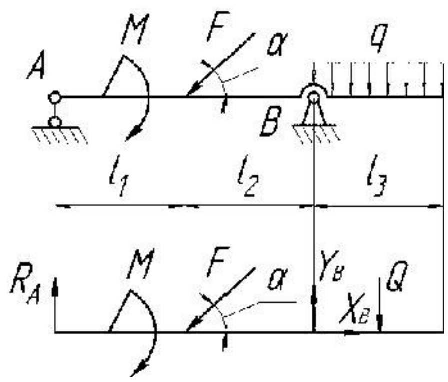
Актуальность темы объясняется основными принципами определения реакций опор возникающих в реальных системах.

***Теоретическая часть*:**

Определение реакций опор твердого тела

Дано:

l1	***l2***	***l3***	***M***	***F***	***q***	***α***
3	4	2	70	35	15	45



Определяем равнодействующую Q для равномерно распределенной нагрузки q:

$Q = q \cdot l_3 = 15 \cdot 2 = 30\text{кН}$;

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0;\ X_B - F \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ Y_B - Q - F \cdot \sin\alpha + R_A = 0;$$

$$\sum M_B(F_i) = 0;\ -R_A(l_1 + l_2) - Q \cdot \frac{l_3}{2} - M + F \cdot \sin\alpha \cdot l_2 = 0.$$

Определяем неизвестные величины:

$$X_B = F \cdot \cos\alpha = 35 \cdot \cos 45 = 24{,}7 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{-Q \cdot \frac{l_3}{2} - M + F \cdot \sin\alpha \cdot l_2}{(l_1 + l_2)} = \frac{-30 \cdot \frac{2}{2} - 70 + 35 \cdot \sin 45 \cdot 4}{(3+4)} = -0{,}14 \text{ кН};$$

$$Y_B = Q + F \cdot \sin\alpha - R_A = 30 + 35 \cdot \sin 45 + 0{,}14 = 54{,}9 \text{ кН}.$$

Вопросы:

1. Назовите основные модели реальных тел в теоретической механике.
2. Что называется моментом силы относительно точки?
3. Какие можно составить уравнения равновесия?
4. Какие системы сил называются эквивалентными?
5. Перечислите элементарные операции над силами.

Литература:

Основная литература:

1. Строительная механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев – Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 – 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с. –
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. – М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006.–116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Строительная механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы: 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа:
http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим
доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 4

Тема: Фермы.

Цель: научиться определять реакции опор и усилия в стержнях ферм.

Знать: реакции связей,

условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

кинематических характеристик точки, частных и общих случаев движения точки и твердого тела;

Уметь: приводить систему сил к простейшему виду; составлять и решать уравнения равновесия;

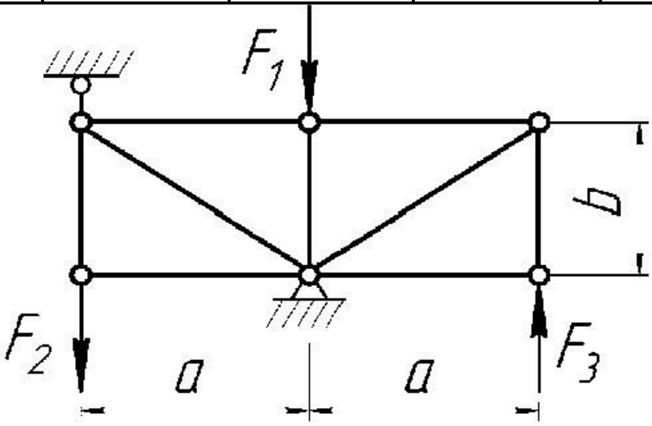
Актуальность темы объясняется научиться определять реакции опор и усилия в стержнях мостов выполненных в виде ферм.

***Теоретическая часть*:**

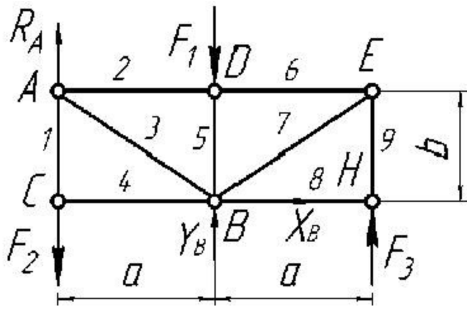
Расчет плоской фермы

Дано:

a	***b***	***F1***	***F2***	***F3***
25	50	15	45	50



Освобождаем ферму от связей и заменяем их реакциями:



Составляем уравнения равновесия сил приложенных к ферме:

$$\sum F_{ix} = 0;\ X_B = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ Y_B - F_2 + R_A + F_3 - F_1 = 0;$$

$$\sum M_B(F_i) = 0;\ F_3 \cdot a - R_A \cdot a + F_2 \cdot a = 0.$$

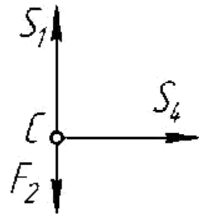
Определяем неизвестные величины:

$X_B = 0$ кН;

$R_A = \dfrac{F_2 \cdot a + F_3 \cdot a}{a} = \dfrac{45 \cdot 25 + 50 \cdot 25}{25} = 95$ кН;

$Y_B = F_2 - R_A - F_3 + F_1 = 45 - 95 - 50 + 15 = -85$ кН.

Определяем натяжение стержней. Рассматриваем узел *C*:

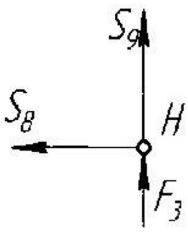


$\sum F_{ix} = 0;\ S_4 = 0;$

$\sum F_{iy} = 0;\ S_1 - F_2 = 0;$

$S_1 = F_2 = 45$ кН.

Рассматриваем узел *H*:

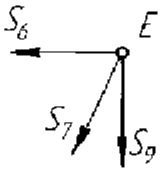


$\sum F_{ix} = 0;\ -S_8 = 0;$

$\sum F_{iy} = 0;\ S_9 + F_3 = 0;$

$S_9 = -F_3 = -50$ кН.

Рассматриваем узел *E*:



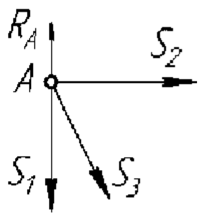
$\sum F_{ix} = 0;\ -S_6 + S_7 \cdot \cos 60 = 0;$

$\sum F_{iy} = 0;\ -S_9 - S_7 \cdot \cos 30 = 0;$

$S_7 = -\frac{S_9}{\cos 30} = -\frac{-50}{\cos 30} = 57{,}7$ кН;

$S_6 = S_7 \cdot \cos 60 = 57{,}7 \cdot \cos 60 = 28{,}9$ кН.

Рассматриваем узел *A:*



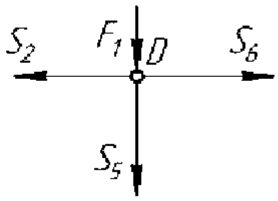
$\sum F_{ix} = 0;\ S_2 + S_3 \cdot cos60 = 0;$

$\sum F_{iy} = 0; - S_1 - S_3 \cdot \cos 30 + R_A = 0;$

$S_3 = \frac{R_A - S_1}{\cos 30} = \frac{95 - 45}{\cos 30} = 57{,}7$ кН;

$S_2 = -S_3 \cdot cos60 = -57{,}7 \cdot cos60 = -28{,}9$ кН.

Рассматриваем узел *D*:



$$\sum F_{iy} = 0; \; -F_1 - S_5 = 0;$$

$$S_5 = -F_1 = -15 \text{ кН}.$$

Вопросы:

1. Определение фермы.
2. Из каких этапов состоит метод сечений?
3. Что называется эпюрой внутреннего усилия?
4. Из каких этапов состоит метод Риттера?
5. Как определить точки Риттера?

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы: 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа:
http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/
4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 5

Тема: Пространственная система сил

Цель: научиться определять реакции опор в пространственно расположенном валу.
Знать: реакции связей,
условий равновесия плоской и пространственной систем сил, теории
пар сил;
Уметь: использовать законы и методы теоретической механики как основы описания и расчетов механизмов транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования. применять знания, полученные по теоретической
механике при изучении дисциплин профессионального цикла; приводить систему сил к простейшему виду;
составлять и решать уравнения равновесия

Актуальность темы заключается в определении реакции опор в реальных валах механизма.

***Теоретическая часть*:**

Пространственная система сил

Момент силы относительно оси

Рассмотрим тело, к которому в точке *A* приложена сила $\overline{F}$. Проведём через точку *A* плоскость *xy*. Разложим силу $\overline{F}$ на составляющие: одну параллельно оси *z* и другую, лежащую в плоскости *xy* - $\overline{F} = \overline{F}_z + \overline{F}_{xy}$. Проведём ось *z*. Точку пересечения оси *z* с плоскостью *xy* обозначим буквой *O*. Сила $\overline{F}_z$, параллельная оси *z*, не обладает вращательным эффектом; она только может переместить тело вдоль оси *z* (рис. 5.1).

Вращательный эффект силы $\overline{F}$ может создавать составляющая $\overline{F}_{xy}$, следовательно, *момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью* (рис. 5.1).

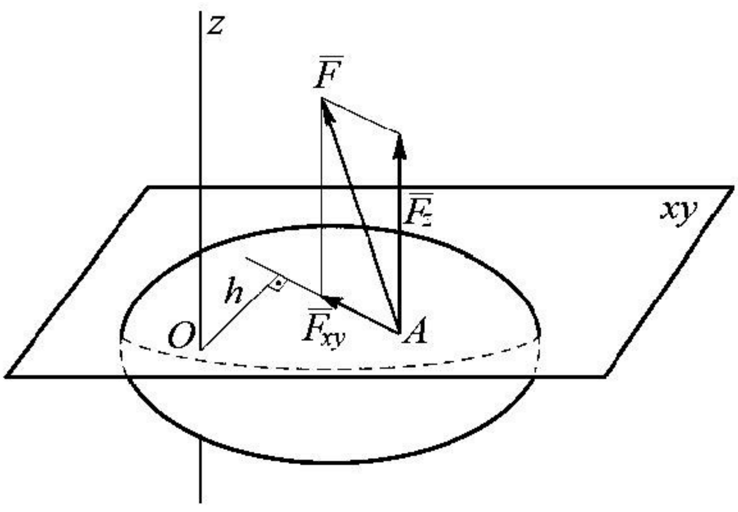


Рис. 5.1

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или когда сила пересекает ось, относительно которой определяется момент силы. Обобщая эти условия, можно заключить, *что момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось находятся в одной плоскости*.

Для вычисления момент силы относительно оси z необходимо:

1) провести плоскость xy, перпендикулярную этой оси;

2) спроецировать на эту плоскость силу $\overline{F}$ и найти величину проекции $\overline{F}_{xy}$; 3) опустить из точки O перпендикуляр на линию действия силы и найти длину перпендикуляра h; $\overline{F}_{xy}$

4) вычислить величину момента силы $F_{xy} \cdot h$; 5) определить знак момента силы.

Таким образом, модуль момента силы $\overline{F}$ относительно оси z (рис. 5.1) равен:

$$m_0(F) = F_{xy} \cdot h$$

. $\overline{F}$

Момент силы относительно оси z будет иметь знак «плюс», когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила , будет виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак «минус», когда по ходу часовой стрелки.

Теорема Вариньона для моментов силы относительно оси. Аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей Для пространственной системы сходящихся сил справедлива теорема Вариньона, приведенная во второй главе (п. 2.3.6): $\overline{m}_0(\overline{R}) = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k)$. Момент равнодействующей силы относительно точки равен векторной сумме моментов всех сил системы относительно той же точки. Если обе части векторного равенства спроецировать на ось z, проходящую через центр O, то получим: $m_Z(\overline{R}) = \sum m_Z(\overline{F}_k)$. Полученная формула есть теорема Вариньона относительно оси.

Разложим пространственную силу $\overline{F}$, приложенную в точке A с координатами x, y, z, на составляющие $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$ и $\overline{F}_z$ (рис.5.2). Тогда по теореме Вариньона: $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}_x) + m_x(\overline{F}_y) + m_x(\overline{F}_z)$. Так как по свойству момента силы $m_x(\overline{F}_x) = 0$, то получим: $m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y$.

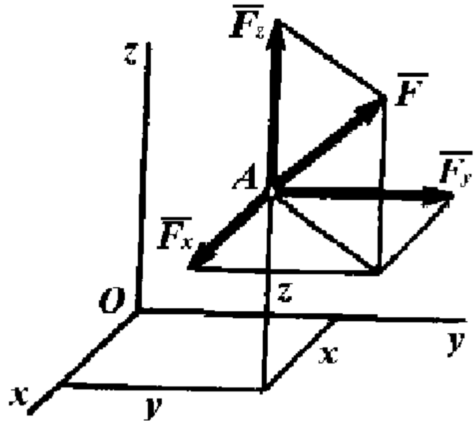


Рис. 5.2

Аналогично находятся моменты относительно осей y и z. Окончательно, получим:

$$m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y;$$
$$m_y(\overline{F}) = zF_x - xF_z;$$
$$m_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x.$$

Полученные формулы есть аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей.

Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру

Произвольная пространственная система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно выбранному центру *O* заменяется одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения *O*, и одной парой с моментом $\vec{M}_O$, равным главному моменту системы сил относительно центра *O*. Доказательство данного утверждения аналогично рассмотренному во второй главе (п. 2.5). Однако, в случае приведения пространственной системы сил, учитываем, что главный вектор $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}_O$ не лежат в одной плоскости. **Приведение пространственной системы сил к простейшему виду**

Частные случаи приведения пространственной системы сил приведены в табл. 5.1.

Таблица 1

Частные случаи приведения пространственной системы сил

№	**Значения главного вектора и главного момента**	**Результат приведения**
1	$\overline{R} = 0, \overline{M}_O \neq 0$	Система сил приводится к паре сил, момент которой равен M_O главному моменту (главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения *O*).
2	$\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O = 0$	Система сил приводится к равнодействующей, равной $\overline{R}$, проходящей через центр *O*.
3	$\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O \neq 0,$ $\overline{R} \perp \overline{M}_O$	Система сил приводится к равнодействующей R' $\vec{R}$, $h = \lvert M_O \rvert / R$ равной главному вектору и параллельной ему и отстоит от него на расстоянии . Положение линии действия равнодействующей должно быть таким, чтобы направление ее момента относительно центра приведения M_O *O* совпадало с направлением относительно центра *O*.
4	, причем	Система сил приводится к динаме (силовому винту) –
	векторы $\vec{R}$ $\vec{M}_O$ и не перпендикулярны	совокупности силы $\vec{R}$ и пары сил, лежащей в плоскости, перпендикулярной к этой силе.
5		Система сил, приложенных к твердому телу, является уравновешивающейся.

Равновесие произвольной пространственной системы сил *Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю*:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \qquad \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum m_y(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

В том случае, если система сил образует пространственную систему параллельных сил, то оси координат целесообразно выбрать так, чтобы одна из осей была параллельна силам. В этом случае число уравнений равновесия будет равно трѐ м. Например, если система сил параллельна оси *z*:

$$\sum F_{kz} = 0; \sum m_x(\overline{F}_k) = 0; \sum m_y(\overline{F}_k) = 0.$$

решение задач по исследованию условий равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил

Практическая часть

Порядок решения задач

1. Выделить материальную систему (тело), равновесие которой следует рассмотреть.
2. Приложить к выделенному телу все активные (заданные) силы.
3. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции.
4. Направить оси координат.
5. Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, из которых определить искомые величины.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что направление ее выбрано верно, если отрицательной, то направление реакции противоположно выбранному (модуль ее при этом остается прежним). После того, как задача решена, необходимо произвести проверку правильности решения. Для этого следует составить сумму моментов относительно трех новых взаимно перпендикулярных осей, при этом необходимо учитывать уже исправленные направления реакций. Равенство нулю суммы моментов подтвердит правильность решения задачи.

