**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**Пятигорский институт (филиал) СКФУ**
**Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ**

**УТВЕРЖДАЮ**
Директор Пятигорского института
(филиал) СКФУ
Т.А. Шебзухова

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**ОД.07 Математика**

Специальность СПО 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей

Форма обучения очная

## 1. Паспорт фонда оценочных средств

### 1.1. Область применения

Фонд оценочных средств предназначен для оценивания знаний, умений, уровня сформированности компетенций студентов, обучающихся по специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей по учебной дисциплине ОД.07 Математика.

ФОС составлен на основе ФГОС и рабочей программы дисциплины.

Промежуточная аттестация по учебной дисциплине предусмотрена в форме экзамена с выставлением отметки по системе «отлично, хорошо, удовлетворительно, неудовлетворительно».

### 1.2. Планируемые результаты освоения дисциплины

Особое значение дисциплина имеет при формировании и развитии общих и профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

Профессиональные компетенции в соответствии с ФГОС СПО:

ПК 6.4. Определять остаточный ресурс производственного оборудования.

В рамках программы общеобразовательной дисциплины осваиваются личностные, метапредметные и предметные результаты в соответствии с требованиями ФГОС среднего общего образования.

Планируемые результаты освоения дисциплины: личностные (ЛР), метапредметные (МР), предметные для базового уровня изучения (ПР).

Личностные включают:

ЛР 05. Сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности.

ЛР 07. Навыки сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

ЛР 08. Нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей.

ЛР 09. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

ЛР 13. Осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем.

ЛР 14. Сформированность экологического мышления, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды; приобретение опыта эколого-направленной деятельности.

Метапредметные:

МР 01. Самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне.

МР 02. Устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения.

МР 03. Определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения.

МР 04. Выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях.

МР 06. Владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем.

МР 07. Способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

МР 08. Овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов.

МР 09. Формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами.

МР 11. Выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения.

Предметные:

ПР 01. Владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

ПР 02. Уметь оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений.

ПР 03. Уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы.

ПР 04. Уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях в функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; Строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения.

ПР 05. Умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

ПР 06. Умение решать текстовые задачи различных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученные решения и оценивать правдоподобность результатов.

ПР 07. Умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств.

ПР 08. Умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятность реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях.

ПР 09. Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, в пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира.

ПР 10. Умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники.

ПР 11. Умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач.

ПР 12. Умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы.

ПР 13. Умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками.

ПР 14. Умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий Российской и мировой математической науки.

### 1.3. Формы контроля и оценивания

Предметом оценки служит сформированность общих и профессиональных компетенций.

Таблица 1 Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

<table>
<tr><td rowspan="3">Элемент учебной дисциплины</td><td colspan="4">Формы контроля и оценивания</td></tr>
<tr><td colspan="2">Текущий контроль</td><td colspan="2">Промежуточная аттестация</td></tr>
<tr><td>Методы оценки (заполняется в соответствии с разделом 4 рабочей программы)</td><td>Проверяемые ПК, ОК, У, З (для общеобразовательных дисциплин ОК, Л, М, П)</td><td>Методы оценки</td><td>Проверяемые ПК, ОК, У, З (для общеобразовательных дисциплин ОК, Л, М, П)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Раздел 1. Повторение курса математики основной школы</td><td>Экзамен</td><td>ОК 01</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Тема 1.1<br>Цели и задачи математики при освоении специальности | Практическая работа №1. Цели и задачи математики при освоении специальности | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 08, 09<br>МР 01, 02, 03, 07, 09, 11<br>ПР 01, 02, 06, 09, 12, 14 | | *ОК 02<br>ОК 03<br>ОК 04<br>ПК 1.2<br>ЛР 05<br>ЛР 07<br>ЛР 08<br>ЛР 09<br>ЛР 13<br>ЛР 14<br>МР 01<br>МР 02<br>МР 03<br>МР 04<br>МР 06<br>МР 07<br>МР 08<br>МР 09<br>МР 11<br>ПР 01<br>ПР 02<br>ПР 03<br>ПР 04<br>ПР 05<br>ПР 06<br>ПР 07<br>ПР 08<br>ПР 09<br>ПР 10<br>ПР 11<br>ПР 12<br>ПР 13<br>ПР 14* |
| Тема 1.2<br>Числа и вычисления. Выражения и преобразования. Процентные вычисления | Практическая работа №2. Числа и вычисления. Выражения и преобразования. Процентные вычисления. | | | |
| Тема 1.3<br>Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств | Практическая работа №3. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств. | | | |
| Тема 1.4<br>Функции: линейная, обратная пропорциональность, квадратичная функция | Практическая работа №4. Функции: линейная, обратная пропорциональность, квадратичная функция | | | |
| Тема 1.5<br>Геометрия на плоскости | Практическая работа №5. Геометрия на плоскости | ОК 01, 02, 03, 04<br><br>ПК 6.4<br><br>ЛР 05, 07, 08, 09<br>МР 01, 02, 03, 07, 09, 11<br>ПР 01, 02, 06, 09, 12, 14 | | |
| Тема 1.6<br>Входная контрольная работа | Практическая работа №6. Входная контрольная работа | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 08, 09<br>МР 01, 02, 03, 07, 09, 11<br>ПР 01, 02, 06, 09, 12, 14 | | |
| Раздел 2. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции | | | | |
| Тема 2.1<br>Тригонометрические функции произвольного угла, числа. Радианная и градусная мера угла | Устный опрос<br>Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 08, 09<br>МР 01, 02, 03, 06, 07, 08, 09<br>ПР 01, 02, 03, 05, 14 | | |
| Тема 2.2<br>Основные тригонометрические | Практическая работа №7. Основные тригонометрически | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| тождества. Формулы приведения | е тождества. Формулы приведения | | | |
| Тема 2.3 Синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов. Формулы двойного аргумента | Устный опрос | | | |
| Тема 2.4 Формулы половинного угла. Формулы понижения степени | Практическая работа №8. Формулы половинного угла. Формулы понижения степени | | | |
| Тема 2.5 Тригонометрические функции, их свойства и графики | Устный опрос Собеседование | | | |
| Тема 2.6 Преобразование графиков тригонометрических функций | Устный опрос | | | |
| Тема 2.7 Описание производственных процессов с помощью графиков функций | Практическая работа №9. Описание производственных процессов с помощью графиков функций Практическая работа №10. Описание производственных процессов с помощью графиков функций | | | |
| Тема 2.8 Обратные тригонометрические функции | Устный опрос | | | |
| Тема 2.9 Простейшие тригонометрические уравнения | Устный опрос Собеседование | | | |
| Тема 2.10 Простейшие тригонометрические неравенства | Практическая работа №11. Простейшие тригонометрические неравенства | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Тема 2.11 Системы тригонометрических уравнений | Устный опрос | | | |
| Тема 2.12 Контрольная работа по разделу 2 «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции» | Практическая работа №12. Контрольная работа по разделу 2 «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции» | | | |
| Раздел 3. Степени и корни. Степенная функция | | | | |
| Тема 3.1 Степень. Свойства степени с рациональными и действительными показателями | Устный опрос Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 07, 08, 09<br>МР 01, 02, 03, 06, 07<br>ПР 02, 03, 04, 05, 14 | | |
| Тема 3.2 Степенные функции, их свойства и графики | Устный опрос | | | |
| Тема 3.3 Понятие корня n-ой степени из действительного числа. Свойства корня n-ой степени | Устный опрос Собеседование | | | |
| Тема 3.4 Преобразование иррациональных выражений | Практическая работа №13. Преобразование иррациональных выражений Практическая работа №14. Преобразование иррациональных выражений | | | |
| Тема 3.5 Решение иррациональных уравнений и неравенств | Практическая работа №15. Решение иррациональных уравнений и неравенств | | | |
| Тема 3.6 Контрольная работа по разделу 3 | Практическая работа №16. Контрольная работа по разделу 3 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| «Степени и корни. Степенная функция» | «Степени и корни. Степенная функция» | | | |
| Раздел 4. Показательная функция | | | | |
| Тема 4.1 Показательная функция, ее свойства и график | Устный опрос Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 09<br>МР 01, 02, 06, 07, 09, 11<br>ПР 01, 02, 03 | | |
| Тема 4.2 Решение показательных уравнений и неравенств | Практическая работа №17. Решение показательных уравнений и неравенств<br>Практическая работа №18. Решение показательных уравнений и неравенств | | | |
| Тема 4.3 Системы показательных уравнений | Практическая работа №19. Системы показательных уравнений | | | |
| Тема 4.4 Контрольная работа по разделу 4 «Показательная функция» | Практическая работа №20. Контрольная работа по разделу 4 «Показательная функция» | | | |
| Раздел 5. Логарифмы. Логарифмическая функция | | | | |
| Тема 5.1 Логарифм числа. Свойства логарифмов | Практическая работа №21. Логарифм числа. Свойства логарифмов<br>Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 09<br>МР 01, 02, 04, 06, 07<br>ПР 01, 02, 03 | | |
| Тема 5.2 Логарифмическая функция, ее свойства | Устный опрос Собеседование | | | |
| Тема 5.3 Решение логарифмических уравнений и неравенств | Практическая работа №22. Решение логарифмических уравнений и неравенств<br>Собеседование | | | |
| Тема 5.4 Системы логарифмических уравнений | Практическая работа №23. Системы логарифмических уравнений | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Тема 5.5 Логарифмы в природе и технике | Практическая работа №24. Логарифмы в природе и технике Практическая работа №25. Логарифмы в природе и технике | | | |
| Тема 5.6 Контрольная работа по разделу 5 «Логарифмы. Логарифмическая функция» | Практическая работа №26. Контрольная работа по разделу 5 «Логарифмы. Логарифмическая функция» | | | |
| Раздел 6. Уравнения и неравенства | | | | |
| Тема 6.1 Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения | Практическая работа №27. Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 08, 09<br>МР 01, 02, 03, 06, 07, 08, 09<br>ПР 01, 02, 03, 05, 14 | | |
| Тема 6.2 Графический метод решения уравнений, неравенств | Практическая работа №28. Графический метод решения уравнений, неравенств | | | |
| Тема 6.3 Уравнения и неравенства с модулем | Практическая работа №29. Уравнения и неравенства с модулем | | | |
| Тема 6.4 Уравнения и неравенства с параметрами | Практическая работа №30. Уравнения и неравенства с параметрами | | | |
| Тема 6.5 Текстовые задачи профессионального содержания | Практическая работа №31. Текстовые задачи профессионального содержания Практическая работа №32. Текстовые задачи профессионального содержания Практическая работа №33. Текстовые задачи профессионального содержания | | | |
| Тема 6.6 Контрольная | Практическая работа №34. | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| работа по разделу 6 «Уравнения и неравенства» | Контрольная работа по разделу 6 «Уравнения и неравенства» | | | |
| Раздел 7. Производная функции, ее применение | | | | |
| Тема 7.1 Числовая последовательность. Вычисление пределов последовательностей | Устный опрос Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 07, 08, 09<br>МР 02, 03, 04, 06, 07, 08, 09, 11<br>ПР 01, 04, 05, 12, 14 | | |
| Тема 7.2 Понятие о производной функции | Практическая работа №35. Понятие о производной функции | | | |
| Тема 7.3 Формулы и правила дифференцирования | Практическая работа №36. Формулы и правила дифференцирования Собеседование | | | |
| Тема 7.4 Производная сложной функции | Устный опрос | | | |
| Тема 7.5 Понятие о непрерывности функции. Метод интервалов | Устный опрос | | | |
| Тема 7.6 Физический и геометрический смысл производной | Практическая работа №37. Физический и геометрический смысл производной | | | |
| Тема 7.7 Уравнение касательной к графику функции | Практическая работа №38. Уравнение касательной к графику функции | | | |
| Тема 7.8 Монотонность функции. Точки экстремума | Практическая работа №39. Монотонность функции. Точки экстремума | | | |
| Тема 7.9 Исследование функций и построение их графиков | Практическая работа №40. Исследование функций и построение их | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | графиков | | | |
| Тема 7.10 Наибольшее и наименьшее значения функции | Практическая работа №41. Наибольшее и наименьшее значения функции | | | |
| Тема 7.11 Нахождение оптимального результата с помощью производной | Практическая работа №42. Нахождение оптимального результата с помощью производной Практическая работа №43. Нахождение оптимального результата с помощью производной Практическая работа №44. Нахождение оптимального результата с помощью производной | | | |
| Тема 7.12 Контрольная работа по разделу 7 «Производная функции, ее применение» | Практическая работа №45. Контрольная работа по разделу 7 «Производная функции, ее применение» | | | |
| Раздел 8. Первообразная функции, ее применение | | | | |
| Тема 8.1 Первообразная функция. Правила нахождения первообразных | Практическая работа №46. Первообразная функция. Правила нахождения первообразных | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 07, 08, 09<br>МР 02, 03, 06, 07, 11<br>ПР 01, 03, 04, 06 | | |
| Тема 8.2 Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница | Практическая работа №47. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница | | | |
| Тема 8.3 Неопределенный и определенный интегралы | Практическая работа №48. Неопределенный и определенный интегралы | | | |
| Тема 8.4 Определенный интеграл в | Практическая работа №49. Определенный | ОК 01, 02, 03, 04<br><br>ПК 6.4 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| жизни | интеграл в жизни Практическая работа №50. Определенный интеграл в жизни | ЛР 07, 08, 09<br>МР 02, 03, 06, 07, 11<br>ПР 01, 03, 04, 06 | | |
| Тема 8.5 Контрольная работа по разделу 8 «Первообразная функции, ее применение» | Практическая работа №51. Контрольная работа по разделу 8 «Первообразная функции, ее применение» | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 07, 08, 09<br>МР 02, 03, 06, 07, 11<br>ПР 01, 03, 04, 06 | | |
| Раздел 9. Множества. Элементы теории графов | | | | |
| Тема 9.1 Множества. Действия над множествами. Диаграммы Венна | Устный опрос | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 07, 08, 09, 13, 14<br>МР 01, 02, 03, 07, 08, 09, 11<br>ПР 07, 08, 14 | | |
| Тема 9.2 Графы. Основные понятия и виды | Устный опрос | | | |
| Тема 9.3 Множество и графы. Решение прикладных задач | Практическая работа №52. Множество и графы. Решение прикладных задач Практическая работа №53. Множество и графы. Решение прикладных задач | | | |
| Тема 9.4 Контрольная работа по разделу 9 «Множества. Элементы теории графов» | Практическая работа №54. Контрольная работа по разделу 9 «Множества. Элементы теории графов» | | | |
| Раздел 10. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей | | | | |
| Тема 10.1 Основные понятия комбинаторики | Устный опрос Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 07, 08, 09, 13, 14<br>МР 01, 02, 03, 04, 06, 07, 08, 09, 11<br>ПР 01, 07, 08, 14 | | |
| Тема 10.2 Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей | Устный опрос Собеседование | | | |
| Тема 10.3 Вероятность в профессиональ | Практическая работа №55. Вероятность в | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ных задачах | профессиональных задачах Практическая работа №56. Вероятность в профессиональных задачах | | | |
| Тема 10.4 Дискретная случайная величина, закон ее распределения | Устный опрос | | | |
| Тема 10.5 Задачи математической статистики | Практическая работа №57. Задачи математической статистики Собеседование | | | |
| Тема 10.6 Составление таблиц и диаграмм на практике | Практическая работа №58. Составление таблиц и диаграмм на практике Практическая работа №59. Составление таблиц и диаграмм на практике Практическая работа №60. Составление таблиц и диаграмм на практике | | | |
| Тема 10.7 Контрольная работа по разделу 10 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» | Практическая работа №61. Контрольная работа по разделу 10 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» | | | |
| Раздел 11. Прямые и плоскости в пространстве | | | | |
| Тема 11.1 Основные понятия стереометрии. Расположение прямых и плоскостей | Устный опрос Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 09<br>МР 02, 03, 04, 06, 07, 08, 09<br>ПР 01, 09 | | |
| Тема 11.2 Параллельность прямых, прямой и плоскости, | Практическая работа №62. Параллельность прямых, прямой и плоскости, | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| плоскостей | плоскостей | | | |
| Тема 11.3 Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, плоскостей | Устный опрос Собеседование | | | |
| Тема 11.4 Теорема о трех перпендикулярах. Решение задач | Практическая работа №63. Теорема о трех перпендикулярах. Решение задач | | | |
| Тема 11.5 Параллельные, перпендикулярные и скрещивающиеся прямые | Практическая работа №64. Параллельные, перпендикулярные и скрещивающиеся прямые Практическая работа №65. Параллельные, перпендикулярные и скрещивающиеся прямые | | | |
| Тема 11.6 Контрольная работа по разделу 11 «Прямые и плоскости в пространстве» | Практическая работа №66. Контрольная работа по разделу 11 «Прямые и плоскости в пространстве» | | | |
| Раздел 12. Многогранники и тела вращения | | | | |
| Тема 12.1 Многогранник. Вершины, ребра, грани многогранника | Устный опрос Собеседование | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 09<br>МР 02, 04, 06, 07, 08, 11<br>ПР 10, 11, 12 | | |
| Тема 12.2 Призма, ее составляющие. Сечения призмы. Виды призмы | Устный опрос | | | |
| Тема 12.3 Параллелепипед, куб. Сечение куба, параллелепипеда | Устный опрос | | | |
| Тема 12.4 Пирамида, ее сечение. Правильная и усечённая пирамида | Устный опрос | | | |
| Тема 12.5 | Практическая | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Боковая и полная поверхность призмы, пирамиды | работа №67. Боковая и полная поверхность призмы, пирамиды | | | |
| Тема 12.6 Симметрия в кубе, параллелепипеде, призме, пирамиде | Устный опрос | | | |
| Тема 12.7 Примеры симметрий в профессии | Практическая работа №68. Примеры симметрий в профессии Практическая работа №69. Примеры симметрий в профессии | ОК 01, 02, 03, 04<br><br>ПК 6.4<br><br>ЛР 05, 09<br>МР 02, 04, 06, 07, 08, 11<br>ПР 10, 11, 12 | | |
| Тема 12.8 Правильные многогранники и их свойства | Устный опрос | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 09<br>МР 02, 04, 06, 07, 08, 11<br>ПР 10, 11, 12 | | |
| Тема 12.9 Цилиндр и его элементы. Сечение цилиндра | Устный опрос | | | |
| Тема 12.10 Конус и его элементы. Сечение конуса | Устный опрос | | | |
| Тема 12.11 Усеченный конус. Сечение усеченного конуса | Устный опрос | | | |
| Тема 12.12 Шар и сфера, их сечения | Устный опрос | | | |
| Тема 12.13 Объем тела. Отношение объемов подобных тел | Практическая работа №70. Объем тела. Отношение объемов подобных тел | | | |
| Тема 12.14 Объемы и площади поверхностей тел | Устный опрос | | | |
| Тема 12.15 Комбинации многогранников и тел | Практическая работа №71. Комбинации многогранников и | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| вращения. Геометрически е комбинации на практике | тел вращения. Геометрические комбинации на практике Практическая работа №72. Комбинации многогранников и тел вращения. Геометрические комбинации на практике Практическая работа №73. Комбинации многогранников и тел вращения. Геометрические комбинации на практике | | | |
| Тема 12.16 Контрольная работа по разделу 12 «Многогранник и и тела вращения» | Практическая работа №74. Контрольная работа по разделу 12 «Многогранники и тела вращения» | | | |
| Раздел 13. Координаты и векторы | | | | |
| Тема 13.1 Декартовы координаты в пространстве. Простейшие задачи в координатах | Практическая работа №75. Декартовы координаты в пространстве. Простейшие задачи в координатах | ОК 01, 02, 03, 04<br>ЛР 05, 09<br>МР 02, 04, 06, 07, 08, 11<br>ПР 11, 12, 13, 14 | | |
| Тема 13.2 Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов | Практическая работа №76. Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов Собеседование | | | |
| Тема 13.3 Практико-ориентированн ые задачи на координатной плоскости | Практическая работа №77. Практико-ориентированные задачи на координатной плоскости | | | |
| Тема 13.4 Контрольная работа по разделу 13 «Координаты и | Практическая работа №78. Контрольная работа по разделу 13 «Координаты и | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| векторы» | векторы» | | | |

