

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского
федерального университета

Дата подписания: 27.05.2025 15:31:40

Уникальный программный ключ:

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ОП. 01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Специальности СПО

08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Квалификация: техник

Пятигорск, 2025г.

Методические указания для практических занятий по ОП. 01 Математические методы решения прикладных профессиональных задач составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к подготовке выпуска для получения квалификации техник. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

Рассмотрено на заседании ПЦК колледжа Пятигорского института (филиал) СКФУ

Протокол № ____ от _____ 2025г.

Пояснительная записка

Для многих студентов значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данных методических рекомендациях главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры надо добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения для самостоятельной работы студентов.

Практическая работа № 1

Тема: Предела функций

Цель: Научить вычислять пределы функций

Теоретическая часть

Предел функции

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Определение предела функции можно сформулировать и так: Число b называется пределом $f(x)$ при x , стремящемся к a , если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки a , что для любого $x \neq a$ из этой окрестности $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел обозначается так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Пример 1. Предел постоянной функции в любой точке равен этой же постоянной.

Решение. Пусть $f(x) = k$ для всех x . Очевидно, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ справедливы соотношения $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Значит, по определению предела

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k.$$

Пример 2. Дана функция $f(x) = x$. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ - любое число. Положив $\delta = \varepsilon$, для всех $x \in (a - \delta, a + \delta)$ получим $|f(x) - a| = |x - a| < \delta$, т. е. $|f(x) - a| < \varepsilon$, значит

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет предел при x , стремящемся к a , то этот предел единственен.

Теоремы о пределах функции

Теорема 1. Если при $x \rightarrow a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и пределы их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 2. Если при $x \rightarrow a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = \lim_{x \rightarrow a} k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Теорема 3. Если при $x \rightarrow a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует также и предел их отношения $f(x)/g(x)$, равный отношению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю, то она называется бесконечно малой величиной.

Если предел функции равен бесконечности, т.е. величине обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной. Следовательно, выполняются равенства:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{0} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\infty} = 0$$

Вычислите пределы

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x + 3) = \lim_{x \rightarrow 7} x + \lim_{x \rightarrow 7} 3 = 7 + 3 = 10.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 2}{2x - 7} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 7)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} (-7)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 2}{\lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x - 7} = \\ &= \frac{3 \cdot 1 + 2}{2 \cdot 1 - 7} = 5 / (-5) = -1. \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Решение упражнений

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 1)(x - 3)(x - 5)]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2 + 2x}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} [(2x - 4)(x - 1)(x + 2)]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x+3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2+25}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 6)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 3x^2)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-8}{2x-2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-4x^2+2x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5x+4}{x^2-2x+3}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x^2-9x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-x}{3-\sqrt{2x-1}}$$

Практическая работа № 2

Тема: Пределы с неопределённостью различного вида и методы их решения

Цель: Научить находить пределы с неопределённостью вида

Теоретическая часть

1. **Основные виды неопределённостей пределов.** Например, неопределённость вида, когда оба компонента предела стремятся к бесконечности, или неопределённость, возникающая, когда вычитаются две бесконечности.
2. **Метод решения пределов с неопределённостью вида**, когда функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены. Для раскрытия неопределённости нужно разделить числитель и знаменатель на в старшей степени.

3. **Пределы с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения**
4. Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.
5. Пример 1

6. Решить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$
Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

7. В данном случае получена так называемая неопределённость $\frac{0}{0}$.
Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется

неопределённости вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

8. Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

9. Разложим числитель и знаменатель на множители
10. Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$.

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

11. Таким образом:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x - (-1)) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = (x + 1) \cdot (2x - 5)$$

12. Всё. Числитель на множители разложен.
13. Знаменатель. Знаменатель $x + 1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

14. $(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (2x-5)}{x+1} = (*)$
15. Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:
16. $(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x-5) = (*)$
17. Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:
18. $= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$
19. Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

20. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$

21. Разложим числитель на множители.

