Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского федерального университета
Дата подписания: 18.04.2024 16:10:00
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «Математика»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки **13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения дисциплины студенты должны:

Знать: основные понятия аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов.

Уметь: эффективно использовать методы аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов. при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

Владеть: навыками использования методов аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Математика» проводятся в компьютерном классе с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
	1 семестр		
1	Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.	2	2
2	Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной	2	2

	матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.		
3	Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.	2	2
4	Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.	2	2
4	Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.	2	2
5	Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.	2	2
5	Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.	2	2
8	Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций.	2	2
9	Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.	2	2
10	Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.	2	2
11	Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций	2	2
12	Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	2	2
13	Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.	2	2

15	Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.	2	2
16	Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.	2	2
17	Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.	2	2
18	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.	2	2
19	Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	2	2
	Итого за 1 семестр	**36**	**36**
	2 семестр		
21	Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.	2	2
22	Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.	2	2
23	Вычисление вероятности события	2	2
24	Вариационные ряды и их графическое изображение. Выборочный метод.	2	2
25	Точечные оценки. Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.	4	4
26	Статистическая проверка гипотез.	4	4
	Итого за 2 семестр	**16**	16
	Итого:	**52**	52

4. Содержание практических работ

Практическая работа № 1. Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.

Цель: выработать умение применять алгоритм выполнения действий над матрицами и вычисления ранга матрицы и применять умения для решения практических задач; выработать умение применять алгоритмы вычисления определителя n-го порядка и обратной матрицы и применять умение для решения практических задач.

Теоретическая часть

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Сложение матриц.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью B - A матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица O, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A.

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha\, a_{ij} \|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j – го столбца матрицы A.

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 5 \\ -1\cdot(-2)+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1-1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+1\cdot 3 \\ 3\cdot 1+5\cdot(-1) & 3\cdot 2+5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Рассмотрим некоторую, *не обязательно квадратную* матрицу A. Выберем какие-нибудь s номеров строк $i_1, i_2, \dots, i_s$ и s номеров столбцов $j_1, j_2, \dots, j_s$.

Определение. *Минором порядка* s матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка s, образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M^{\,i_1 \dots i_s}_{\,j_1 \dots j_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка s, сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, \dots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_s$.

Определение. В матрице A размеров $m \times n$ минор порядка s называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $s+1$ равны нулю или миноров порядка $s+1$ у матрицы A вообще нет.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $s+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $s+2$, а, следовательно, и всех бóльших порядков.

Определение. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m \times n$ справедливо соотношение $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.

Рассмотрим способы вычисления ранга матрицы:

а) *Метод окаймляющих миноров*

Пусть в матрице найден минор M k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

<u>Пример</u>. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Существует только один минор третьего порядка, окаймляющий выбранный минор M_2. Вычислим его.

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5\cdot 7 + 2\cdot 4\cdot(-3) + 3\cdot 7\cdot(-2) -$$

$$-3\cdot 5\cdot(-3) - 4\cdot 7\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot 7 = -35 - 24 - 42 + 45 + 28 + 28 = 0.$$

Значит, минор M_2 базисный, а ранг матрицы равен его порядку, т.е. $r(A) = 2.$

Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) *Метод элементарных преобразований*

<u>Определение</u>. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановку строк;
4) такие же преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

<u>Теорема</u>. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, ..., b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A)=r$.

В самом деле, $r(A)=r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11}\cdot b_{22}\cdot\ldots\cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r+1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

<u>Пример:</u> Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u> Поменяем местами первую и вторую строку (т.к. первый элемент второй строки -1 и с ней будет удобно выполнять преобразования). В результате получим матрицу, эквивалентную данной.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обозначим i-тую строку матрицы – C_i. Нам необходимо привести исходную матрицу к треугольному виду. Первую строку будем считать ведущей, она будет участвовать во всех преобразованиях, но сама остается без изменений.

На первом этапе выполним преобразования, позволяющие получить в первом столбце нули, кроме первого элемента. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2 $(C_2 - 2C_1)$, к третьей строке прибавим первую $(C_3 + C_1)$, а из третьей вычтем первую, умноженную на 3 $(C_3 - 3C_1)$. Получаем матрицу, ранг которой совпадает с рангом данной матрицы. Обозначим ее той же буквой A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую. При этом имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получена матрица треугольного вида, и можно сделать вывод, что $r(A) = 2$, т. е. числу ненулевых строк. Коротко решение задачи можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \times C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1, C_3 + C_1, C_3 - 3C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. *m* = *n*, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы А.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим, что не квадратная матрица не имеет определителя.

Число a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически формула дл я вычисления определителя третьего порядка выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13};\qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23};\qquad \Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33};\qquad \Delta=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot 9=13-6-34-27=-54$$

Рассмотренный определитель можно вычислить другим способом. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. имеем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24-30+36+12-36-60=-54$$

Пусть задано некоторое число а и пусть существует такое число m, что am = 1. Число m в этом случае называется обратным для а. Если, теперь, рассмотрим квадратную матрицу n–го порядка, то единичная матрица Е будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу Е.

Пусть А – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица Х (того же порядка n) называется обратной для А, если АХ = ХА = Е.

Квадратная матрица n-го порядка называется особенной (вырожденной), если ее определитель равен нулю. Если же Δ (А) ≠ 0, то А называется несобственной (невырожденной) матрицей.

Для нахождения обратной матрицы, рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ и пусть $$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Обратной матрицей A^{-1} будет матрица:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Aij есть алгебраическое дополнение элемента aij определителя Δ = Δ (А).

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6+0-3-0-2=-1\neq 0$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Проверка: A A-1 = E

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Вопросы и задачи.

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

а) A+B;

б) A–B.

Задача 2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) A+B;

б) B–D;

в) A+B–C;

г) A^T+B;

д) D^T+F;

е) F^T+A.

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие выражения:

а) A–2B;
б) 3A+2B;
в) 2A–4B.
Задача 4. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\1&0&4\\-3&7&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2&3\\-1&4&1\\5&-3&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&4\\-5&3&6\end{pmatrix},\quad D=(-1,\ 2,\ 3),\quad X=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):
а) 2A+B;
б) 2B–D;
в) A+2B–3C;
г) $3A^T+B$;
д) D^T+2X;
е) 2X–D.
Задача 5. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-2\end{pmatrix}$$

Вычислите $A\cdot B$, $B\cdot A$ и $A\cdot B-B\cdot A$.
Задача 6. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\1&0&4\\-3&7&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2&3\\-1&4&1\\5&-3&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&4\\-5&3&6\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&4&5\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

Задача 7. Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):
а) $A\cdot B$ и $B\cdot A$;
б) $D\cdot C$ и $C\cdot D$;
в) $A\cdot F$ и $F\cdot A$;
г) $D\cdot F$ и $F\cdot D$;
д) $F\cdot A$;
е) $F^T\cdot A$.
Задача 8. Вычислить ранг матрицы двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

$$A=\begin{pmatrix}1&-6&2&4&8\\-3&18&-6&-12&-24\\0&6&7&23&11\end{pmatrix};A=\begin{pmatrix}1&2&-7&13&0\\7&7&-6&3&12\\-16&-11&-17&56&-36\end{pmatrix}$$

Задача 9. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-2\end{pmatrix}$.

Вычислите следующие выражения:
а) detA;
б) detB
в) $\det(A\cdot B)$.
Проверьте, что $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$.
Задача 2. Даны квадратные матрицы 3– го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислите следующие выражения:

а) detA;

б) detB

в) det(A·B).

Проверьте, что det(A·B)= detA·detB.

Задача 10. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Задача 11.

Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 41 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 155 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Практическая работа № 2. Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: выработать умение решать невырожденные СЛУ матричным методом, методом Крамера, методом Гаусса и применять умения для решения практических задач.

Теоретическая часть

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что основная матрица A невырожденная. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Помножив матричное уравнение $A \cdot X = B$ на матрицу A^{-1} слева, получим формулу, на которой основан матричный метод решения систем линейных уравнений:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Замечание. Отметим, что матричный метод решения систем линейных уравнений в отличие от метода Гаусса имеет ограниченное применение: этим методом могут быть решены только такие системы линейных уравнений, у которых, во-первых, число неизвестных равно числу уравнений, а во-вторых, основная матрица невырожденная.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами: $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k–ого столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x+y-2z=10 \end{cases}$$

<u>Решение</u>: Найдем основной и дополнительные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6-6+8-36-1+8=-21$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30-9+20-90-5+12=-42$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -6-60+20+36-10+20=0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -30+10+24+60-3-40=21$$

По формулам Крамера имеем

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-42}{-21}=2; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{-21}=0; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{21}{-21}=-1.$$

Ответ: x = 2, y = 0, z = -1.

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = в_m \end{cases}$$

Будем производить над системой следующие элементарные преобразования:

1. Вычеркивание уравнения вида $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n = 0$.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами двух уравнений.

Пусть теперь $a_{11} \neq 0$.(Если $a_{11}=0$,то мы поменяем местами первое уравнение с тем уравнением, где коэффициент при x_1 отличен от нуля). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на ($-\frac{a_{21}}{a_{11}}$), затем прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на ($-\frac{a_{31}}{a_{11}}$) и т.д. к последнему уравнению прибавим первое, умноженное на ($-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$). При этом получим систему

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mr}x_r + \cdots + c_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Далее, применив те же рассуждения к полученной системе, исключим из уравнений, начиная с третьего x_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы придем к одному из двух случаев:

1. Либо после определенного шага получиться система, содержащая уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда наша система не имеет решений, т.е. несовместна.
2. либо система не содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда рано или поздно мы придем к системе

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = a_r \end{cases}$$

Возможны два случая:

a) $r = n$. Тогда последнее уравнение последней системы имеет вид: $c_{nn}x_n = a_n$, откуда $x_n = \dfrac{a_n}{c_{nn}}$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т.д. из первого уравнения системы находим x_1.

b) $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.

Замечание. С практической точки зрения процесс решения системы можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей расширенной матрицей системы.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножив первую строку на $-\dfrac{3}{2}$, затем умножив первую строку на $-\dfrac{5}{2}$, наконец, умножив первую строку на -1, сложим первую строку последовательно со второй, с третьей и с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

В последней матрице мы умножили вторую и третью строку на 2. Далее 1 и 2 строки оставляем без изменения. Сперва умножим вторую строку на $-\frac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\frac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу мы получили, умножив третью строку на $\frac{1}{2}$ и сложив с четвертой строкой. Последняя четвертая строка означает, что мы имеем уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$$

следовательно, по сказанному выше система несовместна.

<u>Пример</u>. Решить методом Гаусса систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторую матрицу мы получим сложив сперва вторую строчку с третьей, затем сложив вторую строчку с четвертой. Нулевые строчки выбрасываем. Остается система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ \quad x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases} \qquad (*)$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными, обозначая их: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$

Из второго уравнения системы $(*)$ найдем x_2

$$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$$

Подставив x_2 в первое уравнение, получим:

$x_1 + 2(10\alpha - 17\beta - 2) - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 + 20\alpha - 34\beta - 4 - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5 \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2 \end{cases} \qquad \alpha \in (R)$$

Вопросы и задачи.

Решить СЛУ матричным методом и методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

Практическая работа № 3. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Цель: выработать умение выполнять линейные операции над векторами; действия над векторами, заданными проекциями; применять при решении задач скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Теоретическая часть

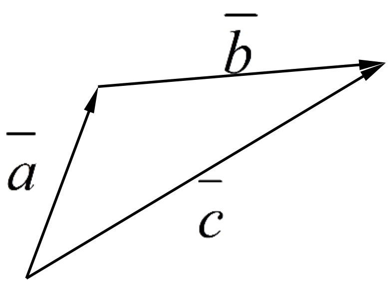
Направленный отрезок будем называть вектором и обозначать $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *или* $\bar{a}, \bar{в}, \ldots$

Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают и обозначают $\overline{o}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Два вектора называются равными, если выполнены следующие три условия: 1) длины векторов равны, 2) векторы параллельны (коллинеарны), 3) векторы направлены в одну и ту же сторону.

1. Сложение векторов

Суммой $\bar{a} + \bar{в}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$ при условии, что вектор $\bar{b}$ приложен к концу вектора $\bar{a}$ (правило треугольника) и записывают $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.



Сложение векторов обладает следующими основными свойствами:

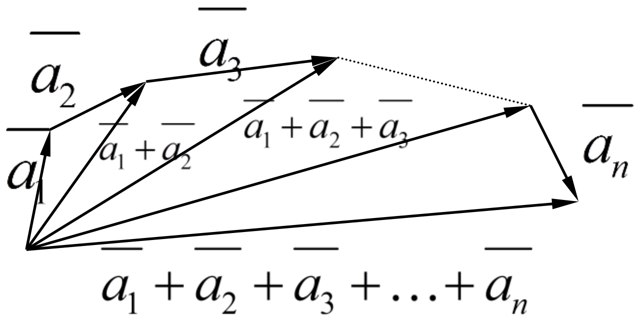
1. Коммутативность: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

2. Ассоциативность: для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ выполняется равенство $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$

3. Прибавление нулевого вектора к любому вектору $\bar{a}$ не меняет последнего: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

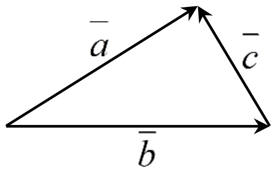
4. Сумма вектора $\bar{a}$ и противоположного вектора $\bar{a}^1$ равна нулевому вектору, т. е. $\bar{a} + \bar{a}^1 = 0$

Из второго свойства следует, что если даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$, расположенные так, что конец предыдущего вектора является началом последующего, то сумма $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}$, будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\bar{a}_1$ в конец вектора $\bar{a}_n$.

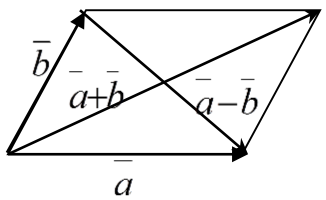


2. <u>Вычитание векторов</u>

Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, что $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$ и обозначает $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$. Чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно их отнести к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора – вычитаемого в конечную точку вектора – уменьшаемого.



<u>Замечание.</u> Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) правилом параллелограмма: если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\bar{a} + \bar{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а вторая диагональ, идущая из конца вектора $\bar{b}$ в конец вектора $\bar{a}$ есть разность $\bar{a} - \bar{b}$.



3. <u>Произведение вектора на число</u>

Произведением $\alpha\,\bar{a}$ (или $\bar{a}\,\alpha$) вектора $\bar{a}$ на вещестренное число α называется вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, (причем вектор $\bar{b}$ имеет длину, равную $|\alpha|\,|\bar{a}|$) и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$ в случае $\alpha > 0$ и противоположное направление в случае $\alpha < 0$.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\bar{a}$ на число α вектор $\bar{a}$ растягивается (сжимается) в α раз.

При этом, если $\alpha > 1$, то $\bar{a}$ растягивается, если $0 < \alpha < 1$, то вектор $\bar{a}$ сжимается и вектор $\alpha\,\bar{a}$ сохраняет то же направление, что и вектор $\bar{a}$.

Если же $\alpha < 0$, то вектор $\bar{a}$ растягивается при $|\alpha| > 1$ и сжимается при $|\alpha| < 1$ и при этом происходит изменение направления на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов).
2. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел).
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Так как по определению вектор есть направленный отрезок, а проекции направленного отрезка на оси координат находят как разности одноименных координат конца и начала направленного отрезка, то точно также находят проекции вектора на координатные оси. Эти проекции и называются координатами вектора.

Например, пусть даны точки A(3, -2, 5) и B(-1, 2, 3). Тогда координатами вектора $\overline{AB}$ будут: -1-3=-4; 2-(-2)=4, 3-5=-2 и обозначают $\overline{AB}=\{-4, 4, -2\}$.

В дальнейшем, координаты (проекции на оси) мы будем обозначать $\bar{a}=\{x, y, z\}$.

Отметим, что действия над векторами можно произвести в координатах.

Пусть даны векторы в координатах: $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

Тогда: $\bar{a} + \bar{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$, $\bar{a} - \bar{b} = \{x_1 - x_2,\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$, $\alpha\bar{a} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}$.

Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Скалярными произведениями двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|\cos\vartheta, \quad \text{где } \vartheta - \text{угол между векторами}$$

Можно дать другое определение скалярного произведения двух векторов. Из теории проекций известно, что

$$np_{\bar{b}}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cos\vartheta \quad \text{и } np_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\cos\vartheta.$$

Т.о. скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на первый вектор.

$$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{b}|np_{\bar{b}}\,\bar{a} \quad \textit{или} \quad (\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}|np_{\bar{a}}\,\bar{b}.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими основными свойствами:

1. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обращается в нуль в том случае, когда по крайней мере один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны.

2. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно произведению длин этих векторов, если данные векторы параллельны, т. е. $\varphi = 0$.

$$(\bar{a}\,\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$$

Отсюда следует, что скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату длины этого вектора, т. е. $(\bar{a}\cdot\bar{a}) = |\bar{a}|^2$

3. Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством умножения: $(\bar{a}\,\bar{b}) = (\bar{b}\bar{a})$.