2. **Оценочные средства текущего контроля успеваемости и критерии оценки**

## Комплект заданий для контрольной работы

## Задания для проведения контрольного среза №1 за 1 семестр

### Вариант 1

1. Вычислить: а) $\cos 780°$;

б) $\sin \frac{13\pi}{6}$;

в) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = 0{,}28$ и $0 < \alpha < \pi$;

д) $\frac{\sin 75^0 + \sin 45^0}{\sin 285^0}$;

е) $16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x$, если $x = \frac{\pi}{6}$;

2. Упростить выражение: а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$;

б) $\sin 915° \cos \beta - \sin \beta \sin 645°$;

в) $\frac{1}{2} \sin(540° + \beta) \sin(\beta + 810°)$;

г) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha - \cos(2\pi - \alpha)$;

д) $\frac{\sin(-\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)}$;

е) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

3. Решить уравнение: а) $\cos(\pi + x) = \sin \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin 5x \cos 4x - \cos 5x \sin 4x = 1$.

### Вариант 2

1. Вычислить: а) $\sin 780°$;

б) $\cos \frac{13\pi}{6}$;

в) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

д) $\frac{\sin 70^0 + \sin 20^0}{\cos 205^0}$;

е) $16 \sin x \sin 2x \sin 4x \sin 8x$, если $x = \frac{\pi}{6}$;

2. Упростить выражение: а) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

б) $\sin 605° \cos\beta + \sin\beta \cos 835°$;

в) $\frac{1}{4}\sin(405° + \beta)\cos(\beta + 765°)$;

г) $\sin 4\alpha \cos 3\alpha + \sin 3\alpha \cos 4\alpha - \sin(6\pi - \alpha)$;

д) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(2\pi + \alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha) + 1}$;

е) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

3. Решить уравнение: а) $\sin(\pi + x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\cos 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x = 1$.

***Эталон ответов:***

| Вариант 1 | | | |
|---|---|---|---|
| **Задания** | 1 | 2 | 3 |
| **Ответы:** | а) 0,5;<br>б) 0,5;<br>в) $-\frac{5}{13}$;<br>г) 0,8;<br>д) $-\sqrt{3}$;<br>е) $\sqrt{3}$ | а) 2sinαsinβ;<br>б) sin(β-15°);<br>в) $-\frac{1}{4}\sin 2\beta$<br>г) sin5α-cosα;<br>д) $-\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;<br>е) tgα | а) $x = \pi+2\pi k$, $k \in Z$;<br>б) $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$ |
| Вариант 2 | | | |
| **Задания** | 1 | 2 | 3 |
| **Ответы:** | а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;<br>б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;<br>в) $-\frac{3}{5}$;<br>г) $\frac{24}{25}$;<br>д) $-\sqrt{2}$;<br>е) $-3\sqrt{3}$ | а) 2sinαcosβ;<br>б) -cos(β-25°);<br>в) $\frac{1}{8}\cos 2\beta$<br>г) 2sin4αcos3α;<br>д) $\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;<br>е) tgα | а) $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in Z$;<br>б) $x = \frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}$, $k \in Z$ |

## Задания для проведения контрольной работы за первый семестр

## Вариант 1

№1. Упростите выражение:

1. $(\sin x + \cos x)^2 - 1$

2. $\left(\cos^2 x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right)^2 - \sin^2 x$

3. $\frac{\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

№2. Преобразуйте выражение:

1. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$

2. $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1} \cdot c^{\frac{1}{4}} + 1$

3. $\frac{lg8+lg18}{2lg2+lg3}$

№3. Решите уравнение

1. $\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$

2. $cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1$

3. $0{,}2^{x^2-16x-37{,}5}$=$5\sqrt{5}$

4.$log_3\sqrt{x-5} + log_3\sqrt{2x-3}$ =1

**Вариант 2**

№1. Упростите выражение

1.$(\cos 2x+1)tg^2 x - 1$

2. $\frac{1+ctg^2(-x)}{tg^2(x-\pi)} \cdot \frac{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{ctg(\pi+x)}$

3. $\frac{\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x}{\cos^2 x}$

№2. Преобразуйте выражение:

1. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}\right)^2$

2. $\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b} + \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$

3. $\frac{3lg2+3lg5}{lg13-lg130}$

№3. Решите уравнение

1. $\sqrt{17+2x-3x^2} = x+1$

2. $sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) - sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \sqrt{3}$

3. $2^{x^2-6x+0{,}5}$=$\frac{1}{16\sqrt{2}}$

4. $\frac{1}{2}lg(2x-1) = 1 - lg\sqrt{x-9}$

***Эталон ответов:***

| Вариант 1 | | | |
|---|---|---|---|
| **Задания** | 1 | 2 | 3 |
| **Ответы:** | 1. $\sin 2x$<br>2. $cos^2x$<br>3. $\frac{1}{cos^2x}$ | 1. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$<br>2. $\sqrt{c}$<br>3. 2 | 1. 3<br>2. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$<br>3. – 2; 18<br>4. 6 |
| Вариант 2 | | | |
| **Задания** | 1 | 2 | 3 |
| **Ответы:** | 1. $-\cos 2x$<br>2. $\frac{1}{sin^2x}$<br>3. $tg\ x$ | 1. $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$<br>2. 3<br>3. – 3 | 1. 2<br>2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$<br>3. 1; 5<br>4. 13 |

## Задания для проведения контрольного среза за 2 семестр

## Вариант 1

№1. Вычислите производную:

1. $f(x) = 2x^2 + 4x^4 + 6x + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$
3. $f(x) = (8x - 10)^3$
4. $f(x) = cos\frac{x}{5}$
5. $f(x) = \frac{1}{(5-4x)^5}$

№2. Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y = 2x^2 + x + 4$ имеют угловой коэффициент, равный 1

№3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 4x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

№4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 27t$. Найдите ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

№5. Найдите общий вид первообразных для функции:

1. $f(x) = 3x + 5x^5 + 6x^6 - 2$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \sqrt{x}$
3. $f(x) = (5x - 3)^5$
4. $f(x) = sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
5. $f(x) = \frac{2}{(4x+3)^4}$

№ 6. Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{1} x^3 dx$
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2x}$

3. $\int_1^2 (1+2x)dx$

## Вариант 2

№1. Вычислите производную:

1. $f(x) = 3x^2 + 6x^4 + 8x + 100$
2. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^8}$
3. $f(x) = (4x-5)^6$
4. $f(x) = sin10x$
5. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$

№2. Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$ имеют угловой коэффициент, равный 2

№3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$

№4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 8t^2 - 2t^3$. Найдите ускорение точки в момент времени $t = 1$ с

№5. Найдите общий вид первообразных для функции:

1. $f(x) = 6x + 3x^3 + 2x^4 - 9$
2. $f(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^5} - 2\sqrt{x}$
3. $f(x) = (4x-13)^6$
4. $f(x) = cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$
5. $f(x) = \frac{4}{(2x+10)^6}$

№6. Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{1} x^5 dx$
2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin^2x}$
3. $\int_1^2 (4+2x)dx$

***Эталон ответов:***

| Вариант 1 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Задания** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Ответы:** | 1. $4x + 16x^3 + 6$<br>2. $-\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}$<br>3. $24(8x-10)^2$<br>4. $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$<br>5. $\frac{20}{(5-4x)^6}$ | (0; 4) | y = -10x – 5 | 24 | 1. $F(x) = 1{,}5x^2 + \frac{5x^6}{6} + \frac{6x^7}{7} - 2x + C$<br>2. $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$<br>3. $F(x) = \frac{(5x-3)^6}{30} + C$ | 1. 0<br>2. 1<br>3. 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 4. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + C$<br>5. $F(x) = -\frac{1}{6(4x+3)^3} + C$ | |
| Вариант 2 | | | | | | |
| **Задания** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Ответы:** | 1. $6x + 24x^3 + 8$<br>2. $-\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{24}{x^9}$<br>3. $24(4x-5)^5$<br>4. $10\cos 10x$<br>5. $\frac{6}{(1-2x)^4}$ | (0; -1) | y = 3x – 7 | 4 | 1. $F(x) = 3x^2 + \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^5}{5} - 9x + C$<br>2. $F(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^4} - 1\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C$<br>3. $F(x) = \frac{(4x-13)^7}{28} + C$<br>4. $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C$<br>5. $F(x) = -\frac{2}{5(2x+10)^5} + C$ | 1. 0<br>2. 1<br>3. 7 |

**Критерии оценивания:**

Оценку «отлично» студент получает, если:

– обстоятельно и с теоретическим обоснованием решает данную контрольную работу;

– может обосновать свое решение, привести необходимые примеры;

– правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «хорошо» студент получает, если:

– неполно (не менее 70% от полного), но правильно решено задание;

– при решении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;

– может обосновать свое решение, привести необходимые примеры;

– правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если:

– неполно (не менее 50% от полного), но правильно решено задание;

– при решении была допущена 1 существенная ошибка;

– знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;

– излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;

– затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценку «неудовлетворительно» студент получает, если:

– студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определение понятий, искажает их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал, не может применять знания для решения практических задач; за полное незнание и непонимание учебного материала или отказ отвечать.

## Задания для проведения текущего контроля

### Раздел 1. Повторение курса математики основной школы

### Тема 1.6. Входная контрольная работа

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Раскройте формулу сокращенного умножения $a^2$-$b^2$:

А) $a^2$-2ab+$b^2$; Б) (a-b)(a+b); В) $a^2$+2ab-$b^2$; Г) (a-b)(a-b)

2. (1 балл) Площадь треугольника вычисляется по формуле:

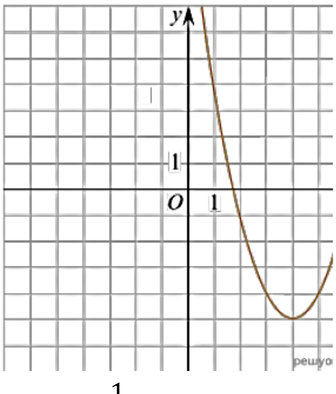
А) S=a*b; Б) S=(a*b)/2; В) S=2a*b; Г) S=(a*b)/3.

3. (1 балл) Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{10}{17}$ и $\frac{5}{8}$?

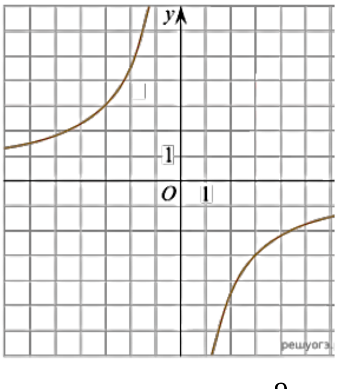
А) 0,4; Б) 0,5; В) 0,6; Г) 0,7

4. (1 балл) Даны графики функций. Какая формула соответствует графику 3):

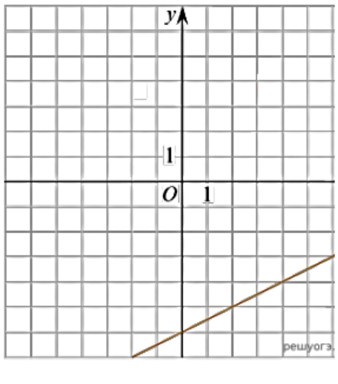
1)



2)



3)



А) $y = \frac{1}{2}x - 6$; Б) y = $x^2$ – 8x + 11; В) $y = -\frac{9}{x}$; Г) y = x + 5.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Вычислите $\frac{1}{2} + \frac{11}{5}$

6. (2 балла) Решите уравнение $x^2$ - 7x + 10 = 0. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

7. (2 балла) Площадь земель крестьянского хозяйства, отведенная под посадку кустарников и цветников, составляет 24 га и распределена между ними в отношении 5:3. Сколько гектаров занимают цветники?
8. (2 балла) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 2 и HD = 32. Диагональ параллелограмма BD равна 40. Найдите площадь параллелограмма.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | Б | В | А | 2,7 | 2 | 9 | 816 |

**Раздел 2. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции**
**Тема 2.12. Контрольная работа по разделу 2 «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»**
***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***
1. (1 балл) В $\triangle$ABC sinC = $\frac{AB}{AC}$. Какая из сторон является гипотенузой $\triangle$ABC?
А) AB; Б) AC; В) BC; Г) CB.
2. (1 балл) Углом какой четверти является угол $\alpha$=400°?
А) I; Б) II; В) III; Г) IV.
3. (1 балл) Какие из функций являются чётными?
А) y=sin x; Б) y=cos x; В) y=tg x; Г) y= ctg x.
4. (1 балл) Какие из чисел являются корнем уравнения cos x = $\frac{1}{2}$?
А) x = $\frac{\pi}{6}$; Б) x = $\frac{\pi}{3}$; В) x = $\frac{\pi}{2}$; Г) x = $\frac{2\pi}{3}$.
***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***
5. (2 балла) Вычислите: $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}$.
6. (2 балла) Найдите значение выражения $4\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
7. (2 балла) Докажите тождество: 2sin(π/2+α)+ cos(π – α)= cosα.
8. (2 балла) Решите уравнение: $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | А | В | Б | 1 | 2π | - | $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$ |

**Раздел 3. Степени и корни. Степенная функция**

**Тема 3.6. Контрольная работа по разделу 3 «Степени и корни. Степенная функция»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Между какими двумя натуральными числами находится число $\sqrt[3]{19}$?