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x+1) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = (x+1) \cdot (2x-5)$$

22. $(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (2x-5)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x-5) = -2 - 5 = -7$

23. Пример 2

24. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12}$

25. Сначала «чистой» вариант решения

26. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12} = \frac{0}{0} = (*)$

27. Разложим числитель и знаменатель на множители.

28. Числитель: $8 - 2x^2 = 2(4 - x^2) = 2(2 - x)(2 + x)$

Знаменатель:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$D = 16 + 48 = 64$$

$$\sqrt{D} = 8$$

$$x_1 = \frac{-4 - 8}{2} = -6, \quad x_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

$$x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$$

29. $(*) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)} =$

30. $= -2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x)}{(x+6)} = -2 \cdot \frac{4}{8} = -1$

31. Рекомендация: Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.

Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела. Зачем? Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

32. Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.
33. ! Важно

В ходе решения фрагмент типа $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x-2}$ встречается очень часто. Сокращать такую дробь **нельзя**. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-1) = -1$$

, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.

34. Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе, и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.
35. **Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**

$$\frac{0}{0}$$

36. Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$
37. Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.
38. Пример 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

39. Найти предел
40. Начинаем решать.
41. Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела
Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6} - \sqrt{10 \cdot 3 - 21}}{5 \cdot 3 - 15} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9}}{15 - 15} = \frac{0}{0}$$

42.
43. Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

44. Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

45. Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

И смотрим на наш предел:

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется **сопряженным выражением**).

46. **Умножаем числитель на сопряженное выражение:**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

47.
48. Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.
49. Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

- 50.

51. То есть, мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

В известной степени, это искусственный прием.

52. Умножили. Теперь самое время применить сверху формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*) \end{aligned}$$

53.

$$\frac{0}{0}$$

54. Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с суммой корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{3+6} + \sqrt{10 \cdot 3 - 21})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (3+3)} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = (*) \end{aligned}$$

55.

56. Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

57.

58. Готово.

59. Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте?

Примерно так:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

60.

61. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(x-3)} = \\ &= \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

62.

Практическая работа №3

Тема: Правила вычисления производной простой и сложной функции.

Цель: Научить вычислять производные.

Теоретическая часть

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = C f'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \dots (g \neq 0)$
- $\left(\frac{C}{g}\right)' = -\frac{Cg'}{g^2} \quad (g \neq 0)$

Вычислите производную:

1. $f(x) = x^3 + 2x^5 + 4$

2. $f(x) = 2x^2 + x^3 + 10$

3. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{6}{7}$

4. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{5}$

5. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^5$

6. $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4$

7. $f(x) = x(x+1)$

8. $f(x) = x(x+5)$

9. $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

10. $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$

11. $f(x) = x(x+3)$

12. $f(x) = (x^2 + 4)(x-1)$

13. $f(x) = \frac{x}{3x-1}$

14. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$

Домашнее задание:

1) $f(x) = 7x^7 + 13x^3 + 18$

2) $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{4}{x^3} + \sqrt{x}$

3) $f(x) = x(x+2)$

4) $f(x) = (x+5)(x^2+7)$

5) $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

6) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Правила вычисления производной сложной функции.

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

1. $C' = 0$, где $C - const$
2. $(f + g)' = f' + g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
5. $(f \cdot C)' = f' \cdot C$, где $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается y'' . Аналогично определяются производные 3-го, 4-го, ..., порядка.

Решение упражнений

1. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
2. $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
3. $y = \sqrt[5]{x + x^3\sqrt{x}}$
4. $y = \cos \ln(1 - x^2)$
5. $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 3x}{3 \cos 6x}$
6. $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$
7. $y = \arcsin^3 \sqrt{4 - 5x}$
8. $y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$
9. $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$
10. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$
11. $y = \ln^3(1 + \cos 4x)$
12. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} + 2\pi^{\sqrt{2}}$
13. $y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$
14. $y = e^{-x^2} \cos^3(2x + 3)$
15. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot \operatorname{arctg}^2 2x$
16. $y = \frac{(x^2 - 16)\sqrt{(4 + x^2)}}{120x^5}$
17. $y = (\sin \sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$
18. $y = (19)^{x^{19}} x^{19}$
19. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}$

Практическая работа № 4

Тема: Непрерывность функции. Точки разрыва функции

Цель: Научить исследовать функции на непрерывность, находить точки разрыва функций и исследовать их характер

Теоретическая часть

Непрерывность функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если предел функции при $x \rightarrow a$ равен значению функции при $x = a$, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

Если условие непрерывности функции в точке $x = a$ нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.