Пример. Однородная прямоугольная пластинка весом P = 60Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнираA и цилиндрического шарнира B. Пластинка удерживается в горизонтальном положении тросом CE, наклоненному к горизонтальной плоскости под углом 30°. Определить натяжение троса и опорные реакции.

Решение.

1) Рассмотрим равновесие пластинки $ABCD$, т.е. объектом исследовании задачи является данная пластинка (рис. 5.3).
2) Приложим к пластинке заданную силу тяжести $\overline{P}$ в точке пересечения диагоналей пластинки;
3) Освободим тело от наложенных на него связей (в точке A – шаровой шарнир, в точке B – цилиндрический шарнир и в точке C – нить). Реакцию шарового шарнира

разложим на три составляющие $\{\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A\}$, цилиндрического шарнира – на две составляющие $\{\overline{X}_B, \overline{Z}_B\}$ (в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического шарнира); реакцию нити $\overline{T}$ направим вдоль нити от точки *C* к точке *E*.

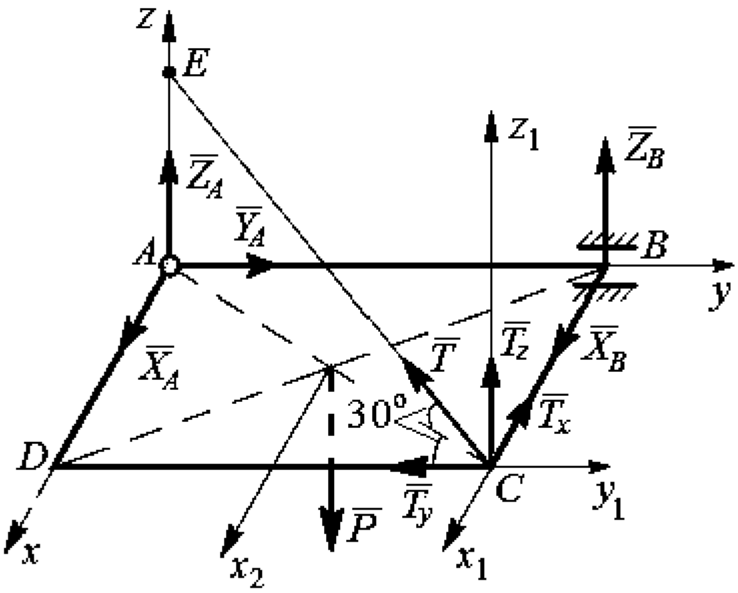


Рис.3

4) Для определения величин шести неизвестных реакций связей $\{T, X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B\}$ составим 6 уравнений равновесия действующей на пластинку произвольной пространственной системы сил. Переходя к составлению уравнений равновесия, заметим, что неизвестны углы, которые образует сила $\overline{T}$ с осями *x* и *y*, поэтому разложим силу $\overline{T}$ на две составляющие, чтобы одна из них, $\overline{T}_{xy}$, лежала в плоскости *xy* пластинки, а вторая, $\overline{T}_z$, была параллельна оси *z*,

$$\overline{T} = \overline{T}_{xy} + \overline{T}_z$$

$$T_{xy} = T\cos 30^\circ; \quad T_z = T\sin 30^\circ$$

Затем составляющую $\overline{T}_{xy}$ разложим по осям

т.е. координат x и y: $T_x = T\cos 30^\circ \sin 30^\circ$, $T_y = T\cos 30^\circ \cos 30^\circ$.

Модули этих составляющих равны: .

Составим уравнения равновесия данной системы:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad X_A + X_B - T_x = 0; \tag{1}$$
$$\sum F_{ky} = 0; \qquad Y_A - T_y = 0; \tag{2}$$
$$\sum F_{kz} = 0; \qquad Z_A + Z_B - P + T_z = 0; \tag{3}$$
$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0; \qquad Z_B \cdot AB - P \cdot AB/2 + T_z \cdot AB = 0; \tag{4}$$
$$\sum m_y(\overline{F}_k) = 0; \qquad P \cdot BC/2 - T_z \cdot BC = 0; \tag{5}$$
$$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0; \qquad -X_B \cdot AB = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (6): $X_B = 0$

Из уравнения (5): $T_Z = P/2 = 60/2 = 30\text{Н}$.

Отсюда: $T = T_z/\sin 30° = 30/0{,}5 = 60\text{Н}; T_x = 25{,}98\text{Н}; T_y = 45\text{Н}$.

Из уравнения (1): $X_A = T_x - X_B = 25{,}98\text{Н}$.

Из уравнения (2): $Y_A = T_y = 45\text{Н}$.

Из уравнения (4): $Z_B = P/2 - T_z = 30 - 30 = 0$.

Из уравнения (3):

$Z_A = P - T_z - Z_B = 60 - 30 - 0 = 30\text{Н}$. Проверка:

Уравнение моментов относительно оси $x1$:

$\sum m_{x1}(\overline{F}_k) = 0;$ $\qquad -Z_A \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB/2 + T_z \cdot AB/2 = 0;$

$-30 + 0 + 30 = 0;$ $\qquad 0 = 0.$

Уравнение моментов относительно оси $y1$:

$\sum m_{y1}(\overline{F}_k) = 0;$ $\qquad (Z_A + Z_B) \cdot BC - P \cdot BC/2 = 0;$

$(30 + 0) - 60/2 = 0;$ $\qquad 0 = 0.$

Уравнение моментов относительно оси $z1$:

$\sum m_{z1}(\overline{F}_k) = 0;$ $\qquad X_A \cdot AB - Y_A \cdot BC = 0;$

$0 = 0.$

$$25{,}98 \cdot AB - 45 \cdot AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0;$$

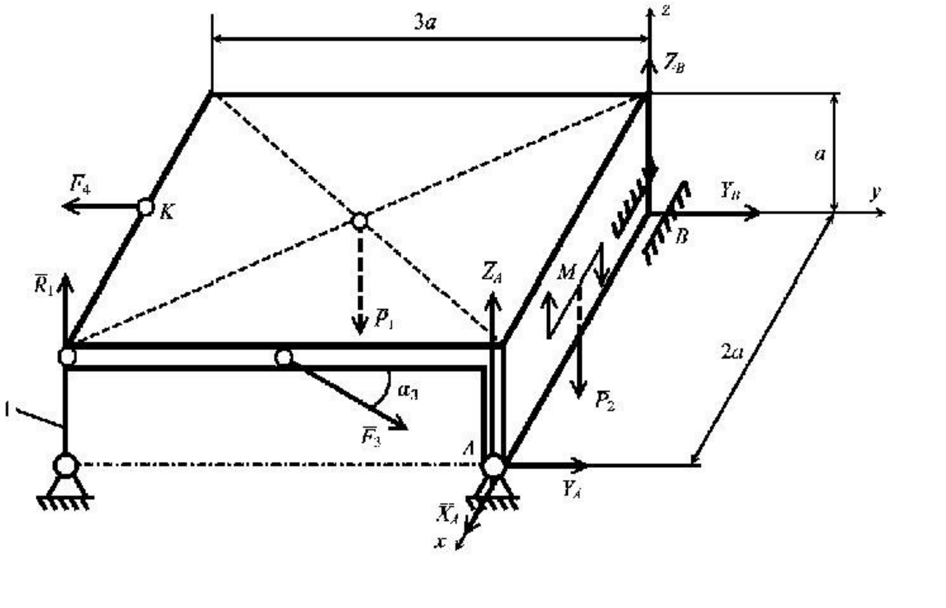
Проверка сошлась. Ответ:

$X_B = 0\text{Н}; Z_B = 0\text{Н}; T = 60\text{Н};$

$X_A = 25{,}98\text{Н}; Y_A = 45\text{Н}; Z_A = 30\text{Н}.$

Пример. Две однородные прямоугольные плиты жестко соединены под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром в точке B, а также невесомым стержнем *1* (рис. 5.4). Размеры плит указаны на рисунке. Определить реакции связей, если известно, что веса плит равны P1=5

$\vec{F}_3, \vec{F}_4$



кН;$P2$=3кН; момент пары сил равен M=4 кН м; a=0,6 м; модули заданных сил $F3$=10 кН; $F4$=12 кН; α3=60°, силы приложены к серединам стороны плиты.

Рис. 4 Решение.

1) Рассмотрим равновесие плиты. Объект исследования – плита (рис. 5.4).

2) На плиту действуют заданные силы $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, пара сил с моментом M, вес обеих плит.

3) Связи: A – сферический шарнир, B – цилиндрический шарнир (подшипник), 1 – стержень. Реакцию сферического шарнира А разложим на три составляющие $\{\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A\}$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\{\bar{Y}_B, \bar{Z}_B\}$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию стержня 1 $\bar{R}_1$ направим вдоль стержня 1 (считаем, что он сжат).

4) Для определения шести неизвестных реакций $\{X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, R_1\}$ составим шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ Y_A + Y_B + F_3 \cdot \cos 60° - F_4 = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0;\ Z_A + Z_B - F_3 \cdot \sin 60° - P_1 - P_2 + R_1 = 0;$$

$$\sum M_{x(\bar{F}k)} = 0;\ -R_1 \cdot 3 \cdot a + F_4 \cdot a + P_1 \cdot \frac{3 \cdot a}{2} + F_3 \cdot \frac{3 \cdot a}{2} \cdot \sin 60° - F_3 \cdot a \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum M_{y(\bar{F}k)} = 0;\ -R_1 \cdot 2 \cdot a + F_3 \cdot 2 \cdot a \cdot \sin 60° + P_1 \cdot a - Z_A \cdot 2 \cdot a - M + P_2 \cdot a = 0;$$

$$\sum M_{z(\bar{F}k)} = 0;\ -F_4 \cdot a + F_3 \cdot 2 \cdot a \cdot \cos 60° + Y_A \cdot 2 \cdot a = 0.$$

5) Подставим числовые значения всех заданных величин и, решив полученную систему уравнений, найдем искомые реакции:

$$R_1 = 9{,}1 \text{ кН};\ X_A = 0 \text{ кН};\ Y_A = 1 \text{ кН};\ Z_A = 0{,}225 \text{ кН};\ Y_B = 6 \text{ кН};\ Z_B = 7{,}335 \text{ кН}.$$

Вопросы:

1. Сформулируйте формы уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил.
2. Какие уравнения являются наиболее удобными для нахождения реакций в брусе?

3. Чем отличается плоская система сил от пространственной?
4. Замена связей в пространственной системе координат.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. _ М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006._116 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.

3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы:

1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/
2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/
3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/
4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 6

Тема: Определение реакций пространственного вала

Цель: научиться определять реакции опор в пространственно расположенном валу.

Знать: реакции связей, условий равновесия плоской и пространственной систем сил, теории пар сил;

Уметь: использовать законы и методы теоретической механики как основы описания и расчетов механизмов транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования. применять знания, полученные по теоретической механике при изучении дисциплин профессионального цикла; приводить систему сил к простейшему виду; составлять и решать уравнения равновесия

Актуальность темы заключается в определении реакции опор в реальных валах механизма.

***Теоретическая часть*:**

Определение реакций опор пространственного вала

План решения

1. Действие каждой из опор заменяем двумя взаимно перпендикулярными реакциями, лежащими в плоскости, перпендикулярной валу.

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала. Момент силы натяжения ремня, нити и т.п. (наклонной или нет) вычисляем как произведение величины силы на соответствующий радиус со знаком, соответствующим направлению вращения вокруг вала. Уравнение содержит одну неизвестную, которую легко найти.

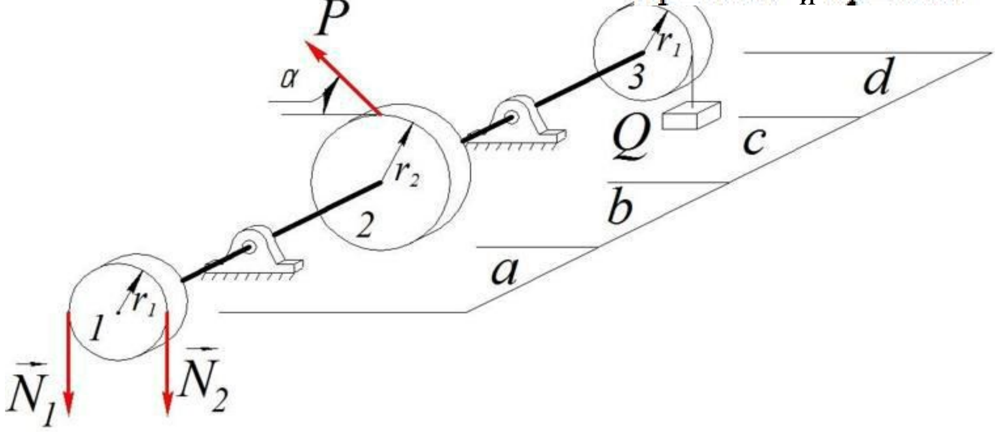
3. Определяем вертикальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия горизонтальных реакций шарниров. Решаем эти уравнения.

4. Проверяем найденные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на вертикаль.

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров.

6. Проверяем горизонтальные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на ось вдоль линии действия горизонтальных реакций.

$N_1 = 40\ H$ и $N_2 = 50\ H$.



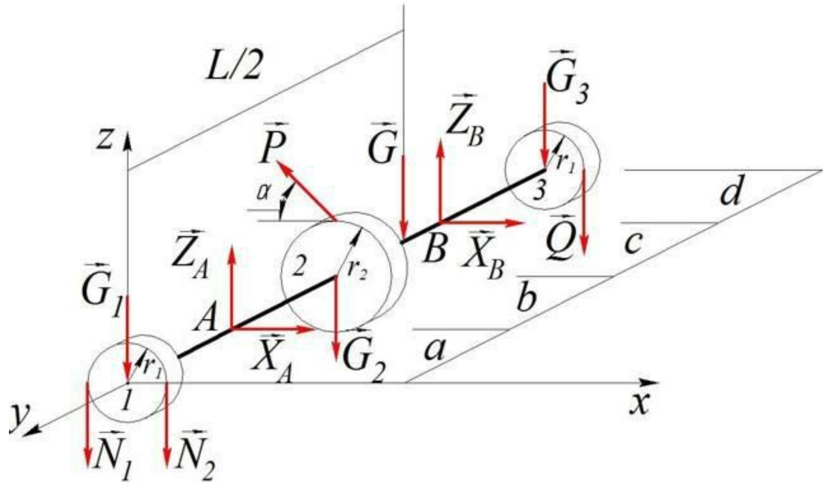
Пример. Горизонтальный вал весом *G=15 Н* может вращаться в цилиндрических шарнирах *А* и *В* (рис. 15). К шкиву *1* приложены силы

Рисунок1

Груз $Q = 25\ H$ висит на нити, навитой на тело *3*. Определить силу давления *P* приложенную к шкиву *2* и реакции шарниров в условии равновесия вала. Учесть веса шкивов: $G_1 = 35\ H$, $G_2 = 10\ H$, $G_3 = 15\ H$. Все нагрузки действуют в вертикальных плоскостях. Известны радиусы шкивов, $r_1=0,1\ м$, $r_2=0,5\ м$, и расстояния между характерными точками вала: $a=0,25\ м$, $b=0,1\ м$, $c=0,3\ м$, $d=0,15\ м$. Общая длина вала $L=a+b+c+d=0,25+0,1+0,3+0,15=0,8\ м$; $\alpha=30°$.