4. Скалярное произведение обладает распределительным свойством относительно суммы векторов: $(\bar{a} + \bar{b})\cdot\bar{c} = (\bar{a}\,\bar{c}) + (\bar{b}\bar{c})$.

Пусть даны два вектора в координатах: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}\, и\, \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.
Скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который обладает следующими свойствами:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$, то есть вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, где лежат вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) Длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ к второму вектору $\bar{b}$ вокруг вектора $\bar{c}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$.

Векторное произведение обозначают символом $\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]$ *или* $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

а) Основные свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулевому вектору в том и только в том случае, когда эти векторы параллельны.

Из этого свойства следует, что векторное произведение любого вектора на самого себя, т.е. $[\bar{a}\bar{a}] = 0$.

2. Векторное произведение двух векторов антикоммутативно, а именно:
$$[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$$

3. Векторное произведение обладает свойствами сочетательности относительно числового множителя: $\alpha[\bar{a}\bar{b}] = [\alpha\bar{a} \cdot \bar{b}]$ *или* $[\bar{a} \cdot \alpha\bar{b}]$.

4. Векторное произведение векторов обладает распределительным свойством относительно векторов.

Векторное произведение векторов в координатах

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в координатах $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

Тогда $[\bar{a}\bar{b}] = \bar{c}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$.

Пример. Пусть даны векторы $\bar{a} = \{2, -1, 4\}$ и $\bar{b} = \{3, 1, 0\}$

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2l_3 + 12l_2 + 3ll_3 - 4l_1 = -4l_1 + 12l_2 + 5l_3.$$

т.е. $[\bar{a}\bar{b}] = \bar{c} = \{-4, 12, 5\}$.

Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Если из трех векторов любые два вектора умножить векторно, а затем полученный вектор $\bar{d} = [\bar{a}\,\bar{b}]$ умножить на третий вектор $\bar{c}$ скалярно, то в результате мы получим число, которое и называется смешанным произведением трех векторов и обозначают: либо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, либо $([\bar{a}\,\bar{b}]\,\bar{c})$.

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Смешанное произведение векторов в координатах.

Пусть даны три вектора в координатах

$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}. \bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Тогда смешанное произведение этих векторов можно вычислить по формуле:

$$([\bar{a}\bar{b}]\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Многие задачи геометрии, физики, механики решаются методами векторной алгебры.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\bar{F}$ = {3, -5, -2} когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения *A* (2, 5, -3) в положение *B* (3, -1, -2).

Решение. Найдем координаты вектора $\bar{S} = \overline{AB}$

$\bar{S}$ = {3-2; -1-5; -2+3} = {1; -6; 1}

Тогда величина искомой работа равна скалярному произведению ($\bar{F} \cdot \bar{S}$), т.е.

$W = (\bar{F}\ \bar{S}) = 3\cdot1 + (-5)\cdot(-6) - 2\cdot1 = 31$.

Пример. Найти угол, образованный векторами: $\bar{a}$={3,0,-4} и $\bar{b}$={-1,1,-2}.

Решение. $\cos\varphi = \dfrac{3\cdot(-1) + 0\cdot1 + (-4)\cdot(-2)}{\sqrt{3^2 + 0 + 4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{5}{5\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример. Даны координаты вершин треугольника *A*(1,2,0), *B*(3,0,-3) и *C*(5,2,6). Найти площадь этого треугольника.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ = {3-1, 0-2, -3-0} = {2, -2, -3}

$\overline{AC}$ = {5-1, 2-0, 6-0} = {4, 0, 6}

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $[\overline{AB}\cdot\overline{AC}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= -12e_1 - 12e_2 + 8e_3 - 12e_2 = -12e_1 - 24e_2 + 8e_3$

Итак, $[\overline{AB}\cdot\overline{AC}] = \bar{d}$ = {-12, -24, 8}.

Найдем модуль векторного произведения

$$|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]| = |\bar{d}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28.$$

Искомая площадь треугольника: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right| = \dfrac{1}{2}\cdot 28 = 14$ кв. ед.

Пример. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках O(1,1,2), A(2,3,-1), B(2,-2,4), C(-1,1,3).

Решение. Тетраэдр построен на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ Найдем координаты этих векторов: $\overline{OA} = \{1,2,-3\}$, $\overline{OB} = \{1,-3,2\}$, $\overline{OC} = \{-2,0,1\}$. Тогда искомый объем:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right]\cdot\overline{OC}\right)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-3-8+18-2\right|=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$$

$V=\dfrac{5}{6}$ куб. ед.

Пример. Вычислить модуль вектора $\overline{a}$ = {6,3,-2}.

Решение. Если дан вектор $\overline{a}$ = {x, y, z}, то $|\overline{a}|$ = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Следовательно, имеем

$|\overline{a}|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$.

Пример. Вычислить направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ = {12,-15,-16}.

Решение. $|\overline{a}|=\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}=\sqrt{625}=25$.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overline{a}|}=\frac{12}{25};\ \cos\beta=\frac{y}{|\overline{a}|}=\frac{-15}{25}=-\frac{3}{5};\ \cos\gamma=\frac{z}{|\overline{a}|}=\frac{-16}{25}.$$

Пример. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол φ = 60^0, причем $|\overline{a}|$ = 5 и $|\overline{b}|$ = 8. Определить $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Решение. Рассмотрим скалярное произведение ($\overline{a}+\overline{b}$) и ($\overline{a}+\overline{b}$) т.е.

$(\overline{a}+\overline{b})^2=(\overline{a}\,\overline{a})+2(\overline{a}\,\overline{b})+(\overline{b}\,\overline{b})=|\overline{a}|^2+2|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos60^0+|\overline{b}|^2=25+2\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}+64=129$,

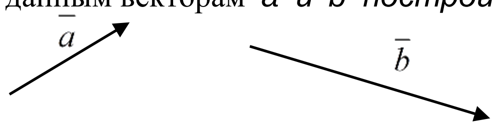
следовательно $|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{129}$.

Аналогично, рассмотрим $(\overline{a}-\overline{b})^2$

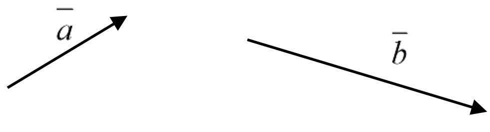
$(\overline{a}-\overline{b})^2=|\overline{a}|^2-2(\overline{a}\,\overline{b})+|\overline{b}|^2=25-2\cdot5\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}+64=49.$ $\qquad |\overline{a}-\overline{b}|=\sqrt{49}=7$.

Вопросы и задачи.

Задача 1. По данным векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *постройте векторы* $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$ *и* $-\vec{a}-\vec{b}$



Задача 2. По данным векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ постройте векторы $3\vec{a}$, $-1/2\vec{b}$ *и* $2\vec{a}+1/3\vec{b}$.



Задача 3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ *и* $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны. Какой геометрический смысл имеет это условие?

Задача 4. Определите координаты начала вектора $\vec{a}$ = {3;1;–2}, если его конец совпадает с точкой M(1;–1;2).

Задача 5. Пусть в некотором базисе $\vec{a} = \{2;-1;3\}$ *и* $\vec{b} = \{1;-2;-4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$ в этом базисе.

Задача 6. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a}$={-2, 3, β} и $\bar{b}$={α, -6, 2} коллинеарны.

Задача 7. Даны три вектора $\bar{p}$ = {3,-2,1}, $\bar{q}$ = {-1,1,-2}, $\bar{r}$ = {2,1,-3}. Найти разложение вектора $\bar{c}$ = {11,-6,5} по базису $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$.

Задача 8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.

Задача 9. Вычислить проекцию вектора $\bar{a}$ = {5,2,5} на ось вектора $\bar{b}$ = {2,-1,2}.

Задача 10. Даны вершины тетраэдра: *A*(2,3,1), *B*(4,1,-2), *C*(6,3,7), *D*(-5,-4,8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины *D*.

Задача 11. Найти орт вектора $\bar{a} = 3e_1 + 4e_2 - 12e_3$.

Задача 12. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\bar{a}$ = {1,-3,1} и $\bar{b}$ = {2,-1,3}.

Задача 13. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами *A*(1;2;1), *B*(3;-1;7) и *C*(7;4;-2). Убедиться, что этот треугольник равнобедренный. Сделать чертеж.

Задача 14. Зная одну из вершин треугольника *A*(2;-5;3) и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}$ = {4;1;2} и $\overline{BC}$ = {3;-2;5}. Найти остальные вершины и координаты вектора $\overline{CA}$.

Практическая работа № 4. Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Цель: сформировать представление о возможных способах задания прямой на плоскости, выработать умение выбирать соответствующее уравнение для конкретной задачи; находить величину угла между двумя прямыми и расстояние от точки до прямой.

Теоретическая часть

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1–й степени и, обратно, каждое уравнение 1–й степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: y=kx+b, где k – угловой коэффициент прямой, b – начальная ордината.

Пример: Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1)$ и образующей с прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45°.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o,y_o)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0), \text{ т.е. } y - 1 = k_1(x + 2)$$

В равенстве необходимо определить угловой коэффициент k_1. Для этого воспользуемся условием, что искомая прямая образует с данной прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45°. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 3$. Тогда имеем:

$$tg45° = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_2},$$

откуда $1 + 3k_1 = 3 - k_1$, или $k_1 = \frac{1}{2}$. Подставив $k_1 = \frac{1}{2}$, получим: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $x - 2y + 4 = 0$ – искомое уравнение прямой.

Общее уравнение прямой: Ax+By+C=0, где A, B, C – произвольные числа. Очевидно, A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Замечание. Прямая линия в отрезках отсекает от координатного угла прямоугольный треугольник, площадь которого определяется формулой $S_\Delta = \frac{1}{2}|a||b|$.

<u>Пример.</u> Дана прямая 5x-3y-30=0. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатных осей.

<u>Решение.</u> Запишем уравнение прямой в отрезках, разделив все члены данного уравнения на 30: $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} = 1$. Из уравнения видно, что a=6;b=-10. Следовательно, $S_\Delta = \frac{1}{2}|6||-10| = 30$ кв.ед.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$, где θ - угол, который образует прямая с положительным направлением оси *OX*.

<u>Пример</u>. Дано уравнение прямой 5x – 12y + 26 = 0. Привести к нормальному виду.

<u>Решение</u>. Для перехода от общего уравнения прямой к нормальному необходимо обе части общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Знак выбирается противоположным знаку C. В данном уравнении A=5, B= -12, C=26. Так как C>0, то нормирующий множитель берем со знаком минус, т.е.

$M = -\frac{1}{\pm\sqrt{25+144}} = -\frac{1}{13}$. Умножив на $M = -\frac{1}{13}$ данное уравнение, получим:

$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ - нормальное уравнение прямой: $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $P = 2$.

Пусть даны две прямые $\left.\begin{array}{l} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{array}\right\}$. Угол между двумя прямыми на плоскости может быть вычислен по формуле: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1=k_2$. Необходимое и достаточное условием перпендикулярности двух прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно (-1): $k_1k_2=-1$.

Замечание. Если уравнения двух прямых заданы в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угловые коэффициенты этих прямых будут иметь вид: $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$.

1) Пусть прямые параллельны. Тогда $k_1=k_2$ или $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, т.е. если в уравнениях двух прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны. Если при этом имеем отношение $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

2) Пусть прямые перпендикулярны. Тогда выполняется равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ - это есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде.

Пример. Даны уравнения двух прямых: $2x - y + 3 = 0$ и $4x - 2y + 5 = 0$. Как расположены эти прямые? Здесь $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $C_1 = 3$, $A_2 = 4$, $B_2 = -2$, $C_2 = 5$. Здесь выполняются соотношения: $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{5}$, т.е. прямые параллельны.

Пример. Даны уравнения двух прямых $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. Как расположены эти прямые?

Решение. Выпишем коэффициенты при переменных x и y: $A_1 = 3$ $B_1 = -2$, $C_1=1$, $A_2 = 2$, $B_2 = 3$, $C_2 = 4$. Рассмотрим выполнение условие перпендикулярности. Имеем: $A_1A_2 + B_1B_2 = 3\cdot2 - 2\cdot3 = 0$. Условие выполнено. Следовательно, данные прямые перпендикулярны.

Чтобы найти расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой, необходимо: 1)уравнение данной прямой привести к нормальному виду; 2)подставить вместо текущих координат, координаты точки $M_0(x_0,y_0)$.

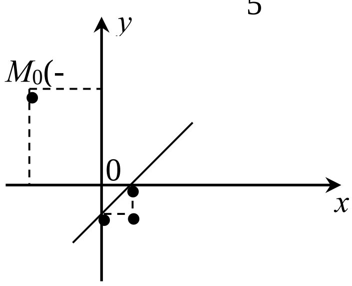
$|d| = | x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - P|$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3)$ до прямой $3x - 4y - 2 = 0$.
Решение. Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель

$$M = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Получим нормальное уравнение $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0$.

Тогда отклонение $d = \frac{3}{5} \cdot (-2) - \frac{4}{5} \cdot 3 - \frac{2}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{12}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{20}{5} = -4$



Отрицательное значение для отклонения d, указывает на то, что данная точка $M_0(-2,3)$ лежит от данной прямой с той же стороны, что начало координат. Искомое расстояние $|d| = |-4| = 4$.

Вопросы и задачи.

Задача 1. Дано общее уравнение прямой $3x - 2y + 12 = 0$. Составьте уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Задача 2. Составьте уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = 2$, проходящей через точку $M(-1;2)$.

Задача 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$ и $M_2(1;-3)$.

Задача 4. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 60 = 0$. Написать:

1) уравнение с угловым коэффициентом;
2) уравнение в отрезках;
3) нормальное уравнение.

Задача 5. Прямая на плоскости отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв.ед.

Задания:

1. Провести через точку пересечения прямых $x-y-3=0$, $2x+3y-11=0$, прямую, параллельную прямой $5x - 4y - 17 = 0$.

2. Луч света, проходящий через точку $M_1(3;-1)$, отражается от прямой $2x-y-1=0$ и после этого проходит через точку $M_2(5;3)$. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

3. Найти проекцию точки $M(3;2)$ на прямую $3x - 2y + 1 = 0$.

4. Даны вершины треугольника: $A(3;1)$, $B(-5; -5)$, $C(-1;4)$. Найти уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.

5. Даны вершины треугольника: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

6. Не вычисляя координаты вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через эти вершины параллельно противолежащим сторонам. Стороны треугольника заданы уравнениями: $5x-2y+6=0$; $4x-y+3=0$ и $x+3y-7=0$.

7. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.

9. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми: $3x - 4y - 10 = 0$; $6x - 8y+5=0$.

Вопросы:

1. Дайте определение угла между двумя прямыми. Как определяется косинус угла между двумя прямыми на плоскости?

2. Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности прямых, заданных а) общими уравнениями; б) уравнениями с угловым коэффициентом.

3. Как определить расстояние между а) точкой и прямой; б) двумя параллельными прямыми?

4. Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ признаком параллельности прямых?

5. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости? Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

6. Для каких прямых угловой коэффициент не определяется?

7. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.

8. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках?

Практическая работа № 5. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.

Цель: сформировать представление об уравнении кривой второго порядка, уравнениях окружности, эллипса, гиперболы и параболы, научиться определять основные параметры кривых по заданному уравнению.

Теоретическая часть

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром. Каноническое уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$. Если $x_0 = y_0 = 0$, то центр окружности находится в начале координат и уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$

Пример. Определить центр и радиус окружности, данной уравнением:

$$x^2+y^2-8x+6y+21=0$$

Решение. Данное уравнение представляет окружность, так как отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при квадратах координат равны между собой. Приводим данное уравнение к каноническому виду. Для этого перепишем данное уравнение в виде:

$(x^2-8x)+(y^2+6y)+21=0$ или

$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)+21-16-9=0$ или

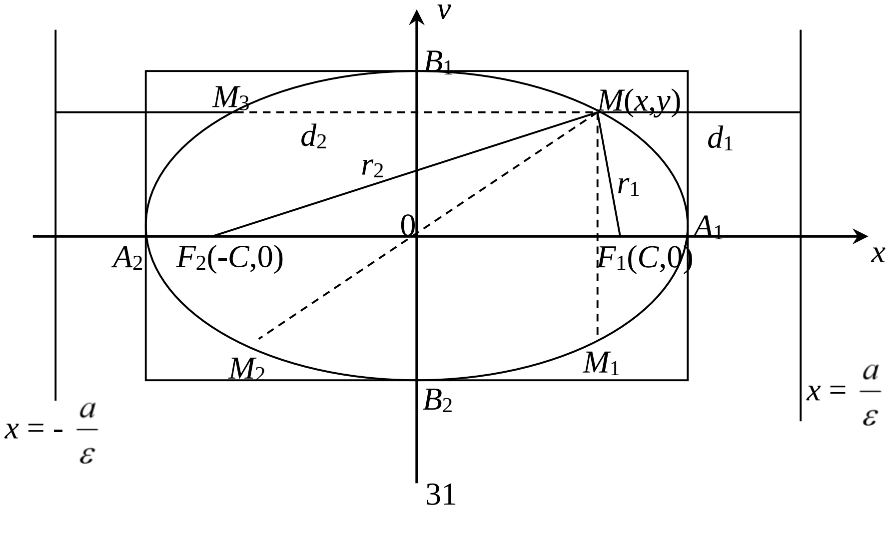
$(x-4)^2+(y+3)^2=4$

Откуда заключаем, что центр окружности имеет координаты $C(4,-3)$ и $R = 2$.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Если $a = b$, то эллипс становится окружностью.