Функция называется непрерывной в промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Точки разрыва функции.

Если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

- 1) *разрыв 1 рода* – в этом случае существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$;
- 2) *разрыв 2 рода* – в этом случае хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Примеры :

1. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер

$$y = \frac{x}{x-3}$$

Данная функция определена при всех значениях x , кроме $x = 3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \rightarrow 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty,$$
$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty,$$

Следовательно, функция $\frac{x}{x-3}$ в точке $x = 3$ имеет бесконечный разрыв, т.е. $x = 3$ – точка разрыва 2 рода.

2. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер

$$y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}}$$

Единственной точкой разрыва является точка $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Поскольку левый и правый пределы функции при $x = 0$ являются конечными, $x = 0$ – точка разрыва 1 рода.

Решение упражнений

Найдите точки разрыва функции и исследуйте их характер:

1. $y = \frac{5}{2x-1}$;
2. $y = \frac{1}{x^2}$;
3. $y = \frac{1}{1-x^2}$;
4. $y = \frac{3}{x^2-2x+1}$;
5. $y = \frac{x-1}{x^2-3x-10}$;
6. $y = 1 + 2^{\frac{1}{x-2}}$;
7. $y = \frac{x}{x-2}$;
8. $y = 3^{\frac{1}{x}}$;
9. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$;
10. $y = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2 + 3), & x \leq 1 \\ 6 - 5x, & 1 < x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$
11. $y = \frac{5x^2-3x}{2x}$;
12. $y = \frac{1}{x-x^3}$;
13. $y = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
14. $y = \frac{\frac{1}{2x}-1}{1+\frac{1}{2x}}$

Практическая работа № 5

Тема: Решение систем линейных уравнений

Цель: Научить решать системы линейных уравнений

Теоретическая часть

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется *системой m - линейных уравнений с n неизвестными*.

Числа a_{ij} , $i=1, m$, $j=1, n$ называются *коэффициентами системы*.

Числа b_i , $i=1, m$ называются *свободными членами системы*, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *переменными системы*. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей системы*, а матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

– *расширенной матрицей системы*. Матрицы - столбцы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– соответственно *матрицами свободных членов и неизвестных*

системы. Тогда в матричной форме систему уравнений можно записать в виде $AX=B$

Решением системы называется n значений переменных $x_1=c_1, x_2=c_2, \dots, x_n=c_n$, при подстановке которых, все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства.

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Всякое решение системы можно представить в виде матрицы - столбца C . Тогда справедливо матричное равенство $A \times C = B$.

Система уравнений называется *совместной* если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной* если не имеет ни одного решения.

Решить систему линейных уравнений это значит выяснить совместна ли она и в случае совместности найти её общее решение.

Система называется *однородной* если все её свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как имеет решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Если число уравнений системы равно числу неизвестных переменных и определитель ее основной матрицы не равен нулю, то такие СЛАУ будем называть **элементарными**. Такие системы уравнений имеют единственное решение, причем в случае однородной системы все неизвестные переменные равны нулю.

Такие СЛАУ мы начинали изучать в средней школе. При их решении мы брали какое-нибудь одно уравнение, выражали одну неизвестную переменную через другие и подставляли ее в оставшиеся уравнения, следом брали следующее уравнение, выражали следующую неизвестную переменную и подставляли в другие уравнения и так далее. Или пользовались методом сложения, то есть, складывали два или более уравнений, чтобы исключить некоторые неизвестные переменные. Не будем подробно останавливаться на этих методах, так как они по сути являются модификациями метода Гаусса. Основными методами решения элементарных систем линейных уравнений являются метод Крамера.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Пусть нам требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в которой число уравнений равно числу неизвестных переменных и определитель

основной матрицы системы отличен от нуля, то есть, $|A| \neq 0$.