А) 19 и 20; Б) 2 и 3; В) 18 и 19; Г) 3 и 4.

2. (1 балл) Определите корень уравнения $x^3=125$

А) 3; Б) -3; В) -5; Г) 5.

3. (1 балл) Расположите в порядке возрастания числа: 2; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{17}$

А) 2; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{17}$; Б) 2; $\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[3]{5}$; 3 В) $\sqrt[3]{5}$; 2; $\sqrt[4]{17}$; Г) $\sqrt[4]{17}$; 2; $\sqrt[3]{5}$;

4. (1 балл) Умножая числа с одинаковым основанием, их степени…?

А) умножаем; Б) делим; В) складываем; Г) отнимаем.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{a^{5,58} \cdot a^{2,9}}{a^{6,48}}$ при a=7.

6. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)^2}{10+\sqrt{96}}$.

7. (2 балла) Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $I = \sqrt{2Rh}$, где R=6400 км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 48 километров? Ответ выразите в километрах.

8. (2 балла) Решите уравнение $\sqrt{-32 - x} = 2$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | Г | В | В | 49 | 2 | 0,18 | -36 |

**Раздел 4. Показательная функция**

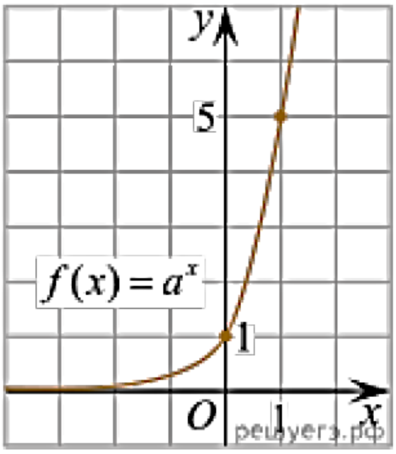
**Тема 4.4. Контрольная работа по разделу 4 «Показательная функция»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) При каком значении а функция $y=a^x$ бывает на всей области определения?

А) $a=\frac{4}{3}$; Б) a=8,25; В) $a=\frac{1}{8}$; Г) $a=\sqrt{3}$.

2. (1 балл) На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение f(2).




А) 25; Б) 5; В) 32; Г) нет верного ответа.

3. (1 балл) Функция задана формулой: $f(x)=(\frac{1}{2})^x$. Чему равно f(-2)?

А) $-\frac{1}{4}$; Б) -4; В) 4; Г) √2.

4. (1 балл) Корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$?

А) 12,5; Б) 13; В) 14; Г) 15.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Найдите корень уравнения $3^{x+2}-5*3^x=12$

6. (2 балла) Сколько целых решений имеет неравенство $1 < 7^{x-1} \leq 49$?

7. (2 балла) Найдите точку максимума функции $y = 2^{5-8x-x^2}$

8. (2 балла) В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$ где $m_0$ — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 184 мг. Период его полураспада составляет 7 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 23 мг.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | А | В | А | 1 | 2 | -4 | 21 |

**Раздел 5. Логарифмы. Логарифмическая функция**

**Тема 5.6. Контрольная работа по разделу 5 «Логарифмы. Логарифмическая функция»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Какая из функций возрастает на всей области определения?

А) $f(x)=\log_5 x$; Б) $f(x)=0,7^x$; В) $f(x)=x^2$; Г) $f(x)= \log_{\frac{1}{2}} x$.

2. (1 балл) Укажите область определения функции $f$(x)=$lg\,\frac{2x-3}{x+7}$

А) (-7; 1,5); Б) (-∞; -1,5), (7; +∞).; В) (-1,5; 7); Г) (-∞; -7), (1,5; +∞).

3. (1 балл) Расположить в порядке возрастания: $\log_{0,5} 4$; $\log_{0,5} 0,4$; $\log_{0,5}\frac{1}{4}$.

А) $\log_{0,5} 4$; $\log_{0,5} 0,4$; $\log_{0,5}\frac{1}{4}$; Б) $\log_{0,5} 4$; $\log_{0,5}\frac{1}{4}$; $\log_{0,5} 0,4$;

В) $\log_{0,5}\frac{1}{4}$; $\log_{0,5} 0,4$; $\log_{0,5} 4$; Г) $\log_{0,5} 0,4$; $\log_{0,5}\frac{1}{4}$; $\log_{0,5} 4$.

4. (1 балл) Найдите корень уравнения $\log_4(5 - x) = 2$.

А) 11; Б) -11; В) -3; Г) 3.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Определите значение выражения $\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4}$.

6. (2 балла) Укажите наименьшее целое решение неравенства: $\log_3(6x - 4) > 2$.

7. (2 балла) Найдите точку максимума функции $y = 8\ln(x + 7) - 8x + 3$

8. (2 балла) Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п$=15° через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды m = 0,6 кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в$=91° до температуры T, причём $x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_В - T_П}{T - T_П}$, где $c = 4200\,\frac{Вт\cdot с}{кг\cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 28\,\frac{Вт}{м\cdot °C}$ — коэффициент теплообмена, а α = 0,8 — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 144 м.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | А | Г | А | Б | 5 | 3 | -6 | 34 |

## Раздел 6. Уравнения и неравенства

### Тема 6.6. Контрольная работа по разделу 6 «Уравнения и неравенства»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных:***

1. (1 балл) Какое из чисел является корнем уравнения $\log_2(x + 1) = 1$

А) –1; Б) 2; В) 1; Г) 0.

2. (1 балл) Какие из уравнений имеют более одного корня?

А) $x^2$-6x+5=0; Б) $3^{x+2}$=9; В) (x-4)(x+3)(x-8)=0; Г) 2x-7=0.

3. (1 балл) Определите вид уравнения $\sqrt{-32 - x} = 2$

А) линейное; Б) квадратное; В) иррациональное; Г) рациональное.

4. (1 балл) Определите наименьшее целое решение неравенства $5^{x+2}<1$?

А) -3; Б) 0; В) 3; Г) -4.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Найдите корень уравнения $|x-3| = 2$

6. (2 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$

7. (2 балла) Решите неравенство $\frac{2x^2-5x}{x-3} \le x$

8. (2 балла) Решите уравнение $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = 0$

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | В | В | А | 1; 5 | (10; 2) | (-∞; 0]; [2; 3) | -1; 6 |

**Раздел 7. Производная функции, ее применение**

**Тема 7.12. Контрольная работа по разделу 7 «Производная функции, ее применение»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Чему равна производная функции $y=\cos^2 x$?

А) $y'= -\sin^2 x$; Б) $y'= -2\sin^2 x$; В) $y'= -2\cos x \sin x$; Г) $y'=2\cos x$.

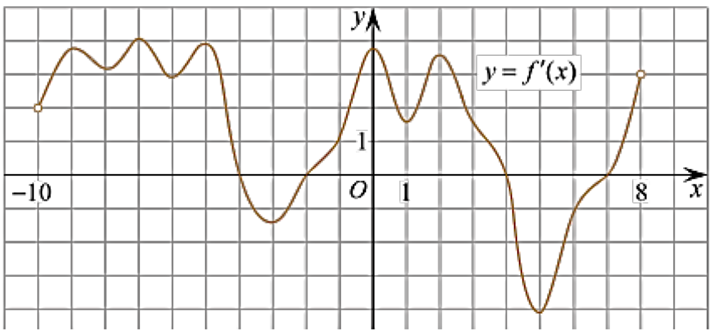
2. (1 балл) По какой из формул вычисляется производная произведения?

А) $(u+v)'=u'+v'$; Б) $(uv)'=u'v+uv'$; В) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$; Г) $(f(g(x))'=f'(g(x))*g'(x)$.

3. (1 балл) Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=3x^2 - 6x +4$. Выберите ответ.

А) 1; Б) -1; В) 4; Г) -4.

4. (1 балл) На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−10; 8). Найдите количество точек максимума функции f(x) на отрезке [−9;6].

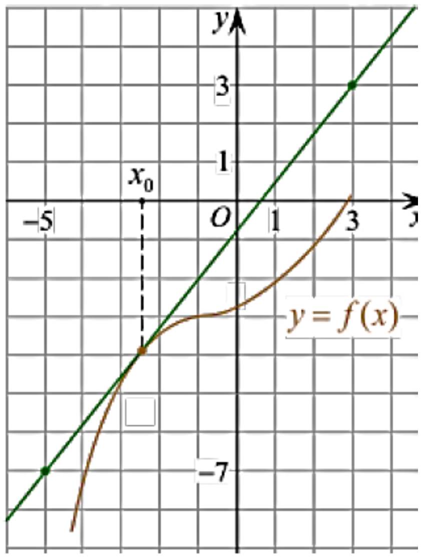



А) 5; Б) 4; В) 2; Г) 3.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 - 4t^2 + 5t - 5$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t = 3 с.

6. (2 балла) На рисунке изображён график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции f(x) в точке $x_0$.




7. (2 балла) Решите неравенство: $\frac{(x-2)(x+3)}{(x-8)} > 0$

8. (2 балла) Построить график функции $f(x) = x^3 - 3x$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | Б | А | В | 8 | 1,25 | (-3;2); (8;+∞) | - |

**Раздел 8. Первообразная функции, ее применение**

**Тема 8.5. Контрольная работа по разделу 8 «Первообразная функции, ее применение»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Для какой из функций функция $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной?

А) $f(x)=3(x^2-2)$; Б) $f(x)=3x(x^2-2)$; В) $f(x)=3x^2-6x+1$; Г) $f(x)=3x^2-6x$.

2. (1 балл) Дана функция $f(x)= 3x^2+1$. Чему равна F(1)?

А) 2; Б) 4; В) 6; Г) $1\frac{1}{3}$.

3. (1 балл) Общий вид всех первоообразных для f(x)=sinx?

А) F(x)=cosx+C; Б) F(x)=-cosx+C; В) F(x)=tgx+C; Г) F(x)=-tgx+C.

4. (1 балл) Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 x dx$.

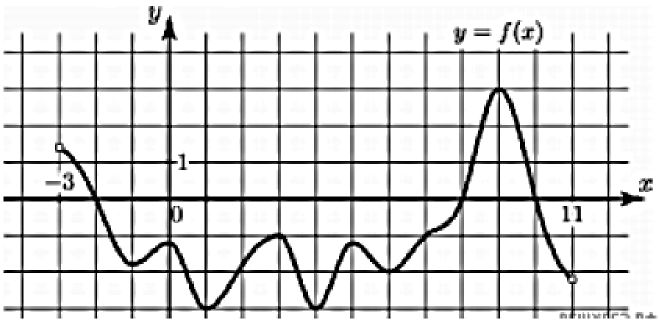
А) -1; Б) 1; В) -1,5; Г) 1,5.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

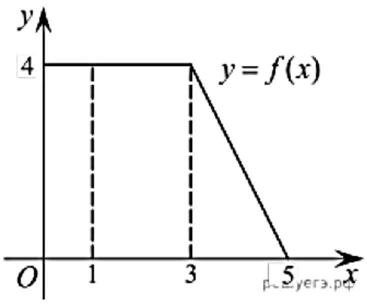
5. (2 балла) Является ли F(x)=$x^3$-3x+1 первообразной для функции f(x)=3($x^2$-1)?

6. (2 балла) Задайте первообразную F(x) для функции f(x)=3$x^2$-2x, если известны координаты точки M (1, 4) графика F(x).

7. (2 балла) На рисунке изображен график функции y=f(x), определённой на интервале (−3; 11). Найдите наименьшее значение функции f(x)на отрезке [2; 9,5].




8. (2 балла) На рисунке изображен график некоторой функции y=f(x). Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 x dx$.




***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Г | А | Б | Г | да | $x^3 - x^2 + 4$ | -3 | 12 |

**Раздел 9. Множества. Элементы теории графов**

**Тема 9.4. Контрольная работа по разделу 9 «Множества. Элементы теории графов»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Укажите число, принадлежащее множеству M = {5, 10, 12, 37, 41}.

А) 6; Б) 5; В) 11; Г) 40.

2. (1 балл) Укажите верное соотношение для множеств А = {5, 9, 11}; В = {4, 5, 10, 11, 12}; С = {4, 5, 9, 11}?

А) А □ В; Б) В □ С; В) А □ С; Г) С □ В.

3. (1 балл) Мощность множества, состоящего из всех букв русского алфавита, равна?

А) 32; Б) 33; В) 28; Г) 26.

4. (1 балл) Закончите определение: «Множество, содержащее только те элементы, принадлежащие и множеству А и множеству В, называют …»?

А) пересечением множеств; Б) объединением множеств; В) разностью множеств; Г) объединенностью множеств.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Запишите перечислением элементов пересечение множеств А и В, если: А = {3; 5;7; 27; 14; 9}, В = {9; 3; 7; 27; 14}.

6. (2 балла) Даны два множества А = {1, 2, 3, 4, 6, 12} и В = {1, 2, 3, 6, 9, 18}. Запишите объединение множеств.

7. (2 балла) Каждый ученик в классе изучает английский или немецкий язык, или оба этих языка. Английский язык изучают 30 человек, немецкий — 25 человек, а тот и другой — 15 человек. Сколько всего учеников в классе?

8. (2 балла) Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения $x^2 + 4x - 5 = 0$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | В | Б | А | $A \cap B = \{3; 7; 14; 27\}$ | $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$ | 40 | F = {-5; 1} |

## Раздел 10. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

## Тема 10.7. Контрольная работа по разделу 10 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Комбинаторика - это раздел математики, отвечающий на вопросы сколькими способами можно выбрать элементы …

А) заданного конечного множества; Б) бесконечного множества; В) любого множества; Г) иррациональных чисел.

2. (1 балл) Соединения из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются:

А) перестановками; Б) сочетаниями; В) размещениями; Г) комбинациями.

3. (1 балл) Число всех возможных размещений вычисляется по формуле:

А) $A_n^m = n(n-m)$; Б) $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$; В) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; Г) $A_n^m = n(n+m)$

4. (1 балл) Группировка – это…

А) упорядочение единиц совокупности по признаку; Б) разбиение единиц совокупности на группы по признаку; В) обобщение единичных фактов; Г) обобщение единичных признаков.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает?

6. (2 балла) Прибыль 5 магазинов составил за месяц: 30000 руб., 100000 руб., 50000 руб., 35000 руб., 60000 руб. Построить диаграмму, иллюстрирующие данные о прибыли магазинов.

7. (2 балла) Цветоводу предложили украсить клумбу цветами, используя 3 вида. Сколько различных вариантов есть у цветовода, если есть выбор из 5 видов разной рассады?

8. (2 балла) Сколькими способами можно посадить 4 кустарника в один ряд?

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | А | А | В | А | 0,997 | - | 10 | 24 |

**Раздел 11. Прямые и плоскости в пространстве**

**Тема 11.6. Контрольная работа по разделу 11 «Прямые и плоскости в пространстве»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Расшифруйте краткую запись: а$\in\beta$.

А) точка а принадлежит плоскости $\beta$; Б) точка а принадлежит прямой $\beta$; В) прямая а принадлежит плоскости $\beta$; Г) прямая а пересекает плоскость $\beta$.

2. (1 балл) Прямые АВ и СД скрещиваются. Какое расположение имеют прямые АС и ВД?

А) параллельные; Б) перпендикулярные; В) скрещиваются; Г) пересекаются.

3. (1 балл) Плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют 1 общую точку. Каково их взаимное расположение?

А) параллельны; Б) пересекаются по прямой; В) совпадают; Г) скрещиваются.

4. (1 балл) Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она…

А) перпендикулярна и самой наклонной; Б) параллельна и самой наклонной; В) скрещивается с наклонной; Г) перпендикулярна основанию наклонной.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Через концы отрезка АВ и его середину М проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках $А_1$, $В_1$ и $М_1$. Найдите длину отрезка $ММ_1$, если отрезок АВ не пересекает плоскость и если $АА_1$ = 6,8см, $ВВ_1$ = 7,4см.

6. (2 балла) Прямые АС, АВ и АД попарно перпендикулярны. Найдите отрезок СД, если АВ = 5 см, ВС = 13 см, АД = 9 см.

7. (2 балла) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины общего перпендикуляра, если проекции наклонных относятся как 2:3 и длины наклонных равны 23 см и 33 см.

8. (2 балла) Начертить куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Построить сечение $АД_1С$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | В | Б | А | 7,1 | 15 | 9 | - |

**Раздел 12. Многогранники и тела вращения**

**Тема 12.16. Контрольная работа по разделу 12 «Многогранники и тела вращения»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) В каких единицах измеряется площадь поверхности многогранника?

А) в градусах; Б) в метрах; В) в квадратных метрах; Г) в двугранных градусах.