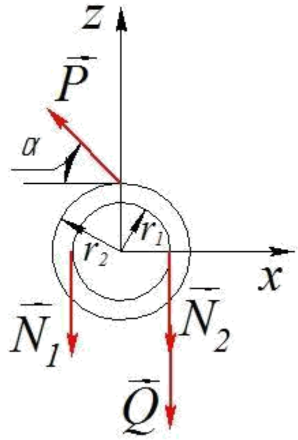
Решение

1. Действие цилиндрических опор *A* и *B* заменим реакциями Z_A, X_A и Z_B, X_B (рис. 65). Вес вала *G* приложим в центре. Вес груза изобразим вектором *Q*.



2. Для определения силы *P* составим уравнение моментов относительно оси *y*, рассматриваем проекцию всех сил на плоскость *zx* (рис. 66). Таким образом вычисление моментов относительно осей сводим к плоской задаче вычисления моментов относительно точек *A* и *B*.

Знаки моментов сил определяем как в задачах плоской статики: момент силы, вращающей тело вокруг моментной точки против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке — отрицательным. Моменты сил, перпендикулярных плоскости *zy* (и поэтому не изображенных на рис. 66), относительно любой ее точки равны нулю.



Уравнение содержит одну неизвестную . Линии действия остальных сил пересекают ось y и их моменты относительно оси вала равны нулю.

$$\sum M_A(F_i) = 0; N_1 \cdot r_1 - N_2 \cdot r_1 + P \cdot \cos\alpha \cdot r_2 - Q \cdot r_1 = 0;$$

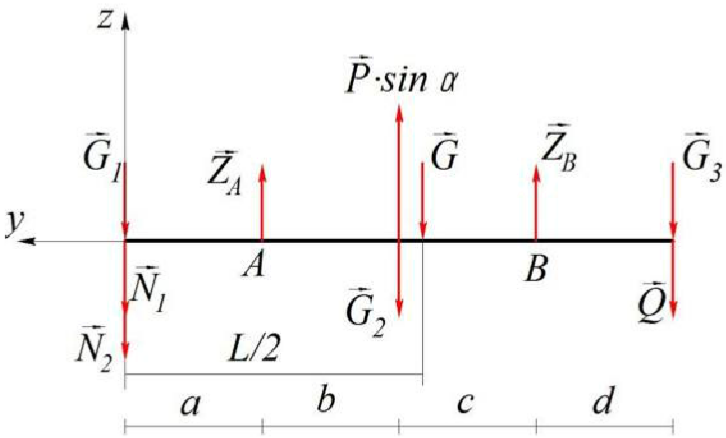
Из полученного уравнения находим P

$$P = \frac{-N_1 \cdot r_1 + N_2 \cdot r_1 + Q \cdot r_1}{\cos\alpha \cdot r_2} = \frac{-40 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}1}{\cos 30 \cdot 0{,}5} = 8{,}08\ H.$$

3. Определяем вертикальные реакции шарнирных опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно горизонтальной оси x, проходящих через шарниры A и B. Рассматриваем для удобства проекцию всех сил на плоскость zy (рис.
66).

4. Проверяем правильность нахождения вертикальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось z (рис. 66):

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два



$$\sum M_{xA}(F_i) = 0; G_1 \cdot a + N_2 \cdot a + N_1 \cdot a + P \cdot \sin\alpha \cdot b - G_2 \cdot b - G \cdot \left(\frac{L}{2} - a\right) + Z_B \cdot (b + c) - Q \cdot (b + c +$$

$$Z_B = \frac{-G_1 \cdot a - N_2 \cdot a - N_1 \cdot a - P \cdot \sin\alpha \cdot b + G_2 \cdot b + G \cdot \left(\frac{L}{2} - a\right) + Q \cdot (b + c + d) + G_3 \cdot (b +}{b + c}$$

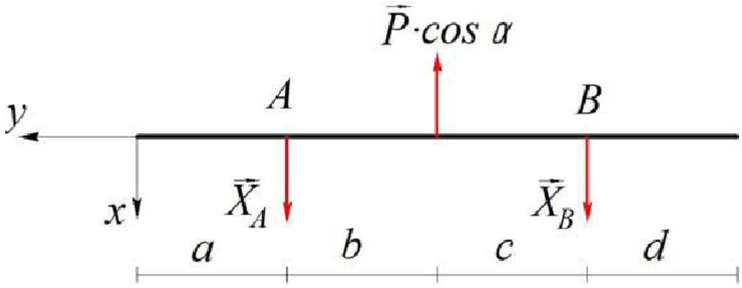
$$\sum M_{xB}(F_i) = 0; G_1 \cdot (a + b + c) + N_2 \cdot (a + b + c) + N_1 \cdot (a + b + c) - P \cdot \cos\alpha \cdot c + G_2 \cdot c + G \cdot$$

$$Z_A = \frac{G_1 \cdot (a + b + c) + N_2 \cdot (a + b + c) + N_1 \cdot (a + b + c) - P \cdot \sin\alpha \cdot c + G_2 \cdot c + G \cdot \Big(\big(}{b + c}$$

уравнения моментов относительно оси z, совпадающих с линиями действия

$$\sum F_{iz} = 0; -G_1 - N_1 - N_2 + Z_A + P \cdot \sin\alpha - G_2 - G + Z_B - G_3 - Q = -35 - 40 - 50 + 201{,}97$$

вертикальных реакций шарниров. Рассматриваем горизонтальную проекцию силовой схемы (рис. 67):



$$\sum M_{zA}(F_i) = 0;\ P\cdot\cos\alpha\cdot b - X_B\cdot(b+c) = 0;$$

$$X_B = \frac{P\cdot\cos\alpha\cdot b}{(b+c)} = \frac{8{,}08\cdot\cos 30\cdot 0{,}1}{(0{,}1+0{,}3)} = 1{,}749\ H.$$

$$\sum M_{zB}(F_i) = 0;-P\cdot\cos\alpha\cdot c + X_A\cdot(b+c) = 0;$$

$$X_A = \frac{P\cdot\cos\alpha\cdot c}{(b+c)} = \frac{8{,}08\cdot\cos 30\cdot 0{,}3}{(0{,}1+0{,}3)} = 5{,}248\ H.$$

6. Проверяем правильность нахождения горизонтальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось *x* вдоль линии действия горизонтальных реакций:

$$\sum F_{iX} = 0;-X_A + P\cdot\cos\alpha - X_B = -5{,}2 + 8.08\cdot\cos 30 - 1{,}7 = 0{,}0005 \approx 0.$$

Результаты расчетов в *H* заносим в таблицу:

X_A, H	X_B, H	Z_A, H	Z_B, H	P, H
5,248	1,749	201,97	−16,01	8,08

Вопросы:

1. Сформулируйте формы уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил.
2. Какие уравнения являются наиболее удобными для нахождения реакций в брусе?
3. Чем отличается плоская система сил от пространственной?
4. Замена связей в пространственной системе координат.
5. Определение реакций опор пространственной системы координат.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев – Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 – 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. – М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. – 116 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.

3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 7

Тема: Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру.

Цель: приобретение умений приводить плоскую произвольную систему сил к заданному центру.

Знать: реакции связей, условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

Уметь: составлять и решать уравнения равновесия;

Актуальность темы объясняется сведением системы с несколькими силами к заданному центру, тем самым упрощая схему и расчет.

***Теоретическая часть*:**

1. Рассмотрим произвольную систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Выберем произвольную точку O за центр приведения и, воспользовавшись теоремой о параллельном переносе силы, перенесем все силы системы в данную точку, не забывая при переносе каждой силы добавлять присоединенную пару сил.

Полученную таким образом систему сходящихся сил заменим одной силой R, равной главному вектору исходной системы сил. Образовавшуюся при переносе систему пар сил заменим одной парой с моментом M_0, равным геометрической сумме моментов всех пар сил (т.е. геометрической суммой моментов исходной системы сил относительно центра O).

Такой момент называется ***главным моментом системы сил относительно центра O*** (рис. 1.30).

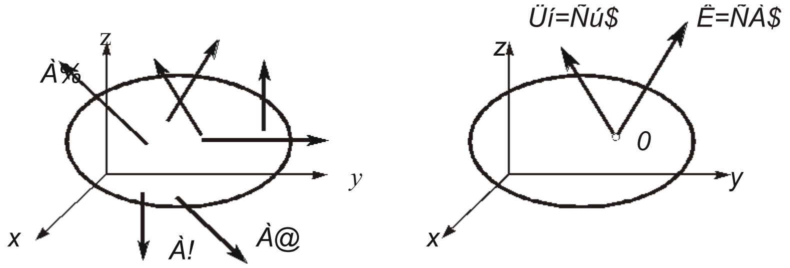


Рис. 1.30. Приведение системы сил к центру

Итак, любую систему сил всегда можно заменить всего двумя силовыми факторами - ***главным вектором и главным моментом относительно произвольно выбранного центра приведения***. Очевидно, что главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения (говорят, что главный вектор инвариантен по отношению к выбору центра приведения). Очевидно также, что главный момент таким свойством не обладает, поэтому необходимо всегда указывать, относительно какого центра определяется главный момент.

Вопросы:

1. Что такое главный вектор?
2. Что такое главный момент системы?
3. Приведение системы к заданному центру.
4. Параллельный перенос сил это...?

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**
1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/
3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс].
Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/
4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 8
Тема: Центр тяжести.

Цель: научиться определять центр тяжести и его координаты.

Знать: основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем; **Уметь:** находить положение центров тяжести тел простейшей конфигурации;

Актуальность темы заключается в определении центра тяжести сложных фигур.

***Теоретическая часть*:**

Способы определения положения центров тяжести.

а)Способ симметрии. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, ось симметрии или центр симметрии, то его центр тяжести находится соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

б) Способ разбиения. Если тело можно разбить на конечное число частей, для которых положения центров тяжести известны, то координаты центра тяжести всего тела можно

непосредственно вычислить по формулам (1.21) - (1.23). z11 ***Пример 1****имеющего .*
Найти координатывид стула, состоящего центра тяжести тела, из стержней

10 одинаковой длины и веса. Длина стержня равна l = 44 см.

6 ***Решение****. Так как тело имеет плоскость симметрии и*

95 7 центр тяжести лежит в этой плоскости, то Остальные координаты определяем по формулам (1.23).x_C=-22 см.

3

x 28 y *yzв)* ***Интегрирование****cc=[=[(-22(l3+ll14++ll27+)44+(l3+l4l)+6+. ll*Если тело не удается разбить на *118)]/(1144+(l·944)=16+l10)]/(11см.· 44)=0.*

несколько частей, положение центров тяжести которых

$= \sum \cdot$ 1 4 известны, ~~то тело разбива~~ют на ~~произвольны~~е малые

объемы v_k иформулы (1.21) принимают вид:

$$x_P = \int x V^k v^k, \quad y_P \int y V^k v^k, \quad z_P \int z V^k v^k, \qquad (1.24)$$

где x_k, y_k, z_k - координаты некоторой точки, расположенной внутри объема Δv_k Переходя в формулах (1.24) к пределу при v_k *0*, получаем:

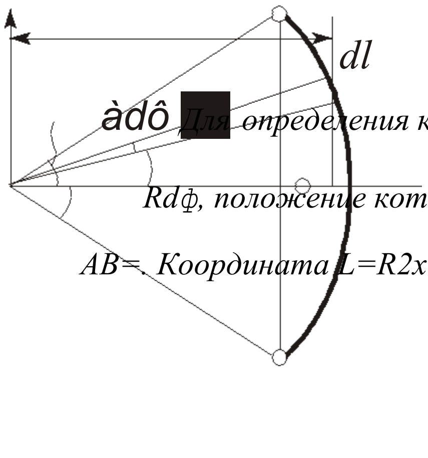
$$x_p \quad \frac{1}{V}\int_V xdv, \quad y_p \quad \frac{1}{V}\int_V ydv, \quad z_p \quad \frac{1}{V}\int_V zdv. \qquad (1.25)$$

Аналогичным образом, переходя в формулах (1.22) и (1.23) к пределу, получаем интегральные выражения для определения координат центров тяжести площадей и линий:

$$x_p \quad \frac{1}{S}\int_S xds, \quad y_p \quad \frac{1}{S}\int_S yds. \qquad (1.26)$$

$$x_p = \frac{1}{L}\int_L xdl, \quad y_p = \frac{1}{L}\int_L ydl, \quad x_p \quad \frac{1}{L}\int_L zdl. \qquad (1.27)$$

y = xB ***Пример****окружности AB радиуса . Найдем положение центра тяжести дуги Rc центральным углом 2а .*



В силу симметрии центр тяжести лежит на оси x.

àdô [redacted] *определения координаты y выделим на дуге* ô P *элемент длиной dl =*

Rdф, положение которого à x*определяется углом равна x = = Rcosф, фдлина*

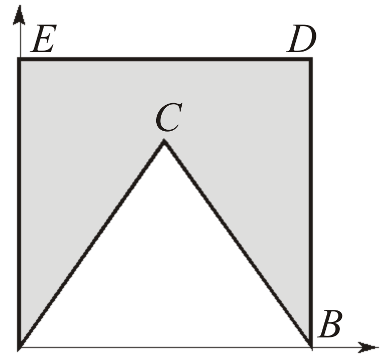
AB=. Координата L=R2xа этого элемента .тогда согласно

R (1.27):

$$x^p. \qquad = \frac{1}{L}\int_A^B xdl = \frac{R}{\frac{\alpha}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha} cos d\varphi \quad \varphi = \frac{Rsin}{\alpha}\alpha$$

A

г) Способ дополнения (способ отрицательных масс). Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы. При этом центры тяжести тел без вырезов и центры тяжести самих вырезов должны быть известны.



$_c \ \Sigma_{k \ k}$

y ***Пример***. *Дана однородная квадратная пластина ABDE со стороной а. Найти внутри квадрата такую точку С, чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник АСВ.*

Решение: В силу симметрии x_C=а/2. Для определения y_C используем метод дополнения.

x

Пусть S - площадь квадрата с вырезом, S_1 , y_1 - площадь квадрата без выреза A и координата координата у центра тяжести треугольника АСВ. у его центра тяжести, S^2 , y^2 - площадь и

Согласно (1.22): $y = S\,y / S=(S_1y_1 - S_2y_2)/ S = (a^2\ a/2-0{,}5ay_Cy_C/3)/(a^2 - 0{,}5ay_C)$, $2y_C^2 - 6y_C+3=0$, откуда y_C= 0,61а (второй корень y_C=2,4а не подходит по смыслу).

Вопросы:

1. Что такое центр тяжести?
2. Как с помощью разбиения определить центр тяжести?
3. Как с помощью интегрирования определить центр тяжести?
4. Как с помощью симетрии определить центр тяжести?

Ли*тература:*

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев – Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 – 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.
Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. _ М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006._116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш.
шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/
4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 9

Тема: Центр параллельных сил.

Цель: дать студенту понятие о центре параллельных сил.

Знать: условий равновесия плоской и пространственной систем сил,

Уметь: приводить систему сил к простейшему виду; составлять
и решать уравнения равновесия;

Актуальность темы объясняется нахождением центра параллельных сил, тем самым упрощается расчетная схема.