Пусть Δ - определитель основной матрицы системы, а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ - определители матриц, которые получаются из A заменой 1-ого, 2-ого, ..., n-ого столбца соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

При таких обозначениях неизвестные переменные вычисляются по формулам метода

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Крамера как . Так находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Основная матрица системы имеет вид . Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$-(-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

Составим и вычислим необходимые определители Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} (опредетитель Δ_{x_1}

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

получаем, заменив в матрице А первый столбец на столбец свободных членов

опредетитель Δ_{x_2} - заменив второй столбец на столбец свободных членов, Δ_{x_3} - заменив третий столбец матрицы А на столбец свободных членов):

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 -$$

$$-(-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \cdot 0 = -52$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-(-1) \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 0 -$$

$$-9 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 13$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} :$$

Находим неизвестные переменные по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1$$

Ответ:

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1.$$

Практическая работа № 6

Тема: Вычисление неопределенного и определенного интеграла

Цель: Научить вычислять неопределенный и определенный интегралы

Теоретическая часть

Неопределенный интеграл

$F(x)$ - **первообразная** для $f(x)$ на множестве X если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на множестве X , то $F(x) + C$ - множество всех первообразных для $f(x)$ на множестве X . Это множество первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

Основные формулы интегрирования

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

Решение упражнений:

$$1. \int x dx$$

$$2. \int \frac{x}{5} dx$$

$$3. \int x^5 dx$$

$$4. \int 7x^6 dx$$

$$5. \int (7x+1)^3 dx$$

$$6. \int 10 \sin 5x dx$$

$$7. \int 3(5x+1)^2 dx$$

$$8. \int (2x-1)^2 dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^3}$$

$$10. \int \sqrt[4]{x^3} dx$$

$$11. \int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$$

$$12. \int 3 \cos 3x dx$$

$$13. \int 4(5-6x)^3 dx$$

$$14. \int \frac{dx}{x^4}$$

$$15. \int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$$

$$16. \int \frac{4dx}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right)}$$

$$17. \int 2^3 \sqrt{(7-3x)^2} dx$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2-9}$$

$$19. \int \frac{dx}{x^2-25}$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$21. \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$$

$$23. \int \frac{dx}{25+x^2}$$

$$24. \int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$$

$$25. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$26. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$27. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

Практическое занятие №7

Тема: Операции над множествами

Цель: Научить решать задачи, используя основные операции над множествами

Теоретическая часть

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством.

Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, разность, симметрическая разность.

Пример: На фирме работают 40 человек. Из анкетных данных известно, что 20 человек владеют английским языком, 20 человек – компьютером, 14 – делопроизводством.

Английским языком и компьютером владеют 9 человек; . английским языком и делопроизводством – 7 человек; компьютером и делопроизводством – 5 человек; английским языком, делопроизводством

И компьютером – 2 человека. Сколько человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством?

Решение: 1) Введем обозначения:

U- множество человек работающих на фирме;

A- множество человек, владеющих английским языком;

B- множество человек, владеющих компьютером;

C- множество человек, владеющих делопроизводством.

Тогда $m(U)=40$; $m(A)=20$; $m(B)=20$; $m(C)=14$.

Кроме того, известно, что английским языком владеют 9 человек, следовательно,

$m(A \cap B) = 9$; английским языком и делопроизводством – 7 человек, следовательно,

$m(A \cap C) = 7$; компьютером и делопроизводством – 5 человек, следовательно,

$m(B \cap C) = 5$; английским языком, делопроизводством и компьютером – 2 человека, следовательно,

$m(A \cap B \cap C) = 2$.