2. (1 балл) Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле:

А) $S = S_{бок} + 2\ S_{осн}$; Б) $S_{бок} = P_{осн} * H$; В) $S = Б_{бок} + S\ S_{осн}$; Г) $S_{бок} = 2P_{осн} * H$.

3. (1 балл) Что является осевым сечением усеченного конуса?

А) равнобедренный треугольник; Б) равнобедренная трапеция; В) прямоугольник; Г) прямоугольная трапеция.

4. (1 балл) Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из своих катетов?

А) конус; Б) усеченный конус; В) пирамида; Г) усеченная пирамида.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Ребро основания правильной треугольной пирамиды 3 м, апофема 6м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6. (2 балла) Диагональ куба равна $\sqrt{588}$. Найдите его объем.

7. (2 балла) Прямоугольник со сторонами 8см и 3см вращается вокруг большей стороны. Найдите объем, площади боковой и полной поверхностей полученного тела.

8. (2 балла) Вычислить поверхность кроны кустарника, имеющего форму шара радиуса 0,5 м. В ответ запишите число, деленное на π.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | Б | Б | А | 27 | 2744 | 72π; 48π; 64 π | 1 |

**Раздел 13. Координаты и векторы**

**Тема 13.4. Контрольная работа по разделу 13 «Координаты и векторы»**

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Даны точки А(1,0,5), В(-2,0,4), С(0,-1,0), Д(0,0,2). Какие из них лежат на координатной прямой Оу?

А) А; Б) В; В) С; Г) Д.

2. (1 балл) Какие из векторов а(1,0,-1), с(1/3,2/3,-2/3), в(1,1,1), р(0,0,-2) являются единичными?

А) а; Б) с; В) в; Г) р.

3. (1 балл) Какие из векторов а(1,2,-3), с(3,6,-6), в(2,4,-6) коллинеарны?

А) а, в; Б) с, в; В) а, с; Г) коллинеарных векторов нет.

4. (1 балл) Даны точки А(2,0,5), В(2,4,-2) С(-2,6,3). Серединой какого отрезка является точка М(0,3,4)?

А) АВ; Б) ВС; В) АС; Г) СВ.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Даны векторы а(-6,0,8), в(-3,2,-6). Найдите скалярное произведение векторов.

6. (2 балла) При каких значениях п векторы $\vec{а}$ (4,п,2), $\vec{в}$ (1,2,п) перпендикулярны?

7. (2 балла) Даны векторы а(-6,0,8), в(-3,2,-6). Найдите косинус угла между векторами.

8. (2 балла) Даны векторы в$\{3,1\text{-}2\}$, с $\{1,4,-3\}$. Найти длину вектора 2в-с.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | В | А | В | -30 | -1 | -3/7 | $\sqrt{30}$ |

**Критерии оценивания:**

Оценка «отлично» выставляется студенту за 90 – 100 % правильных ответов.

Оценка «хорошо» выставляется студенту за 75 – 89 % правильных ответов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту за 50 – 74 % правильных ответов;

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту за менее 50 % правильных ответов.

Критерии оценивания для представленных заданий:

- оценка «5»: 11 – 12 баллов;
- оценка «4»: 9 – 10 баллов;
- оценка «3»: 6 – 8 баллов;
- оценка «2»: 0 – 5 баллов.

**Вопросы для собеседования**

**Раздел 2. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции**
**Тема 2.1 Тригонометрические функции произвольного угла, числа. Радианная и градусная мера угла**
1. Чему равен угол в один радиан?
2. В каких четвертях тригонометрического круга функция y=sinx принимает положительные значения?
3. В каких четвертях тригонометрического круга функция y= cosx принимает отрицательные значения?

**Тема 2.5. Тригонометрические функции, их свойства и графики**
1. Перечислите тригонометрические функции, укажите их периоды.
2. Определите область значения функции y=3cos(5x)?

**Тема 2.9. Простейшие тригонометрические уравнения**
1. Перечислите способы решения тригонометрических уравнений.
2. Раскройте алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений.

**Раздел 3. Степени и корни. Степенная функция**
**Тема 3.1. Степень. Свойства степени с рациональными и действительными показателями**
1. Сформулируйте определение степенной функции.
2. Перечислите свойства степени с действительным показателем.

**Тема 3.3. Понятие корня n-ой степени из действительного числа. Свойства корня n-ой степени**
1. На что необходимо обратить внимание при решении иррационального уравнения четной степени?
2. Чему равен корень четной степени из отрицательного числа? Приведите пример.
3. Чему равен корень нечетной степени из отрицательного числа? Приведите пример.

**Раздел 4. Показательная функция**
**Тема 4.1. Показательная функция, ее свойства и график**
1. Сформулируйте определение показательной функции.
2. Перечислите свойства показательной функции.

**Раздел 5. Логарифмы. Логарифмическая функция**
**Тема 5.1. Логарифм числа. Свойства логарифмов**

1. Продолжите определение: «Логарифм – это…».
2. Чему равен логарифм произведения?
3. Чему равен логарифм частного?

**Тема 5.2. Логарифмическая функция, ее свойства**
1. Сформулируйте определение логарифмической функции.
2. Перечислите свойства логарифмической функции.

**Тема 5.3. Решение логарифмических уравнений и неравенств**
1. Перечислите способы решения логарифмических уравнений.
2. Сформулируйте правило решения простейших логарифмических неравенств.

**Раздел 6. Уравнения и неравенства**
**Тема 6.1. Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения**
1. Что называется уравнением?
2. Что значит решить уравнение?
3. Что такое корень уравнения?
4. Что называется неравенством?
5. Что значит решить неравенство?

**Раздел 7. Производная функции, ее применение**
**Тема 7.1. Числовая последовательность. Вычисление пределов последовательностей**
1. Продолжите определение: «Последовательность – это…».
2. Приведите пример арифметической прогрессии.
3. Приведите пример геометрической прогрессии.

**Тема 7.3. Формулы и правила дифференцирования**
1. Чему равна производная произведения?
2. Чему равна производная частного?
3. Чему равна производная сложной функции?

**Раздел 10. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей**
**Тема 10.1. Основные понятия комбинаторики**
1. Продолжите определение: «Сочетание – это…».
2. Продолжите определение: «Размещение – это…».
3. Продолжите определение: «Перестановки – это…».

**Тема 10.2. Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей**

1. Продолжите определение: «Случайное событие – это…». Приведите пример.
2. Продолжите определение: «Вероятность случайного события – это…».

**Тема 10.5. Задачи математической статистики**

1. Как найти среднее арифметическое числового ряда?
2. Как найти медиану числового ряда?
3. Как вычисляется размах числового ряда?

**Раздел 11. Прямые и плоскости в пространстве**

**Тема 11.1. Основные понятия стереометрии. Расположение прямых и плоскостей**

1. Перечислите взаимное расположение двух прямых в пространстве
2. Какие прямые называются параллельными в пространстве?
3. Какие прямые называются скрещивающимися в пространстве?
4. Какие прямые называются перпендикулярными в пространстве?
5. Перечислите взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

**Тема 11.3. Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, плоскостей**

1. Раскройте понятие «перпендикулярность плоскостей».
2. Продолжите определение: «Перпендикуляр – это…».
3. Продолжите определение: «Наклонная – это…».
4. Продолжите определение: «Проекция наклонной – это…».

**Раздел 12. Многогранники и тела вращения**

**Тема 12.1. Многогранник. Вершины, ребра, грани многогранника**

1. Продолжите определение: «Многогранник – это…».
2. Продолжите определение: «Призма – это…».
3. Продолжите определение: «Прямоугольный параллелепипед – это…».
4. Продолжите определение: «Куб – это…».
5. Продолжите определение: «Пирамида – это…».

**Раздел 13. Координаты и векторы**

**Тема 13.2. Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов**

1. Раскройте понятие «вектор».
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какие векторы называются перпендикулярными?
4. Чему равно скалярное произведение векторов?

**Критерии оценивания:**

Оценку «отлично» студент получает, если:

– полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;

– обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры;

– правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «хорошо» студент получает, если:

– допускает несущественные ошибки при ответе;

– может применить знания на практике, привести необходимые примеры;

– правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если:

– излагает материал недостаточно полно, допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;

– затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценку «неудовлетворительно» студент получает, если:

– студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определение понятий, искажает их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал, не может применять знания для решения практических задач; за полное незнание и непонимание учебного материала или отказ отвечать.

## Фонд тестовых заданий

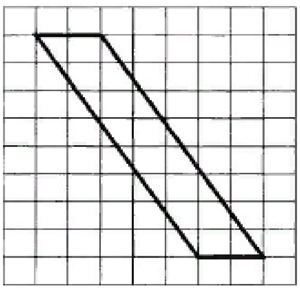
1. Найдите значения выражения $\sqrt[3]{216 \cdot 125}$
   1) 30
   2) 25
   3) 81
   4) 8

2. Решите тригонометрическое уравнение $\sin x = 1$.
   1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
   2) $\pi + 2\pi k, k \in Z$
   3) $-\frac{3\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
   4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

3. Найдите значения выражения $2^{log_2 10}$.
   1) 8
   2) 4
   3) 10
   4) 0

4. Чему равна производная функции $f(x) = x^4 + 5x^3 + 1$.
   1) $3x^2 + 15x$
   2) $x^4 + 15x^2$
   3) $12x^3 + 8x^2$
   4) $4x^3 + 15x^2$

5. На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Ответ.__________________

6. Решите уравнение $3^x - 3^{x+3} = -78$.

Ответ.__________________

7. Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равна 2, 4, 5 см?

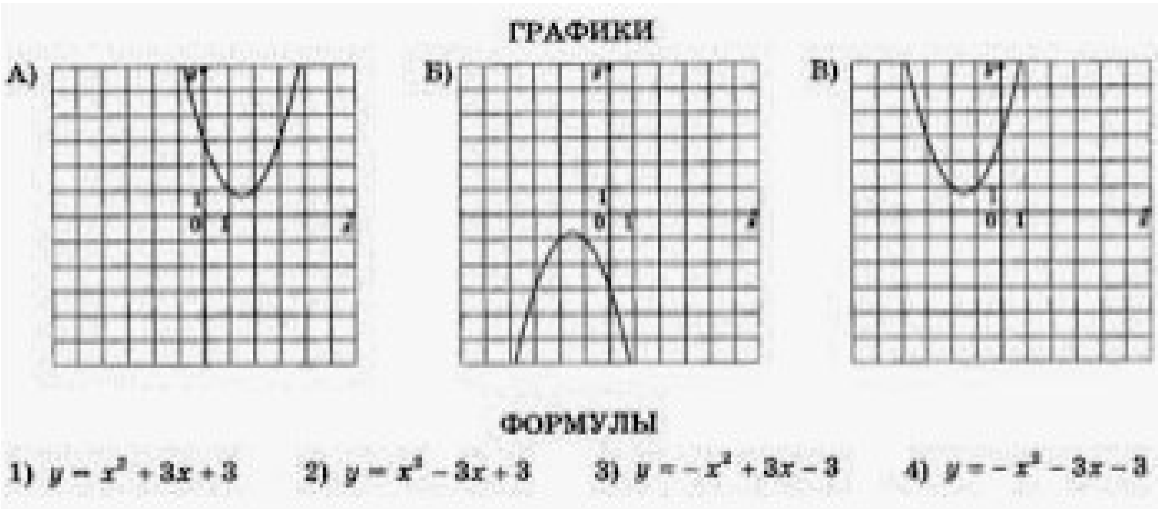
Ответ.__________________

8. Установите соответствие между объемом правильной четырёхугольной призмы, сторонами её оснований и высотой боковой грани.

| Объем призмы | | Основание, боковая грань |
|---|---|---|
| 1) $150$ см$^3$ | А) | основание – 6 см<br>боковая грань – 5 см |
| 2) $180$ см$^3$ | Б) | основание – 10 см<br>боковая грань – 2 см |
| 3) $200$ см$^3$ | В) | основание – 5 см<br>боковая грань – 6 см |

| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

9. Установите соответствие между графиками и функциями, которые их задают.




| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

10. Установите соответствие между формулами и видом функции.

| Формула | | Вид функции |
|---|---|---|
| 1) $y = ax^2 + bx + c$ | А) | экспонента |
| 2) $y = (a - x)^2 + (a - y)^2$ | Б) | парабола |
| 3) $y = a^x$ | В) | окружность |

| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

11. Площадь строительного участка прямоугольной формы шириной 40 м составляет 3440 м$^2$. Участок необходимо обнести забором по периметру. Стоимость 1 м забора составляет 500 руб. Какая сумма потребуется для строительства всего забора? Ответ дайте в тыс.руб.

Ответ.__________________

12. Перед зданием колледжа решено разбить клумбу. Но по форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями $y = 4/x + 2$; $y = 6$; $x = 4$. Какую сумму может получить строительная компания за вскапывание клумбы, если за каждый 1 м$^2$ компании выплачивается 500 руб.? Ответ дайте в руб.

Ответ.__________________

13. Какой тип симметрии наблюдается на здании МГУ, изображенном на рисунке?

Ответ.__________________

| **Вопрос** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | 1 | 1 | 3 | 4 | 16 | 1 | $3\sqrt{5}$ | А - 2<br>Б - 3<br>В - 1 | А - 2<br>Б - 4<br>В - 1 | А - 3<br>Б - 1<br>В - 2 | 126 | 3200 | осевая |

**Критерии оценивания:**

«5» - 90 – 100% правильных ответов;

«4» - 70 – 89% правильных ответов;

«3» - 50 – 69% правильных ответов;

«2» - менее 50% правильных ответов.

**Критерии оценки фонда тестовых заданий:**

«5» - 12 – 13 правильных ответов;

«4» - 9 – 11 правильных ответов;

«3» - 6 – 8 правильных ответов;

«2» - менее 6 правильных ответов.

**3. Оценочные средства для промежуточной аттестации и критерии оценки**

## Вопросы к экзамену

1) Радианная мера угла.
2) Синус, косинус, тангенс и котангенс угла.
3) Основные тригонометрические тождества.
4) Формулы приведения.
5) Простейшие тригонометрические уравнения.
6) Определение и способы задания функции.
7) Свойства функции.
8) Алгоритм исследования функции.
9) Степенная функция, её свойства и график.
10) Показательная функция, её свойства и график.
11) Логарифмическая функция, её свойства и график.
12) Функция y = sin x, ее свойства и график.
13) Функция y = cos x, ее свойства и график.
14) Функции y = tg x и y = ctg x, их свойства и графики.
15) Обратные тригонометрические функции.
16) Корень n-ой степени, свойства радикалов.
17) Решение иррациональных уравнений.
18) Степень с рациональным и действительным показателями.
19) Решение показательных уравнений и неравенств.
20) Логарифм. Правила действий с логарифмами.
21) Решение логарифмических уравнений и неравенств.
22) Последовательность. Способы задания и свойства числовых последовательностей.
23) Бесконечно убывающая геометрическая последовательность.
24) Предел последовательности.
25) Производная функции.
26) Правила дифференцирования.
27) Вычисление производной сложной функции.
28) Физический (механический) смысл производной
29) Геометрический смысл производной.
30) Уравнение касательной к графику функции.
31) Непрерывность функции и метод интервалов.
32) Связь производной с возрастанием и убыванием функции.
33) Критические точки функции, максимумы и минимумы.
34) Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.
35) Первообразная функции.
36) Правила нахождения первообразных.
37) Интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница.

38) Площадь криволинейной трапеции.
39) Основные понятия комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения.
40) Событие, вероятность события.
41) Определение вероятности: классическое, статистическое и геометрическое.
42) Основные статистические показатели: среднее арифметическое, размах, медиана и мода.
43) Основные понятия стереометрии.
44) Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
45) Углы между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
46) Параллельные прямые в пространстве.
47) Параллельность прямой и плоскости.
48) Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.
49) Перпендикулярные прямые в пространстве.
50) Перпендикулярность прямой и плоскости.
51) Признак перпендикулярности плоскостей.
52) Двугранный угол.
53) Теорема о трех перпендикулярах.
54) Понятие многогранника. Виды и элементы многогранников.
55) Взаимное расположение плоскости и многогранника.
56) Понятие тел вращения и их виды.
57) Призма и ее элементы.
58) Параллелепипед и его свойства.
59) Пирамида и ее элементы.
60) Цилиндр и его элементы.
61) Конус и его элементы.
62) Шар и сфера. Уравнение сферы.
63) Прямоугольная система координат. Координаты вектора.
64) Действия над векторами.
65) Скалярное произведение двух векторов.
66) Симметрия: центральная, осевая и зеркальная.