***Теоретическая часть*:**

Система двух параллельных и одинаково направленных сил А! и А@ имеют равнодействующую К=А!+А@, линия действия которой проходит через точку *С*, определяемую соотношением (1.5):

$$F\,AC_1 = F\,BC_2$$

Очевидно, что если повернуть силы А! и А@ на один и тот же угол а в одну и ту же сторону, то на этот же угол повернется и их равнодействующая, причем ее линия действия будет проходить через ту же точку *C* , так как в определяющее положение точки *С* выражение (1.5) входят только модули сил F_1 и F_2.

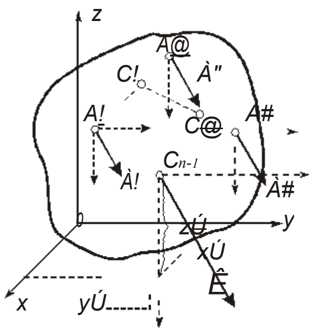


Рис. 1.37 Определение положения центра параллельных сил

Рассмотрим теперь систему параллельных и одинаково направленных сил *(А!, А@,А#,...,А%),* приложенных в точках $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$,. . ., $A_n(x_n,y_n,z_n)$ твердого тела (рис.1.34). Эта система сил имеет равнодействующую К=СА$, а ее линия действия проходит через точку C_{n-1}, положение которой найдем, определяя последовательно положения точек $C_1, C_2,\dots,C_{n-1}$ с помощью выражений *k*

$$\left(\sum_{m=1} F_m\right) \cdot A\,C_{k\,k} = F_{k+1} \cdot A_{k+1}\,{}_kC$$

, записанных для *k=1,2,3, . , n -1* (1.18)

Так как в равенства (1.18) входят только модули рассматриваемых сил, положение точки C_{n-1} относительно точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ не изменится при любых одинаковых изменениях ориентации сил системы.

Определение: точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил на один и тот же угол в одну и ту же сторону, называется центром параллельных сил.

Найдем координаты этого центра в произвольной декартовой системе координат. Воспользуемся тем, что его положение не зависит от направления сил и направим все силы системы параллельно оси z (рис.1.34). Тогда по теореме Вариньона

$M(R)_y = \sum M(F)_{y\,k}$. Учитывая, что $M_y(\vec{R}) = Rx_{C\,n\,1}$,

$\sum M(\vec{F})_y = \quad _k + F x_1 1 + F x_2 2 \quad \ldots \quad F x_n\, n = \sum$, получаем $x_{C\,n\,1}\, F\, x R k\, k$.

Применяя теорему Вариньона относительно оси x и относительно оси z (в последнем случае направив все силы параллельно оси y) получаем аналогичные формулы для y_C и z_C x_C

$$x_{C\,n1} = \frac{\sum F x_{kk}}{R}, \quad y_{C\,n1} = \frac{\sum F y_{kk}}{R}, \quad z_{C\,n1} = \frac{\sum F z_{kk}}{R} \qquad (1.19)$$

Полученные формулы используем для определения положения центров тяжести тел, находящихся в однородном гравитационном поле земного тяготения. Действительно, силы тяжести отдельных частиц тела, размеры которого малы по сравнению с радиусом Земли, образуют систему параллельных сил, аналогичную рассмотренной выше. Назовем равнодействующую сил тяжести отдельных частиц тела весом этого тела и будем обозначать его буквой З. Центром тяжести будем называть центр параллельных сил тяжести $\vec{p}_k$ отдельных частиц тела и обозначать его буквой P. В новых обозначениях формулы (1.19) перепишутся в виде:

$$x_P = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \quad y_P = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \quad z_P = \frac{\sum p_k z_k}{P} \qquad (1.20)$$

Для однородных тел вес p_k отдельных частиц тела пропорционален объемам этих частиц : $p_k=\gamma v_k$, а вес тела пропорционален объему тела $P=\gamma V$ (γ вес единицы объема). Подставляя данные выражения в (1.20), после сокращения на γ получаем формулы для определения центра тяжести объема:

$$x_P = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \quad y_P = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \quad z_P = \frac{\sum v_k z_k}{V} \qquad (1.21)$$

Для однородных плоских пластин и изделий из однородных линейных элементов (например из однородной проволоки постоянного сечения), вводя вес единицы площади и вес единицы длины, аналогичных образом получаем формулы для определения центра тяжести площади и центра тяжести линии:

$$x_P = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \quad y_P = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \quad z_P = \frac{\sum s_k z_k}{S}, \qquad (1.22)$$

где S - площадь всей пластины, s_k - площади ее частей.

$$x_P = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \quad y_P = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \quad z_P = \frac{\sum l_k z_k}{L}, \qquad (1.23)$$

где L - длина всей линии, l_k - длина ее частей.

Вопросы:

1. Определение центра параллельных сил.
2. Определение координат центра параллельных сил.
3. Определение центра параллельных сил с помощью теоремы Вариньона..

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: _ БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы: 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 10

Тема: Способы определения коэффициента трения.

Цель: дать студенту понятия о коэффициенте трения и его определении.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки;

общие теоремы динамики

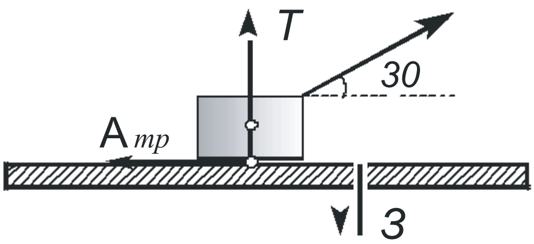
Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением коэффициента трения различных материалов и сплавов.

***Теоретическая часть*:**

Сила трения скольжения. Как показывает опыт, при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения этих тел возникает сила трения, которая может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения, определяемого законом Кулона $F_{тр} = fN$, где f - безразмерный коэффициент трения скольжения, N - нормальная реакция. Коэффициент трения скольжения определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния их поверхностей (характер обработки, смазки, температуры и т.п.). Опыты показывают, что сила трения скольжения в широких пределах не зависит от размеров трущихся поверхностей тел. Так для того, чтобы сдвинуть обычный кирпич, нужно приложить одинаковую силу независимо от того лежит ли он плашмя или на ребре. При решении задач с учетом сил трения скольжения необходимо четко различать обычное и предельное равновесие тела. В первом случае величина силы трения неизвестна и должна определяться из решения соответствующих уравнений равновесия. Если же в задаче речь идет о предельном равновесии, то сила трения определяется законом Кулона:

$$F_{тр} = fN \qquad (1.28)$$



Простейший пример: пусть на тело, находящееся в равновесии на горизонтальной шероховатой поверхности, действует сила F=10 Н. Определить, чему равна сила трения скольжения.

Решение: в данном случае тело заведомо находится в равновесии и сила трения определится из уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = F\cos\alpha - F_{тр} = 0,$$ *откуда* $F_{тр} = F\cos 30^o = 8{,}66Н.$

Изменим теперь условие задачи: определим минимальную силу F, способную сдвинуть тело с места, если его вес P равен 10 Н, а коэффициент трения скольжения f =0,1. Решение: так как речь идет о предельном состоянии равновесия,

$$\sum F^{kx} \quad F\cos 30^{\circ} - Pf \quad 0,$$

$F_{тр} = fN,\ N = P,\ F_{тр} = fP = 1Н,$

$F = fP/\cos 30^o = 1{,}15Н.$

Как известно полную реакция шероховатой поверхности принято представлять суммой двух составляющих: нормальной реакции Т и силы трения $A_{тр}$ (рис. 1. 38)

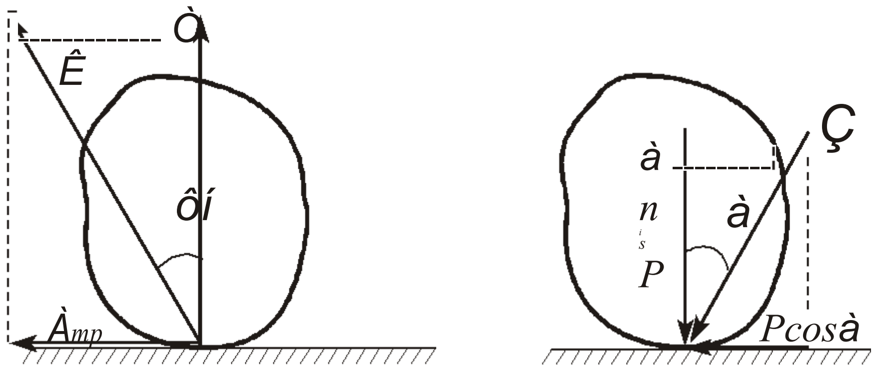
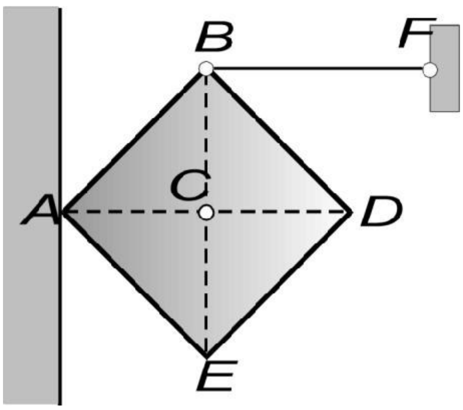


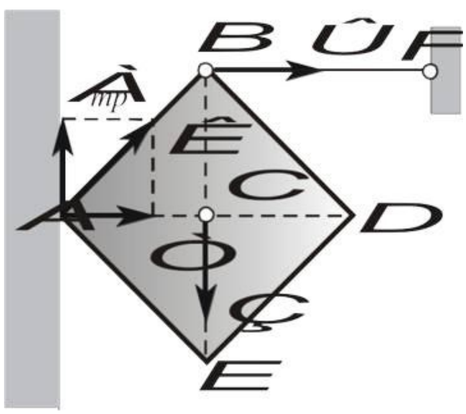
Рис. 1.38. Реакция шероховатой поверхности

Следовательно, полная реакция К будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до ее предельного значения, сила К изменяется от Т до своего максимального значения, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения фн , называемого углом трения. Из рисунка видно, что $tg\ фн=F_{mp} / N$, тогда с учетом того, что $F_{mp}=fN$, получаем $tg\ фн= f$.

Если к телу приложить силу З под углом а к нормали (рис.1.34), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие *Pcosa* будет больше $F_{mp}=fN$. Это означает , что никакой силой, образующей с нормалью угол а < фн, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя.



Пример 1 . Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения f в месте контакта однородной квадратной пластины весом P с вертикальной стенкой, если пластина в заданном положении находится в равновесии. Весом стержня BF пренебречь.



Решение. *Так как линия действия полной реакции К вертикальной стенки при равновесии пластины должна пройти через точку В (на основании теоремы о трех* *силах), то $F_{тр}$=N или, поскольку речь в условие задачи идет о предельном равновесии, $F_{тр}$= fN, fN = N, f =1.*

Тот же результат можно получить и из уравнения равновесия

$$\sum M(\vec{F})_B = \cdot_k \quad -N\,BC \cdot F_{тр} = AC = 0,\ F_{тр} \quad N,$$

$fN=N,\ f=1$.

пластины:

Вопросы:

1. Что называют трением?
2. Что называют трением скольжения?
3. Что такое трение качения?
4. Определение коэффициента трения.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа:

http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 11

Тема: Сопротивление при качении.

Цель: дать студенту знания в области сопротивления при качении.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением сопротивления при качении возникающих при взаимодействии деформации тел.

***Теоретическая часть*:**

***Трение качение*. *Трением качения называют сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого*.**

Причины возникновения этого сопротивления невозможно объяснить без учета деформаций тел, возникающих при их взаимодействии. Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиусом *R* весом З, лежащей на горизонтальной шероховатой плоскости, которая под тяжестью катка слегка деформировалась, так что касание катка с поверхностью теперь происходит не в одной точке, а по некоторой площадке *AB* (рис.1.39). Под действием силы Й, приложенной к центру катка, давление у края *A* убывает и возрастает у края *B*. В результате нормальная реакция Т

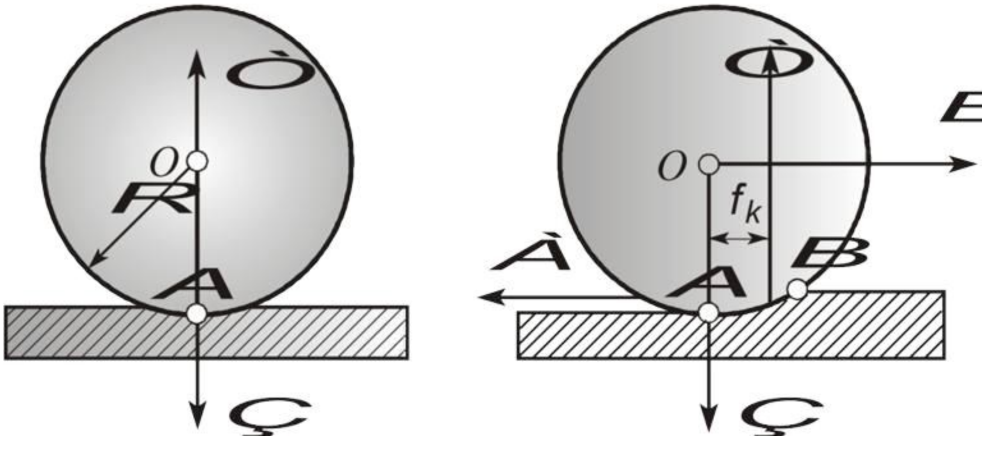


Рис.1.39 Момент сопротивления при качении

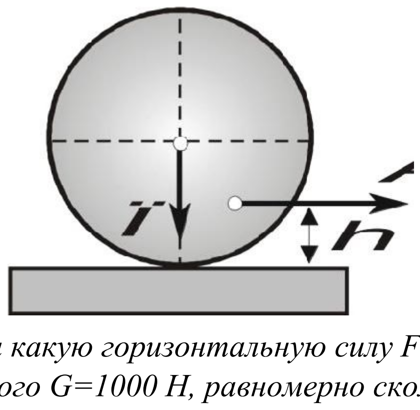
являющаяся равнодействующей распределенных на площадке *AB* сил, смещается в сторону действия силы Й. С увеличением Q до некоторого предельного значения $Q_{пр}$ это смещение растет до некоторой предельной величины f_k. В этот момент на каток будут действовать две уравновешивающие друг друга пары сил ($Й_{пр}$, $А_{тр}$) и (Т, З) с моментами $М_{вр}$ = $Q_{пр}R$ и МЪ= Nf$ соответственно. Пока $Q<Q_{пр}$ каток будет находиться в покое, при $Q>Q_{пр}$ начнется качение. Входящая в формулу $\boldsymbol{M_c = Nf_k}$

(1.29)

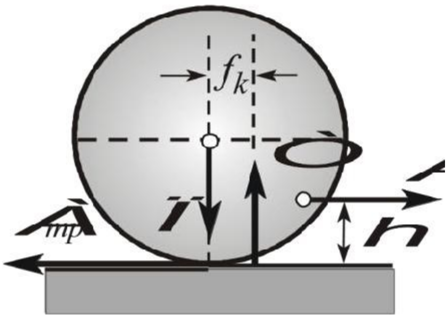
линейная величина f_k называется коэффициентом трения качения. Для большинства материалов, входящее в выражение для предельного значения Q:

$\boldsymbol{Q_{пр}=(f_k/R)N}$ (1.30)

отношение f_k/Rзначительно меньше коэффициента трения скольжения *f* из формулы (1.28). Этим объясняется то, что в технике, везде где это возможно, стремятся заменить скольжение качением.