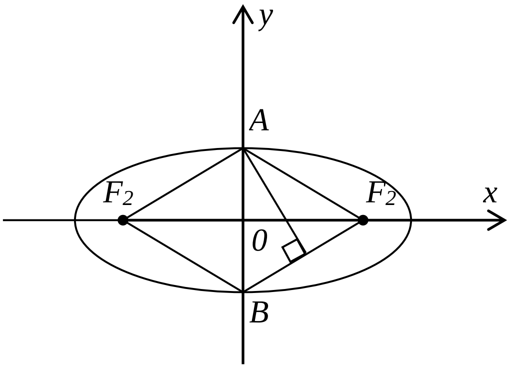
Величина $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается через букву ε .

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются директрисами эллипса. Директрисы эллипса обладают свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.



Пример. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

Решение: По условию задачи $AF_1 = 5$ и $AK = 4,8$. Тогда площадь ромба $S = AF_1 \cdot AK = 4,8 \cdot 5 = 24$.



С другой стороны, как известно, площадь равна половине произведения диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot F_1F_2$; но $AB = 2b$, $F_1F_2 = 2c$. Тогда $S = 2bc = 24$, откуда $b = \frac{12}{c}$. Далее, $AO^2 + OF_1^2 = AF_1^2$ или $b^2 + c^2 = 25$. Следовательно, для определения c имеем: $\frac{144}{c^2} + c^2 = 25$ или $c^4 - 25c^2 + 144 = 0$.

Обозначим $c^2 = t$. Тогда имеем: $t^2 - 25t + 144 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2};\ t_1 = 16,\ t_2 = 9.$$

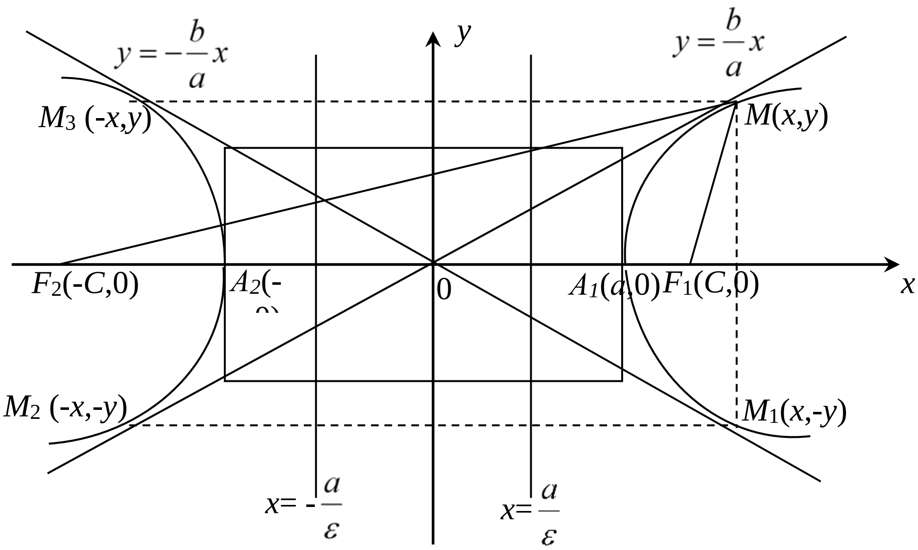
Так как $c > 0$, то $c_1 = 3$, $c_2 = 4$. Тогда $b_1 = 4$, $b_2 = 3$. Известно, что для эллипса $a^2 = b^2 + c^2$, тогда $a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $a = 5$.

Искомыми уравнениями эллипса будут: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (если фокусы лежат на оси Ox) и $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (если фокусы лежат на оси Oy).

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если гипербола задана своим каноническим уравнением, то главными осями гиперболы являются оси координат, а центр гиперболы находится в начале координат.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершине, называется основным прямоугольником гиперболы. Данный прямоугольник имеет вершины в точках A_1 (a, b), A_2 $(a, -b)$, A_3 $(-a, -b)$, A_4 $(-a, b)$. Диагональ основного прямоугольника называются асимптотами гиперболы. Уравнения асимптот имеют вид: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра, называются директрисами гиперболы.



Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равностоящих от одной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Вопросы и задачи.

Задача 1. Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Задача 2. В эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписан правильный (равносторонний) треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

Задача 3. В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят чрез фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

Задача 4. На гиперболе $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиус-векторы этой точки и угол между ними.

Задача 5. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Задача 6. Вычислить параметр параболы $y^2=2px$, если известно, что она касается прямой $x-2y+5=0$.

Задача 7. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота – 6 м.

Задача 8. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой p = 0,1 м. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстояние 2 м от места выхода.

Вопросы.

1. Запишите общее уравнение кривой второго порядка.
2. Что такое окружность? Запишите каноническое уравнение окружности. Какие особенности имеет общее уравнение окружности?
3. Дайте определение эллипса. Запишите его каноническое уравнение. Проведите с помощью канонического уравнения исследование формы эллипса.
4. Что такое эксцентриситет и директрисы эллипса?
5. Как определяются фокальные радиусы эллипса?

6. Дайте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы. Какая гипербола называется сопряженной данной?

7. Сделайте чертеж гиперболы. Напишите уравнения асимптот гиперболы.

8. Дайте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы. Что такое параметр параболы?

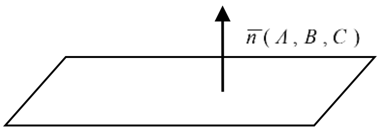
Практическая работа № 6. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Цель: сформировать представление о различных способах задания плоскости, научиться определять расположение плоскости в пространстве по заданному уравнению, расстояние от точки до плоскости, угол между двумя плоскостями.

Теоретическая часть

Если фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат, то плоскость (*P*) определяется уравнением первой степени относительно совокупности переменных *x*, *y*, *z*.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D произвольные постоянные, причем хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, вектор $\bar{n}$ = {A, B, C} перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором плоскости.



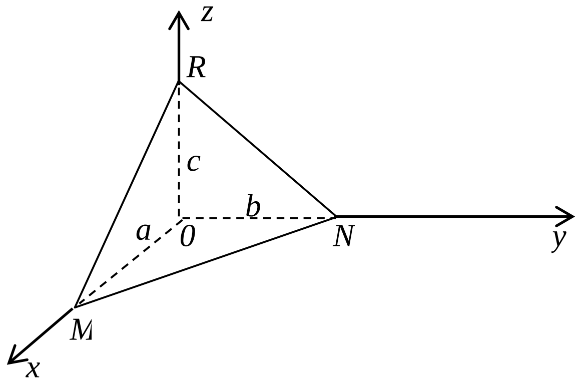
Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Свободный член равен нулю, т. е. $D = 0$: $Ax + By + Cz = 0$	плоскость проходит через начало координат
2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:	
$A = 0,$ *тогда* $By + Cz + D = 0$	плоскость параллельна оси *Ox*
$B = 0,$ *тогда* $Ax + Cz + D = 0$	плоскость параллельна оси *Oy*
$C = 0,$ *тогда* $Ax + By + D = 0$	плоскость параллельна оси *Oz*
б) $D = 0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:	
$A = 0,$ *тогда* $By + Cz = 0$	плоскость проходит через ось *Ox*
$B = 0,$ *тогда* $Ax + Cz = 0$	плоскость проходит через ось *Oy*
$C = 0,$ *тогда* $Ax + By = 0$	плоскость проходит через ось *Oz*
3. Два коэффициента при текущих координатах равны 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:	
$B = 0,$ $C = 0,$ *тогда* $Ax + D = 0$	плоскость параллельна плоскости *Oyz* (перпендикулярна оси *Ox*)
$A = 0,$ $C = 0,$ *тогда* $By + D = 0$	плоскость параллельна плоскости *Oxz* (перпендикулярна оси *Oy*)
$A = 0,$ $B = 0,$ *тогда* $Cz + D = 0$	плоскость параллельна плоскости *Oxy* (перпендикулярна оси *Oz*)
б) $D = 0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:	
$B = 0, C = 0,$ *тогда* $Ax = 0$ *или* $x = 0$	уравнение плоскости *Oyz*
$A = 0, C = 0,$ *тогда* $By = 0$ *или* $y = 0$	уравнение плоскости *Oxz*
$A = 0, B = 0,$ *тогда* $Cz = 0$ *или* $z = 0$	уравнение плоскости *Oxy*

Различные виды уравнений плоскости

1. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость не проходит через начало координат, а отсекает от осей координат соответственно отрезки *a, b, c*, т. е. плоскость проходит через точки *M(a,0,0)*, *N(0,b,0)* и *R(0,0,c)*.



Уравнение такой плоскости: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

2. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$((\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2})\cdot\overline{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки *A(2,1,3)*, *B(1,0,4)* и *C(1,1,5)*.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1-2 & 0-1 & 4-3 \\ 1-2 & 1-1 & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-2)-1(y-1)-1(z-3)+2(y-1) =$$

$= -2x + 4 - y + 1 - z + 3 + 2y - 2 = -2x + y - z + 6 = 0$ или

$2x - y + z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Пусть даны две плоскости (P_1) и (P_2). Пусть даны их общие уравнения: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. При этом $cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить расстояние от точки M(-9,6,6) до плоскости 2x – 6y – 3z +9 =0.

Решение: $d = \frac{|2\cdot(-9) - 6\cdot 6 - 3\cdot 6 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \frac{63}{7} = 9.$

<u>Пример.</u> Найти острый угол между плоскостями:

$\mathbf{5x - 3y + 4z - 4 = 0,\ (1)}$

$\mathbf{3x - 4y - 2z + 5 = 0.\ (2)}$

Решение: По формуле
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$
$$\cos\varphi = \left|\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\right|,\quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$
$$\cos\varphi = 0{,}4990;\quad \varphi = 60°04'.$$

Вопросы и задачи.

Задача 1. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x – z + 5 = 0$.

Задача 3. В пучке плоскостей $2x – 3y + z – 3 + \lambda (x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; параллельна оси Ox; параллельна оси Oy; параллельна оси Oz.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\overline{a} = \{1; 1; 1\}$ и $\overline{b} = \{1; 1; -1\}$.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярно данной плоскости.

Задача 6. Две грани куба лежат на плоскостях: $2x – 2y + z – 1 = 0$ и $2x–2y+z+5= 0$. Вычислить объем этого куба.

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку G(4,2,-5).

Задача 8. Вычислить расстояние от точки M до плоскости α, если: 1) M (-2,7,1), α : $2x-6y+3z+1=0$;

2) M (1,-3,4), α :$2x-6y-3z+27=0$.

Задача 9. Найти величину острого угла между плоскостями:

11x-8y-7z-15=0, 4x-10y+z-2=0; 2) 2x+3y-4z+4=0, 5x-2y+z-3=0.

Задача 10. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки M1 (0,0,2) и M2 (0,1,0) и образующей угол 45 градусов с плоскостью OYZ.

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения плоскости.
2. Как найти расстояние от точки до плоскости?

3. Покажите, что всякое уравнение первой степени относительно совокупности переменных *x, y, z* определяет плоскость в прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве.

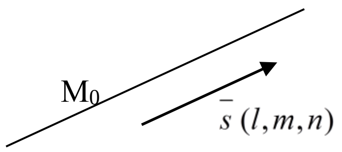
4. 1.Как определить величину угла между двумя плоскостями?
5. 2.Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
6. 3.Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ признаком параллельности плоскостей? Что можно сказать об этих плоскостях?
7. 4.Как Вы думаете, какое из приведенных ниже уравнений соответствует плоскости, проходящей через точки M(0,-3,2) и N(5,4,-1) параллельно оси *Oy*: *3x+5z-10 = 0, 3y-z-10 = 0, 2x-5y+10 = 0, 3x-5z+10 = 0?*

Практическая работа № 7. Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Цель: сформировать умение составлять необходимое уравнение прямой в пространстве, определять параметры прямой по уравнению и применять умение для решения практических задач. сформировать умение вычислять угол между двумя прямыми в пространстве, расстояние от точки до прямой, кратчайшее расстояние между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Положение прямой в трехмерном пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определенную точку M_0 при помощи ее радиус – вектора $\overline{Z}_0$ и вектор $\overline{S}\neq 0$, которому прямая параллельна. Вектор $\overline{S}$ при этом называется направляющей.



Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\left.\begin{aligned} x &= x_0+tl\\ y &= y_0+tm\\ z &= z_0+nt\end{aligned}\right\}$, канонические уравнения: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Любая прямая в трехмерном пространстве может быть выражена также уравнениями двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, которые определяют общее уравнение прямой в пространстве, если плоскости, определяемые этими уравнениями, различны и не параллельны.

Пример. Дано общее уравнение прямой: $\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0, \\ 3x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

Требуется привести данное уравнение к каноническому виду. Для этого сначала найдем точку $M_o(x_o,y_o,z_o)$, лежащую на данной прямой.

Положим $z=z_0=0$ в и решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2 \end{cases}.$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив с первым уравнением, получим $11x=11$, $x=1$. Из второго уравнения $y=2–3x=2–3=–1$. Итак, точка $M_o(1,–1,0)$ найдена.

Находим направляющий вектор $\bar{s} = [\bar{n}_1 \bar{n}_2]$, где $\bar{n}_1 = \{2; -3; 1\}$, $\bar{n}_2 = \{3; 1; -2\}$.

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6l_1 + 3l_2 + 2l_3 + 9l_3 - l_1 + 4l_2 = 5l_1 + 7l_2 + 11l_3$$

Итак, точка $M_o(1,–1,0)$ и $\bar{s} = \{5; 7; 11\}$ найдены. Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{11}.$$

Углом между двумя прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным. Очевидно, за угол φ между прямыми можно взять угол между их направляющими векторами: $\bar{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\bar{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$, косинус которого можно найти по формуле:

$$\cos\varphi = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Углом между прямой $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

$Al+Bm+Cn=0$ – условие параллельности прямой и плоскости.

$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Вопросы и задачи.

Задача 1. Составить параметрические уравнения прямых: $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x+5y+2z+1=0, \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y+4z-8=0, \\ 6x+3y+2z-18=0. \end{cases}$

Задача 2. Определить координаты направляющего вектора прямой 1) $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y-z\quad=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x+y-z+5=0 \\ 3x+2y+4z+7=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x-y+7z-1=0 \\ -x+2y+11z+5=0 \end{cases}$.

Задача 3. Вычислить косинус угла между прямыми:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{5}$ и $\begin{cases} x=5t-4 \\ y=-2t \\ z=-t+1 \end{cases}$; 2) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1}$ и $\begin{cases} x=t-3 \\ y=5t+1 \\ z=-t+2 \end{cases}$;

3) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-11}{1}$ и $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-3t+2 \\ z=-t+4 \end{cases}$; 4) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t+1 \\ z=5 \end{cases}$.

Задача 4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$ и плоскости $x+y-z-3=0$.

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения прямой линии в пространстве.
2. Что такое направляющий вектор прямой?
3. Как определить координаты направляющего вектора прямой по общему ее уравнению?
4. Как преобразовать общее уравнение прямой к каноническому?
5. Как определить угол между двумя прямыми в пространстве?
6. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в трехмерном пространстве?
7. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в трехмерном пространстве?
8. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Практическая работа № 8. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Цель: сформировать умение вычислять производные элементарных функций, сложной и обратной функций и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u=\varphi(x)$ *имеет в точке* x *производную* u', *то в этой точке*

$$(Cu)'=Cu' \quad (C=const).$$

Пример

$$y = 5\cos x, \qquad y' = (5\cos x)' = 5(\cos x)' = -5\sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

<u>Пример</u>

$$y = x^5 - 3x^2 + 2x - 1,$$

$$y' = (x^5)' - (3x^2)' + (2x)' - (1)' = 5x^4 - 6x + 2.$$

III. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то справедлива формула

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

<u>Пример</u>

$y = (x^2 - 3x)\sin x,$

$y' = (x^2 - 3x)'\sin x + (x^2 - 3x)(\sin x)' = (2x - 3)\sin x + (x^2 - 3x)\cos x.$

<u>Пример</u>

$y = (x-1)(x-2)(x-3),$

$y' = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$

IV. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, причем в этой точке $v \neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

<u>Пример</u>

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x \neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$y = \frac{a}{u}$; $y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$ (a — постоянная величина);

$y = u^n$; $y' = nu^{n-1} \cdot u'$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt{u}; \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u';$$

$$y = a^u;\ y' = a^u \cdot \ln a \cdot u';\ y = e^u;\ y' = e^u u';\ a > 0,\ a \neq 1;$$

$$y = \log_a u; \qquad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a};$$

$$y = \ln u; \qquad y' = \frac{1}{u} u';$$

$$y = \sin u; \qquad y' = \cos u \cdot u';$$

$$y = \cos u; \qquad y' = -\sin u \cdot u';$$

$$y = \operatorname{tg} u; \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u';$$

$$y = \operatorname{ctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';$$

$$y = \sec u; \qquad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u';$$

$$y = \operatorname{cosec} u; \qquad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u';$$

$$y = \arcsin u; \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$y = \arccos u; \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$$

$$y = \operatorname{arctg} u; \qquad y' = \frac{1}{1+u^2} u';$$

$$y = \operatorname{arcctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$$

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x. С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x. В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x.