**Критерии оценивания:**

Оценка «отлично» выставляется студенту за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором студент легко ориентируется, владение понятийным аппаратом, за умение связывать теорию с практикой, высказывать и обосновывать свои суждения. Отличная отметка предполагает грамотное, логичное изложение ответа.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если студент полно освоил учебный материал, владеет понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет знания для решения практических задач, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют некоторые неточности.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, в применении знаний для решения практических задач, не умеет доказательно обосновать свои суждения.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определение понятий, искажает их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал, не может применять знания для решения практических задач; за полное незнание и непонимание учебного материала или отказ отвечать.

## Темы индивидуальных проектов

1. Жизнь и научные открытия Франсуа Виета
2. Производная и её прикладное значение
3. Уравнения, неравенства и способы их решения
4. Пифагор и его научные открытия
5. Математика: история возникновения и развития
6. Задачи на дроби и история их возникновения
7. Математика и её роль в архитектуре
8. Графики функций и их применение
9. Прогрессии и их практическое применение
10. В мире вероятностей
11. Геометрические тела в пространстве и вокруг нас
12. Числа и их история
13. Золотое сечение в математике и его прикладное значение
14. Проценты, их значение и применение
15. Первообразная, интеграл и его применение
16. Текстовые задачи и их решение
17. Методы математической статистики
18. Пирамиды: геометрическое тело и архитектурное великолепие
19. Логарифмы: сущность и их свойства
20. В мире квадратных уравнений
21. Треугольники, их сущность и значение
22. Геометрия: из глубины веков до наших дней
23. Показательные уравнения и неравенства: сущность и способы решения
24. Тригонометрия и мир вокруг нас
25. Симметрия - основополагающий принцип устройства мира
26. Математики Древней Греции и их открытия
27. Многоугольники их свойства
28. Векторы на плоскости и в пространстве
29. Иррациональные уравнения и способы их решения
30. Тела вращения, их виды и свойства
31. В мире комбинаторики
32. Функции: способы задания и свойства
33. Системы координат и их применение
34. Корни, степени и логарифмы
35. Тригонометрические уравнения и неравенства и их решение
36. Знакомое и незнакомое число пи

**Критерии оценивания:**

*Оценка «Отлично»*:

– работа носит практический характер, содержит грамотно изложенную теоретическую базу, характеризуется логичным, последовательным изложением материала с соответствующими выводами и обоснованными предложениями;

– при защите работы обучающийся показывает достаточно глубокие знания вопросов темы, свободно оперирует данными исследованиями, вносит обоснованные предложения, во время выступления использует наглядные пособия (таблицы, схемы, графики, электронные презентации и т.д.) или раздаточный материал, легко отвечает на поставленные вопросы.

*Оценка «Хорошо»*:

– носит практический характер, содержит грамотно изложенную теоретическую базу, характеризуется последовательным изложением материала с соответствующими выводами, однако с не вполне обоснованными предложениями;

– при защите обучающийся показывает знания вопросов темы, оперирует данными исследования, вносит предложения, во время выступления использует наглядные пособия (таблицы, схемы, графики, электронные презентации и т.д.) или раздаточный материал, без особых затруднений отвечает на поставленные вопросы.

*Оценка «Удовлетворительно»*:

– носит практический характер, содержит теоретическую базу, базируется на практическом материале, но отличается поверхностным анализом и недостаточно критическим разбором, в ней просматривается непоследовательность изложения материала, представлены необоснованные предложения;

– имеются замечания по содержанию работы и оформлению;

– при защите обучающийся проявляет неуверенность, показывает слабое знание вопросов темы, не дает полного, аргументированного ответа на заданные вопросы.

*Оценка «Неудовлетворительно»*:

– индивидуальный проект не завершен;

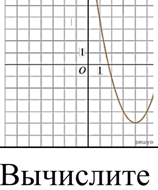
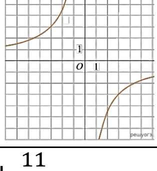
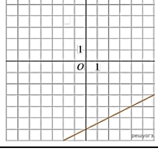
– к защите обучающийся не допускается.

**Таблица 2 Ключи к вопросам фонда оценочных средств**

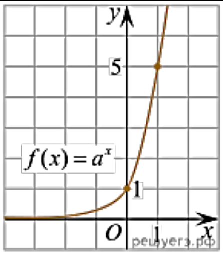
| № п/п | Вопрос | Ответ |
|---|---|---|
| 1 | Вычислить:<br>а) cos 780°;<br>б) sin $\frac{13\pi}{6}$;<br>в) sin α, если cos α = $-\frac{12}{13}$ *и* $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;<br>г) cos $\frac{\alpha}{2}$, если cos α = 0,28 и 0 < α < π;<br>д) $\frac{\sin 75^0 + \sin 45^0}{\sin 285^0}$;<br>е) 16 cos $x$ cos 2$x$ cos 4$x$ cos 8$x$, если $x = \frac{\pi}{6}$. | а) 0,5;<br>б) 0,5;<br>в)$-\frac{5}{13}$;<br>г) 0,8;<br>д) $-\sqrt{3}$;<br>е) $\sqrt{3}$. |
| 2 | Упростить выражение:<br>а) cos (α – β) – cos (α + β);<br>б) sin 915°cos β – sin β sin 645°;<br>в) $\frac{1}{2}$ sin (540° + β) sin (β + 810°);<br>г) sin 3α cos 2α + sin 2α cos 3α –cos (2π – α);<br>д) $\frac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}{1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}$;<br>е) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; | а) 2sinαsinβ;<br>б) sin(β-15°);<br>в)$-\frac{1}{4}$sin2β<br>г) sin5α-cosα;<br>д)$-\frac{1}{sin\alpha+cos\alpha}$;<br>е) $tg\alpha$ |
| 3 | 3. Решить уравнение:<br>а) cos (π + $x$) = sin $\frac{\pi}{2}$;<br>б) sin 5$x$ cos 4$x$ – cos 5$x$ sin 4$x$ = 1. | а) x = π+2πk, k ∈**Z**;<br>б) x = $\frac{\pi}{2}$+2πk, k ∈**Z**; |
| 4 | Вычислить:<br>а) sin 780°;<br>б) cos $\frac{13\pi}{6}$;<br>в) cos α, если sin α =$-\frac{4}{5}$ *и* $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;<br>г) sin 2α, если sin α = $-\frac{4}{5}$ и π < α < $\frac{3\pi}{2}$;<br>д) $\frac{\sin 70^0 + \sin 20^0}{\cos 205^0}$;<br>е) 16 sin $x$ sin 2$x$ sin 4$x$ sin 8$x$, если $x = \frac{\pi}{6}$; | а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;<br>б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;<br>в)$-\frac{3}{5}$;<br>г) $\frac{24}{25}$;<br>д) $-\sqrt{2}$;<br>е) $-3\sqrt{3}$. |

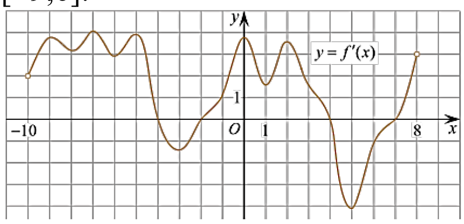
| | | |
|---|---|---|
| 5 | Упростить выражение:<br>а) sin (α + β) + sin (α – β);<br>б) sin 605°cos β + sin β cos 835°;<br>в) $\frac{1}{4}$ sin (405° + β) cos (β + 765°);<br>г) sin 4α cos 3α + sin 3α cos 4α –sin (6π – α);<br>д) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(2\pi+\alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)+1}$ ;<br>е) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ ; | а) 2sinαcosβ;<br>б) -cos(β-25°);<br>в)$\frac{1}{8}$cos2β<br>г) 2sin4αcos3α;<br>д) $\frac{1}{sin\alpha-cos\alpha}$;<br>е) $tg\alpha$ |
| 6 | 3. Решить уравнение:<br>а) sin (π + $x$) = cos $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;<br>б) cos 4$x$ sin 3$x$ + sin 4$x$ cos 3$x$ = 1. | а) x = $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}$+πk, k ∈**Z**;<br>б) x = $\frac{\pi}{14}$+$\frac{2\pi k}{7}$, k ∈**Z**; |
| 7 | Упростите выражение:<br>$1.(\sin x+\cos x)^2-1$<br>$2.\left(\cos^2 x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right)^2-\sin^2 x$<br>$3.\dfrac{\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ | 1. $\sin 2x$<br>2. $cos^2x$<br>3. $\frac{1}{cos^2x}$ |
| 8 | Преобразуйте выражение:<br>1. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$<br>2. $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1$<br>3. $\frac{lg8+lg18}{2lg2+lg3}$ | 1. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$<br>2. $\sqrt{c}$<br>3. 2 |
| 9 | Решите уравнение:<br>1. $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$<br>2. $cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$<br>3. $0{,}2^{x^2-16x-37{,}5}$=$5\sqrt{5}$<br>4.$log_3\sqrt{x-5}+log_3\sqrt{2x-3}$ =1 | 1. 3<br>2. $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$<br>3. – 2; 18<br>4. 6 |
| 10 | Упростите выражение:<br>$1.(\cos 2x+1)tg^2x-1$<br>$2.\dfrac{1+ctg^2(-x)}{tg^2(x-\pi)}\cdot\dfrac{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{ctg(\pi+x)}$ | 1. $-\cos 2x$<br>2. $\frac{1}{sin^2x}$<br>3. $tg\ x$ |

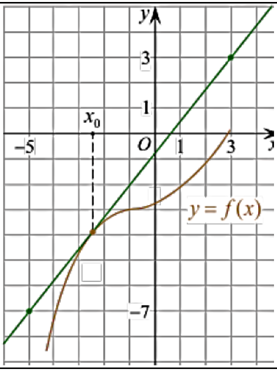
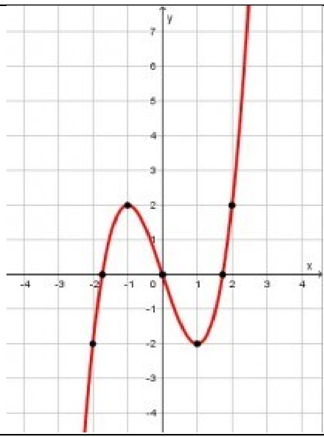
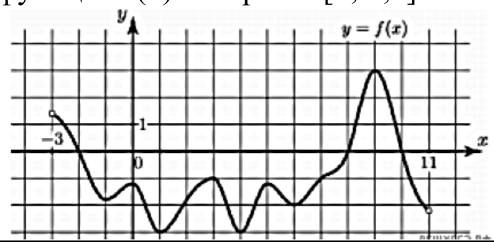
| | | |
|---|---|---|
| | 3. $\frac{\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x}{\cos^2 x}$ | |
| 11 | Преобразуйте выражение:<br>1. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}\right)^2$<br>2. $\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$<br>3. $\frac{3lg2+3lg5}{lg13-lg130}$ | 1. $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$<br>2. 3<br>3. – 3 |
| 12 | Решите уравнение:<br>1. $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$<br>2. $sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$<br>3. $2^{x^2-6x+0,5}=\frac{1}{16\sqrt{2}}$<br>4. $\frac{1}{2}lg(2x-1)=1-lg\sqrt{x-9}$ | 1. 2<br>2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$<br>3. 1; 5<br>4. 13 |
| 13 | Вычислите производную:<br>1. $f(x)=2x^2+4x^4+6x+3$<br>2. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$<br>3. $f(x)=(8x-10)^3$<br>4. $f(x)=cos\frac{x}{5}$<br>5. $f(x)=\frac{1}{(5-4x)^5}$ | 1. $4x+16x^3+6$<br>2. $-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}$<br>3. $24(8x-10)^2$<br>4. $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$<br>5. $\frac{20}{(5-4x)^6}$ |
| 14 | Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y=2x^2+x+4$ имеют угловой коэффициент, равный 1. | $(0; 4)$ |
| 15 | Составьте уравнение касательной к графику функции $y=3x^2-4x-2$ в точке с абсциссой $x_0=-1$ | $y=-10x-5$ |
| 16 | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-27t$. Найдите ускорение точки в момент времени $t=2$ с. | 24 |
| 17 | Найдите общий вид первообразных для функции:<br>1. $f(x)=3x+5x^5+6x^6-2$<br>2. $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\sqrt{x}$<br>3. $f(x)=(5x-3)^5$<br>4. $f(x)=sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$<br>5. $f(x)=\frac{2}{(4x+3)^4}$ | 1. $F(x)=1{,}5x^2+\frac{5x^6}{6}+\frac{6x^7}{7}-2x+C$<br>2. $F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$<br>3. $F(x)=\frac{(5x-3)^6}{30}+C$<br>4. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$<br>5. $F(x)=-\frac{1}{6(4x+3)^3}+C$ |
| 18 | Вычислите интегралы:<br>1. $\int_{-1}^{1}x^3dx$<br>2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2x}$<br>3. $\int_1^2(1+2x)dx$ | 1. 0<br>2. 1<br>3. 4 |

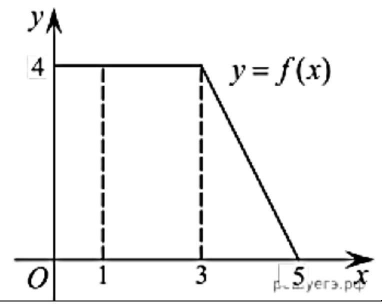
| | | |
|---|---|---|
| 19 | Вычислите производную:<br>1. $f(x) = 3x^2 + 6x^4 + 8x + 100$<br>2. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^8}$<br>3. $f(x) = (4x - 5)^6$<br>4. $f(x) = sin10x$<br>5. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$ | 1. $6x + 24x^3 + 8$<br>2. $-\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{24}{x^9}$<br>3. $24(4x - 5)^5$<br>4. $10\cos 10x$<br>5. $\frac{6}{(1-2x)^4}$ |
| 20 | Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y = x^2 + 2x - 1$ имеют угловой коэффициент, равный 2. | $(0; -1)$ |
| 21 | Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. | $y = 3x - 7$ |
| 22 | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 8t^2 - 2t^3$. Найдите ускорение точки в момент времени $t = 1$ с. | 4 |
| 23 | Найдите общий вид первообразных для функции:<br>1. $f(x) = 6x + 3x^3 + 2x^4 - 9$<br>2. $f(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^5} - 2\sqrt{x}$<br>3. $f(x) = (4x - 13)^6$<br>4. $f(x) = cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$<br>5. $f(x) = \frac{4}{(2x+10)^6}$ | 1. $F(x) = 3x^2 + \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^5}{5} - 9x + C$<br>2. $F(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^4} - 1\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C$<br>3. $F(x) = \frac{(4x-13)^7}{28} + C$<br>4. $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C$<br>5. $F(x) = -\frac{2}{5(2x+10)^5} + C$ |
| 24 | Вычислите интегралы:<br>1. $\int_{-1}^{1} x^5 dx$<br>2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sin^2 x}$<br>3. $\int_{1}^{2} (4 + 2x) dx$ | 1. 0<br>2. 1<br>3. 7 |
| 25 | Раскройте формулу сокращенного умножения $a^2$-$b^2$ | (a-b)(a+b) |
| 26 | Площадь треугольника вычисляется по формуле | S=(a*b)/2 |
| 27 | Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{10}{17}$ и $\frac{5}{8}$? | 0,6 |
| 28 | Даны графики функций. Какая формула соответствует графику 3):<br>1)  2)  3)  | $y = \frac{1}{2}x - 6$ |
| 29 | Вычислите $\frac{1}{2} + \frac{11}{5}$ | 2,7 |
| 30 | Решите уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней. | 2 |