Пример. На какой высоте h и какую горизонтальную силу F нужно приложить, чтобы каток, сила тяжести которого G=1000 Н, равномерно скользи по горизонтальной *плоскости без качения. Коэффициент трения качения f_k = 0,01м, коэффициент трения скольжения f = 0,1 .*



Решение. Для того чтобы каток двигался равномерно вправо, сила F должна быть равна максимальному значению силы трения скольжения:

$F = F_{тр} = fN = 100$ Н. Каток не будет вращаться, если момент, создаваемый парой сил (A, $A_{тр}$) не будет превышать максимального значения момента сопротивления $M_c = f_k N = kG = 10$ Нм, т.е. максимальное значение $h = M_c/F = 0{,}1$м .

Вопросы:

1. Что называют качением?
2. Причины возникновения качения?
3. Почему в технике, везде где это возможно, стремятся заменить скольжение качением?

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с. _
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. _ М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006._116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа:

http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим

доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 12

Тема: Основные понятия и определения кинематики.

Цель: дать студенту знания в области основ кинематики.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки;

общие теоремы динамики

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы заключается в применении знаний в области кинематики на практике.

***Теоретическая часть*:**

Основные понятия и положения

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальных тел и определяются кинематические характеристики всех точек этих тел без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих это движение

Механическое движение – перемещение материальных тел в пространстве с течением времени относительно друг друга.

Тело отсчета – это тело, относительно которого рассматривается движение.

Система отсчета – система осей координат, связанная с телом отсчета.

К *кинематическим характеристикам* относят:

–*траекторию* – определяет положение всех точек тела в пространстве с течением времени относительно рассматриваемой системы отсчета;

–*скорость* – определяет изменение положения всех точек тела в пространстве с течением времени по величине и направлению;

–*ускорение* – определяет изменение скорости всех точек тела по величине и направлению в пространстве с течением времени. **Способы задания движения точки:** *1). Векторный способ.*

Движение точки относительно рассматриваемой системы отсчета при векторном способе изучения движения задается *радиус-вектором* этой точки. Движение считается заданным, если известен радиус-вектор движущейся точки как функция времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рисунок 1).

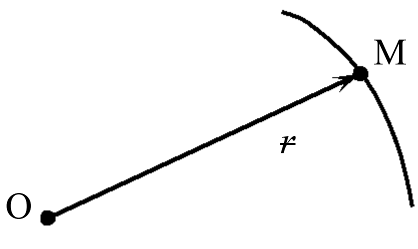


Рисунок 1. Векторный способ задания движения точки.

2). Координатный способ:

Движение точки считается заданным, если известны координаты точки как непрерывные дважды дифференцируемые функции времени, т.е. заданы уравнения движения точки в декартовых координатах x = x (t), y = y (t), z = z (t) (рисунок 2)

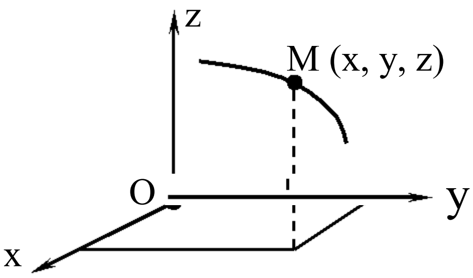


Рисунок 2. Координатный способ задания движения точки:x = x (t), y = y (t), z = z (t).

3). Естественный способ:

Задается:

а). Траектория движущейся точки М;

б). Начало отсчета на траектории;

в). Направление отсчета;

г). Закон движения точки по траектории, который дается зависимостью от времени дуговой координаты. Дуговая координата определяет длину дуги траектории, отсчитываемой от точки О до точки М (рисунок 3).

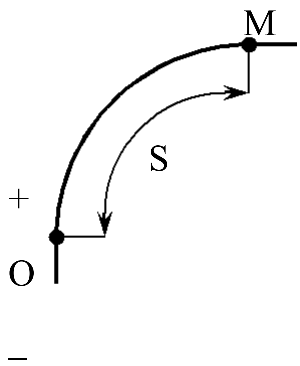


Рисунок 3. Естественный способ задания движения точки s = s (t).

Определение скорости точки при различных способах задания ее движения:

При *векторном способе задания движения точки* вектор скорости точки равен первой производной по времени от ее радиус-вектора

$$v = \frac{dr}{dt}$$

При *координатном способе задания движения точки*:

Модуль скорости точки определяется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами углов, образуемых этим вектором с осями координат

$$\cos(\bar{v},\bar{i}) = \frac{v_x}{v};\quad \cos(\bar{v},\bar{j}) = \frac{v_y}{v};\quad \cos(\bar{v},\bar{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

Проекции скорости точки равны первым производным по времени от ее соответствующих координат

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

При *естественном способе задания движения точки* вектор скорости определяется выражением

$$\bar{v} = v_\tau \cdot \bar{\tau},$$

где v_τ – алгебраическая величина скорости, равная первой производной по времени от дуговой координаты

$$v_\tau = \frac{ds}{dt};$$

τ – единичный вектор касательной к траектории в данной точке, направленный в сторону возрастания дуговой координаты.

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории ее движения.

Определение ускорения при разных способах задания движения точки:

При *векторном способе задания движения точки* вектор ускорения точки равен первой производной по времени от вектора ее скорости или второй производной по времени от ее радиус-вектора

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

При *координатном способе задания движения точки:*

Модуль ускорения вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами

$$\cos(\bar{a},\bar{i}) = \frac{a_x}{a};\quad \cos(\bar{a},\bar{j}) = \frac{a_y}{a};\quad \cos(\bar{a},\bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Проекции ускорения точки равны производным по времени от соответствующих проекций вектора ее скорости

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt},\quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

При *естественном способе задания движения точки* полное ускорение точки разлагается на две составляющие *касательное ($\bar{a}_\tau$) и нормальное ($\bar{a}_n$)*, и его величина в *векторной форме представляет собой сумму этих составляющих*

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Модуль полного ускорения равен корню квадратному из суммы квадратов этих составляющих

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости *по величине.* Величина касательного ускорения точки равна первой производной по времени от алгебраической величины скорости

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}\ .$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости *по направлению.* Величина нормального ускорения точки равна отношению квадрата скорости точки к радиусу кривизны ее траектории

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории точки.

Векторкасательного ускорения направлен по *касательной* $\bar{\tau}$ к траектории точки в ту же сторону, что и скорость, когда движение ускоренное (в данном случае знак первой производной от алгебраической величины скорости – положительный) и в обратную сторону, когда – замедленное (знак первой производной от алгебраической величины скорости – отрицательный).

Вектор нормального ускорения перпендикулярен вектору касательного ускорения и направлен *в сторону вогнутости траектории точки* по *направлению вектора главной нормали* $\bar{n}$ (рисунок 4).

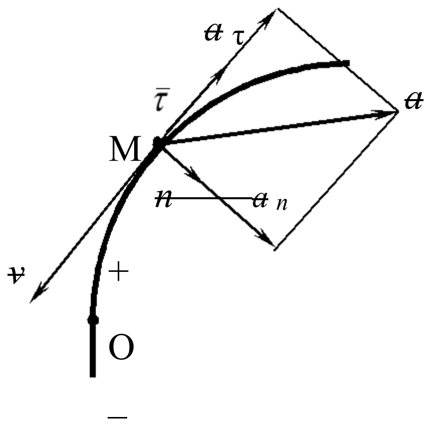


Рисунок 4. Направление векторов скорости и ускорений при замедленном движении точки.

Классификация движения точки:

1. Если в течение некоторого времени $a_\tau = 0$ и $a_n = 0$, то точка движется равномерно и прямолинейно;
2. Если в течение некоторого времени $a_\tau \neq 0$ и $a_n = 0$, то точка движется неравномерно и прямолинейно;
3. Если в течение некоторого времени $a_\tau = 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется равномерно и криволинейно;
4. Если в течение некоторого времени $a_\tau \neq 0$ и $a_n \neq 0$, то точка движется неравномерно и криволинейно.

Виды движения твердого тела:

1. *Простейшие движения твердого тела:*

а. *Поступательное движение:* любой отрезок тела перемещается параллельно самому себе;

б. *Вращательное движение вокруг неподвижной оси:* две точки, неразрывно связанные с телом, остаются неподвижны;

2.*Плоскопараллельное (плоское) движение:* каждая точка тела движется в одной и той же плоскости;

3.*Сферическое движение:* одна точка, неразрывно связанная с телом, остается неподвижна;

4.*Свободное движение:* любое перемещение тела ничем не ограничено.

Плоскопараллельное (плоское), сферическое и свободное движения являются совокупностью простейших движений.

При ***поступательном движении*** *все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.*

При поступательном движении кинематическими характеристиками тела являются линейная скорость и линейное ускорение этого тела

При ***вращательном движении*** для определения положения вращающегося тела используют понятие *угол поворота тела* φ (рисунок 5). Угол поворота связан со временем зависимостью, называемой уравнением вращательного движения

$$\varphi = f(t) .$$

Кинематическими характеристиками вращательного движения являются *угловая скорость* ω и *угловоеускорение* ε.

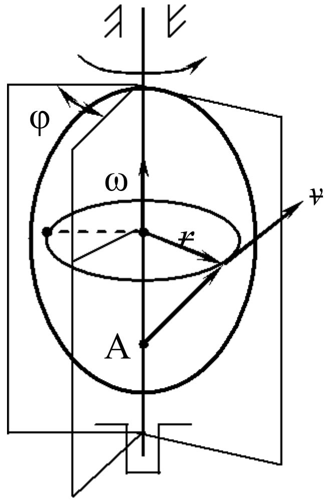


Рисунок 5.

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение тела равно первой производной от его угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$.

Вектор углового ускорения направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, когда вращение ускоренное, и в обратную сторону, когда вращение замедленное.

Величина скорости точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения

$$v = \omega \cdot OM$$

Вектор скорости точки вращающегося тела направлен *перпендикулярно прямой,* соединяющей эту точку с осью вращения, и *перпендикулярно самой оси вращения* и определяется по формуле Эйлера

$$\bar{v} = \bar{\omega} \cdot \bar{r},$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения, к рассматриваемой точке твердого тела.

Полное ускорение точки вращающегося тела разлагается на две составляющие: *вращательное (a_ε)* и *осестремительное (a_ω)*, и его величина равна корню квадратному из суммы квадратов этих составляющих $a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}$.

Вращательное ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, когда движение ускоренное и в обратную сторону, когда движение замедленное.

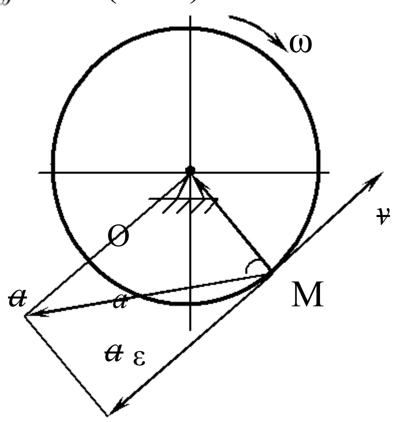
Величина вращательного ускоренияточки равна произведению углового ускорения тела на расстояние от точки до оси вращения $a_\varepsilon = \varepsilon \cdot OM$.

В векторной форме: $\bar{a}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$.

Осестремительное ускорение направлено к оси вращения. *Величина осестремительного ускорения точки* равна произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения

$$a_\omega = \omega^2 \cdot OM.$$

$$_\omega = \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{r}) .$$



В векторной форме: $\bar{a}$

Рисунок 6. Направление векторов скорости и ускорений при замедленном движении вращающегося тела.

Вектор полного ускорения любой точки вращающегося тела направлен под углом φ к прямой, соединяющей эту точку с осью вращения. Тангенс этого угла равен отношению углового ускорения тела к квадрату его угловой скорости $tg\,\varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

При ***плоскопараллельном (плоском) движении:***

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть осуществлено как совокупность простейшихдвижений: *поступательного* вместе с выбранной точкой фигуры, называемой полюсом и *вращения* вокруг оси, проходящей через полюс.

Кинематическими характеристиками являются мгновенная угловая скорость ω, мгновенное угловое ускорение ε плоской фигуры, линейная скорость и линейное ускорение, точки выбранной за полюс.

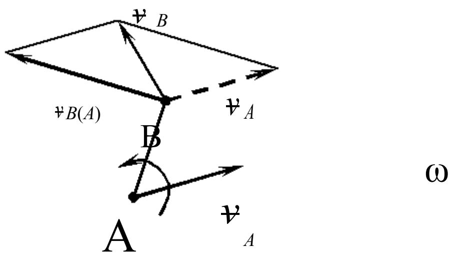


Рисунок 7. Определение скоростей точек плоской фигуры.

Формула распределения скоростей точек при плоском движении(рисунок7):

$$\vec v_B = \vec v_A + \vec v_{B(A)},$$

где $\vec v_A$ – скорость полюса А; $\vec v_B$ – скорость любой точки В;

$\vec v_{B(A)}$ – скорость, которую получает точка В при вращении плоской фигуры вокруг полюса А;

$$v_{A(B)} = \omega \cdot AB;$$

Вектор скорость$\vec v_{B(A)}$ перпендикулярен прямой АВ.

Скорость любой точки В плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости, которую точка В получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

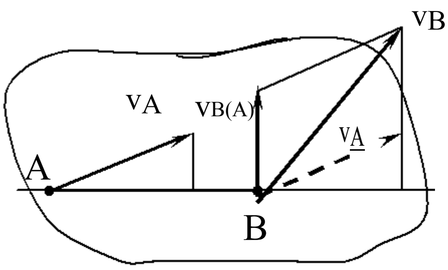


Рисунок 8.

Для определения скоростей плоской фигуры используют наиболее простой и удобный метод, основанный на ***теореме о проекциях скоростей двух точек тела:*** *проекции скоростей двух точек на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу* (рисунок 8) $v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$.

Другой простой и наглядный способ определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о *мгновенном центре скоростей*.

Мгновенный центр скоростей – точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Скорость точек плоской фигуры равна произведению мгновенной угловой скорости фигуры (ω, рад/с) на расстояние от точки до МЦС (рисунок 9, а)

$$v_A = \omega \cdot PA ,$$

где PA – расстояние от МЦС (т.Р) до точки А.

Вектор скорости плоской фигуры *направлен перпендикулярно прямой,* соединяющей эту точку с МЦС, и лежит в плоскости фигуры.

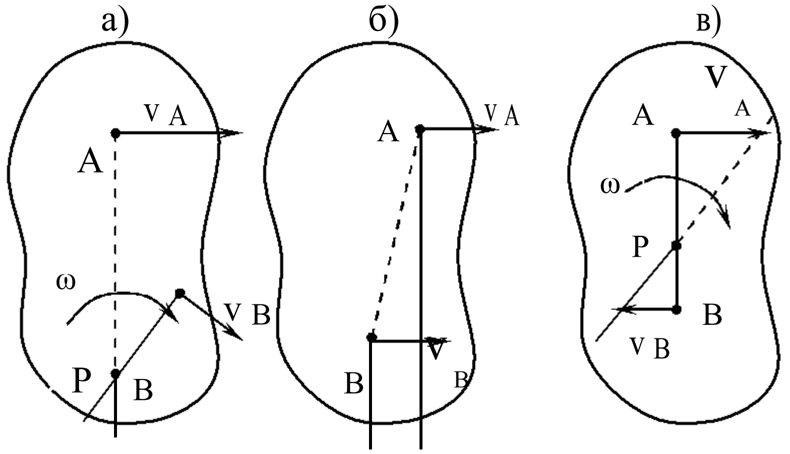


Рисунок 9. Нахождение мгновенного центра скоростей.