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$.

Пример $y = u^3$. Если взять $u = x^2 - 3x + 1$, то получим сложную функцию $y = \left(x^2 - 3x + 1\right)^3$.

Пример $y = \sqrt{u}$, $u = 2 - x$. Тогда $y = \sqrt{2 - x}$.

Пример $y = \dfrac{1}{u + |u|}$, $u = \sin x$. Тогда $y = \dfrac{1}{\sin x + |\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u', то существует и конечная производная от y по x, причем $y' = f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример $y=\left(1+x^2\right)^5$. Положим $y=u^5$, $u=1+x^2$. $y'=5u^4u'=5\left(1+x^2\right)^4\left(1+x^2\right)'=10x\left(1+x^2\right)^4$.

Пример $y=\sin 3x$, т. е. $y=\sin u$, где $u=3x$. $y'=\cos u\, u'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример $y=(1+\sin 2x)^3$, $y'=3(1+\sin 2x)^2(1+\sin 2x)'=3(1+\sin 2x)^2\cos 2x(2x)'=6(1+\sin 2x)^2\cos 2x$.

Пусть дана функция $y=f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, ε - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения ε. Если функция $y=f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E, для которого $y=f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x=g(y)$, которую называют обратной для функции $y=f(x)$. Она имеет своей областью задания множество ε, а областью изменения E; E и ε поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y=f(x)$ и $x=g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x)\neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Вопросы и задачи.

Задача 1. Найти производную функции в точке x=0:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^3+x^2\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x^2\cos\dfrac{1}{9x}\right)+2x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x\cos\dfrac{1}{5x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\operatorname{tg}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x\sin\dfrac{3}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}-1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. 1. $y=2x^3+5x^2-7x-4$

2. $y=\sqrt{x}$
3. $y=-ctg\, x-x$
4. $y=\frac{1}{x^2}$
5. $y=\sqrt[3]{x^2}$
6. $y=5\sin x+3\cos x$
7. $y=5(tg\, x-x)$
8. $y=\frac{1}{e^x+1}$
9. $y=2^{x^2}$
10. $y=x\sqrt{x}$

Задача 3. Найти производные заданных функций:

1. $y=2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 3. $y=\ln^2(1-\cos x)$.

4. $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$. 5. $y=\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+\ln^2 3}$. 6. $y=\frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y=\operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$. 9. $y=\ln(1+\sqrt{\operatorname{th} x})$.

10. $y=\ln\sin 3-\frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 4. Вычислить производную функции

а) $y=5^x+x\ln x$, в точке $x_0=1$;

б) $y(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x\ \ -4x^3+5$, в точке $x_0=1$;

в) $f(x)=2x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0=4$;

г) $f(x)=4x^3+6x+3$ в точке $x_0=1$.

Задание 5. Вычислить производные:

а)

1) $y=\arcsin 5x$; 2) $y=\arcsin\sqrt{x}\,(x>0)$; 3) $y=\arcsin mx$;
4) $y=\arccos 6x$; 5) $y=\arccos(1-x^2)$; 6) $y=\arccos\frac{1}{x}$.

б)

1) $y=\operatorname{arctg} 5x$; 2) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 3) $y=\operatorname{arctg} 3x^2$;
4) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y=\operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x^2}$.

в)

1) $y=\ln(ax+b)$; 2) $y=\ln^5 x$; 3) $y=\ln\sin x$;
4) $y=\ln\operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y=x\ln x$; 6) $y=\frac{\ln x}{x}$;
7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 8) $y=\ln(\ln x)$.

Вопросы

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
4. Какая функция называется сложной?
5. Объясните правила дифференцирования сложной функции.

6. Какая функция называется обратной данной?
7. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Практическая работа № 9. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Цель: сформировать умение применять производную функции при ее исследовании и построении графика.

Теоретическая часть

Точки, в которых функция имеет экстремумы, следует искать среди тех внутренних точек ее области задания, где либо $f'(x)=0$*, либо* $f'(x)=\infty$*, либо* $f'(x)$ *не существует*. Все эти случаи реализуются, например, для функций $y=x^2$, $y=x^{2/3}$, $y=|x|$, каждая из которых имеет минимум при $x = 0$.

Точки указанного вида условимся называть критическими точками. Не в каждой критической точке обязательно будет экстремум. Действительно, точка x = 0 будет критической для каждой из функций $y=x^3$ ($y'=3x^2, y'=0$ при x=0), $y=\sqrt[3]{x}$ ($y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}, y'=\infty$ при x=0),

Следующие теоремы позволяют определить, имеется в данной критической точке экстремум или нет, и если имеется, то максимум или минимум.

Теорема 1. *Пусть* x_0*—критическая точка и функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке. Если в некоторой окрестности точки* x_0*:*

1) $f'(x)>0$ *при* $x<x_0$ *и* $f'(x)<0$ *при* $x>x_0$*, т. е. при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с плюса на минус, или*

2) $f'(x)<0$ *при* $x<x_0$ *и* $f'(x)>0$ *при* $x<x_0$*, т. е. при переходе через* x_0 *производная меняет знак с минуса на плюс, или*

3) производная не меняет знака при переходе через x_0*, то в случае 1) имеет место максимум, в случае 2)—минимум, в случае 3) экстремума нет.*

<u>Пример</u>. $f(x)=x^3-3x+1$. Функция всюду дифференцируема. Следовательно, все критические точки находятся из уравнения

$$f'(x)=3x^2-3=0.$$

Отсюда

$$x^2-1=0,\ x_1=-1,\ x_2=1$$

— две критические точки.

1) $x_1=-1$. При x < — 1 имеем: $f'(x)=3x^2-3>0$; при $x>-1$ (но x<1): $f'(x)<0$. Следовательно, в точке $x_1=-1$ имеет место *максимум*.

2) $x_2=1$. При x<1 (но x> -1): $f'(x)=3x^2-3<0$; при x>1 имеем: $f'(x)>0$. Следовательно, в точке $x_2=1$ имеет место *минимум*.

Теорема 1 позволяет высказать следующие практически полезные соображения.

Пусть речь идет об отыскании экстремумов функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке и имеющей в нем *конечное* множество критических точек.

Найдя все критические точки, расположим их в порядке возрастания абсцисс:

$$a<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n<b \quad (1)$$

(a и b — концы рассматриваемого промежутка). В каждом из интервалов

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \tag{2}$$

существует конечная $f''(x) \neq 0$ (поскольку все точки, где $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или где $f'(x)$ не существует, вошли в число точек x_1, x_2, ... , x_n). Предполагая $f'(x)$ непрерывной в каждом из частичных интервалов (2) — на практике это обычно так и бывает, — нетрудно прийти к выводу, что $f'(x)$ *сохраняет знак* внутри каждого такого интервала (если бы $f'(x)$ *меняла* знак внутри какого-нибудь из интервалов (2), то по свойству непрерывных функций она обращалась бы в нуль в некоторой *внутренней* точке этого интервала, что невозможно). Чтобы найти этот знак, достаточно, например, установить его для какой-нибудь *конкретной* точки соответствующего интервала.

В результате интервалам (2) будет соответствовать некоторая последовательность знаков плюс и минус, характер чередования которых в силу теоремы 1 позволяет судить о наличии максимума (смена плюса на минус), минимума (смена минуса на плюс) или об отсутствии экстремума (сохранение знака) в соответствующих точках.

Пример. $f(x) = (x+1)^2 (x-1)^3$. Функция задана и непрерывна во всем бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$. Ее производная

$$f'(x) = 2(x+1)(x-1)^3 + 3(x+1)^2(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^2(5x+1) = 5(x+1)(x-1)^2\left(x + \frac{1}{5}\right) \tag{3}$$

всюду существует и конечна. Следовательно, критическими точками будут *лишь* те, для которых

$$f'(x) = 0,$$

т. е.

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{5},\ x_3 = 1.$$

Промежуток задания функции тем самым разбивается на интервалы

$$(-\infty, -1),\ \left(-1, -\frac{1}{5}\right),\ \left(-\frac{1}{5}, 1\right),\ (1, +\infty).$$

Соответствующая последовательность знаков производной имеет вид

$$+,\ -,\ +,\ +.$$

Следовательно, в точке $x_1 = -1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(-1) = 0$; в точке $x_2 = -\frac{1}{5}$ - минимум, причем $f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{16}{25} \cdot \frac{216}{125} = -\frac{3456}{3125}$, в точке $x_3 = 1$ экстремума нет.

Теорема 2. *Пусть в критической точке x функция* $f(x)$ *n раз дифференцируема* (*n* > 1)*, причем* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$*, но* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$*. Если n четное, то имеет место экстремум, а именно: при* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *—максимум, при* $f^{(n)}(x_0) > 0$*— минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет.*

Отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна в некотором промежутке. Если этот промежуток не является отрезком, то, как мы знаем, среди значений $f(x)$ может и не быть наибольшего или наименьшего. Однако можно указать простой признак, когда такие значения заведомо существуют.

Теорема 3. *Если в данном промежутке имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.*

Если наибольшее или наименьшее значение достигается во *внутренней* точке отрезка, то оно *необходимо* будет одним из максимумов или минимумов и, следовательно, будет достигаться в одной из критических точек. Но оно может достигаться и в конце отрезка. Отсюда следует, что для отыскания наибольшего или наименьшего значений $f(x)$ достаточно сравнить между собой ее значения во всех критических точках и в точках a и b; *наибольшее* из всех этих чисел будет *наибольшим значением* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$; *наименьшее* из этих чисел даст *наименьшее значение* $f(x)$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ имеет областью существования отрезок [−1,1]. Ее наибольшее и наименьшее значения, очевидно, достигаются в тех же точках, что и для функции $g(x)=(1-x^2)(1+2x^2)$ (рассматриваемой на упомянутом отрезке). Из уравнения

$$g'(x)=-2x(1+2x^2)+(1-x^2)\cdot 4x=2x(1-4x^2)=0$$

находим $x_1=0$, $x_2=-0{,}5$, $x_3=0{,}5$. В этих точках $g(x)$ имеет значения:

$$g(0)=1,\ g(-0{,}5)=g(0{,}5)=1{,}125.$$

Если сопоставим эти значения со значениями в концах $g(-1)=g(1)=0$, то увидим, что наибольшим значением для $g(x)$ на отрезке [−1, 1] будет 1,125 (при $x=\pm0{,}5$), наименьшим будет 0 (при $x=\pm 1$). Для функции $f(x)$ наибольшим значением будет тогда $\sqrt{1{,}125}$ (при $x=\pm0{,}5$), наименьшим — по-прежнему 0 (при $x=\pm 1$).

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$ и в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, не параллельную оси *Oy*.

Если в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над этой касательной, то говорят, что кривая в точке x_0 выпукла вниз. *Аналогично, если в некоторой окрестности* x_0 *кривая лежит* под *касательной, то говорят, что она в точке* x_0 выпукла вверх. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 кривая лежит по одну сторону упомянутой касательной, а справа от x_0 — по другую сторону, то говорят, что x_0 есть *точка перегиба* кривой.

Теорема 4. *Если в точке* x_0 *существует конечная производная* $f''(x_0)$*, причем* $f''(x_0)>0$*, то в точке* x_0 *кривая выпукла вниз, если же* $f''(x_0)<0$*, то кривая выпукла вверх.*

Теорема 5. *Пусть* $f''(x)$ *существует и конечна в некоторой окрестности точки* x_0*. Если* $f''(x)$ *меняет знак при переходе x через точку* x_0*, то* x_0*—точка перегиба. Если же* $f''(x)$ *в окрестности* x_0 *сохраняет знак, то в точке* x_0 *перегиба нет.*

Пример. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Вычисляем: $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. Уравнение $y'' = 6x - 6 = 0$ дает $x = 1$. При $x < 1$, очевидно, $y'' < 0$ (кривая выпукла вверх), если же $x > 1$, то $y'' > 0$ (кривая выпукла вниз). Точка $x = 1$ является точкой перегиба.

Отыскание асимптот

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Может случиться, что при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ кривая неограниченно приближается к некоторой фиксированной прямой $y = kx + b$, называемой *асимптотой* для данной кривой. Точнее говоря, *прямая* $y = kx + b$ *называется асимптотой для кривой* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0$.

Из высказанного определения следует, что кривая $y = f(x)$ имеет *горизонтальную* асимптоту $y = b$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (или соответственно при $x \to -\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right] = b$. (При $k = 0$ получаем опять горизонтальную асимптоту.)

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x \right] = 2$$

Следовательно, имеется асимптота (и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$): $y = x + 2$.

Пример. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке [-2;1].

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке [-2;1], как многочлен. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки, для чего продифференцируем функцию.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

Тогда $f'(x) = 0$, если $x = 0$ или $x = -1$ или $x = 1$.

Получили две критические точки $x = 0$ и $x = -1$ принадлежащие данному промежутку [-2;1]. Точка $x = 1$ не является внутренней и поэтому не критическая.

Вычислим значения функции на концах промежутка и в критических точках и выберем из них наибольшее и наименьшее.

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(0) = 3$$

$$f(-1)=1-2+3=2$$

Следовательно, $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=2$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=11$.

Вопросы и задачи.

Задача 1. Найти значения x, при которых функция $f(x)=4x+\dfrac{9}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 2. Найти значения x, при которых функция $f(x)=3x^2+\dfrac{48}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 3. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=x^3+1{,}5x^2+2$.

Задача 4. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Задача 5. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}-x$.

Задача 6. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\dfrac{-3x^2-5x-4}{x+1}$.

Задача 7. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\dfrac{x^2+3x-12}{x+5}$.

Задача 8. Найти все критические точки функции $f(x)=2x^2-6|x+1|+5$.

Задача 9. Найти все критические точки х функции $f(x)=x^2-5|x|+6$.

Вопросы

1.Сформулируйте условия монотонности функции.
2. Какие точки называются стационарными; критическими; точками экстремума?
3. Сформулируйте необходимые условие экстремума.
4. Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
5. Что такое точка перегиба?
6. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
7. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба.
8. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот Вы знаете?
9. Как определить наличие вертикальной асимптоты?
10. В каком случае прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции?

Практическая работа 10. Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

Цель: сформировать умение непосредственного интегрирования функции с использование простейших свойств интеграла, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Первообразная функция.

Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a,b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:F′(x) = f(x).

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgxdx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются другие способы интегрирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1.Найти неопределенные интегралы:

1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\,dx$;

2) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)(9x^2 + 10x)\,dx$; 3) $\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2x\,dx$;

4) $\int (2x^2+7)^3 x\,dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^3+8}\,x^2\,dx$; 6) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx$.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}}dx$; 8) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;

9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}dx$.

Задача 3. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

2) $\int \frac{2x}{x^2+5}dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2}dx$;

5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3}dx$;

8) $\int \frac{x}{1+x}dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x}dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2}dx$.

Вопросы:

1. Что такое первообразная функция?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Запишите по памяти таблицу основных неопределенных интегралов.

5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

Практическая работа 11. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл с помощью замены переменной и по частям, интегрировать элементарные дроби и рациональные функции, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Интегрирование элементарных дробей.

Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t=ax+ b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot\, arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx=\begin{cases}u=6x-5; & du=6dx;\\ x=\dfrac{u+5}{6};\end{cases}=$$
$$=\frac{1}{6}\int\frac{14u+70-24}{u^2+23}du=\frac{7}{3}\int\frac{udu}{u^2+23}+\frac{23}{3}\int\frac{du}{u^2+23}=\frac{7}{6}\ln(u^2+23)+\frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}}+C=$$
$$=\frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right|+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\begin{cases}u=x+3; & du=dx;\\ x=u-3;\end{cases}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$
$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\begin{cases}u=x-3; & du=dx;\\ x=u+3;\end{cases}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$
$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int\frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\begin{cases}dv_1=\dfrac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1=u; \quad du_1=du;\\ v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}};\end{cases}$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n} dx = \left\{ \begin{matrix} u = 2ax+b; & du = 2adx; \\ x = \frac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2+s)^n} \right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x-2; & du = dx; \\ x = u+2; & \end{matrix} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{matrix} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{matrix} \right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3} \right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$
$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases}A+B+C=9\\-4A-2B-6C+D=-30\\4A+4B+8C-6D=28\\-16A-8B+8D=-88\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=-30+4A+2B+54-6A-6B\\2A+2B+4C-3D=14\\2A+B-D=11\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14\\2A+B-24+2A+4B=11\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\4A+5B=35\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\50-10B+5B=35\end{cases}\qquad\begin{cases}C=9-A-B\\D=24-2A-4B\\4A+10B=50\\B=3\end{cases}\qquad\begin{cases}A=5\\B=3\\C=1\\D=2\end{cases}$$

Итого:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x\,dx.$ 2. $\int \arcsin x\,dx.$

3. $\int x^2 \sin x\,dx.$ 4. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx.$

5. $\int x \ln x\,dx.$ 6. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$

7. $\int e^{2x}\cos x\,dx.$ 8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$

9. $\int \sin \ln x\,dx.$ 10. $\int x^2 e^x\,dx.$

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$);

2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left(\text{подстановка} \quad x = \frac{1}{z}\right)$.