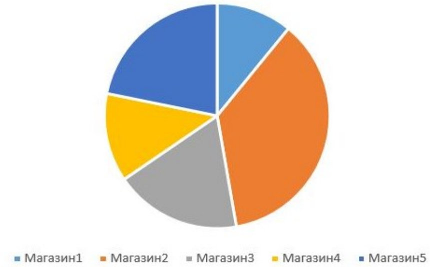
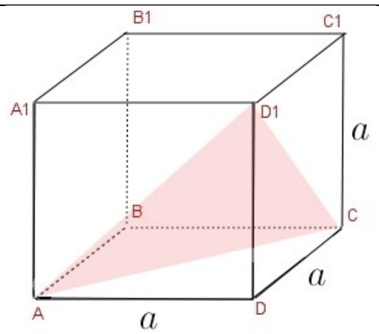
| | | |
|---|---|---|
| 31 | Площадь земель крестьянского хозяйства, отведенная под посадку кустарников и цветников, составляет 24 га и распределена между ними в отношении 5:3. Сколько гектаров занимают цветники? | 9 |
| 32 | Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 2 и HD = 32. Диагональ параллелограмма BD равна 40. Найдите площадь параллелограмма. | 816 |
| 33 | В $\triangle ABC$ $\sin C = \frac{AB}{AC}$. Какая из сторон является гипотенузой $\triangle ABC$? | AC |
| 34 | Углом какой четверти является угол $\alpha=400°$? | I |
| 35 | Какие из функций являются чётными? | y=tg x |
| 36 | Какие из чисел являются корнем уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$? | $x = \frac{\pi}{3}$ |
| 37 | Вычислите: $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}$. | 1 |
| 38 | Найдите значение выражения $4\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ - $4\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $2\pi$ |
| 39 | Докажите тождество: $2\sin(\pi/2+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha$. | $2\sin(\pi/2+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)=2\cos\alpha-\cos\alpha=\cos\alpha$ |
| 40 | Решите уравнение: $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$. | $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$ |
| 41 | Между какими двумя натуральными числами находится число $\sqrt[3]{19}$? | 2 и 3 |
| 42 | Определите корень уравнения $x^3=125$ | 5 |
| 43 | Расположите в порядке возрастания числа: 2; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{17}$ | $\sqrt[3]{5}$; 2; $\sqrt[4]{17}$ |
| 44 | Умножая числа с одинаковым основанием, их степени…? | складываем |
| 45 | Найдите значение выражения $\frac{a^{5,58} \cdot a^{2,9}}{a^{6,48}}$ при a=7. | 49 |
| 46 | Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{12}+\sqrt{8})^2}{10+\sqrt{96}}$. | 2 |
| 47 | Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $I = \sqrt{2Rh}$, где R=6400 км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 48 километров? Ответ выразите в километрах. | 0,18 |
| 48 | Решите уравнение $\sqrt{-32-x} = 2$. | -36 |
| 49 | При каком значении а функция $y=a^x$ бывает на всей области определения? | $a=\frac{1}{8}$ |
| 50 | На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение f(2). | 25 |

| | | |
|---|---|---|
| |  | |
| 51 | Функция задана формулой: f(x)=$(\frac{1}{2})^x$. Чему равно f(-2)? | 4 |
| 52 | Корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3$? | 12,5 |
| 53 | Найдите корень уравнения $3^{x+2}$-5*$3^x$=12 | 1 |
| 54 | Сколько целых решений имеет неравенство $1 < 7^{x-1} \leq 49$? | 2 |
| 55 | Найдите точку максимума функции $y = 2^{5-8x-x^2}$ | -4 |
| 56 | В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$ где $m_0$ — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 184 мг. Период его полураспада составляет 7 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 23 мг. | 21 |
| 57 | Какая из функций возрастает на всей области определения? | f(x)=$\log_5 x$ |
| 58 | Укажите область определения функции $f$(x)=$lg\,\frac{2x-3}{x+7}$ | (-∞; -7), (1,5; +∞) |
| 59 | Расположить в порядке возрастания: $\log_{0,5} 4$; $\log_{0,5} 0{,}4$ ; $\log_{0,5}\frac{1}{4}$ | $\log_{0,5} 4$; $\log_{0,5} 0{,}4$ ; $\log_{0,5}\frac{1}{4}$ |
| 60 | Найдите корень уравнения $\log_4(5-x) = 2$ | -11 |
| 61 | Определите значение выражения $\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4}$ | 5 |
| 62 | Укажите наименьшее целое решение неравенства: $\log_3(6x-4) > 2$ | 3 |
| 63 | Найдите точку максимума функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$ | -6 |
| 64 | Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п$=15° через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды m = 0,6 кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в$=91° до температуры T, причём $x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200\,\frac{Вт\cdot с}{кг\cdot°C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 28\,\frac{Вт}{м\cdot°C}$— коэффициент теплообмена, а α = 0,8 — | 34 |

| | | |
|---|---|---|
| | постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 144 м. | |
| 65 | Какое из чисел является корнем уравнения $\log_2(x+1) = 1$ | 1 |
| 66 | Какие из уравнений имеют более одного корня? | (x-4)(x+3)(x-8)=0 |
| 67 | Определите вид уравнения $\sqrt{-32 - x} = 2$ | иррациональное |
| 68 | Определите наименьшее целое решение неравенства $5^{x+2}<1$? | -3 |
| 69 | Найдите корень уравнения $\lvert x-3 \rvert = 2$ | 1; 5 |
| 70 | Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$ | (10; 2) |
| 71 | Решите неравенство $\frac{2x^2-5x}{x-3} \le x$ | (-∞; 0]; [2; 3) |
| 72 | Решите уравнение $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = 0$ | -1; 6 |
| 73 | Чему равна производная функции $y=\cos^2 x$? | $y' = -2\cos x \sin x$ |
| 74 | По какой из формул вычисляется производная произведения? | $(uv)'=u'v+uv'$ |
| 75 | Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=3x^2 - 6x + 4$. Выберите ответ. | 1 |
| 76 | На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−10; 8). Найдите количество точек максимума функции f(x) на отрезке [−9;6].   | 2 |
| 77 | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 - 4t^2 + 5t - 5$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t = 3 с. | 8 |
| 78 | На рисунке изображён график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции f(x) в точке $x_0$. | 1,25 |

| | | |
|---|---|---|
| |  | |
| 79 | Решите неравенство: $\frac{(x-2)(x+3)}{(x-8)} > 0$ | (-3;2); (8;+∞) |
| 80 | Построить график функции $f(x) = x^3 - 3x$. |  |
| 81 | Для какой из функций функция $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной? | $f(x)=3x^2-6x$ |
| 82 | Дана функция $f(x)= 3x^2+1$. Чему равна F(1)? | 2 |
| 83 | Общий вид всех первооообразных для f(x)=sinx? | F(x)=-cosx+C |
| 84 | Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 xdx$. | 1,5 |
| 85 | Является ли $F(x)=x^3-3x+1$ первообразной для функции $f(x)=3(x^2-1)$? | да |
| 86 | Задайте первообразную F(x) для функции $f(x)=3x^2-2x$, если известны координаты точки М (1, 4) графика F(x). | $x^3 - x^2 + 4$ |
| 87 | На рисунке изображен график функции y=f(x), определённой на интервале (−3; 11). Найдите наименьшее значение функции f(x)на отрезке [2; 9,5].  | -3 |
| 88 | На рисунке изображен график некоторой функции y=f(x). Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 xdx$. | 12 |

| | | |
|---|---|---|
| |  | |
| 89 | Укажите число, принадлежащее множеству M = {5, 10, 12, 37, 41} | 5 |
| 90 | Укажите верное соотношение для множеств A = {5, 9, 11}; B = {4, 5, 10, 11, 12}; C = {4, 5, 9, 11}? | A □ C |
| 91 | Мощность множества, состоящего из всех букв русского алфавита, равна? | 33 |
| 92 | Закончите определение: «Множество, содержащее только те элементы, принадлежащие и множеству A и множеству B, называют …»? | пересечением множеств |
| 93 | Запишите перечислением элементов пересечение множеств A и B, если: A = {3; 5;7; 27; 14; 9}, B = {9; 3; 7; 27; 14}. | $A \cap B = \{3; 7; 14; 27\}$ |
| 94 | Даны два множества A = {1, 2, 3, 4, 6, 12} и B = {1, 2, 3, 6, 9, 18}. Запишите объединение множеств. | $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$ |
| 95 | Каждый ученик в классе изучает английский или немецкий язык, или оба этих языка. Английский язык изучают 30 человек, немецкий — 25 человек, а тот и другой — 15 человек. Сколько всего учеников в классе? | 40 |
| 96 | Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения $x^2 + 4x – 5 = 0$. | F = {-5; 1} |
| 97 | Комбинаторика - это раздел математики, отвечающий на вопросы сколькими способами можно выбрать элементы … | заданного конечного множества |
| 98 | Соединения из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются: | перестановками |
| 99 | Число всех возможных размещений вычисляется по формуле: | $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ |
| 100 | Группировка – это… | упорядочение единиц совокупности по признаку |
| 101 | В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает? | 0,997 |

| | | |
|---|---|---|
| 102 | Прибыль 5 магазинов составил за месяц: 30000 руб., 100000 руб., 50000 руб., 35000 руб., 60000 руб. Построить диаграмму, иллюстрирующие данные о прибыли магазинов. |  |
| 103 | Цветоводу предложили украсить клумбу цветами, используя 3 вида. Сколько различных вариантов есть у цветовода, если есть выбор из 5 видов разной рассады? | 10 |
| 104 | Сколькими способами можно посадить 4 кустарника в один ряд? | 24 |
| 105 | Расшифруйте краткую запись: $a \in \beta$. | прямая а принадлежит плоскости $\beta$ |
| 106 | Прямые АВ и СД скрещиваются. Какое расположение имеют прямые АС и ВД? | скрещиваются |
| 107 | Плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют 1 общую точку. Каково их взаимное расположение? | пересекаются по прямой |
| 108 | Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она… | перпендикулярна и самой наклонной |
| 109 | Через концы отрезка АВ и его середину М проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках $A_1$, $B_1$ и $M_1$. Найдите длину отрезка $MM_1$, если отрезок АВ не пересекает плоскость и если $AA_1 = 6{,}8$см, $BB_1 = 7{,}4$см. | 7,1 |
| 110 | Прямые АС, АВ и АД попарно перпендикулярны. Найдите отрезок СД, если АВ = 5 см, ВС = 13 см, АД = 9 см. | 15 |
| 111 | Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины общего перпендикуляра, если проекции наклонных относятся как 2:3 и длины наклонных равны 23 см и 33 см. | 9 |
| 112 | Начертить куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Построить сечение $АД_1С$. |  |
| 113 | В каких единицах измеряется площадь поверхности многогранника? | в квадратных метрах |
| 114 | Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле | $S_{бок} = P_{осн} * H$ |
| 115 | Что является осевым сечением усеченного конуса? | равнобедренная трапеция |

| | | |
|---|---|---|
| 116 | Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из своих катетов? | конус |
| 117 | Ребро основания правильной треугольной пирамиды 3 м, апофема 6м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. | 27 |
| 118 | Диагональ куба равна $\sqrt{588}$. Найдите его объем. | 2744 |
| 119 | Прямоугольник со сторонами 8см и 3см вращается вокруг большей стороны. Найдите объем, площади боковой и полной поверхностей полученного тела. | 72π; 48π; 64π |
| 120 | Вычислить поверхность кроны кустарника, имеющего форму шара радиуса 0,5 м. В ответ запишите число, деленное на π. | 1 |
| 121 | Даны точки А(1,0,5), В(-2,0,4), С(0,-1,0), Д(0,0,2). Какие из них лежат на координатной прямой Оу? | С |
| 122 | Какие из векторов а(1,0,-1), с(1/3,2/3,-2/3), в(1,1,1), р(0,0,-2) являются единичными? | в |
| 123 | Какие из векторов а(1,2,-3), с(3,6,-6), в(2,4,-6) коллинеарны? | а, в |
| 124 | Даны точки А(2,0,5), В(2,4,-2) С(-2,6,3). Серединой какого отрезка является точка М(0,3,4)? | АС |
| 125 | Даны векторы а(-6,0,8), в(-3,2,-6). Найдите скалярное произведение векторов. | -30 |
| 126 | При каких значениях п векторы $\vec{a}$ (4,п,2), $\vec{в}$ (1,2,п) перпендикулярны? | -1 |
| 127 | Даны векторы а(-6,0,8), в(-3,2,-6). Найдите косинус угла между векторами. | -3/7 |
| 128 | Даны векторы в{3,1-2}, с {1,4,-3}. Найти длину вектора 2в-с. | $\sqrt{30}$ |
| 129 | Чему равен угол в один радиан? | 1 радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности. 1 радиан приблизительно равен 57 градусам. |
| 130 | В каких четвертях тригонометрического круга функция y = sinx принимает положительные значения? | В I и II четвертях |
| 131 | В каких четвертях тригонометрического круга функция y = cosx принимает отрицательные значения? | Во II и III четвертях |
| 132 | Перечислите тригонометрические функции, укажите их периоды. | Синус y = sin x, период T = 2π; косинус y = cos x, период T = 2π; тангенс y = tg x, период T = π; котангенс y = ctg x, период T = π |
| 133 | Определите область значения функции y=3cos(5x)? | Область значений E(y) = [-3; 3] |

| | | |
|---|---|---|
| 134 | Перечислите способы решения тригонометрических уравнений. | Выделяют 2 метода:<br>1) Метод замены переменной (или алгебраический метод)<br>Алгоритм:<br>• Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.<br>• Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t).<br>• Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.<br>• Сделать обратную замену.<br>• Решить простейшее тригонометрическое уравнение.<br>2) Разложение на множители<br>Очень хорошо, если уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части — ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.<br>Алгоритм:<br>• Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.<br>• Вынести за скобки общий множитель (разложить на множители)<br>• Решить итоговое уравнение. |
| 135 | Раскройте алгоритм решения однородных тригонометрических уравнений. | Однородное тригонометрическое уравнение – это уравнение двух видов:<br>$a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени)<br>либо<br>$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).<br>Алгоритм решения однородного уравнения первой<br>степени $a \sin x + b \cos x = 0$:<br>1) разделить обе части уравнения на $\cos x$<br>2) решить получившееся выражение<br>Алгоритм решения однородного уравнения второй<br>степени $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$.<br>Условие: в уравнении должно быть выражение вида $a \sin^2 x$. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Если его нет, то уравнение решается методом разложения на множители.<br>1) Разделить обе части уравнения на $\cos^2 x$<br>2) Ввести новую переменную z, заменяющую tg x (z<br>3) Решить получившееся уравнение |
| 136 | Сформулируйте определение степенной функции. | Функция вида $y=x^n$, где n- любое действительное число, называют степенной функцией. |
| 137 | Перечислите свойства степени с действительным показателем. | Если в основании степени лежит положительное число, а в качестве показателя используются действительные числа, то можно пользоваться следующими формулами:<br>1. Так как в основании степени используется положительное число, то, несмотря на знак показателя степени, результат всегда будет числом положительным.<br>$a^x > 0$<br>2. Если показатель степени является отрицательным числом, то его можно заменить на равный по модулю положительный показатель, а основание дроби перевернуть.<br>$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$<br>3. При умножении чисел с одинаковыми основаниями, действительные показатели степени следует сложить.<br>$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$<br>4. При делении чисел с одинаковыми основаниями, действительные показатели степени вычитаются:<br>$a^x : a^y = a^{x-y}$<br>5. При возведении числа в степени в дополнительную степень показатели умножаются.<br>$(a^x)^y = a^{xy}$<br>6. При возведении произведения некоторых чисел в действительную степень можно возвести каждое число по отдельности в данную степень и только после этого перемножить.<br>$(ab)^x = a^x \cdot b^x$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | 7. При возведении частного некоторых чисел в действительную степень можно возвести каждое число по отдельности в данную дробь и только после этого разделить. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ |
| 138 | На что необходимо обратить внимание при решении иррационального уравнения четной степени? | При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее: если показатель корня — чётное число, то подкоренное выражение и значение корня не должны быть отрицательными. |
| 139 | Чему равен корень четной степени из отрицательного числа? Приведите пример. | Корень чётной степени из отрицательного числа не существует. Например, $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-81}$; $\sqrt{-4}$ и т.д. не существуют. |
| 140 | Чему равен корень нечетной степени из отрицательного числа? Приведите пример. | Корень нечетной степени из отрицательного числа равен отрицательному числу. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{-243} = -3$; $\sqrt[7]{-1} = -1$ и.т.д. |
| 141 | Сформулируйте определение показательной функции. | Функция вида $y=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ называется показательной функцией с основанием а. |
| 142 | Перечислите свойства показательной функции. | Свойства функции<br>1) Областью определения функции является множество всех действительных чисел R.<br>2) Множеством значений функции являются все положительные числа, т.е. промежуток $E(y)\colon\ (0;\ +\infty)$<br>3) Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.<br>4) Функция не является ни нечетной, ни четной. Имеет общий вид.<br>5) Функция непериодическая.<br>6) График функции пересекает координатную ось Oy в точке (0; 1).<br>7) Функция не имеет нулей.<br>8) При $a>1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0<a<1$ функция убывает на множестве R.<br>9) Функция принимает положительные значения на всей области определения. |
| 143 | Продолжите определение: «Логарифм – это…». | Логарифм — это степень, в которую нужно возвести а для получения b ($\log_a b$). Однако у логарифма есть условия или ограничения, что основание а больше нуля и не равно единице, а также показатель b больше нуля. |

| | | |
|---|---|---|
| 144 | Чему равен логарифм произведения? | Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей.<br>$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, ($a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$, $y > 0$) |
| 145 | Чему равен логарифм частного? | Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов делимого и делителя.<br>$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$, ($a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$, $y > 0$) |
| 146 | Сформулируйте определение логарифмической функции. | Логарифмическая функция - это функция вида $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. |
| 147 | Перечислите свойства логарифмической функции. | Свойства функции<br>1) Областью определения функции является множество всех положительных чисел $D(y): (0; +\infty)$<br>2) Множеством значений функции являются все действительные числа R.<br>3) Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.<br>4) Функция не является ни нечетной, ни четной. Имеет общий вид.<br>5) Функция непериодическая.<br>6) Нули функции. График функции пересекает координатную ось Ох в точке (1; 0).<br>7) При $a>1$ функция возрастает; при $0<a<1$ функция убывает. |
| 148 | Перечислите способы решения логарифмических уравнений. | Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. Простейшим логарифмическим уравнением служит уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$.<br>Рассмотрим методы решения логарифмических урпавнений.<br>1) Метод решения по определению.<br>Этим методом решаются простейшие логарифмические уравнения.<br>Из определения логарифма следует, что $x = a^b$ является решением уравнения $\log_a x = b$.<br>2) Метод потенцирования.<br>Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.<br>Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ основано на |

| | | |
|---|---|---|
| | | том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x)=g(x)$ при дополнительных условиях $f(x)>0, g(x)>0$.<br>Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является необязательной. Можно выявить посторонние корни и с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задаётся системой неравенств: $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$<br>3) Метод введения новой переменной. Логарифмические уравнения решаются с помощью подстановки $t=\log_a x$, которая приводит уравнение к виду квадратного.<br>4) Метод логарифмирования.<br>При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма. |
| 149 | Сформулируйте правило решения простейших логарифмических неравенств. | Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.<br>Неравенства вида $a^x>c,\ a^x<c,$ $a^{f(x)}<a^{g(x)}$, где $a>0,\ a\neq 1,\ c>0$ называются простейшими показательными неравенствами.<br>Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 1$) основано на свойстве монотонности показательной функции:<br>- если $a>1$, то показательная функция возрастает на $R$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции и неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ и $f(x)>g(x)$ равносильны;<br>- если $0<a<1$, то показательная функция убывает на $R$, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции и неравенства |