Отношение величин скоростей точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦС является величиной постоянной для всех точек плоской фигуры и равно мгновенной угловой скорости фигуры (рисунок 9, а и в)

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \ldots = \omega$$

Для определения МЦС необходимо к известным векторам скоростей двух точек, если они не параллельны, провести перпендикуляры – точка пересечения перпендикуляров будет МЦС (т.Р).

Если векторы скоростей двух точек плоской фигуры равны друг другу и располагаются параллельно, то МЦС находится в бесконечно удаленной точке (рисунок 9, б).

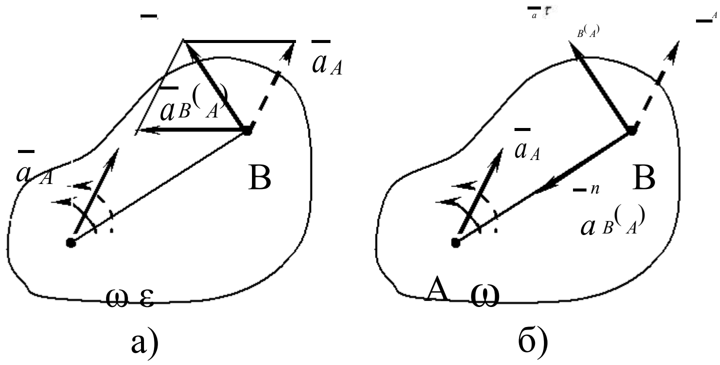


Рисунок 10. Определение ускорений точек плоской фигуры.

* На рисунке сплошная дуговая стрелка показывает направление угловой скорости ω (направление вращения), а пунктирная – направление углового ускорения ε. При

ускоренном вращении обе стрелки будут направлены в одну сторону, а при замедленном – в разные.

Для определения ускорений точек плоской фигуры (рисунок 10, а) используют выражение

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B(A)} ,$$

где a_A – ускорение полюса A; a_B – ускорение любой точки В плоской фигуры;

$a_{B(A)}$ – ускорение, которое получает точка В при вращении плоской фигуры вокруг полюса А.

Ускорение любой точки В плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и ускорения, которое точка В получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

При решении задач более удобно вектор $\bar{a}_{B(A)}$ заменить на его составляющие: касательную $\bar{a}^{\tau}_{B(A)}$ и нормальную $\bar{a}^{n}_{B(A)}$ (рисунок 10, б), получая выражение следующего вида

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{B(A)} + \bar{a}^{n}_{B(A)},$$

где вектор $\bar{a}^{\tau}_{B(A)}$ направлен перпендикулярно АВ в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное и определяется $a^{\tau}_{B(A)} = AB \cdot \varepsilon$;

вектор $\bar{a}^{n}_{B(A)}$ всегда направлен от точки В к полюсу А и определяется

$$\bar{a}^{n}_{B(A)} = AB \cdot \omega^2.$$

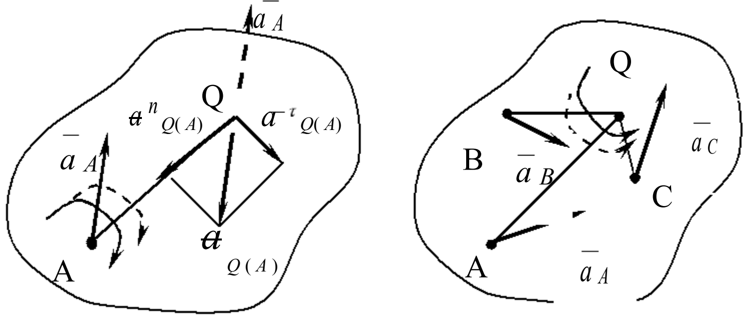
Если полюс А движется не прямолинейно, то его ускорение можно представить как сумму касательной $\bar{a}^{\tau}_A$ и нормальной $\bar{a}^{n}_A$ составляющих, тогда

$$\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^{n}_A + \bar{a}^{\tau}_{B(A)} + \bar{a}^{n}_{B(A)}.$$

Если точка В движется криволинейно и ее траектория известна, то $\bar{a}_B$ можно представить в виде суммы касательной и нормальной составляющих

$$\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_B + \bar{a}^{n}_B.$$

При непоступательном движении плоской фигуры для определения ускорений используют понятие *мгновенный центр ускорений* (МЦУ).



а) б)

Рисунок 11. Определение мгновенного центра ускорений.

Мгновенный центр ускорений (Q) – точка, ускорение которой в данный момент времени равна нулю.

Положение мгновенного центра ускорений Q (рисунок 11) определяется формулами:

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2};$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Откладываем угол α от ускорения $\bar{a}_A$ (в сторону мгновенного вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если оно замедленное), получаем полупрямую, на которой на расстоянии AQ лежит мгновенный центр ускорений Q (рисунок 11, а).

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс, то ускорение любой точки B плоской фигуры (рисунок 11, б) определяется по формуле $a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q.

Отношение величин ускорений точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦУ определяется отношением

$$\frac{a_B}{BQ} = \frac{a_A}{AQ} = \ldots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Вопросы:

1. Что изучает кинематика?
2. Перечислите способы задания движения точки.
3. Запишите формулу определения полного ускорения точки, движущейся вращательно.
4. Дайте определение мгновенного центра ускорения.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев ̶ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 ̶ 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: – БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. – 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/
4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 13

Тема: Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Цель: научить определятьскорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

Знать: основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем; кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики; теорию удара.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.

***Теоретическая часть*:**

Кинематика точки

Пример 1. Движение точки задано координатным способом: x = $2t$; y = $3t^2$. Координаты точки: x и y измеряются в метрах; аргумент t – в секундах. Определить траекторию точки и для данного момента времени t_1 = 2 с положение точки на траектории, скорость и полное ускорение.

Решение:

1. Для определения траектории точки необходимо из уравнений движения исключить время t. Решаем совместно уравнения x = $2t$; y = $3t^2$. В результате получаем уравнение параболы с вершиной в начале координат и осью симметрии оу:

$$y = \frac{3}{4}x^2$$

Т. к. аргумент $t \geq 0$, то траекторией точки будет положительная часть параболы (рисунок 12).

2. Определяем положение точки на траектории в момент времени $t_1 = 2$ с. Для этого в уравнения координат точки подставляем значение аргумента t_1: $x_1 = 2t_1 = 2 \cdot 2 = 4$ м ;

$$y_1 = 3t_1^2 = 3 \cdot 2^2 = 12 \text{ м.}$$

3. Определяем скорость точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

где V_x – проекция скорости на ось x , м/с:

$$V_x = \dot{x} = (2t)' = 2 \text{ м/с;}$$

V_y– проекция скорости на ось y , м/с:

$$V_y = \dot{y} = (3t^2)' = 6t \text{ м/с.}$$

В момент времени $t_1 = 2$ с: $V_{x1} = 2$ м/с; $V_{y1} = 6 \cdot 2 = 12$ м/с; $V_1 = 12{,}2$ м/с.

4. Определяем полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где a_x – проекция ускорения на ось x , м/с^2 :

$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = (2)' = 0$ м/с^2 ; a_y – проекция ускорения на ось y , м/с^2 : $a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = (6t)' = 6$ м/с^2 .

В момент времени $t_1 = 2$ с: $a_{x1} = 0$ м/с^2; $a_{y1} = 6$ м/с^2; $a_1 = 6$ м/с^2.

5. Выполняем графические построения: для этого принимаем масштабные коэффициенты

$M_{x,y}$ (1 см чертежа : x, y – м);

M_V (1 см чертежа : v – м/с);

M_a (1см чертежа : a – м/с^2).

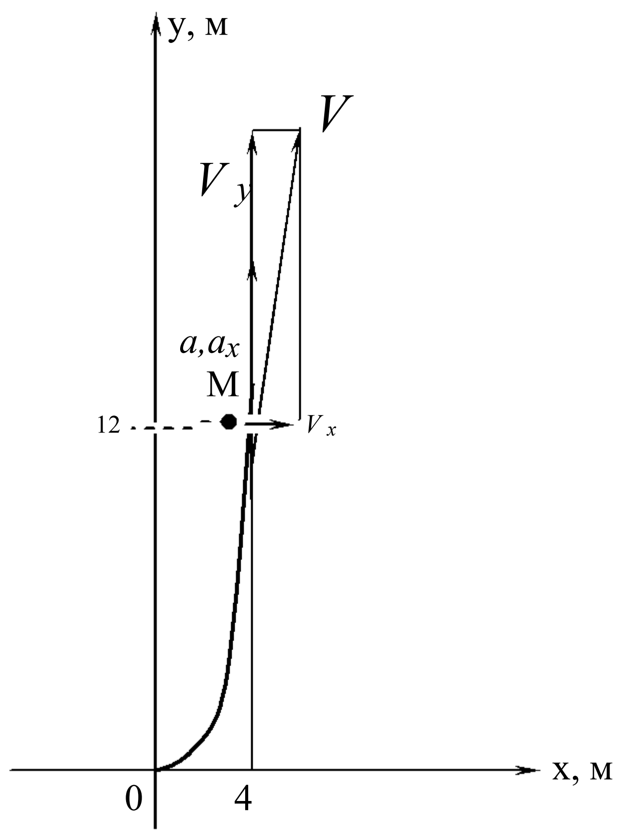


Рисунок 12. Траектория точки, положение точки на траектории, скорость и полное ускорение в момент времени $t_1 = 2$ с.

Точка движется по дуге окружности радиусом $r = 0{,}4$ м. Закон движения точки по траектории $S = 0{,}3t^2$. Дуговая координата S измеряется в метрах; аргумент t – в секундах. Определить положение точки на траектории, скорость и полное ускорение в момент времени $t_1 = 1$ с. Начало отсчета и положительное направление движения на траектории выбрать самостоятельно.

Решение: 1. Определяем положение точки на траектории в момент времени $t_1 = 1$ с : $S_1 = 0{,}3t_1^2 = 0{,}3 \cdot 1^2 = 0{,}3$ м .

Построение положения точки на траектории выполним воспользовавшись углом φ между O_1O и O_1M, который определится по формуле

$$\varphi = \frac{s}{r}.$$

Т.е. $\varphi = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75\,рад$;

при переводе в градусы $\varphi = \dfrac{180}{\pi} \cdot 0{,}75 \approx 43$.

2. Определяем скорость точки:

$$v = \dot{S} = (0{,}3t^2)' = 2 \cdot 0{,}3t = 0{,}6t, \text{ м/с};$$

В момент времени $t = 1$ с скорость точки $v_1 = 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}6$ м/с.

3. Определяем ускорение точки: a

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$,

$a_\tau = \; =$

a – тангенциальная составляющая полного ускорения, м/с^2; определяется по где формуле:

$a \quad v \;\; 0{,}6$ м/с^2;

a^n – нормальная составляющая полного ускорения, м/с^2; определяется по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r},$$

где ρ – радиус кривизны траектории движущейся точки, м.

В момент времени t_1 = 1с нормальное ускорение точки

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{r} = \frac{0{,}6^2}{0{,}4} = 0{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Тогда модуль полного ускорения точки $a_1 = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}9^2} = 1{,}08$ м/с^2.

В результате a_τ^1 = 0,6 м/с^2, a^{n1}= 0,9 м/с^2,a^1= 1,08 м/с^2 .

4. Выполняем графические построения (рисунок 13): для этого принимаем масштабные коэффициенты (для наглядности изображения масштабы скорости и ускорения выбираем разные)

$M_{r\,.\,s}$ (1 смчертежа : r, s – м);

M_v (1 см чертежа : v – м/с);

M_a (1см чертежа : a – м/с^2).

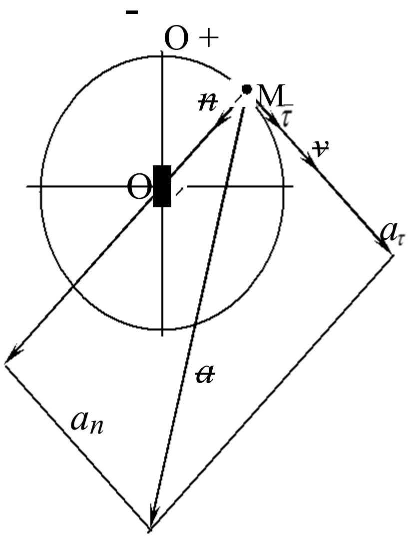


Рисунок 13. Положение точки на траектории, скорость и полное ускорение в момент времени $t_1 = 1$ с.

Вопросы:

1. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?
2. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.
3. Какие существуют способы задания движения точки?
4. Назвать случаи, когда кориолисово ускорение точки равно нулю.
5. Абсолютное, относительное, переносное движение точки.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев – Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 – 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с. –
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М.

Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с. **Дополнительная литература:**

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. – М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006.–116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш.

шк., 2003. – 719 с.

3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. **Интернет-ресурсы:** 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа:

http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим

доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 14

Тема: Определение скорости и ускорения точек звеньев механизма с помощью МЦС

Цель: научить студентаопределять скорости и ускорения точек звеньев механизма с помощью МЦС.

Знать: основные подходы к формализации и моделированию движения и равновесия материальных тел; постановку и методы решения задач о движении и равновесии механических систем; кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики; теорию удара.

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скорости и ускорения точек звеньев механизма с помощью МЦС

***Теоретическая часть*:**

Кинематический анализ плоского механизма

Пример. Для указанной схемы механизма (рисунок 14) и исходным данным: ω_0 – угловая скорость кривошипа O_1A (рад/с); φ – угол мгновенного положения; O_1A; O_2B; AB; BC – длины звеньев механизма, (м) определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

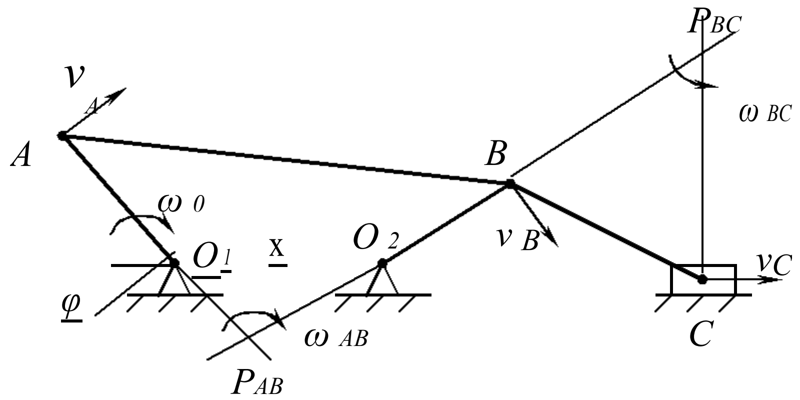


Рисунок 14. Кинематическая схема плоского механизма с указанием направления скоростей точек и угловых скоростей звеньев и положением МЦС звеньев *Решение:*

1. Выполняем построение схемы механизма в масштабе

M_l (1см чертежа : 1 – м) для заданного углом φ мгновенного положения. Построение следует начать с точки O_1, откладывая угол φ от оси Ox в сторону вращения ведущего звена (кривошипа).