Необходимо определить

Разобьем множество $M=A \cup B \cup C$ на 7 попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_7$ и найдем мощности каждого из этих множеств:

а) $A_1 = A \cap B \cap C$ – множество человек, владеющих английским языком, делопроизводством и компьютером, $m(A_1)=m(A \cap B \cap C) = 2$

б) $A_2 = \bar{A} \cap B \cap C$ – множество человек, не владеющих английским языком и владеющих компьютером и делопроизводством. Заметим, что $B \cap C = A_1 \cup A_2$, следовательно $m(B \cap C) = m(A_1) + m(A_2)$, откуда $m(A_2)=m(B \cap C) - m(A_1) = 5 - 2 = 3$;

в) $A_3 = A \cap \bar{B} \cap C$ – множество человек, владеющих английским языком и делопроизводством и не владеющих компьютером. Заметим, что $A \cap C = A_1 \cup A_3$, следовательно, $m(A \cap C) = m(A_1) + m(A_3)$, откуда $m(A_3)=m(A \cap C) - m(A_1)=7-2=5$

г) $A_4 = A \cap B \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком, компьютером и не владеющих делопроизводством. $A \cap B = A_1 \cup A_4$, следовательно, $m(A \cap B) = m(A_1) + m(A_4)$, откуда

$m(A_4)=m(A \cap B) - m(A_1)=9-2=7$;

д) $A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ - множество человек, не владеющих английским языком, компьютером и владеющих делопроизводством.

$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$, следовательно, $m(C)=m(A_1) + m(A_2)+m(A_3) + m(A_5)$, откуда, $m(A_5)=m(C)-m(A_1)-m(A_2)-m(A_3)=14-2-3-5=4$;

е) $A_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, не владеющих английским языком и делопроизводством и владеющих компьютером $B = A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6$,
 $m(B) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_4) + m(A_6)$, откуда $m(A_6) = m(B) - m(A_1) - m(A_2) - m(A_4) = 20 - 2 - 3 - 7 = 8$;

ж) $A_7 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ - множество человек, владеющих английским языком и не владеющих делопроизводством и компьютером. $A = A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_7$, следовательно, $m(A) = m(A_1) + m(A_3) + m(A_4) + m(A_7)$, откуда $m(A_7) = m(A) - m(A_1) - m(A_3) - m(A_4) = 20 - 2 - 5 - 7 = 6$;

Окончательно,

$M = A \cup B \cup C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, следовательно, $m(M) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_4) + m(A_5) + m(A_6) + m(A_7) = 2 + 3 + 5 + 7 + 4 + 8 + 6 = 35$

1) Так как $U = M \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, то $m(U) = m(M) + m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$, откуда

$$m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = m(U) - m(M) = 40 - 35 = 5$$

Следовательно, 5 человек не владеют ни английским языком, ни делопроизводством, ни компьютером.

Решение упражнений

1. Даны множества: $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}$, $A = \{a, c, e, p\}$, $B = \{b, d, f, p\}$, $C = \{a, d, f, q\}$
 Выполните следующие операции:

- $\overline{(A/B \cup B \cap C)} / \bar{C} \cup A$
- $(A \cup A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B / C$;
- $\bar{A} / \bar{B} \cap \bar{C} / A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$;
- $A \cup B \cap \overline{B \cup C} / \bar{B}$;
- $(A \cup \bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$;
- $(A \cup B \cap C) / (\bar{B} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\overline{A \cup B \cup C})$;
- $(A \cup (B/A) \cup \bar{A} \cap C) \cap \bar{A} \cap C / C$

2. С помощью диаграмм Эйлера-Венна упростите выражения:

- $\bar{A} \cup (\overline{A/B}) \cup (\bar{A}/\bar{B})$;
- $A \cup (\bar{A} \cup B) \cup \bar{B}$;
- $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})$
- $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cap \bar{B}) \cap (A \cup B)$

3. Из 276 отобранных студентов экономического вуза 83 изучают математику, 95-право, 102-финансы. Кроме того, известно, что 27 из них изучают математику и право, 24-математику и финансы, 20-право и финансы 11-изучают все три предмета. Сколько учащихся не изучают ни одного из этих предметов? Сколько из них изучают финансы, но не изучают ни математику, ни право?

4. Проверочный экзамен по математике содержал три задачи: предел, производная и интеграл. Из 800 студентов задачу с пределом решили 250 человек; с пределом или интегралом – 600 человек. По две задачи решили 400 человек, из них две задачи на предел и производную решили 150 человек, на предел и интеграл – 50 человек. Ни один студент не решил все задачи. 20 студентов не решили ни одной задачи. Только задачу на интеграл решили 120 человек. Сколько студентов решили только одну задачу? Сколько человек решили задачу на производную?