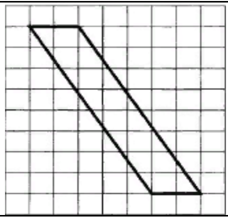
| | | |
|---|---|---|
| | | $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны. |
| 150 | Что называется уравнением? | Уравнение – это математическое равенство с одной или несколькими неизвестными величинами. |
| 151 | Что значит решить уравнение? | Решить уравнение — это значит найти все значения неизвестных, при которых оно обращается в верное числовое равенство, или установить (доказать), что таких значений нет. |
| 152 | Что такое корень уравнения? | Корень уравнения — это число, которое при подстановке вместо неизвестной обращает уравнение в верное числовое равенство (тождество). Корень уравнения также называют решением уравнения. |
| 153 | Что называется неравенством? | Неравенство — это математическое выражение, в котором два выражения или числа сравниваются по значению. Неравенство содержит знаки сравнения, такие как «больше» (>), «меньше» (<), "больше или равно" (≥) и "меньше или равно" (≤). |
| 154 | Что значит решить неравенство? | Решить неравенство – значит найти множество всех переменных, для которых данное неравенство выполняется. То есть решить неравенство — это значит найти все его решения или доказать, что их нет. |
| 155 | Продолжите определение: «Последовательность – это…». | Последовательность — это пронумерованный набор каких-либо объектов, среди которых допускаются повторения, причём порядок объектов имеет значение. Нумерация чаще всего происходит натуральными числами. |
| 156 | Приведите пример арифметической прогрессии. | Арифметической прогрессией называют числовую последовательность, каждый последующий член которой равен предшествующему, сложенному с одним и тем же числом. Пример: 3, 5, 7, 9, 11, ... (Первый член последовательности равен 3, затем к каждому прибавляется одно и то же число 2) |
| 157 | Приведите пример геометрической прогрессии. | Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, каждый последующий член которой равен предшествующему, умноженному на одно и то же число. Пример: 1, -2, 4, -8, 16, ... (Первый член последовательности равен 1, затем каждый член последовательности умножается на одно и то же число -2) |
| 158 | Чему равна производная произведения? | Производная произведения равна произведению первого множителя |

| | | |
|---|---|---|
| | | на второй плюс первый множитель, умноженный на производную второго. $(uv)' = u'v + uv'$ |
| 159 | Чему равна производная частного? | Производная частного равна производной числителя, умноженного на знаменатель, минус числитель, умноженный на производную знаменателя, и все это деленное на квадрат знаменателя. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| 160 | Чему равна производная сложной функции? | Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции, умноженной на производную от внутренней функции. $\boxed{\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)}$ |
| 161 | Продолжите определение: «Сочетание – это…». | Сочетание — это неупорядоченный набор элементов, взятых из множества. В сочетании используется только выбор, расположение не используется.<br>Операция сочетания помогает выяснить, сколькими способами можно выбрать k элементов из множества n. |
| 162 | Продолжите определение: «Размещение – это…». | Размещение — это способ выбрать и упорядочить элементы из множества. В отличие от операции сочетания, при размещении важен порядок составляющих множества.<br>Вопрос размещения: сколько упорядоченных наборов можно сделать из k элементов, выбранных из n? |
| 163 | Продолжите определение: «Перестановки – это…». | Перестановка — это способ последовательно расположить составляющие множества. Например, 123, 312 и 213 — это перестановки трёх чисел: 1, 2 и 3. |
| 164 | Продолжите определение: «Случайное событие – это…». Приведите пример. | Случайное событие — это событие, которое может произойти или не произойти в результате того или иного опыта.<br>Например, при бросании игральной кости могут произойти или не произойти случайные события «число очков на верхней грани чётно», «число очков на верхней грани равно 5», «число очков на верхней грани кратно трём». |
| 165 | Продолжите определение: «Вероятность случайного события – это…». | Вероятность случайного события равна отношению числа благоприятных |

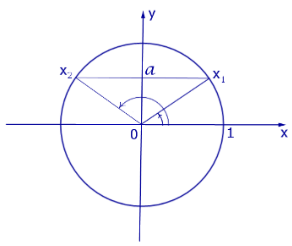
| | | |
|---|---|---|
| | | случайному событию исходов опыта к общему числу исходов опыта. $P(A) = \frac{m}{n}$, где m - число благоприятных исходов опыта; n - общее число исходов опыта. |
| 166 | Как найти среднее арифметическое числового ряда? | Чтобы вычислить среднее арифметическое нескольких чисел, нужно взять сумму этих чисел и разделить все на количество слагаемых. Частное и будет средним арифметическим этих чисел.<br>Например: найдем среднее арифметическое чисел 2; 6; 9; 15.<br>У нас четыре числа, значит надо их сумму разделить на четыре. Это и будет среднее арифметическое данных чисел: (2 + 6 + 9 + 15) : 4 = 8. |
| 167 | Как найти медиану числового ряда? | Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.<br>Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.<br>Например: в ряде чисел 2; 5; 9; 15; 21 медианой является число 9, находящееся посередине.<br>Найдем медиану в ряде чисел 4; 5; 7; 11; 13; 19.<br>Здесь четное количество чисел (6). Поэтому ищем не одно, а два числа, записанных посередине. Это числа 7 и 11. Находим среднее арифметическое этих чисел: (7 + 11) : 2 = 9. Число 9 является медианой данного ряда чисел. |
| 168 | Как вычисляется размах числового ряда? | Размах ряда чисел – это разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.<br>Например: найдем размах чисел 2; 5; 8; 12; 33.<br>Наибольшее число здесь – 33, наименьшее – 2. Значит, размах составляет 31, т. е.: 33 – 2 = 31. |
| 169 | Перечислите взаимное расположение двух прямых в пространстве | Существует три варианта взаимного расположения двух прямых в пространстве: прямые могут быть пересекающимися, параллельными и скрещивающимися. |

| | | |
|---|---|---|
| 170 | Какие прямые называются параллельными в пространстве? | В стереометрии две прямые называются параллельными, если лежат в одной плоскости и не пересекаются. |
| 171 | Какие прямые называются скрещивающимися в пространстве? | Скрещивающиеся прямые — это прямые, которые не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости). |
| 172 | Какие прямые называются перпендикулярными в пространстве? | Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярные прямые могут пересекаться, но могут быть и скрещивающимися. |
| 173 | Перечислите взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. | Известны три варианта взаимного расположения прямой и плоскости: прямая принадлежит плоскости; прямая параллельна плоскости; прямая пересекает плоскость. |
| 174 | Раскройте понятие «перпендикулярность плоскостей». | Две плоскости называются перпендикулярными, если двугранный угол между ними равен 90°. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны. |
| 175 | Продолжите определение: «Перпендикуляр – это…». | *Перпендикуляр* — это прямая (или ее отрезок), пересекающая данную прямую (плоскость) под прямым углом. |
| 176 | Продолжите определение: «Наклонная – это…». | Наклонная – это любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной. |
| 177 | Продолжите определение: «Проекция наклонной – это…». | Проекция наклонной – это отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведённых из одной и той же точки |
| 178 | Продолжите определение: «Многогранник – это…». | *Многогранник* – это геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками - гранями. |
| 179 | Продолжите определение: «Призма – это…». | *Призма* – это многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов. |
| 180 | Продолжите определение: «Прямоугольный параллелепипед – это…». | *Прямоугольный параллелепипед – это* шестигранник, у которого все грани являются прямоугольниками. |

| | | |
|---|---|---|
| 181 | Продолжите определение: «Куб – это…». | *Куб - это* многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов. |
| 182 | Продолжите определение: «Пирамида – это…». | *Пирамида* – это геометрическая фигура, основание которой – многоугольник, а грани – треугольники, имеющие общую вершину. |
| 183 | Раскройте понятие «вектор». | Вектор — направленный отрезок прямой, то есть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом.<br>*Вектор* обозначается одной строчной буквой латинского алфавита или двумя заглавными со стрелкой (в некоторых случаях — прямой линией) сверху. Вектор имеет две характеристики: длина и направление. |
| 184 | Какие векторы называются коллинеарными? | Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. |
| 185 | Какие векторы называются перпендикулярными? | Перпендикулярными являются два вектора, угол между которыми равен 90 градусов. Чтобы определить перпендикулярность двух векторов, необходимо вычислить их скалярное произведение. Если оно равно нулю, то можно сделать вывод, что данные векторы перпендикулярны. |
| 186 | Чему равно скалярное произведение векторов? | Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.<br>Формула вычисления скалярного произведения векторов по определению: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert cos\alpha$<br>Формула вычисления скалярного произведения векторов через координаты: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_{\vec{a}}x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}y_{\vec{b}} + x_{\vec{a}}x_{\vec{b}}$ |
| 187 | Найдите значения выражения $\sqrt[3]{216\cdot 125}$ | 30 |
| 188 | Решите тригонометрическое уравнение $\sin x = 1$. | $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ |
| 189 | Найдите значение выражения $2^{log_2 10}$. | 10 |
| 190 | Чему равна производная функции $f(x) = x^4 + 5x^3 + 1$. | $4x^3 + 15x^2$ |
| 191 | На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь. | 16 |

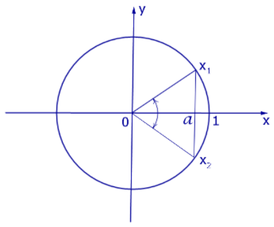
| | | |
|---|---|---|
| |  | |
| 192 | Решите уравнение $3^{x} - 3^{x+3} = -78$. | 1 |
| 193 | Чему равна диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равна 2, 4, 5 см? | $3\sqrt{5}$ |
| 194 | Установите соответствие между объемом правильной четырёхугольной призмы, сторонами её оснований и высотой боковой грани. | А - 2<br>Б - 3<br>В - 1 |
| 195 | Установите соответствие между графиками и функциями, которые их задают. | А - 2<br>Б - 4<br>В - 1 |
| 196 | Установите соответствие между формулами и видом функции. | А - 3<br>Б - 1<br>В - 2 |
| 197 | Площадь строительного участка прямоугольной формы шириной 40 м составляет 3440 м$^2$. Участок необходимо обнести забором по периметру. Стоимость 1 м забора составляет 500 руб. Какая сумма потребуется для строительства всего забора? Ответ дайте в тыс.руб. | 126 |
| 198 | Перед зданием колледжа решено разбить клумбу. Но по форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями у = 4/х + 2; у = 6; х = 4. Какую сумму может получить строительная компания за вскапывание клумбы, если за каждый 1 м$^2$ компании выплачивается 500 руб.? Ответ дайте в руб. | 3200 |
| 199 | Какой тип симметрии наблюдается на здании МГУ, изображенном на рисунке? | Осевая |
| 200 | Радианная мера угла | Радианной мерой угла называется отношение длины дуги, для которой данный угол является центральным, к радиусу окружности. Угол равен 1 радиану (обозначается 1 рад), если дуга, на которую он опирается, равна радиусу окружности. Так, полный оборот, равный 360° в градусном измерении, соответствует 2 π в радианном измерении. 1 радиан приблиз ительно равен 57 градусам. |

| | | |
|---|---|---|
| 201 | Синус, косинус, тангенс и котангенс угла | Синус угла — это отношение противолежащего (дальнего) катета к гипотенузе.<br>Косинус угла — это отношение прилежащего (близкого) катета к гипотенузе.<br>Тангенс угла — это отношение противолежащего (дальнего) катета к прилежащему (близкому).<br>Котангенс угла — это отношение прилежащего (близкого) катета к противолежащему (дальнему). |
| 202 | Основные тригонометрические тождества | $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$<br>$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$<br>$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$<br>$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$<br>$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$<br>$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ |
| 203 | Формулы приведения | Формулы приведения предназначены для того, чтобы привести тригонометрическую функцию произвольного угла к тригонометрической функции наименьшего из углов.<br>Формул приведения много, но все они подчиняются двум правилам:<br>Первое правило:<br>Для аргументов $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$ функция меняется на кофункцию, т.е. синус на косинус и наоборот, тангенс на котангенс и наоборот.<br>Для аргументов $(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$ функция не меняется.<br>Второе правило (для знака приведенной функции, функции угла $\alpha$).<br>1) Считаем угол $\alpha$ острым, $0 < \alpha < 90°$.<br>2) Определяем четверть и знак в ней приводимой функции (функции слева).<br>3) Ставим этот знак перед приведенной к углу $\alpha$ функцией (функцией справа). |

<table>
<tr>
<td>204</td>
<td>Простейшие тригонометрические уравнения</td>
<td>
Простейшими тригонометрическими уравнениями являются такие уравнения, которые записаны в виде:<br>
$\sin f(x) = a$<br>
$\cos f(x) = a$<br>
$tg f(x) = a$<br>
$ctg f(x) = a$<br>
Здесь а представляет собой некое постоянное число.<br>
f(x) является какой-то функцией, которая определяется искомой переменной x. К примеру:<br>
$f(x) = x$<br>
$f(x) = 2 - x$<br>
$f(x) = \frac{\pi x}{7}$<br>
Правило 1<br>
В том случае, когда уравнения записаны в виде: $\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$, они обладают смыслом при $-1 \leq a \leq 1$.<br>
Правило 2<br>
Если уравнения имеют вид:tg x = a, ctg x = a, то такие уравнения справедливы при любых значениях, которые принимает а.<br>
Решения уравнения, которое имеет вид sin x = a:
<table>
<tr><td>Обычная форма записи решения</td><td>$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$</td></tr>
<tr><td>Более удобная форма записи решения</td><td>$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z,$<br>$x_2 = -\arcsin a + \pi + 2\pi n, n \in Z$</td></tr>
<tr><td>Ограничения на число $a$</td><td>В случае, когда $a \notin [-1;1]$, уравнение решений не имеет</td></tr>
</table>
**Графическое обоснование** решения уравнения $\sin x = a$<br>

<br>
Решения уравнения, которое имеет вид cos x = a:
</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| Обычная форма записи решения | $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$ |
| Более удобная форма записи решения | $x_1 = \arccos a + 2\pi n, n \in Z,$<br>$x_2 = -\arccos a + 2\pi n, n \in Z$ |
| Ограничения на число $a$ | В случае, когда $a \notin [-1;1]$, уравнение решений не имеет |

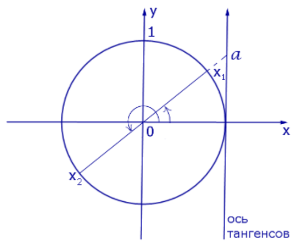
**Графическое обоснование** решения уравнения $\cos x = a$




Решения уравнения, которое имеет вид tg x = a:

| | |
|---|---|
| Обычная форма записи решения: | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$ |
| Более удобная форма записи решения | $x_1 = \operatorname{arctg} a + 2\pi n, n \in Z,$<br>$x_2 = \operatorname{arctg} a + \pi + 2\pi n, n \in Z$ |
| Ограничения на число $a$ | Ограничений нет |