2. Определяем скорости точек и угловые скорости звеньев:

2.1. Определяем скорость точки А:

– направление $v_A \perp O_1A$ и определяется направлением угловой скорости ω_0 ; – модуль $v_A = \omega_0 \cdot O_1A$, м/с.

2.2. Определяем скорость точки В:

– направление $v_B \perp O_2B$ и определяется направлением угловой скорости ω_0 ;

– модуль v_B определяем через мгновенный центр скоростей: проводим перпендикуляры к векторам скоростей v_A и v_B, точка пересечения перпендикуляров т. P_{AB} является МЦС звена AB. Определяем угловую скорость звена AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} \text{ рад/с,}$$

где AP_{AB} – расстояние от т.A до МЦС т.P_{AB} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину. В результате

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}, \text{ м/с}$$

где BP_{AB} – расстояние от т.B до МЦС т.P_{AB} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину.

. Определяем скорость точки С:

– направление v_C параллельно направляющим, по которым перемещается ползун и определяется направлением угловой скорости ω_0;

– модуль v_c определяем через МЦС: проводим перпендикуляры к векторам v_B и v_C, точка пересечения перпендикуляров т. P_{BC} является МЦС для шатуна BC. Определяем угловую скорость шатуна BC:

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BP_{BC}} \text{ рад/с,}$$

где BP_{BC} – расстояние от т.B до МЦС т.P_{BC} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину. В результате

$$v_C = \omega_{BC} \cdot CP_{BC}, \text{ м/с}$$

где CP_{BC} – расстояние от т.C до МЦС т.P_{BC} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину.

Пример. Для указанной схемы механизма (рисунок 15) и исходным данным: ω_0 – угловая скорость кривошипа ОА (рад/с); φ – угол мгновенного положения; ОА; АВ, АС – длины звеньев механизма, (м) определить скорости и ускорения точек и угловые скорости и ускорения звеньев механизма.

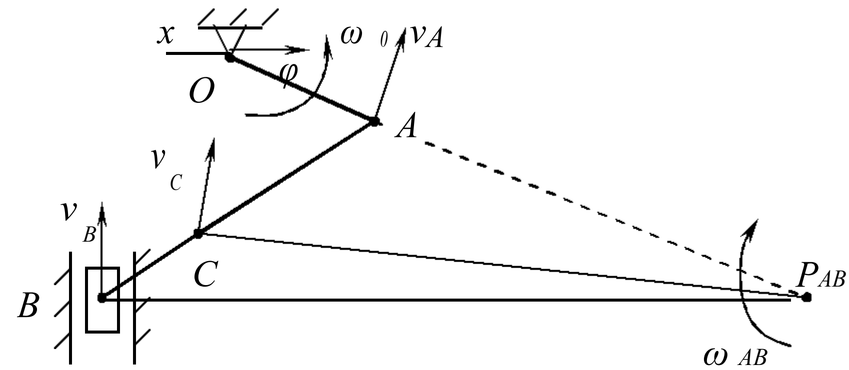


Рисунок 15. Кинематическая схема плоского механизма с указанием направления скоростей точек и угловых скоростей звеньев и положение МЦС звена *Решение:*

1. Выполняем построение схемы механизма в масштабе

M_l (1см чертежа : 1 – м) для заданного углом φ мгновенного положения. Построение следует начать с точки О, откладывая угол φ от оси Ох в сторону вращения ведущего звена (кривошипа).

2. Определяем скорости точек и угловые скорости звеньев:

2.1. Определяем скорость точки A:

–направление $v_A \perp$ ОА и определяется направлением угловой скорости ω_0 ; – модуль $v_A = \omega_0 \cdot$ ОА , м/с.

2.2. Определяем скорость точки B:

–направление v_B параллельно направляющим, вдоль которых перемещается ползун и определяется направлением угловой скорости ω_0;

–модуль v_B определяем через мгновенный центр скоростей: проводим перпендикуляры к векторам скоростей v_A и v_B, точка пересечения перпендикуляров т. P_{AB} является МЦС шатуна AB. Определяем угловую скорость шатуна AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} \text{ рад/с},$$

где AP_{AB} – расстояние от т.A до МЦС т. P_{AB} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину.

В результате

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}, \text{ м/с}$$

где BP_{AB} – расстояние от т.B до МЦС т.P_{AB} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину.

2.3. Определяем скорость точки C:

–направление v_C определяем следующим образом: проводим прямую через точки C и P_{AB} и в т.C к данной прямой проводим перпендикуляр, по которому в сторону движения звена AB указываем направление вектора v_C ; – модуль v_C определяем по формуле:

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}, \text{ м/с}$$

где CP_{AB} – расстояние от т.C до МЦС т.P_{AB} , которое определяем измерением с чертежа и переводим через масштабный коэффициент в натуральную величину.

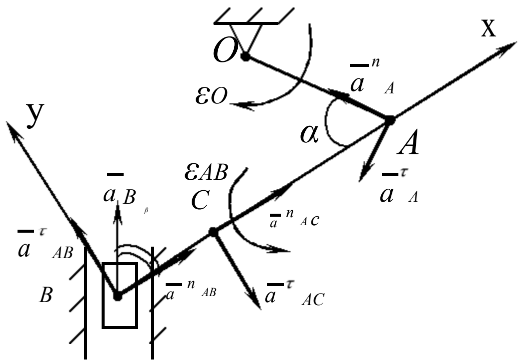


Рисунок 16. Кинематическая схема плоского механизма с указанием направления ускорений точек и угловых ускорений звеньев

3. Определяем ускорения точек и угловые ускорения звеньев (рисунок 16):

3.1. Определяем ускорение точки A:

$$\bar{a}_A = \bar{a}^\tau_A + \bar{a}^n_A ,$$

где $\bar{a}^\tau_A$ - вращательное ускорение точки A, которое определяется по формуле

$$a^\tau_A = \varepsilon_O \cdot OA;$$

$\bar{a}^n_A$ - центростремительное ускорение точки A, которое определяется по формуле

$$a^n_A = \omega^2_O \cdot OA.$$

Вектор $\bar{a}^n_A$ направлен от точки A к точке O. Вектор $\bar{a}^\tau_A$ направлен перпендикулярно к вектору $\bar{a}^n_A$ в сторону противоположную направлению v_A, т.к. вращение кривошипа OA замедленное.

3.2. Определяем ускорение точки B:

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры

$$\bar a_B = \bar a_A + \bar a^\tau_{AB} + \bar a^n_{AB},$$

где центростремительное ускорение точки В во вращательном движении шатуна *AB* вокруг полюса *A*

$$\bar a^n_{AB} = \omega^2_{AB} AB.$$

Вектор $\bar a^n_{AB}$ направлен от точки В к точке А.

Для ускорений $\bar a_B$ и $\bar a^\tau_{AB}$ известны линии действия этих векторов: вектор $\bar a_B$ направлен вдоль направляющих ползуна, вектор $\bar a^\tau_{AB}$ - перпендикулярно АВ. Задаем произвольно их направление по указанным линиям и определяем их из уравнений проекций векторного равенства $\bar a_B = \bar a_A + \bar a^\tau_{AB} + \bar a^n_{AB}$ на оси координат.

Для выбранного направления координатных осей уравнения проекций

на ось x: $a_B \cos\beta = -a_A \cos(90-\alpha) - a^n_A \cos\alpha + a^n_{AB}$; на ось y: $a_B \sin\beta = -a_A \sin(90-\alpha) + a^n_A \sin\alpha + a^\tau_{AB}$.

Из уравнений определяем

$$a^\tau_B = \frac{-a_A \cos(90-\alpha) - a^n_A \cos\alpha + a^n_{AB}}{\cos\beta};$$

$$a^\tau_{AB} = a_B \sin\beta + a_A \sin(90-\alpha) - a^n_A \sin\alpha.$$

3.3 Определяем угловое ускорение шатуна АВ по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a^\tau_{AB}|}{AB}.$$

Направление углового ускорения ε_{AB} в данном случае при замедленном движении противоположно направлению вращения шатуна.

3.4. Определяем ускорение точки С:

$$\bar a_C = \bar a_A + \bar a^\tau_{AC} + \bar a^n_{AC}.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки *C* во вращательном движении *AB* вокруг полюса *A*

$$\bar a^\tau_{AC} = \varepsilon_{AB} \cdot AC;$$

$$\bar a^n_{AC} = \omega^2_{AB} AC.$$

Вектор $\bar a^n_{AC}$ направлен от точки *C* к точке *A*, вектор $\bar a^\tau_{AC}$ перпендикулярен вектору $\bar a^n_{AC}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение точки С определяем способом проекций

$$a_{Cx} = -a^\tau_A \cos(90-\alpha) - a^n_A \cos\alpha + a^n_{AC};$$

$$a_{Cy} = -a^{\tau}_{A}\sin(90 - \alpha) + a^{n}_{A}\sin\alpha - a^{\tau}_{AC}.$$

В результате $a_c = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$.

Вопросы:

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
3. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
4. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как найти положение МЦС в различных случаях?
5. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с. _

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. _ М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006._116 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.

3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы:

1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/

2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/

3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 15

Тема: Определение скоростей и ускорений точек плоской фигуры

Цель: научить определять скорости и ускорения точек плоской фигуры **Знать:** дифференциальных уравнений движения точки; кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; **Уметь:** вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется определением скоростей и ускорений точек фигуры в плоскости.

***Теоретическая часть*:**

Скорости точек при плоском движении

Для определения скоростей при плоскопараллельном движении используются: ***формула распределения скоростей, теорема о проекциях и понятие мгновенного центра скоростей (МЦС).***

а) Формула распределения скоростей

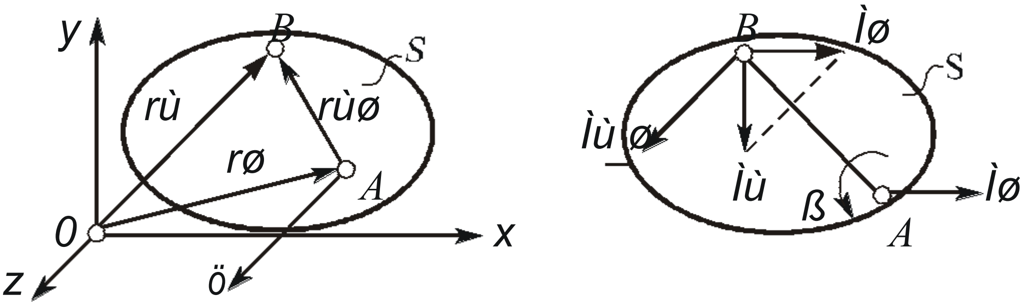


Рис. 2.25. К выводу формулы распределения скоростей

Из рис. 2.25 видно, что положение произвольной точки ***B*** плоской фигуры *S* в каждый момент времени определяется следующим векторным равенством: $\vec r_B = \vec r_A + \vec r_{BA}$

Продифференцируем данное выражение по времени

$$\vec V_B = \vec V_A + \frac{d\vec r_{BA}}{dt},$$

согласно формуле Эйлера (2.38)

$$\frac{d\vec r_{BA}}{dt} = \vec\omega \times \vec r_{BA},$$

Обозначая $\vec\omega \times \vec r_{BA} = \vec V_{BA}$ *получаем формулу распределение скоростей:*

$$\vec V_B = \vec V_A + \vec V_{BA}, \quad V_{BA} = \omega AB, \quad \vec V_{BA} \perp AB. \qquad (2.41)$$

Согласно (41), ***скорость произвольной точки B плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса*** $\vec V_A$ ***и скорости вращения точки B вокруг полюса -*** $\vec V_{BA}$.

б) Теорема о проекциях:при любом движении твердого тела проекции скоростей любых двух его точек на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой(рис. 2.26).

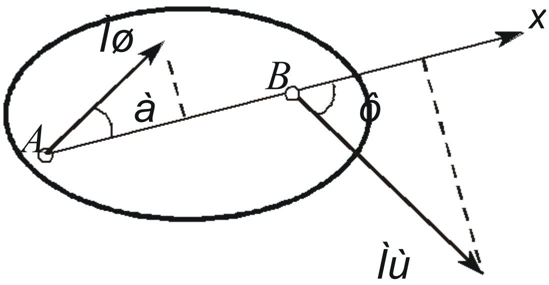


Рис. 2.26. К теореме о проекциях

Спроецируем на ось x, проходящую через точки A и B формулу (2.41). Так как $\vec{V}_{BA} \perp AB$,

получаем

$V_A \cos\alpha$ $V_B \cos\beta$,

что и требовалось доказать.

в) Использование понятия мгновенного центра скоростей.

Определение :мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. МЦС принято обозначать буквой Р.

Покажем, что если плоская фигура не движется поступательно, то такая точка существует в каждый момент времени. Для этого восстановим перпендикуляры к скоростям двух произвольных точек A и B и найдем точку их пересечения (рис. 2.27).

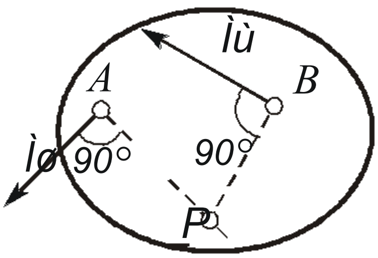


Рис. 2.28. Основной случай определения положения М.Ц.С.

Покажем, что скорость точки ***P***равна нулю и, следовательно, эта точка по определению является мгновенным центром скоростей. Согласно (2.41) имеем

$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}$, $\vec{V}_P = \vec{V}_B + \vec{V}_{PB}$.

Поскольку векторы $\vec V_A$ и $\vec V_B$ перпендикулярны отрезкам AP и BP по построению, а векторы $\vec V_{PA}$ и $\vec V_{PB}$ перпендикулярны этим отрезкам по определению, вектор $\vec V_A$ должен быть одновременно перпендикулярен обоим отрезкам, что невозможно, если только он не равен нулю.