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Задача 3. Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби:

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}$.

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$.

Задача 4.

Вычислить:

1) $\int \frac{dx}{x-13}$; 2) $\int \frac{dx}{15-3x}$; 3) $\int \frac{dx}{4-7x}$; 4) $\int \frac{dx}{3-8x}$; 5) $\int \frac{3dx}{4x-9}$.

Задача 5.

Вычислить:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4x+14}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{x^2+3x+6}$;

4) $I_4 = \int \frac{dx}{x^2-9x+25}$; 5) $I_5 = \int \frac{dx}{x^2-7x+14}$; 6) $I_6 = \int \frac{dx}{x^2-x+14}$.

Задача 6.

Вычислить:

1) $\int \frac{dx}{5x^2+9x+10}$; 2) $\int \frac{dx}{7x^2-3x+5}$;

3) $\int \frac{dx}{9x^2+x+12}$; 4) $\int \frac{dx}{6x^2+7x+15}$;

5) $\int \frac{dx}{3x^2-11x+17}$.

Вопросы:

1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?
4. Какие дроби называют простейшими?

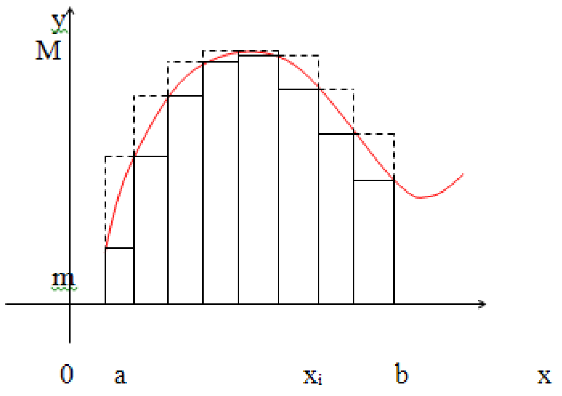
5. Какая дробь называется рациональной?
6. Какая рациональная дробь называется правильной?
7. Как разложить правильную дробь на простейшие?
8. В чем сущность метода неопределенных коэффициентов?

Практическая работа 12. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница, использовать метод замены переменной и интегрирование по частям, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b] .



Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t). Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1.Вычислить определенные интегралы.

.1. $\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x dx.$

2. $\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\cos 3x dx.$

3. $\int_{-1}^{0}\left(x^2+4x+3\right)\cos x dx.$

4. $\int_{-2}^{0}\left(x+2\right)^2\cos 3x dx.$

5. $\int\limits_{-4}^{0}\left(x^2+7x+12\right)\cos xdx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(2x^2+4x+7\right)\cos 2xdx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(9x^2+9x+11\right)\cos 3xdx.$

8.

$\int\limits_{0}^{\pi}\left(8x^2+16x+17\right)\cos 4xdx.$

9. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3x^2+5\right)\cos 2xdx.$

10. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(2x^2-15\right)\cos 3xdx.$

11. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3-7x^2\right)\cos 2xdx.$

12. $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-8x^2\right)\cos 4xdx.$

13. $\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3xdx.$

14. $\int\limits_{0}^{3}\left(x^2-3x\right)\sin 2xdx.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi}\left(x^2-3x+2\right)\sin xdx.$

16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2-5x+6\right)\sin 3xdx.$

17. $\int\limits_{-3}^{0}\left(x^2+6x+9\right)\sin 2xdx.$

18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2+17,5\right)\sin 2xdx.$

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-5x^2\right)\sin xdx.$

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{3}\left(3x-x^2\right)\sin 2xdx.$

Задача 2.
Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx.$

2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}.$

3. $\int\limits_{0}^{1}\frac{4\operatorname{arctg}x-x}{1+x^2}dx.$

4. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{x^2+4}.$

5. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{\left(2\sin x-3\cos x\right)^3}dx.$

7. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

8. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1/\left(2\sqrt{x}\right)+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}dx.$

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^4+1}.$

10. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

11. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

12. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}dx.$

13. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x-\left(\operatorname{arctg} x\right)^4}{1+x^2}dx.$

14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2+1}dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\sin 1} \frac{\left(\arcsin x\right)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

16. $\int\limits_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}dx.$

17. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

18. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}dx.$

19. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

Вопросы:

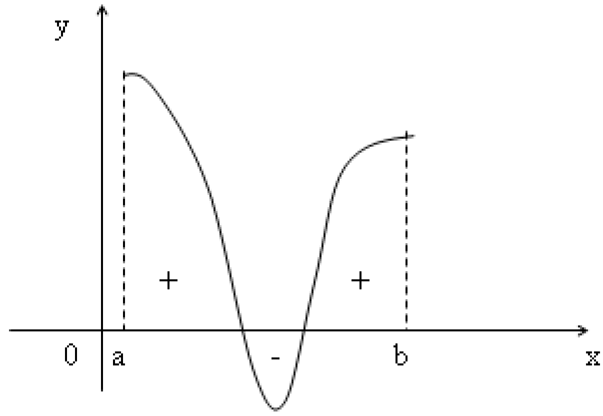
1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.
6. Формула Ньютона – Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Практическая работа 13. Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.

Цель: сформировать умение вычислять площади плоских фигур, длину дуги кривой, объем тела, объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения при помощи определенного интеграла и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Вычисление площадей плоских фигур.

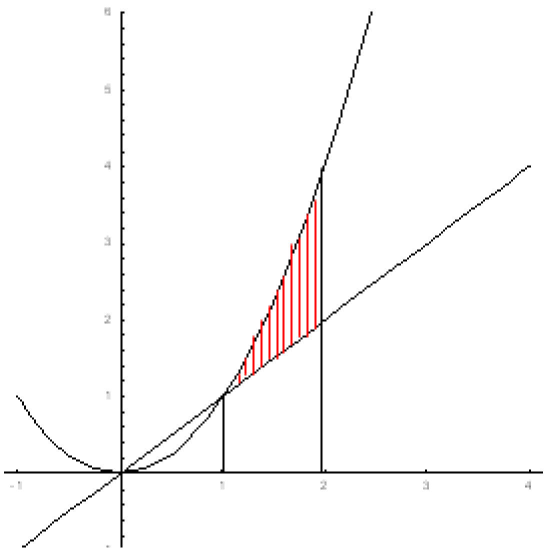


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = x, y = x^2, x = 2.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

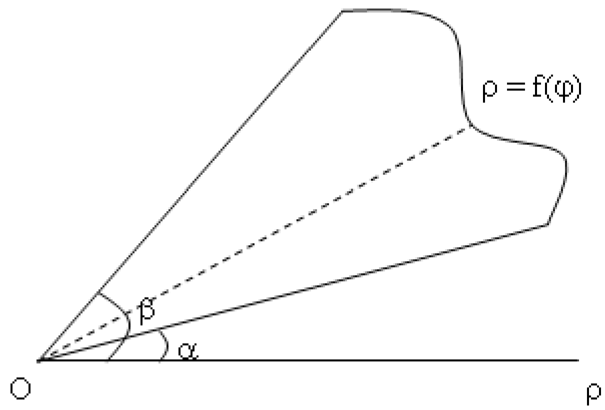
$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}(\text{ед}^2)$$

<u>Нахождение площади криволинейного сектора.</u>

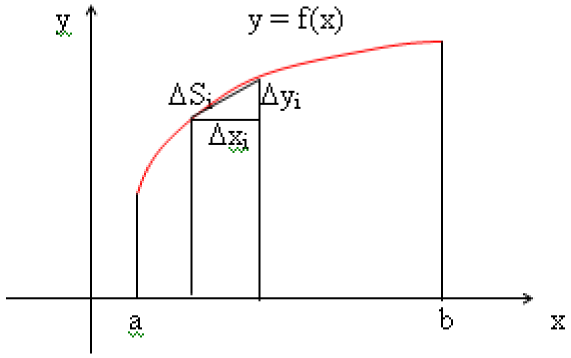
Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид ρ = f(φ), где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$$



<u>Вычисление длины дуги кривой.</u>



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции получаем:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\, dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

<u>Пример:</u> Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

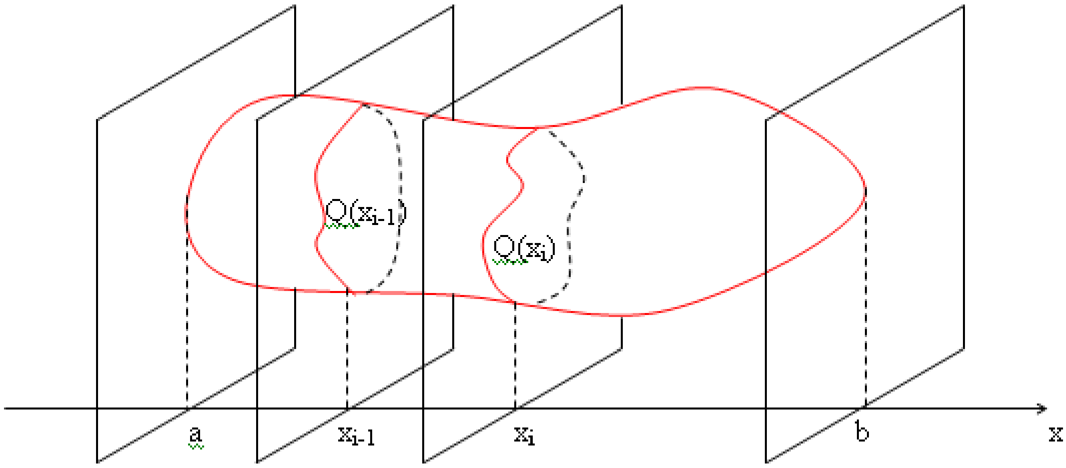
Тогда $\dfrac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \cdot \arcsin\dfrac{x}{r}\Big|_0^r = r\dfrac{\pi}{2}$. Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\rho' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\, d\varphi = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r.$$

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

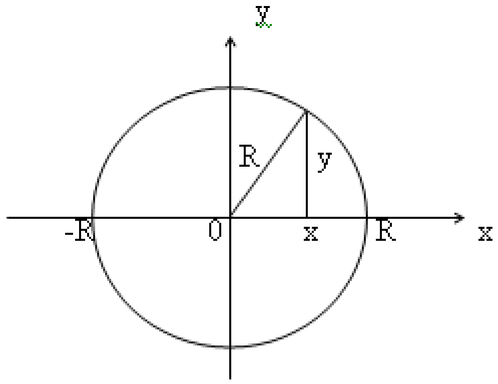
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx.$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx.$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

<u>Пример:</u> Найти объем шара радиуса R.

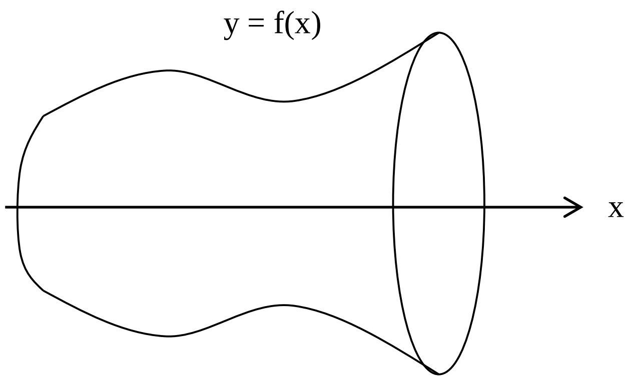


В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.
Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Объем тел вращения.

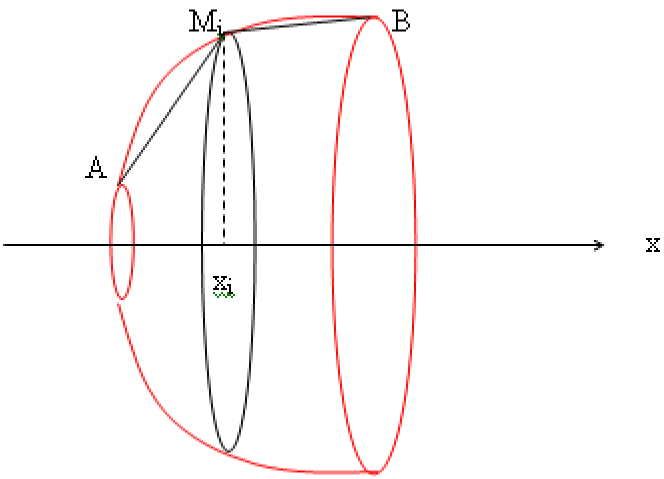
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = \left|f(x)\right|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Площадь поверхности тела вращения.



Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i \ .$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n} 2f(\varepsilon_i)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i \ .$$

Тогда $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций:

1. $y = 32 - x^2,\quad y = -4x.$
2. $y = 3\sqrt{x},\quad y = 3/x,\quad x = 4.$
3. $x = 5 - y^2,\quad x = -4y.$
4. $y = \sqrt{e^x - 1},\quad y = 0,\quad x = \ln 4.$
5. $y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad x = 0 \quad (x \geq 0).$
6. $y = \sqrt{x},\quad y = 1/x,\quad x = 16.$
7. $x = 27 - y^2,\quad x = -6y.$
8. $y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad x = 0 \quad (x \leq 0).$
9. $y = \sqrt{9 - x^2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 3/2.$
10. $y = 2/x,\quad y = 5e^x,\quad y = 2,\quad y = 5.$

Задача 2. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $y = \ln x, \qquad 2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{6}.$

2. $y = \ln\cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi/6.$

3. $y = e^x, \qquad \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}.$

4. $y = \ln\sin x, \qquad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$

5. $y = 2\sqrt{x}, \qquad 1/3 \leq x \leq 1/8.$

6. $y = \operatorname{ch} x, \qquad 0 \leq x \leq 1.$

7. $y = x^2/2, \qquad 0 \leq x \leq 1.$

8. $y = 1 - \ln x, \qquad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

9. $y = 1 - \operatorname{ch} x, \qquad 0 \leq x \leq 3.$

10. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \qquad 0 \leq x \leq 1/2.$

Задача 3. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi/3.$

3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi.$

4. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$

5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1.$

Задача 4. Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

1. $z = 4x^2 + 9y^2, \qquad z = 6.$

2. $z = 9x^2 + 4y^2, \qquad z = 6.$

3. $z = 2x^2 + 8y^2, \qquad z = 4.$

4. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 2.$

5. $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 3.$

6. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - 3z^2 = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 1.$

7. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 2z^2 = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 1.$

Задача 5. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX областей, ограниченных графиками заданных функций.

1. $y = -x^2 + 1, \quad y = 0.$ 2. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x.$

3. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$ 4. $y = x^2, \quad y = 2x.$

5. $y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad x = 0 \quad (0 \le x \le \pi/4).$

6. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad x = \pi/2 \quad (0 \le x \le \pi/2).$

7. $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1.$

8. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e.$

9. $y = \dfrac{2}{x}, \quad y = 1, \quad x = 1.$

10. $y = \cos^2 x, \quad y = 0 \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2).$

Вопросы.

1. Запишите известные вам формулы вычисления площадей плоских фигур.
2. Как вычисляется площадь плоской фигуры при помощи определенного интеграла?
3. Что такое криволинейная трапеция?
4. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, заданной параметрически?
5. Что такое криволинейный сектор? Как вычислить площадь криволинейного сектора?
6. Как вычислить длину дуги кривой?
7. Как вычислить объем тела при помощи определенного интеграла?
8. Как найти площадь поверхности вращения?
9. Какие физические (механические) приложения определенного интеграла вы знаете?

Практическая работа 14. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.

Цель: сформировать умение вычислять частные производные и дифференциал функции нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad f'_x(x,y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x, y),\ x = x(t),\ y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x, y),\ x = x(t, s),\ y = y(t, s)$, то:

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds.$$

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y):

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \ldots, t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{x^2} = \left(f'_x\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^3} = \left(f''_{x^2}\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^2 y} = \left(f''_{x^2}\right)'_y, \ldots$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f,$$

где $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ - оператор дифференцирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

1. $z = e^{xy}$.
2. $z = x\ln(x/y)$.
3. $z = \sin(xy)$.
4. $z = e^x \cos y$.
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \ln(x^2 + y)$.
7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
8. $z = \ln\sqrt[3]{xy}$.
9. $z = x\cos y + y\sin x$.
10. $z = (1 + x)^2(1 + y)^4$.

Задача 2.