5. Кафедра математики обслуживает три факультета: Экономический, финансовый, товароведный. Некоторые преподаватели кафедры могут работать сразу на нескольких факультетах. На финансовом факультете работают 22 преподавателя, на экономическом – 23 преподавателя, на экономическом и товароведном – 36 преподавателей. Только на финансовом факультете работают 10 преподавателей, только на экономическом и товароведном – 5 преподавателей. Два преподавателя работают на трех факультетах. Число

преподавателей, работающих только на экономическом и финансовом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на финансовом и товароведном факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколь преподавателей работает только на одном факультете?

Практическая работа № 8

Тема: Числовые ряды. Знакопеременные числовые ряды

Цель: Научить исследовать ряд на сходимость и расходимость

Теоретическая часть

1. Необходимый признак сравнения ряда.

Теорема: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Если же для некоторого ряда его общий член не стремится к нулю, то теорема позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.

2. Признак сравнения рядов с положительными членами

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда;

Исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого, заведомо расходящегося ряда.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется геометрический ряд, гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд.

3. Признак Даламбера: Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots \quad (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

1.

Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2^n} + \dots$$

Решение: Находим $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = 0$. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ который сходится так как $q = \frac{1}{2} < 1$.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3 \cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5 \cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \dots \frac{1}{(2n-1)2^n} < \frac{1}{2^n} \dots$$

т.е. члены ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

Решение: Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$

Здесь выполняется достаточный признак расходимости ряда; следовательно, ряд расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots$$

Решение: Находим

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$. Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \dots + \dots$$

Который сходится, поскольку $p = \frac{3}{2} > 1$. Следовательно, сходится и данный ряд.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots$$

Решение: Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число $n+1$, получим $\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$

Найдем предел отношения $(n+1)$ -го члена к n -му члену при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n} = \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^n} + \dots$$

Решение: $u_n = \frac{n!}{5^n} u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} = \frac{n+1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1,$$

Т.е. ряд расходится.

Решение упражнений

I. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:

1. $u_n = \frac{n}{n+1}$

2. $u_n = \frac{2n}{2n-1}$

3. $u_n = \frac{2^{n+3}}{2^{n+1}}$

4. $u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$

II. Найдите первые четыре члена по его заданному общему члену:

1. $u_n = \frac{(n+1)!}{2n}$

2. $u_n = \frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$

3. $u_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

$$4. u_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{2n}$$

$$5. u_n = \frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$$

$$6. u_n = \frac{n+1}{(2n-1)3^{n-1}}$$

III. Найдите формулу общего члена ряда по его данным первым членам

$$1. \frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \dots$$

$$2. \frac{1}{9} + \frac{1 \cdot 2}{25} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{49} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{81} + \dots$$

$$3. \frac{2}{5} - \frac{3}{8} + \frac{4}{11} - \frac{5}{14} + \dots$$

IV. Вычислите сумму членов ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

V. Найдите n-й член ряда по его данным первым членам:

$$1. \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

$$2. \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$$

$$3. \frac{2}{4} - \frac{4}{9} + \frac{6}{16} - \frac{8}{25} + \dots$$

VI. Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак и один из признаков сравнения:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Исследуйте сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

Литература:

Основные источники:

1.Балдин, К.В. Математика : учебное пособие К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукоусев. - М. :Юнити-Дана, 2015 - 543 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 5-238-00980-1 ; То же [Электронный ресурс]. - <URL://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114423>

2.Дадаян, А. А. Математика : [учебник] / А.А. Дадаян. -М. : ФОРУМ, 2015 - 544 с. (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-460-3
-2 экз

Дополнительные источники:

1. Дадаян, А. А. Сборник задач по математике : [учеб. пособие] / А.А. Дадаян. - М. : ФОРУМ, 2016. - 352 с. : ил. - (Профессиональное образование). - На учебнике гриф: Рек.МО. - ISBN 978-5-91134-803-8