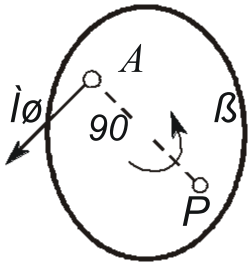
Если теперь взять за полюс точку ***P***, то для точек *A* и *B* формула (2.41) запишется в виде:

$$\vec V_A = \vec V_P + \vec V_{AP}, \quad \vec V_B = \vec V_P + \vec V_{BP}.$$

Учитывая, что $\vec V_P = 0$, получаем: $V_A = \omega AP$, $V_B = \omega BP$ или

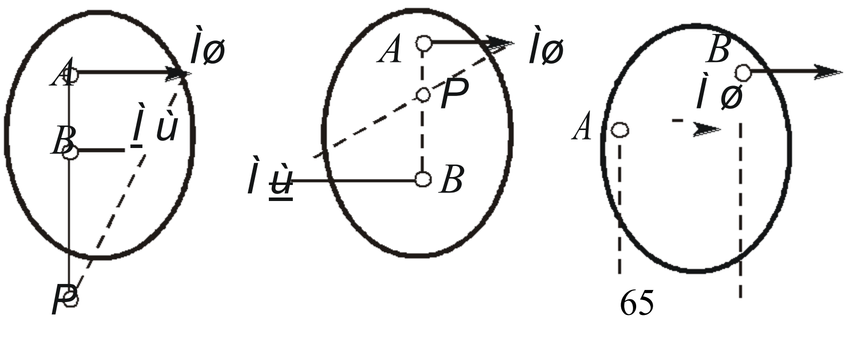
$$V_A / AP = V_B / BP = \omega. \qquad (2.42)$$

Из (2.42) следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей и движение плоской фигуры можно рассматривать как вращение вокруг меняющего свое положение мгновенного центра скоростей. Мгновенную угловую скорость этого вращения можно найти, поделив скорость любой точки на ее расстояние от мгновенного центра скоростей. Кроме основного случая нахождения положения *МЦС*, рассмотренного выше, при решении задач встречаются следующие варианты:

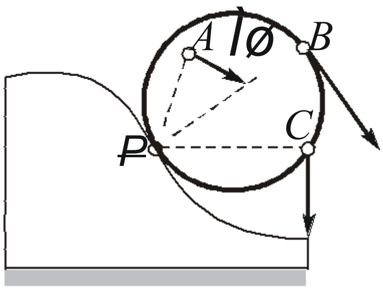


Если известны скорость какой-либо точки A и мгновенная угловая скорость ω, то расстояние от этой точки до мгновенного центра скоростей P равно $AP = V_A / \omega$

При построении прямой угол откладывается от вектора V_A



Ìù *Случай мгновенно-поступательного движения. Скорости всех точек тела равны по* *величине и по направлению,* ß=0*, МЦС находится в бесконечности.*



При качении тела по неподвижной поверхности, мгновенный центр скоростей Р находи-

Ìù*тся в точке касания это тела с неподвижной поверхностью, т.к. отсутствие проскальзыва-*

ÌÚ *ния означает равенство скоростей соприкасающихся точек.*

Рис. 2.28. Частные случаи определения положения МЦС

*3.**Ускорения точек в плоском движении. Формула распределения ускорений.*** Для вывода данной формулы распределения ускорений запишем выражение (2.41) в виде:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

и, продифференцировав его по времени, получим:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$.

Учитывая, что $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, а по формуле Эйлера $\dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$, имеем:

$$W_B = W_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{W}_{BA вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{BA}, \quad \vec{W}_{BA ц} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}).$$

Векторы $\vec{W}_{BA}^{\,вр}$ и $\vec{W}_{BA}^{\,ц}$ называют вращательным и центростремительным ускорением точки *B*в ее относительном вращении вокруг полюса *A*.

По определению векторного произведения вектор $\vec{W}_{BA}^{вр}$ перпендикулярен отрезку AB, лежит в плоскости движения, а его модуль равен εAB, так как $r_{BA} = AB$. По формуле для двойного векторного произведения

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, получаем $\vec{W}_{BA}^{ц} = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{BA}) - \vec{r}_{BA}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_{BA} = -\omega^2 \overrightarrow{AB}$,

поскольку $(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{BA}) = \omega AB \cos 90^0 = 0$. Таким образом, вектор $\vec{W}_{BA}^{ц}$ направлен вдоль отрезка AB от точки B к точке A (см. рис. 2.29), а его модуль равен $\omega^2 AB$.

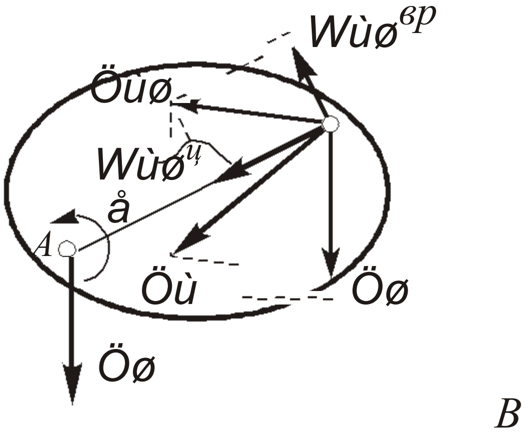


Рис. 2.29. Иллюстрация формулы распределения ускорений

Окончательно формулу распределения ускорений можно записать в виде:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}^{ц}_{BA} + \vec{W}^{вр}_{BA}, \qquad (2.43)$$

в которой $\quad W^{ц}_{BA} = -\omega^2 AB, \quad \vec{W}^{вр}_{BA} = \varepsilon AB.$

Формулу (2.43) иногда используют в виде $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA} \qquad (2.43^*)$

где вектор $\vec{W}_{BA} = \vec{W}^{ц}_{BA} + \vec{W}^{вр}_{BA}$ направлен под углом $\gamma = arctg(\frac{\varepsilon}{\omega^2})$ к отрезку

AB и равен по модулю $W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Пример 1. Найти ускорение точки *B*, угловое ускорение шатуна *AB* и угловое ускорение кривошипа *BC* четырехзвенного механизма в положении, указанном на рис. 2.29. Кривошип *OA* вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 5\ c^{-1}$, длина шатуна *AB* равна 0,8 м.

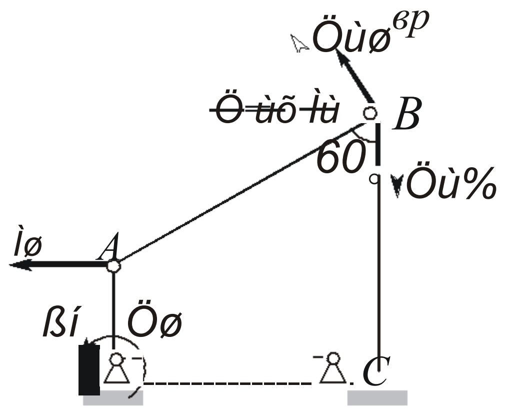


Рис. 2.29. Пример использования формулы распределения ускорений

Решение. Определим скорость и ускорение точки *A*, которую затем выберем в качестве полюса:

$V_A = \omega_0\ OA = 2$ *м/с*, $W_A = \omega\ OA = 10$ *м/сек*^{2}.

Так как *М.Ц.С.* звена *AB* находится в бесконечности (Мщ параллелен Мш), $\omega_{AB} = 0$.
Ускорение точки *B*, как точки, принадлежащей звену *AB*, по формуле распределения ускорений равно:

$\vec{W}\vec{W}\vec{W}\vec{W}\vec{W}\vec{W}_B \quad + \quad _A = \quad _{BAц} + \qquad _{BAвр} \qquad = \omega \qquad _A = \ _{BAвр}$, так как $W_{BAц AB2}\ AB\ 0$.

С другой стороны, ускорение точки *B* , как точки принадлежащей звену *BC* и вращающейся вокруг точки *C*, можно представить в виде сумму ее касательного и нормального ускорений:

$\vec W_B = \vec W_B^{\tau} + \vec W_{Bn}$, где $W_{Bn} = \frac{V_B^2}{BC} = 5\frac{м}{с^2}$, $W_B^{\tau} = \varepsilon$

Приравнивая правые части выражений для $\vec W_B$, получаем:

$$\vec W_A + \vec W_{BA}^{вр} = \vec W_B^{\tau} + \vec W_{Bn}. \qquad (*)$$

Проектируя (*) на направления отрезков *BC* и *AB* имеем :

$$W_{Bn} = W_A - W_{BA}\cos 30^0, \quad W_{Bn}\cos 60^0 - W_{B\tau}\cos 30^0 = W_A\cos 30^0$$

откуда $W_{BA}^{вр} = \dfrac{W_A - W_{B.n}}{\cos 30^0} = 5{,}78\,\dfrac{м}{с^2}$, $\varepsilon_{AB} = \dfrac{W_{BA}^{вр}}{AB} = 7{,}22\,\dfrac{рад}{с^2}$,

$$W_B^{\tau} = (W_A - W_{Bn})\,tg\,30^0 = 2{,}89\,\frac{м}{с^2}, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{W_{B\tau}}{BC} = 3{,}61\,\frac{рад}{с^2}.$$

$$W_B = \sqrt{W_{Bn}^2 + W_{B\tau}^2} = 5{,}77\,\frac{м}{с^2}.$$

4. *Мгновенный центр ускорений (М.Ц.У)*

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. *М.Ц.У* принято обозначать буквой ***Q***.

Покажем, что если плоская фигура (рис. 2.30) не движется поступательно, то такая точка существует в каждый момент времени и ее положение легко определить (зная ускорение какой-либо точки $\vec W_A$ и величины ω и ε) следующим образом: из выражения $tg\gamma = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ определим угол γ;

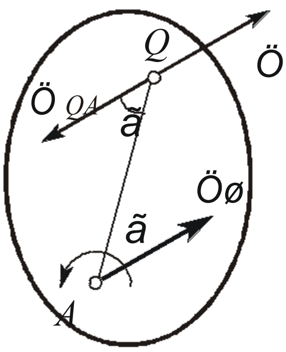


Рис. 2.30. К определению положения мгновенного центра ускорений

от точки A под углом γ к вектору $\vec{W}_A$ проведем отрезок AQ. При этом отрезок AQ должен быть отклонен от вектора ускорения в сторону направления углового ускорения ε. Длина отрезка AQ определяется равенством:

$$AQ = W_A / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.44)$$

Найденная таким образом точка ***Q*** и будет являться мгновенным центром ускорений. Действительно, по формуле распределения ускорений, имеем

$\vec{W}_Q = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA}$, где $W_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Подставляя сюда AQ из (2.44), находим, что $W_{QA} = W_A$. Кроме того, вектор $\vec{W}_{QA}$ должен образовывать с линией AQ угол γ и, следовательно, вектор $\vec{W}_{QA}$ параллелен $\vec{W}_A$, но направлен в противоположную сторону. Поэтому

$\vec{W}_{QA} = -\vec{W}_A$ и $W_Q = 0$. Если теперь за полюс выбрать точку ***Q***, то ускорение произвольной точки ***M***, согласно (2.43) будет равно:

$\vec{W}_M = \vec{W}_Q + \vec{W}_{MQ} = \vec{W}_{MQ}$, $W_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$,

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в каждый данный момент времени так, как если бы движение плоской фигуры было вращением вокруг мгновенного центра ускорений ***Q***(рис. 2.31). При этом ускорения точек плоской фигуры будут пропорциональны их расстояниям от *М.Ц.У.*

$$\frac{W_M}{MQ} = \frac{W_A}{AQ} = \frac{W_B}{BQ} = \frac{W_C}{CQ} = \ldots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

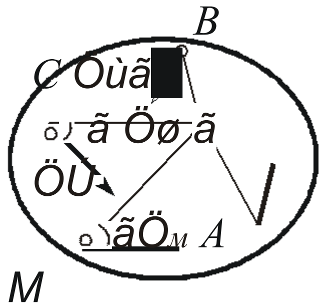
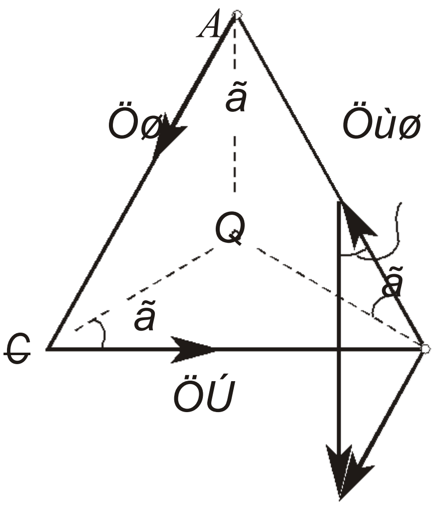


Рис. 2.31. Определение ускорений с помощью М.Ц.У.

Пример 2. Равносторонний треугольник АВС движется в плоскости чертежа.

Ускорения вершин А и В равны в данный момент времени 16 см/с^2 и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение третьей вершины С треугольника.



Решение. Определим ускорение точки С используя

ã =30°

понятие определения его положения необходимо знать угол мгновенного центра ускорений. Для

Öùø *между вектором* Цщш *и отрезком АВ. (см. рис 2.30).* Öù *Очевидно, что в нашем случае этот угол равен 30°.*

Положение мгновенного це

B

определим как точку пересечения двух прямых, проведенных под углом γ *к векторам* Цш *и* Цщ. *Так как расстояния вершин треугольника от точки Q одинаковы,* ЦЪ=16 *см/с^2 . Направление этого вектора показано на рисунке.*

Вопросы:

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
3. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
4. Абсолютное, относительное, переносное движение точки.
5. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.

2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. _ М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006._116 с.

2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.

3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с. Интернет-ресурсы: 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/ 3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/

4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/

Практическое занятие 16

Тема: Динамика материальной точки

Цель: дать знания в областидинамики материальной точки.

Знать: кинематические характеристики точки, дифференциальные уравнения движения точки; общие теоремы динамики

Уметь: вычислять скорости и ускорения точек и точек тела при поступательном, вращательном и плоском движениях

Актуальность темы объясняется применением знаний в областидинамики материальной точки на реальных примерах.

***Теоретическая часть*:**

Определение закона движения материальной точки по заданным силам, действующим на точку, – одна из задач динамики. В проекциях на оси инерциальной системы декартовых координат дифференциальные уравнения движения точки записываются следующим образом:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (1)$$

где m – масса точки; F_x, F_y, F_z – проекции равнодействующих всех сил, действующих на точку, на оси координат. В общем случае силы могут быть постоянными, зависящими от времени, положения, скорости и ускорения точки. Силами, зависящими от положения точки, являются, например, силы отталкивания и притяжения, силы упругости пружин; зависящими от скорости – силы сопротивления среды движению точки.

В результате интегрирования системы дифференциальных уравнений второго порядка (1) определяется закон движения точки в декартовых координатах:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

При интегрировании системы (1) появляется шесть произвольных постоянных, и для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные – начальные условия движения, которые определяют положение точки и ее скорость в начальный момент времени.

Иногда интегрирование системы (1) представляет значительные трудности и не может быть выполнено в квадратурах. Тогда дифференциальные уравнения движения точки решаются приближенными методами, в частности, с использованием вычислительных машин.

Дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки

Рассмотрим движение точки по отношению к системе отсчета (СО), произвольно движущейся относительно неподвижной СО.

Движение точки относительно неподвижной СО называется абсолютным, движение относительно подвижной СО – относительным, движение подвижной Со относительно неподвижной – переносным.

Из раздела кинематики мы знаем, что в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение материальной точки складывается из относительного, переносного и кориолисова:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

Подставив это выражение в основное уравнение динамики

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

получаем: $m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \vec{F}$ или

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c).$$

Введем два вектора

– переносная сила инерции,

– кориолисова сила инерции.

Тогда основное уравнение динамики относительного движения материальной точки примет вид:

.

Вопросы:

1. Основные законы динамики.
2. Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки.
3. Первая и вторая задача динамики.
4. Определение значений произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки.
5. Сформулируйте и запишите общее уравнение динамики.

Литература:

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Статика. Практикум учебное пособие / В.А. Акимов [и др.]; ред. А.В. Чигарев _ Минск: Новое знание; М ЦУПА 2010 _ 452 с.
2. Курс теоретической механики. В2 т.Т.1 Статика и кинематика. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 11-е изд., стер. СПБ.: "Лань", 2009. 736 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг.- 17-е изд., стереотип. М.: Высшая школа., 2007. - 416с.

Дополнительная литература:

1. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / Г.Н. Яковенко. М.: БИНОМ. Лаборатория занятий, 2006. 116 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 719 с.
3. Эрдеди А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учебник для втузов. – М.: И.д. «Академия», 2003. – 320 с.

Интернет-ресурсы: 1. Электронный образовательный ресурс [Электронный ресурс]. Режим доступа:

http://www.edu.ru/ 2. Электронная библиотека [Электронный ресурс].
Режим доступа: http:// www.elibrari.ru/

3. Университетская библиотека online [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:// www.biblioclub.ru/ 4. Электронная библиотека технической литературы [Электронный ресурс].

Режим доступа: http:// www.tehlit.ru/