Найти производные функции z=z(u,v):

z'_x и z'_y, $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

1. $z = u^2 + v^2, \quad u = x + y, \quad v = x - y$.
2. $z = \ln(u^2 + v^2), \quad u = xy, \quad v = x/y$.
3. $z = u^v, \quad u = \sin x, \quad v = \cos y$.
4. $z = u^2 + 2v^3, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = e^{xy}$.
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v), \quad u = x\sin y, \quad v = x\cos y$.
6. $z = \ln(u - v^2), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = y$.
7. $z = u^3 + v^2, \quad u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg}(y/x)$.
8. $z = \sqrt{uv}, \quad u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = xy^2$.
9. $z = e^{uv}, \quad u = \ln x, \quad v = \ln y$.
10. $z = \ln(u/v), \quad u = \sin(x/y), \quad v = \sqrt{x/y}$.

Задача 3.

Найти производные функций, заданных неявно:

1. $y^x = x^y$.
2. $y = 1 + y^x$.
3. $y = x + \ln y$.
4. $x + y = e^{x-y}$.
5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.
6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
7. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.
8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.
9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Вопросы:

1.Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.

2.Что такое полное приращение функции?

3.Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?

4.Поясните геометрический смысл частной производной.

5.Что такое дифференциал функции нескольких переменных?

6.Что такое линеаризация функций?

7.Пояните правила дифференцирования сложных и неявных функций.

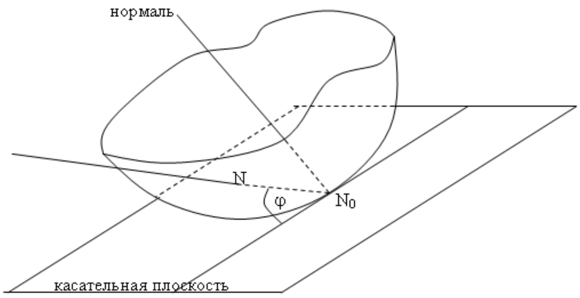
8. Как найти частные производные второго, третьего,…, n-го порядка?

9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Практическая работа 15. Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.

Цель: сформировать умение находить производную по направлению и градиент функции, уравнения касательной и нормали к поверхности, исследовать функцию нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z-1 = -(x-1) + 2(y-1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

Градиент функции вычисляется по формуле:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример. Найти градиент функции

$$u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$$

в точке M (2,1,1).

1. Находим частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{1+(y+z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$f'_x(2,1,1) = 4, \quad f'_y(2,1,1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_z(2,1,1) = -\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$\left.\operatorname{grad} f\right|_{(2,1,1)} = \{f'_x(2,1,1),\ f'_y(2,1,1),\ f'_z(2,1,1)\} = \left\{4,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\right\}.$$

Ответ. $\left.\operatorname{grad} f\right|_{(2,1,1)} = \left\{4, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right\}.$

Производная по направлению, определяемому вектором:

$$\bar{l} = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \sin\alpha \cdot \bar{j}$$

определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial l} = grad\, f \cdot \bar{l}.$$

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x,y) = f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$$

1) Если D(x_0, y_0) > 0, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если D(x_0, y_0) < 0, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума.

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение φ(x,y)=0, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)).

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение u = f(x, y) + λφ(x, y) называется **функцией Лагранжа.**

<u>Пример.</u> Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

2x + 3y – 5 = 0

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.

1. $z = x^2 + y^2, \quad M(1, -2, 5).$
2. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0, \quad M(4, 3, 4).$
3. $z = \sin x \cos y, \quad M(\pi/4, \pi/4, 1/2).$
4. $z = e^{x \cos y}, \quad M(1, \pi, 1/e).$
5. $z = y \operatorname{tg} x, \quad M(\pi/4, 1, 1).$
6. $z = \operatorname{arctg}(x/y), \quad M(1, 1, \pi/4).$
7. $x(y + z)(z - xy) = 8, \quad M(2, 1, 3).$
8. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M(2, 2, 1).$
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad M(2, 2, 2\sqrt{2}).$
10. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M(2, 2, 3).$

Задача 2.

Найти градиент функции в точке.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \quad M(2, 1, 1).$
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad M(1, 5, -2).$
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad M(\pi/2, 3\pi/2, 3).$
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1, 1, 0).$
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1, 1, 0).$
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad M(1, 3, 2).$
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1), \quad M(1, 1, 2).$
8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1, -1, 2).$
9. $u = xy - x/z, \quad M(-4, 3, -1).$
10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1, -3, 4).$

Задача 3.

Найти производную функции u в точке A по направлению к точке B.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$, $A(2,1,1)$, $B(0,2,0)$.
2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $A(1,5,-2)$, $B(1,7,-4)$.
3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 3\right)$.
4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(1,2,-1)$.
5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $A(1,1,0)$, $B(3,3,-1)$.
6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$, $A(1,3,2)$, $B(0,5,0)$.
7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$, $A(1,1,2)$, $B(6,-5,2\sqrt{5}+2)$.
8. $u = \ln(x^2 + y^2)$, $A(1,-1,2)$, $B(2,-2,3)$.
9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2})$, $A(1,-3,4)$, $B(-1,-4,5)$.
10. $u = xy - \frac{x}{z}$, $A(-4,3,-1)$, $B(1,4,-2)$.

Задача 4.Найти экстремум функции:

1. $z = x^2 - xy + y^2$.
2. $z = x^2 - xy - y^2$.
3. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.
4. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.
5. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.
6. $z = 4x + 2y - x^2 - y^2$.
7. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
8. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
9. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$.
10. $z = x/y + 1/x + y$.

Задача 5. Найти условный экстремум функций:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 3 = 0$ при $x + y + 3 = 0$;

2) $u = xy^2 z^3$ при $x + 2y + 3z = 12 (x > 0, y > 0, z > 0)$;

3) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

Вопросы:

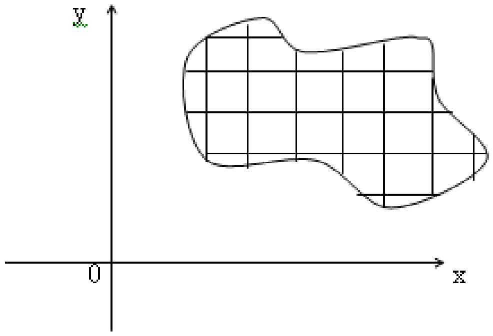
1.Дайте определение локального максимума (минимума) функции в точке.
2.Сформулируйте необходимые условия экстремума.
3. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
4. Объясните понятие экстремума функции в области.
5.Что такое касательная плоскость к поверхности?
6.Что такое нормаль?
7.Как составить уравнение касательной плоскости и нормали?
8. Дайте определение градиента функции.
9. Дайте определение производной по направлению для функции нескольких переменных. Запишите соответствующие формулы.

Практическая работа 16. Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять двойной интеграл и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой f(x,y)=0.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ. С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)\,dxdy\ .$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum_{\Delta}\sum f(x, y)\Delta y \Delta x\ .$$

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

1. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ существует.

2. Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ существует.

Свойства двойного интеграла.

1) $\iint\limits_{\Delta}[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx=\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)dydx-\iint\limits_{\Delta} f_3(x,y)dydx$.

2) $\iint\limits_{\Delta} kf(x,y)dydx=k\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx$.

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx=\iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)dydx.$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx=f(x_0,y_0)\cdot S$$

5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx\geq 0$.

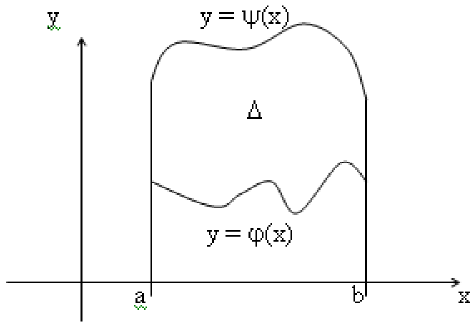
6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)dydx\leq\iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)dydx$.

7) $\left|\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx\right|\leq\iint\limits_{\Delta}|f(x,y)|dydx.$

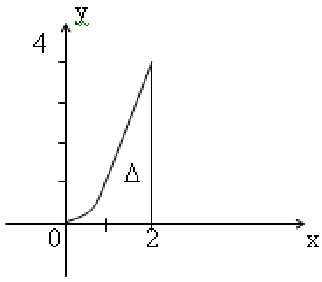
Вычисление двойного интеграла.

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$



<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: у = 0, у = х^2, х = 2.



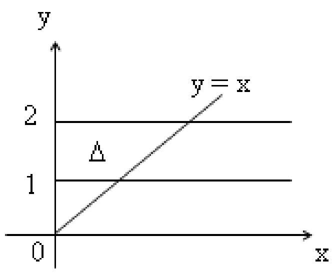
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x^2}(x-y)dy=\int\limits_0^2 (xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2}=\int\limits_0^2 (x^3-\frac{x^4}{2})dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2=$$

$=4-3{,}2=0{,}8$

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями у = с, у = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями у = х, х = 0, у = 1, у = 2.



$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^x (x^2+y^2)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^y dy=\int\limits_1^2\frac{4}{3}y^3dy=\frac{4}{12}y^4\Big|_1^2=\frac{64}{12}-\frac{4}{12}=5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx=\int_0^2(x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy=$$

$$=\int_0^2(y^6-y^5+y^3)dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{244}{21}$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

1. $\int_0^1 dx\int_1^{2^x} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_1^{2/x} f(x,y)\,dy.$

2. $\int_{1/4}^1 dy\int_{1/y}^4 f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{y^2}^4 f(x,y)\,dy.$

3. $\int_{-6}^{-3} dy\int_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{-3}^0 dy\int_0^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x,y)\,dy.$

4. $\int_0^{16} dy\int_{-y/4}^0 f(x,y)\,dx+\int_{16}^{32} dy\int_{-\sqrt{32-y}}^0 f(x,y)\,dx.$

5. $\int_0^{\sqrt{6}} dx\int_0^{\sqrt[4]{6x^2}} f(x,y)\,dy+\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{12-x^2}} f(x,y)\,dy.$

6. $\int_0^1 dy\int_{-y^2}^0 f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x,y)\,dx.$

Задача 2. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями:

1. $\iint\limits_D (2x-y)\,dx\,dy, \qquad y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}.$

2. $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy, \qquad y=2-x^2,\ \ y=2x-1.$

3. $\iint\limits_D (y\ln x)\,dx\,dy, \qquad y=\frac{1}{x},\ \ y=\sqrt{x},\ \ x=2.$

4. $\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y)\, dx\, dy, \qquad y = \frac{\pi}{4} - x, \;\; y = 0, \;\; x = 0.$

5. $\iint\limits_D \sin(x + y)\, dx\, dy, \qquad y = x, \;\; y = \frac{\pi}{2}, \;\; x = 0.$

6. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy, \qquad y = \frac{1}{x}, \;\; y = x, \;\; x = 2.$

7. $\iint\limits_D (x^2 + y)\, dx\, dy, \qquad y = x^2, \;\; y = \sqrt{x}.$

Вопросы:
1.Дайте определение двойного интеграла.
2. Поясните геометрический смысл двойного интеграла.
3.Перечислите свойства двойного интеграла.
4.Что такое повторный интеграл?
5.Опишите процесс вычисления двойного интеграла в декартовых координатах.

Практическая работа 17. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.

Цель: сформировать умение определять и решать ДУ с разделяющимися переменными, однородные ДУ, линейные ДУ и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.** Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2 y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\cos y dy = -2x dx$$

$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$

$$\int y\cos y dy = \left\{\begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix}\right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3} dy = dx$$

$$\int y^{-2/3} dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$27y = (x + C)^3$ - общий интеграл

$y = \dfrac{1}{27}(x + C)^3$ - общее решение

Линейные уравнения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1\cdot 2x^2$; $y = 2\cdot x^2$; $y = 2x\cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$. Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений:

1. $y\,dx+(1+x^2)\,dy=0.$

2. $y'=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y.$

3. $y'\,y=-2x\sec y.$

4. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y).$

5. $y\,(1+x^2)\,y'+x\,(1+y^2)=0.$

6. $e^x\,dx-(1+e^x)\,y\,dy=0.$

7. $y'=2e^x\cos x.$

8. $y'=y\ln y.$

9. $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}.$

10. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

Задача 2. Найти общее решений дифференциального уравнения:

1. $y'=e^{y/x}+\dfrac{y}{x}.$

2. $y'=\dfrac{y}{x}-1.$

3. $x^2y'=xy+y^2e^{-x/y}.$

4. $x\cos\dfrac{y}{x}\,dy+\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)\,dx=0.$

5. $(x^2+2xy)\,dx+xy\,dy=0.$

6. $xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=x+y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right).$

7. $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0.$

8. $(4y^2+x^2)\,y'=xy.$

9. $xy'\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)+x=y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right).$

10. $xy+y^2=(2x^2+xy)\,y'.$

Задача 3. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $xy'+y-e^x=0,\qquad y\,(1)=0.$
2. $y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x},\qquad y\,(0)=0.$
3. $y'\cos^2x+y=\operatorname{tg}x,\qquad y\,(0)=0.$
4. $y'-y\operatorname{th}x=\operatorname{ch}^2x,\qquad y\,(0)=0.$
5. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x,\qquad y\,(e)=\dfrac{e^2}{2}.$
6. $y'\sin x-y\cos x=1,\qquad y\,(\frac{\pi}{2})=0.$
7. $y'-y\operatorname{tg}x=\cos x,\qquad y\,(0)=0.$

Вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Что называют общим (частным) решением дифференциального уравнения?
4. В чем сущность задачи Коши?
5. Приведите пример дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6. Опишите ход решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение называют однородным?
8. Какое дифференциальное уравнение называют линейным?
9. Опишите метод Бернулли решения линейных дифференциальных уравнений.

Практическая работа 18. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Цель: сформировать умение определять вид ДУ и выбирать способ решения ДУ высшего порядка, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0;\ y_0 = 1;$ $y_0' = -1;\quad y_0'' = 0.$

$$y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x = 0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p \right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной: $p = y'; \qquad y'' = \dfrac{dp}{dy} p;$

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2-4yp=0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy}-p-4y\right)=0;$$

1) $y\dfrac{dp}{dy}-p-4y=0; \qquad \dfrac{dp}{dy}=4+\dfrac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u=\dfrac{p}{y}$.

$$u+\frac{du}{dy}y=4+u; \qquad du=4\frac{dy}{y};$$

$$\int du=4\int\frac{dy}{y}; \qquad u=4\ln|y|+4\ln C_1; \qquad u=4\ln|C_1y|;$$

$$p=4y\ln|C_1y|;$$

С учетом того, что $p=\dfrac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=4y\ln|C_1y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1y|}=\int dx;$$

$$x=\frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1y|)}{\ln|C_1y|}=\frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1y|\right|+C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1y|\right|=4x+C;$

2) $p=0; \qquad y'=0; \qquad y=C;$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'',\ldots, y^{(n)}$ вида:

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x);$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0\neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y''=1-y'^2$.	2. $xy''+y'=0$.
3. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$.	4. $x^2y''+xy'=1$.
5. $xy'''+y''=1+x$.	6. $y'''^2+y''^2=1$.
7. $y'(1+y'^2)=y''$.	8. $y''=-x/y'$.
9. $x\,y''+y'+x=0$.	10. $y'''^2=4y''$.

Задача 2. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $y'' y^3 = 1,$ $\quad y(1/2) = 1,$ $\quad y'(1/2) = 1.$

2. $y y'' + y'^2 = 1,$ $\quad y(0) = 1,$ $\quad y'(0) = 1.$

3. $y'' - y'^2 + y'(y-1) = 0,$ $\quad y(0) = 2,$ $\quad y'(0) = 2.$

4. $y^2 + y'^2 - 2y y'' = 0,$ $\quad y(0) = 1,$ $\quad y'(0) = 1.$

5. $3y' y'' = y + y'^3 + 1,$ $\quad y(0) = -2,$ $\quad y'(0) = 0.$

Задача 3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y = \cos x.$ 2. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x.$

3. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$ 4. $y'' + y = 3\sin x.$

5. $y'' + y = 4x\cos x.$ 6. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

7. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x.$ 8. $y'' - 2y = 2x\, e^x(\cos x - \sin x).$

9. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x.$ 10. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x.$

Вопросы:

1. Какие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка Вы знаете?

2. Какую замену переменной необходимо провести, если в уравнении явно не содержится искомая функция; независимая переменная?

3. Какое уравнение называют линейным с постоянными коэффициентами?

4. Как строится общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

5. Как найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

Практическая работа 19. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.

Цель: сформировать умение делать вывод о сходимости ряда на основании необходимого и достаточных признаков сходимости знакопостоянных рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

при этом числа $u_1, u_2, \ldots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $\quad n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n > 0,\ \ v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ne 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … =* $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le 1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le 1$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\ne 0,$ то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти сумму ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+5n+6}$. 2. $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\frac{3}{n^2-5n+6}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{30}{25n^2+5n-6}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2+3n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{90}{4n^2+8n-5}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16}{16n^2-8n-3}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+1)(n+2)}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

Задача 2. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$. 4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5-2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}+1}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Задача 3. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n!)^3}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(2n)!}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n^2}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{n/2}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} e^{-n}$.

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называют знакопостоянным?
3. Что такое сумма ряда?
4. Какой ряд называют сходящимся?
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Сформулируйте известные Вам достаточные признаки сходимости рядов.

Практическая работа 20. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Цель: сформировать умение делать вывод об абсолютной или условной сходимости числовых рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$, *то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho>1$ ряд будет расходящимся. При $\rho=1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами*.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда*.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k = 1,2,\ldots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n(n+2)}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2}{n^5+n^2+1}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+3n^2+2}}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n^2\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2-1}{3n^3}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^{n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^2\frac{\pi}{3^n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{\sqrt{n+2}}$.

Вопросы:

1. Какой ряд называется знакочередующимся (знакопеременным)?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какой ряд называется абсолютно сходящимся (условно сходящимся)?
4. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.
5. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Практическая работа 21. Вычисление вероятности события.

Цель: формирование основных понятий теории вероятностей.

Теоретическая часть:

Все события, происходящие в окружающем нас мире, можно разделить на две резко отличающиеся друг от друга группы: в отношении одних событий можно достаточно точно предвидеть, наступят они или нет, в отношении других – такое предвидение невозможно; наступление или ненаступление таких событий носит так называемый «случайный» характер.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Под случайными явлениями понимаются явления с неопределенным исходом, происходящие при неоднократном воспроизведении определенного комплекса условий.

Существуют два подхода к изучению этих явлений. Один из них – классический, состоит в том, что выделяются основные факторы, определяющие данное явление, а влиянием множества остальных, второстепенных, факторов, приводящих к случайным отклонениям его результата, пренебрегают. Таким образом, выделяется основная закономерность, свойственная данному явлению, позволяющая однозначно предсказать результат по заданным условиям. Этот подход часто используется в естественных («точных») науках.

При исследовании многих явлений и, прежде всего, социальных, такой подход неприемлем. В этих явлениях необходимо учитывать не только основные факторы, но и множество второстепенных, приводящих к случайным искажениям результата, т.е. вносящих в него элемент неопределенности. Поэтому другой подход к изучению явлений состоит в том, что элемент неопределенности, свойственный случайным явлениям и обусловленный второстепенными факторами, требует специальных методов их изучения.

Разработкой таких методов, изучением специфических закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях, и занимается теория вероятностей.

Основными понятиями теории вероятностей являются испытание и событие.

Под испытанием (опытом, экспериментом) понимается выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Случайным событием (или просто событием) называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Событие называется достоверным, если в результате испытания оно обязательно должно произойти. Например, выпадение от 1 до 6 очков при бросании игрального кубика.

Событие называется невозможным, если оно заведомо не наступит. Например, извлечение трех черных тузов из колоды карт.

События называются несовместимыми (несовместными), если возможно появление только одного события из этой группы событий. В противном случае события называют совместимыми (совместными). Например, получение студентом на экзамене по одной дисциплине оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно» - события несовместные, а получение тех же оценок на экзаменах по трем дисциплинам – события совместные.

События называются равновозможными, если в результате испытания по условиям симметрии ни одно из этих событий не является объективно более возможным. Например, извлечение туза, короля, дамы или валета из колоды карт, либо появление герба или решки при подбрасывании монеты – события равновозможные.

Для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления.

Пусть исходы некоторого испытания образуют полную группу событий и равновозможны, т.е. единственно возможны, несовместны и равновозможны. Такие исходы называются элементарными исходами или случаями.

Случай называется благоприятствующим (благоприятным) событию А, если появление этого случая влечет за собой появление события А.

Классическое определение вероятности: если система состоит из конечного числа единственно возможных, несовместимых событий, то вероятностью события А называют отношение числа m исходов испытаний, приводящих к событию А, к числу n всех испытаний, т.е.

$$P(A)= \frac{m}{n}.$$

Для любого события А справедливо неравенство: $0 < P(A) <1$.

Пример 1:

Лотерея состоит из 1000 билетов, среди них 200 выигрышных. Наугад вынимается один билет из 1000. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение: различных исходов в этом примере 1000 (n=1000). В интересующее нас событие А входят 200 исходов (m=200). Таким образом,

$$p(A) = \frac{200}{1000} = 0{,}2$$

Пример 2:

В коробке лежат 200 белых, 100 красных и 50 зеленых шаров. Наудачу вынимается один шар. Чему равны вероятности получить шар белого, красного или зеленого цвета?

Решение: Рассмотрим события: A={вынули белый шар}, B={вынули красный шар}, C={вынули зеленый шар}. n=350, тогда

$$P(A) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7},$$

$$P(B) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7},$$

$$P(C) = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}.$$

Часто для решения задач теории вероятностей применяют комбинаторику.

Пример 3:

Из колоды в 36 карт вытаскивают три. Какова вероятность того, что среди вынутых карт нет десяток?

Решение: В этом примере элементарным исходом является случайный набор из трех карт. Общее число элементарных исходов равно N=C_{36}^{3}, элементарные исходы считаем равновозможными. Благоприятных исходов (количество возможных наборов по три карты из той же колоды, но без десяток) m= C_{32}^{3} . Таким образом, вероятность события A {Вынуто 3 карты из 36 и среди них нет десяток}:

$$P(A) = \frac{C_{32}^{3}}{C_{36}^{3}} = \frac{248}{357}.$$

Вопросы и задачи:

1.Стрелок произвел 3 выстрела по мишени, A_1 – попадание при первом выстреле, A_2 – при втором, A_3 – при третьем. Выразить через A_1, A_2, A_3 и их отрицания следующие события: а) одно попадание; б) три промаха; в) три попадания; г) хотя бы один промах.

2.Монета подбрасывается 4 раза. Рассматриваются события – появление герба при i-ом подбрасывании (i=1,2,3,4). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_i следующие события: A – появились все 4 герба; B – появились все 4 цифры; C – появился хотя бы один герб; D – появилась хотя бы одна цифра; E – появился только один герб; F – появилась только одна цифра.

3.Брошены 3 монеты. Составить события, образующие полную группу. Сколько равновозможных исходов образуют полную группу событий? Укажите элементарные события, не образующие полной группы.

4. Приведите примеры:

А) трех событий, образующих полную группу;

Б) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы;

В) двух событий, несовместных и образующих полную группу событий, но не равновозможных.

5. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A-сумма выпавших очков равна 8; B-произведение выпавших очков равно 8.

6. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется разыскиваемая.

7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

8. Из букв слова УРАВНЕНИЕ выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) буквой Щ?

9. Из хорошо тасованной колоды, содержащей 52 карты, наугад выбирается одна карта. Найти вероятность того, что: а) она окажется бубновой масти; б) она окажется тузом; в) она окажется черной масти; г) эта карта либо туз, либо король, либо дама, либо валет, либо десятка.

10. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд, он получит слово МАТЕМАТИКА?
11. В старинной индейской игре "Тонг" два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Если для каждого игрока равнозначно показать один, два или три пальца, то чему равна вероятность того, что общее число показанных пальцев: а) четно; б) нечетно; в) больше четырех; г) меньше двух; д) простое?

Практическая работа 22. Вариационные ряды и их графическое изображение.
Цель: формирование основных понятий математической статистики.
Теоретическая часть:

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, на основе обработки статистических данных, полученных в результате наблюдений. Двумя основными задачами математической статистики являются:
- определение способов сбора и группировки этих статистических данных;
- разработка методов анализа полученных данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся:

а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости от других случайных величин и т.д.;

б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о значениях параметров известного распределения.

Для решения этих задач необходимо выбрать из большой совокупности однородных объектов ограниченное количество объектов, по результатам изучения которых можно сделать прогноз относительно исследуемого признака этих объектов.

Определим основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов.

Выборка – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Объем генеральной совокупности N и *объем выборки* n – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того, чтобы по исследованию выборки можно было сделать выводы о поведении интересующего нас признака генеральной совокупности, нужно, чтобы выборка правильно представляла пропорции генеральной совокупности, то есть была *репрезентативной* (представительной). Учитывая закон больших чисел, можно утверждать, что это условие выполняется, если каждый объект выбран случайно, причем для любого объекта вероятность попасть в выборку одинакова.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$, где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2,…, x_к$ называют вариантами, а $n_1, n_2,…, n_к$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим *относительные частоты* $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом.

Пример 1:

При проведении 20 серий из 10 бросков игральной кости число выпадений шести очков оказалось равным 1, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 2, 2, 0 , 5, 3, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 4, 1.

Составим вариационный ряд: 0,1,2,3,4,5. Статистический ряд для абсолютных и относительных частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	3	6	5	3	2	1
w_i	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной h, а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. Составленная по этим результатам таблица называется *группированным статистическим рядом*.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k), где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот.

Этапы первичной обработки выборки:

1.Ранжирование опытных данных (расположение значений признака по убыванию или возрастанию).

2.Частотный анализ (построение статистического ряда, определение относительных частот).

3.Группировка (частотная табуляция выборки).

Вопросы и задачи:

1. Имеются следующие данные об успеваемости 20 студентов группы по статистике в летнюю сессию: 4, 4, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4. Постройте: ряд распределения студентов по баллам оценок; ряд распределения студентов пол уровню успеваемости, выделив в нем две группы студентов: неуспевающие и успевающие. Изобразите каждый из рядов графически.

2.Построить кривую и гистограмму суммы налоговых неуплат, зафиксированных по условным регионам страны, данные по которым приведены в таблице (в млн. руб.):

21	43	72	84
22	54	75	32
26	49	77	45
27	53	78	65
28	54	81	12
32	58	83	34
34	61	84	54
37	65	84	34

39	68	88	41

3.Дана исходная выборка по росту и весу студентов группы:

Рост	160	168	175	169	170	169	162	166	163	160	158	173	162	173	156
Вес	48	58	69	64	69	70	51	60	67	54	48	58	44	50	56

Определите объем выборки. Составьте ранжированный и вариационный ряды по каждому из признаков.

4.Построить гистограмму нагрузки на одного следователя по расследованным уголовным делам по данным таблицы:

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2001	2003
По линии МВД	63,2	49,6	41	31,5	32,3	32,4	37,9	34,2	36,2
По линии прокуратуры	17,2	16,9	15,5	15,1	16	17,7	18,2	18,3	19,7

5.Три варианта исходных данных таблицы ниже – результаты телефонных переговоров в минутах сотрудников трех отдельных служб в течение рабочего дня. Требуется составить интервальный ряд распределения.

№ выборки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Служба 1	1,9	2,6	3,1	3,3	2,1	2,0	4,7	0,9	2,8
Служба 2	6,9	1,1	3,6	1,0	7,0	2,1	8,7	1,0	8,0
Служба 3	4,7	6,8	3,8	3,1	1,8	7,1	9,2	8,1	4,0

6. Дана выборка 7,3,3,6,4,3,5,1,2,1,3. Построить вариационный ряд. Определить размах выборки.

Практическая работа 23-24. Точечные оценки. Понятие интервального оценивания. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки. Оценка характеристик генеральной совокупности по малой выборке.

Цель: формирование основных понятий математической статистики при обработке результатов эксперимента.

Теоретическая часть:

Числовые показатели, характеризующие генеральную совокупность, называют *параметрами,* а числовые показатели, характеризующие выборку,— *выборочными характеристиками* или *статистиками.* Выборочные характеристики являются приближенными оценками генеральных параметров. Это величины случайные, варьирующие вокруг своих параметров. Оценки генеральных параметров по выборочным характеристикам могут быть точечными и интервальными.

Генеральные характеристики, или параметры, принято обозначать буквами греческого алфавита, а выборочные характеристики - латинского. Выборочная средняя $\overline{x}$ является оценкой генеральной средней a, выборочная дисперсия s_x^2—оценкой генеральной дисперсии σ_x^2, а среднее квадратическое отклонение s_x — оценкой стандартного отклонения σ_x, характеризующего генеральную совокупность. Это *точечные оценки,* представляющие собой не интервалы, а числа («точки»), вычисляемые по случайной выборке.

Требования, предъявляемые к точечным оценкам.

Выборочные характеристики как величины случайные, варьирующие вокруг своих генеральных параметров, в основном не совпадают с ними по абсолютной величине. Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Оценки должны удовлетворять по меньшей мере следующим требованиям: быть состоятельными, эффективными и несмещенными.

Точечная оценка статистики называется *состоятельной,* если при увеличении объема выборки она стремится к величине генерального параметра. Так, для генеральной средней состоятельной оценкой является выборочная средняя, для генеральной дисперсии состоятельной оценкой будет выборочная дисперсия.

Точечная оценка называется *эффективной,* если она имеет наименьшую дисперсию выборочного распределения по сравнению с другими аналогичными оценками, т. е. обнаруживает наименьшую случайную вариацию.

Оценка называется *несмещенной,* если математическое ожидание ее выборочного распределения совпадает со значением генерального параметра.

Выборочная средняя

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объёма n.

Выборочной средней $\overline{x}_в$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объёма n различны, то $\overline{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $f_1, f_2, ... f_k$, то $\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}$.

Замечание. Выборочная средняя, найденная по данным одной выборки, есть, очевидно, определённое число. Если же извлекать другие выборки того же объёма из той же генеральной совокупности, то выборочная средняя будет изменяться от выборки к выборке. Таким образом, выборочную среднюю можно рассматривать как случайную величину, а, следовательно, можно говорить о распределениях выборочной средней и о числовых характеристиках этого распределения (его называют выборочным), в частности, о математическом ожидании и дисперсии выборочного распределения.

Выборочная дисперсия

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\overline{x}_в$, вводят сводную характеристику – выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объёма n различны, то

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^2}{n}.$$

Если значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $f_1, f_2, ..., f_k$, причём $f_1 + f_2 + ... + f_k = n$, то

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 f_i}{n}.$$

Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы её математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить $D_в$ на дробь $\frac{n}{n-1}$. Сделав это, получим исправленную дисперсию, которую обычно обозначают через s^2:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{n}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 f_i}{n-1}.$$

Исправленная дисперсия является, несмещённой оценкой генеральной дисперсии.

Итак, в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_k)^2 f_i}{n-1}$.

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартным) называют квадратный корень из выборочной дисперсии: $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 f_i}{n-1}}$.

Замечание. Сравнивая формулы $D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 f_i}{n}$ и $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_k)^2 f_i}{n-1}$, видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях n объёма выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно n<30.

Пример. Среди свиноматок хозяйства было выбрано 64 свиноматки, данные по опоросам среди которых следующие:

8; 10; 6; 10; 8; 5; 11; 7; 10; 6; 9; 7; 8; 7; 9;11; 8; 9; 10; 8; 7; 8; 11; 8; 7; 10; 8; 8; 5; 11; 8; 10; 12; 7; 5; 7; 9; 7; 10; 5; 8; 9; 7; 12; 8; 9; 6; 7; 8; 7; 11; 8; 6; 7; 9; 10.

Определим среднее выборочное число поросят в пометах 64 свиноматок и вычислим показатели вариации для этой выборки.

Решение:

Выборочная средняя числа поросят в опоросах:

$$\overline{x_в} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 528/64 = 8{,}25$$
;

Выборочная дисперсия числа поросят:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 f_i}{n} = 218/64 = 3{,}41\,.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение числа поросят в опоросах:

$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{3{,}41} = 1{,}85$ поросят.

Исправленная выборочная дисперсия числа поросят:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = 64/63 * 218 = 3{,}46\,.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение числа поросят в опоросах:

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3{,}46} = 1{,}86$ поросят.

Итак, нами найдены следующие точечные оценки по данной выборке:

точечная оценка среднего числа поросят в опоросах для генеральной совокупности (то есть по всему хозяйству): 8,25 поросят;

точечная оценка среднего квадратического отклонения числа поросят в генеральной совокупности: 1,86 поросят.

При выборке малого объёма точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объёме выборки следует пользоваться интервальными оценками. Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Θ^* служит оценкой неизвестного параметра Θ. Будем считать Θ постоянным числом (Θ может быть и случайной величиной). Ясно, что Θ^* тем точнее определяет параметр Θ, чем меньше абсолютная величина разности $\left|\Theta - \Theta^*\right|$. Другими словами, если $\delta > 0$ и $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует точность оценки.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Θ^* удовлетворяет неравенству $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надёжностью (доверительной вероятностью) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$. Обычно надёжность оценки задаётся наперёд, причём в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

Пусть вероятность того, что $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$, равна γ: $P\left[\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta\right] = \gamma$.

Заменив неравенство $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$ равносильным ему двойным неравенством

$-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta$, или $\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$, имеем $P\left[\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta\right] = \gamma$.

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Θ, равна γ.

Доверительным называют интервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надёжностью γ.

Если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы:

$$M(\bar{X}) = a,\ \ \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Приняв во внимание, что по условию нам задана вероятность γ, получаем следующую формулу (чтобы получить рабочую формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через $\bar{x}$)

$$P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надёжностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Укажем ещё, что число *t* определяется из равенства $2\Phi_0(t) = \gamma$, или $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$; по таблице функции Лапласа находят аргумент *t*, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Надёжность γ=0,95 указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключён; лишь в 5 % случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, причём среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно воспользоваться результатами предыдущего параграфа, в котором σ предполагалось известным.

Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину $T = \frac{\bar{X} - a}{S/\sqrt{n}}$, которая имеет распределение Стьюдента с k = n-1 степенями свободы; здесь

$\overline{X}$ - выборочная средняя, S – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n – объём выборки.

Пользуясь распределением Стьюдента, находим:

$$P\left(\overline{X}-\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma.$$

Значит, доверительный интервал $\left(\overline{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},\overline{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$, покрывает неизвестный параметр a с надёжностью γ.

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве (то есть в генеральной совокупности) - распределена нормально. По выборке объёма n = 16 найдены выборочная средняя $\overline{x}$=20,2 кг и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s=0,8 кг. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надёжностью 0,95.

Решение: Найдём t_γ. Пользуясь таблицей, по γ=0,95 и n = 16 находим t_γ=2,13.

Найдём доверительные границы:

$$\overline{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}=20{,}2-\frac{2{,}13\cdot 0{,}8}{\sqrt{16}}=19{,}774\text{кг},$$

$$\overline{x}+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}=20{,}2+\frac{2{,}13\cdot 0{,}8}{\sqrt{16}}=20.626\text{кг}.$$

Итак, с надёжностью 0,95 неизвестный параметр a заключён в доверительном интервале 19,774<a<20,626 (кг).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s.

Доверительный интервал, покрывающий параметр σ с заданной надёжностью γ находят по следующей формуле:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q).$$

Здесь параметр q определяют, пользуются таблицей приложения 2, а s находят по выборке.

Пример. Случайная величина X – вес полугодовалого поросенка в хозяйстве – (то есть в генеральной совокупности) распределён нормально. По выборке объёма n=25 найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s=0,8 кг. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью 0,95.

Решение: По таблице по данным γ=0,95 и n=25 найдём q=0,32.

Искомый доверительный интервал таков:

0,8 (1 - 0,32)< σ<0,8 1(1+0,32), или

0,544<σ<1,056 (кг).

Замечание. Если q>1, то неравенство примет вид

0<σ<s(1+q).

Вопросы и задачи:

Задача 1. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения, вычислить:

1) доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ;
2) доверительный интервал для среднего квадратического отклонения для того же значения γ.

А) $\gamma = 0.999$
8.0 -1.1 13.5 10.0 2.4 4.1 20.0 12.4 13.4 4.8 7.8 0.0 10.9 13.7 6.6

Б) $\gamma = 0.95$
31.6 34.9 46.9 42.8 36.0 26.2 28.6 48.5 27.7 45.8 32.0 41.2 39.8 33.1 36.3 53.5 43.9 35.8 32.9 34.4

В) $\gamma = 0.999$
25.4 31.1 13.2 23.0 19.1 26.5 23.2 29.2 24.8 26.6 29.3 21.4 28.2 38.2 19.9 30.6 24.5 23.2.

Задача 2. По данным выборки, удовлетворяющей нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением s, вычислить доверительный интервал для математического ожидания при доверительной вероятности γ.

$s = 7$, $\gamma = 0.99$
13.4 8.6 22.1 2.3 14.6 13.0 11.1 29.4 23.3 1.7 13.6 2.1 21.6 6.1 8.6 6.6 16.0 11.6 16.6 1.6 15.8
18.9 10.6 11.9 0.1 10.7 3.8 -3.6 15.4 7.9
4.5 17.7 10.8 19.6 18.5 15.5 9.3 21.7 6.6 10.5 10.4 8.2 16.0 22.6 20.5 11.6 23.2 23.0 9.5 11.3 14.9
19.9 13.4 13.9 19.5 19.8 21.0 3.2 14.0 19.1
17.9 8.6 11.2 16.2 13.9 16.2 17.1 7.7 12.5 2.7 16.5 20.2 15.5 14.5 5.6 16.5 12.3 9.9 11.9 17.6 6.6
20.3 9.7 13.2 17.4 5.1 13.0 23.3 6.8 9.8
15.5 16.2 18.4 9.2 5.7 10.9 8.8 7.4 16.2 9.9

Практическая работа 25-26. Статистическая проверка гипотез.

Цель: сформировать представление о методах и принципах проверки статистических гипотез.

Теоретическая часть:

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Поскольку проверку производят статистическими методами, её называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближённое распределение которой известно. Обозначим эту величину в целях общности через K.

Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

После выбора определённого критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

В области статистики и биометрии в частности применяют два вида статистических критериев: *параметрические,* построенные на основании параметров данной совокупности (например, $\bar{x}$ и s^2_x) и представляющие функции этих параметров, и *непараметрические,* представляющие собой функции, зависящие непосредственно от вариант данной совокупности с их частотами. Первые служат для проверки гипотез о параметрах совокупностей, распределяемых по нормальному закону, вторые — для проверки рабочих гипотез независимо от формы распределения совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Применение параметрических критериев связано с необходимостью вычисления выборочных характеристик — средней величины и показателей вариации, тогда как при использовании непараметрических критериев такая необходимость отпадает.

t-критерий Стьюдента (t-распределение). Английский математик В. Госсет (печатавшийся под псевдонимом Стьюдент), в 1908 г. нашел закон распределения величины $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$, в которой генеральный параметр σ заменен на его выборочную характеристику s_x, т. е. нашел *закон распределения значений*

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Открытый Стьюдентом и теоретически обоснованный Р. Фишером *закон t-распределения* служит основой так называемой теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в нормально распределяющейся совокупности в зависимости от объема выборки. t-распределение зависит только от числа степеней свободы $k = n—1$, причем с увеличением объема выборки n t-распределение быстро приближается к нормальному с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ и уже при n>30 не отличается от него. Это видно из таблицы ниже, в которой приведены табулированные значения t-распределения и нормального распределения для разных значений t.

Распределение	**Нормированное отклонение *t***						
	0,5	**1.0**	**1.5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**
Нормальное	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995
Стьюдента при n = 3	0,333	0,577	0,728	0,816	0,870	0,905	0,927
n = 20	0,377	0,670	0,850	0,940	0,978	0,993	0,998
n =30	0,383	0,683	0,866	0,955	0,988	0,997	0,9995

Оценка разности средних. Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами μ_1 и μ_2. Разность μ_1- μ_2 этих параметров обозначим через D, то есть μ_1- μ_2=D, а дисперсию этой разности σ^2_D. Значения генеральных параметров неизвестны, однако по выборкам мы можем найти величины выборочных средних и разность между ними $\overline{x_1} - \overline{x_2}$, которую обозначим d, то есть $\overline{x_1} - \overline{x_2} = d$.

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mu_1 = \mu_2$, то есть $D=0$. Критерием для проверки H_0-гипотезы служит отношение

$$t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{s_d}$$

где t — переменная величина, следующая t-распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, а s_D - ошибка указанной разности, а n_1 и n_2 - объемы первой и второй выборок соответственно.

Так как, согласно H_0-гипотезе, $\mu_1 = \mu_2$, то t-критерий выражается в виде отношения разности выборочных средних к своей ошибке, т. е.

$$t = \frac{d}{s_d}.$$

H_0-гипотезу отвергают, если фактически установленная величина t-критерия (обозначаемая $t_ф$) превзойдет или окажется равной критическому значению $t_{кр}$ этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, т. е. при условии $t_ф \geq t_{кр}$.

Ошибку разности средних s_D определяют по формуле:

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x_1})^2 + \sum (x_j - \overline{x_2})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Пример. Изучали влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводили на двух группах животных: опытной и контрольной. Были исследованы кролики в возрасте от полутора до двух месяцев, массой тела 500—600 г. Опыт продолжался полтора месяца. Животных обеих групп содержали на одном и том же кормовом рационе. Однако опытные кролики в отличие от контрольных ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0,06 г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. За время опыта животные дали следующие прибавки живой массы тела:

Привесы, г		Отклонения от средней арифметической		Квадраты отклонений	
опыт	контроль	опыт $(x_i - \overline{x_1})$	контроль $(x_j - \overline{x_2})$	опыт $(x_i - \overline{x_1})^2$	контроль $(x_j - \overline{x_2})^2$
580	504	58	22	3364	484
692	560	54	34	2916	1156
700	420	62	106	3844	11236
621	600	17	74	289	5476
640	580	2	54	4	2916
561	530	77	4	5929	16
680	490	42	36	1764	1296
630	580	8	54	64	2916
	470		56	ч	3136
Σ = 5104	Σ = 4734	—	—	Σ =18 174	Σ = 28 632

$\overline{x_1}$ =638	$\overline{x_2}$ =526	—	—	Σ =46806

Средние арифметические привесов:

в опыте $\overline{x_1}$ = 5104/8= 638 г,

в контроле $\overline{x_2}$ =4734/9 = 526 г. Разница $\overline{x_1} - \overline{x_2} = d$ = 112 г. Чтобы установить, достоверна или случайна эта разница, нужно определить ошибку разности средних:

$$s_D = \sqrt{\frac{46806}{8+9-2} \cdot \left(\frac{8+9}{8 \cdot 9}\right)} = \sqrt{736{,}8} = 27{,}14.$$

Отсюда $t_ф$ = 112/27,14= 4,1.

По таблице для уровня значимости α = 0,01 и числа степеней свободы k = 9+8—2= 15 находим $t_{кр}$ = 2,95. Так как $t_ф$ > $t_{кр}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости (Р<0,01). Разница между средними величинами опыта и контроля оказалась в высшей степени достоверной.

Правильное применение параметрических критериев для проверки статистических гипотез основано на предположении о нормальном распределении совокупностей, из которых взяты сравниваемые выборки. Однако это не всегда имеет место, так как не все биологические признаки распределяются нормально. Немаловажным является и то обстоятельство, что исследователю приходится иметь дело не только с количественными, но и с качественными признаками, многие из которых выражаются порядковыми номерами, индексами и другими условными знаками. В таких случаях необходимо использовать *непараметрические критерии.*

Известен целый ряд непараметрических критериев, среди которых видное место занимают так называемые *ранговые критерии,* применение которых основано на ранжировании членов сравниваемых групп. При этом сравниваются не сами по себе члены ранжированных рядов, а их порядковые номера, или ранги. Далее мы рассмотрим некоторые непараметрические критерии, применяемые для проверки нулевой гипотезы при сравнении как независимых, так и зависимых выборочных групп.

U **- критерий Уилкоксона (Манна—Уитни).** Гипотезу о принадлежности сравниваемых независимых выборок к одной и той же генеральной совокупности или к совокупностям с одинаковыми параметрами, т. е. H_0-гипотезу, можно проверить с помощью *рангового критерия Уилкоксона (Манна—Уитни).*

Для расчета U -критерия необходимо:

1. Расположить числовые значения сравниваемых выборок в возрастающем порядке в один общий ряд и пронумеровать члены общего ряда от 1 до $N = n_1 + n_2$. (Эти номера и будут «рангами» членов ряда.)

2. Отдельно для каждой выборки найти суммы рангов и определить величины,

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

и

$$U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

которые отображают связь между суммами рангов первой и второй выборки.

3. В качестве U-критерия использовать меньшую величину $U_ф$, которую сравнить с табличным значением U_{kp} Условием для сохранения принятой H_0-гипотезы служит неравенство $U_ф > U_{kp}$. Критические точки U-критерия U_{kp} для n_1, n_2 и принимаемого уровня значимости α содержатся в таблице 3 Приложения.

Пример. На двух группах лабораторных мышей – опытной ($n_1 = 9$) и контрольной ($n_2 = 11$) – изучали воздействие на организм нового препарата. Испытание продолжалось один месяц. После этого масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

В опытной группе *80, 76, 75, 64, 70, 68, 72, 79, 83*.

В контрольной группе 70,78, 60, 80, 62, 68, 73, 60, 71, 66, 69.

Вычислим по выборкам: $\overline{x}_1$ =74,1 и $\overline{x}_2$ =68,8.

Проверим с помощью U-критерия, является ли разность в массе тела между опытной и контрольной группами мышей статистически достоверной.

Суммируя ранги отдельно для каждой группы, находим:

R_1= 4+6+9+12+14+15+17+19+20=112;

R_2= 1+2+3+5+7+8+10+11+13+16+18=94.

Подставляем эти данные в формулы:

$$U_1 = 112 - \frac{9 \cdot 10}{2} = 67; \qquad U_2 = 94 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 22$$

Меньшую величину U_2 = 22 сравниваем с табличным U_{kp} значением для $n_1=9$, $n_2=11$ и уровня значимости $\alpha=0,01$, которое равно $U_{kp}=19$.

Поскольку $U_ф > U_{kp}$, отвергнуть проверяемую H_0-гипотезу нельзя. Следовательно, различия, наблюдаемые между этими выборками, статистически недостоверны. Выборки не имеют значимых отличий.

Критерий знаков *z*. В тех случаях, когда результаты наблюдений выражаются не числами, а качественными признаками, принимающими два различных значения (помечаем их знаками плюс (+) и минус (—)), различия между попарно связанными членами сравниваемых выборок оценивают с помощью *критерия знаков z*. Конструкция этого критерия базируется на весьма простых соображениях: если попарно сравниваемые значения двух зависимых выборок существенно не отличаются друг от друга, то число плюсовых и минусовых разностей окажется совершенно одинаковым; если же заметно преобладают плюсы или минусы, это будет указывать на положительное или отрицательное действие изучаемого фактора на результативный признак. Большее число однозначных разностей служит в качестве фактически найденной величины *z*-критерия знаков. При этом нулевые разности, т. е. случаи, не давшие ни положительного, ни отрицательного результата, обозначаемые цифрой 0, в расчет не принимают и число парных наблюдений соответственно уменьшается.

Как и всякий другой выборочный показатель, *z*-критерий знаков является величиной случайной; он служит для проверки H_0-гипотезы, т. е. предположения о том, что совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одинаковые функции распределения. H_0-гипотеза отвергается, если $z_ф \geq z_{kp}$ для принятого уровня значимости α и числа парных наблюдений n, взятых без нулевых разностей. Критические точки z_{kp} для двух уровней значимость и числа парных наблюдений содержатся в таблице.

Вопросы и задачи:

1.Для изучения эффективности нового препарата железа были выбраны две группы пациентов с анемией. В первой группе пациенты в течение двух недель получали новый препарат, а во второй группе - получали плацебо. После этого было проведено измерение уровня гемоглобина в периферической крови. В первой группе средний уровень гемоглобина составил 115,4±1,2 г/л, а во второй - 103,7±2,3 г/л (данные представлены в формате $M \pm m$), сравниваемые совокупности имеют нормальное распределение. При этом численность первой группы составила 34, а второй - 40 пациентов. Необходимо сделать вывод о статистической значимости полученных различий и эффективности нового препарата железа.

2. После проведения вакцинации от гриппа среди студентов медицинского университета были подведены результаты: из 500 вакцинированных в период эпидемии заболели гриппом 20 человек, из 1600 отказавшихся от вакцинации гриппом заболели 200 человек. Оцените эффективность вакцинации от гриппа.

3. Учебной частью одной из кафедр медицинского университета было проведено исследование успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций. Для студентов, посетивших менее половины лекционного курса (n=36), средняя оценка на экзамене составила 3,2, σ1=0,2. Для студентов, посетивших более 90% лекций по предмету (n=150), средняя оценка на экзамене составила 4,5, σ^2=0,5.Сделайте вывод о достоверности различий успеваемости студентов в зависимости от посещаемости лекций по предмету.

4. Результаты тестирования по 30-бальной шкале для группы X и группы Y представлены в таблице. Сравнить эффективность двух методов обучения студентов в двух группах для уровня статистической значимости β = 5%.

X	18	10	7	15	14	11	13				
Y	15	20	10	8	16	10	19	7	15	14	29

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В.

В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»
для студентов направления подготовки
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Математика» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Математика» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-3: Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	**ИД-1опк-3** Применяет математический аппарат аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной. **ИД-2опк-3** Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений. **ИД-3опк-3** Применяет математический аппарат теории вероятностей и математической статистики. **ИД-4опк-3** Применяет математический аппарат численных методов.	Решает профессиональные задачи, применяя соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-3	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	1,62	0,18	1,8
ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	6,48	0,72	7,2
ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-20	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	56,7	6,3	63
Итого за 1 семестр			**64,8**	**7,2**	**72**
ОПК-3	**Подготовка к экзамену**	**Вопросы к экзамену**	**48,6**	**5,4**	**54**
2 семестр					
ОПК-3	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	3,14	0,16	3,3

ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	5,18	0,32	5,5
ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы по темам 21-26	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	35,58	2,62	38,2
		Итого за 2 семестр	43,9	3,1	**47**
ОПК-3	**Подготовка к экзамену**	**Вопросы к экзамену**	**40,5**	**4,5**	**45**
		Итого	**197,8**	**20,2**	**218**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль

Рейтинговая оценка знаний студента

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1.	Практическая работа 4	4 неделя	15
2.	Практическая работа 9	9 неделя	20
3.	Практическая работа 14	14 неделя	20
	Итого за 1 семестр		**55**
1.	Практическая работа 4	8 неделя	25
2.	Практическая работа 7	14 неделя	30
	Итого за 2 семестр		**55**

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.