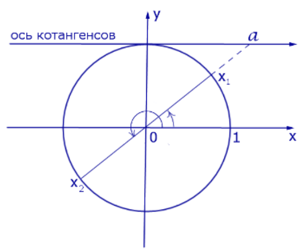
**Графическое обоснование** решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$




Решения уравнения, которое имеет вид ctg x = a:

| | |
|---|---|
| Обычная форма записи решения | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$ |
| Более удобная форма записи решения | $x_1 = \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, n \in Z,$<br>$x_2 = \operatorname{arcctg} a + \pi + 2\pi n, n \in Z$ |
| Ограничения на число $a$ | Ограничений нет |

**Графическое обоснование** решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$




Частные случаи

| Уравнение | Решение |
|---|---|
| $\sin x = 0$ | $x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ |
| $\sin x = 1$ | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ |
| $\sin x = -1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ |
| $\cos x = 0$ | $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ |
| $\cos x = 1$ | $x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ |
| $\cos x = -1$ | $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 205 | Определение и способы задания функции. | Функция — это зависимость одной переме нной величины от другой. Известное обозначение $y = f(x)$ лишь выражает идею такой зависимости между величинами. Значение y зависит от значения x согласно определенному закону или правилу, обозначенному f. Вывод: при изменении x (независимую переменную или аргумент), изменяется значение y.<br>Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно было бы найти соответствующее значение функции.<br>Имеется четыре основные способа задания функции: 1) аналитический; 2) графический; 3) табличный; 4) словесным описанием. |
| 206 | Свойства функции | Свойства функций<br>Зная свойства определённого вида функций, можно представить, как выглядит функция, как она себя ведет. Свойства помогают<br>нам характеризовать функции.<br>ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ:<br>Область определения функции (D(y)) – это те аргументы, которые может приобретать функция. Иначе говоря, это все возможные абсциссы её точек.<br>Область значений функции (E(y)) – это те значения функции, которые могут существовать для данной функции. Иначе говоря, это все возможные ординаты её точек.<br>ОГРАНИЧЕННОСТЬ:<br>Ограниченность – это свойство функции, которое описывает, с какой стороны может «расти» график.<br>Например, парабола, ветви которой направлены вверх, всегда будет ограничена снизу, как бы мы её не перемещали по координатной плоскости. Она всегда будет иметь минимальное значение функции, ниже которой не опустится. А вот линейная функций нигде не ограничена, т.к. её график – бесконечная прямая.<br>Примером ограниченной функции также является функция корня. Это функций ограничена сразу с нескольких сторон, т.к. может существовать только в одной четверти координатной плоскости: |

| | | |
|---|---|---|
| | | НЕПРЕРЫВНОСТЬ:<br>Это свойство говорит нам о том, есть ли разрывы у функции.<br>Линейная, квадратичная функция и функция корня являются непрерывными, когда в свою очередь функция обратной пропорциональности имеет разрыв.<br>Прямая по которой проходит разрыв называется асимптотой.<br>МОНОТОННОСТЬ:<br>Монотонность – это характеристика графика функции, описывающая его промежутки возрастания и убывания.<br>Функция возрастает – если функция «поднимается» слева направо.<br>Функция убывает – если функция «падает» слева направо.<br>Математическим язык можно сказать так:<br>Функция возрастает, если при возрастании значения абсцисс возрастает значение ординат её точек.<br>Функция убывает, если при возрастании значения абсцисс значение ординат её точек убывает.<br>Если функция на всем промежутке только возрастает или только убывает, тогда говорят, что функция монотонно возрастает или монотонно убывает.<br>Если функция на различных промежутках, то убывает, то возрастает, то такую функцию называют немонотонной и описывают её возрастание и убывание на конкретных промежутках.<br>ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА:<br>Точка между промежутками возрастания и убывания функции называется экстремумом.<br>Если функция возрастает, а потом убывает, то точка между такими промежутками называется точкой максимума.<br>Если функция убывает, а потом возрастает, то точка между такими промежутками называется точкой минимума.<br>НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ:<br>Наименьшее и наибольшее значение функции показывают, для каких аргументов значения функции наибольшие или наименьшие.<br>ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА:<br>Промежутки знакопостоянства показывают, на каких |

| | | |
|---|---|---|
| | | промежутках функция положительная, а на каких функция отрицательная.<br>ЧЕТНОСТЬ ФУНКЦИИ:<br>Четная функция – это функция, симметричная оси Oy. В таком случае f(–x)=f(x).<br>Нечетная функция – это функция, симметричная началу координат. В таком случае f(–x)=–f(x).<br>Примером четной функции может служить косинус или парабола, вершина которой находится на оси Oy. В таком случае её ветви симметричны оси Oy.<br>Если для функции не соблюдается ни одно из этих условий четности, то ей называют ни четной, ни нечётной или функцией общего вида.<br>ПЕРИОДИЧНОСТЬ:<br>Периодичная функция – это функция, график которой визуально повторяется через определённый промежуток. Этот промежуток называется периодом.<br>Примером периодичных функций являются тригонометрические функции.<br>Различные графики имеют свой набор характеристик, поэтому, чтобы понять, как ведет себя конкретный график, нужно учитывать совокупность всех его свойств |
| 207 | Алгоритм исследования функции | Алгоритм исследования функции<br>I. Найти область определения, область значений функции.<br>II. Исследовать на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их род.<br>III. Найти асимптоты графика функции.<br>IV. Выяснить обладает ли график свойствами симметрии. Исследовать функцию на четность, нечетность.<br>V. Исследовать функцию на периодичность.<br>VI. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и выяснить расположение функции относительно оси $OX$ .<br>VII. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.<br>Функция возрастает на интервале, если на этом интервале $f'(x) > 0$.<br>Функция убывает на интервале, если на этом интервале $f'(x) < 0$. |

Алгоритм нахождения точек экстремума функции

1. Найти производную функции и приравнять её к нулю. Решая полученное уравнение, найти критические точки.
2. Убедиться в том, что критические точки принадлежат области определения функции (если не принадлежат, то не являются точками экстремума).
3. Разбить область определения функции критическими точками на промежутки.
4. Определить знак производной функции на каждом промежутке: если знак при переходе через точку $x_0$ сменился с “+” на “-”, то точка $x_0$ - точка максимума. Если знак при переходе через точку $x_0$ сменился с “-” на “+”, то точка $x_0$ - точка минимума. Если знак не изменяется, то в точке $x_0$ экстремума нет.
5. Найти значения функции в точках экстремума.

VIII. Определить промежутки выпуклости и вогнутости функции. Найти точки перегиба функции.

Функция $y = f(x)$ - выпуклая на интервале, если в любой точке этого интервала $f''(x) < 0$.

Функция $y = f(x)$ - вогнутая на интервале, если в любой точке этого интервала $f''(x) < 0$.

Алгоритм нахождения точек перегиба функции

1. Найти производную второго порядка и приравнять её к нулю. Решая полученное уравнение, найти абсциссы точек подозрительных на перегиб (в них $f''(x) = 0$ или не существует).
2. Убедиться в том, что абсциссы точек, подозрительных на перегиб принадлежат области определения функции (если не принадлежат, то не являются абсциссами точек перегиба).
3. Разбить область определения функции полученными значениями на

| | | |
|---|---|---|
| | | интервалы и найти знак производной второго порядка на каждом интервале. Если при переходе через точку $x_0$ производная второго порядка меняет знак, то $x_0$ - абсцисса точки перегиба.<br>4. Найти ординаты точек перегиба.<br>IX. Если необходимо найти значения функции в нескольких точках, принадлежащих области определения<br>X. По данному исследованию построить график функции. |
| 208 | Степенная функция, её свойства и график. | Степенной функцией называют такую функцию, которая имеет вид:<br>$y = x^a$<br>Где a является показателем степени и действительным числом.<br>Степенная функция может принимать следующий вид:<br>$y = kx^a$<br>Здесь k играет роль некоторого коэффициента, отличного от нуля.<br>На основании определения рассмотрим, какие функции являются степенными.<br>Степенная функция — частный случай многочлена в алгебре. В практических примерах в показателе степени записано целое или рациональное число.<br>Пример 1<br>К понятию степенных функций можно отнести следующие:<br>$y = x^2$<br>$y = x^3$<br>$y = x^{0,5}$<br>Виды степенных функций и их свойства, область определения<br>Если степенная функция обладает показателем a в виде целого положительного числа, то такая функция рассматривается на всей числовой прямой.<br>В том случае, когда показатель a является отрицательным, степенная функция не определена в нуле. При этом нуль представляет собой особую точку степенной функции. |

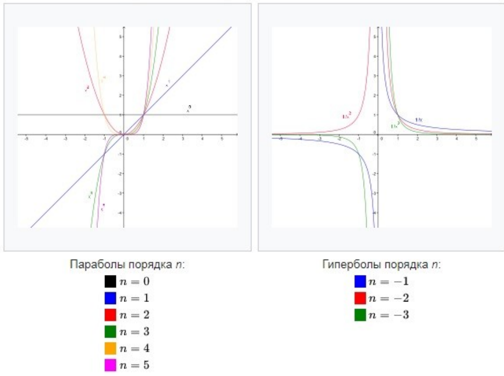
| | | |
|---|---|---|
| | | Рациональный показатель a при условии, что $a = \frac{p}{q} (q > 0)$, определяется в зависимости от следующих данных:<br>• четность q;<br>• знак p.<br><br>Исходя из того, что по правилу $x^a = \sqrt[q]{x^p}$, имеем:<br>• при нечетном q и p>0 функция $x^{p/q}$ определена на всей числовой прямой;<br>• при нечетном q и p<0 функция $x^{p/q}$ определена на всей числовой прямой, за исключением нуля;<br>• при четном q и p>0 область определения $x^{p/q}$ соответствует неотрицательным x;<br>• при четном q и p<0 получим, что $x^{p/q}$ определяется при положительных x.<br>Когда степенная функция $x^a$ имеет вещественный показатель a, областью определения является x>0. При a>0 функция определяется и в нулевой точке.<br>Когда n нечетное, графики функции являются центрально-симметричными по отношению к началу координат, где точка перегиба. Если n принимает четное значение, то и степенная функция является четной, то есть:<br>$(-x)^n = x^n$<br>График такой функции расположен симметрично по отношению к оси ординат.<br>Рассмотрим случай, когда натуральный показатель n>1. Тогда на графике будут изображены параболы порядка n. Если n имеет четное значение, функция на любом участке является неотрицательной. Когда n=1, функцию y=kx называют линейной функцией или прямой пропорциональной зависимостью.<br>Если n является натуральным числом, то функция $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ на графике принимает вид гиперболы порядка n. |

Когда n нечетное, оси координат играют роль асимптот гипербол. Если же n четное, асимптотами станут ось абсцисс и оси ординат, которые положительно направлены. При показателе со значением -1 будет получена функция в виде обратной пропорциональной зависимости вида:

$$y = \frac{k}{x}$$

Если a принимает нулевое значение, то получается функция в виде константы краткой записи:
y=1.

Графики степенной функции $y = x^n$ при целочисленном показателе $n$:

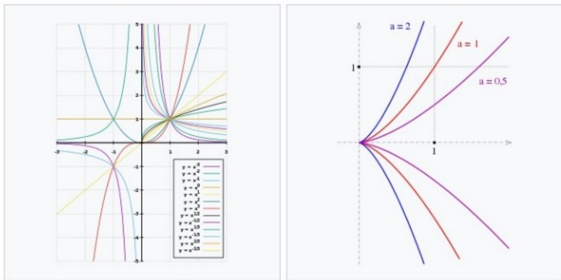



Возвести x в степень, которая является рациональным числом, можно с помощью данной формулы:

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}\,.$$

При значении p=1, функция является арифметическим корнем степени q:

$$y = x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$$

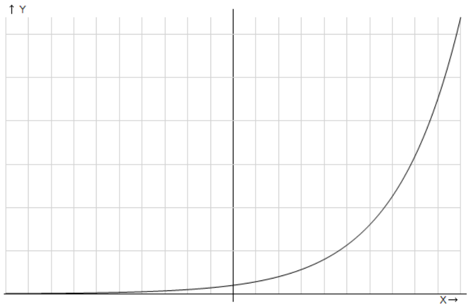
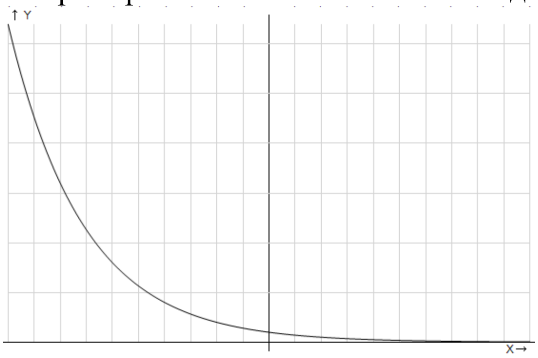


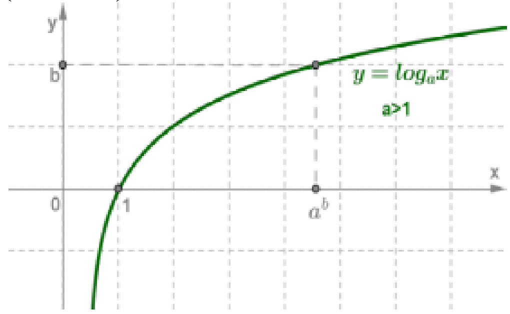
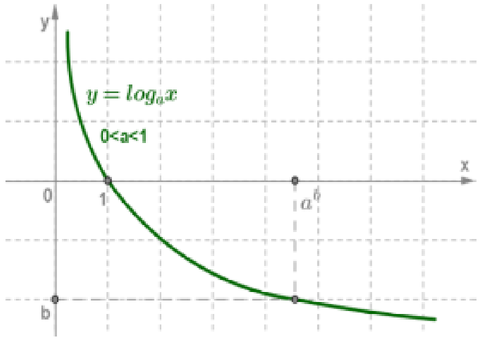

Графики степенных функций с рациональным показателем

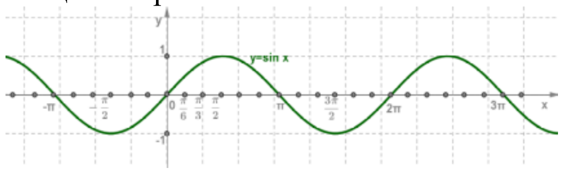
Полукубические параболы $y = ax^{3/2}$

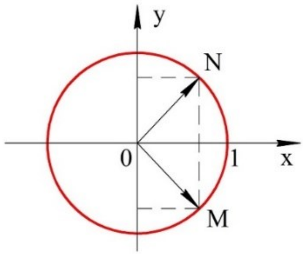
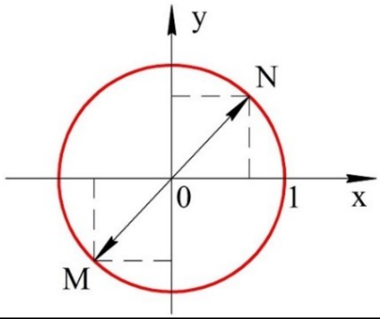
Исследуем степенную функцию на монотонность:

- промежуток $(0, \infty)$ отмечен монотонным возрастанием функции, если a>0;

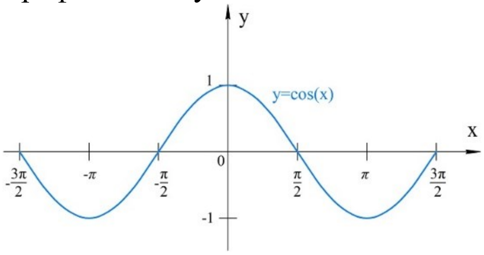
| | | |
|---|---|---|
| | | • на промежутке $(0,\infty)$ функция монотонно убывает при a<0. |
| 209 | Показательная функция, её свойства и график | Функцию вида $y = a^x$,<br>где $a > 0$ и $a \neq 1$ называют показательной функцией.<br>Например: $y = 2^x, y = 3^x, y = (\frac{3}{2})^x$ и т. д.<br>Рассмотрим первый случай, когда основание степени больше единицы: $a > 1$:<br><br><br>Рис. 1. График показательной функции, основание степени больше единицы<br>Основные свойства данного семейства функций:<br>Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty), x \in R$;<br>Область значений: $E(y) = (0;\ +\infty), y > 0$;<br>Функция возрастает, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции;<br>Если аргумент стремится к минус бесконечности, функция стремится к нулю, если аргумент стремится к плюс бесконечности функция стремится также к плюс бесконечности.<br>Рассмотрим второй случай, когда основание степени меньше единицы $0 < a < 1$:<br>Например: $y = \frac{1}{2}^x, y = \frac{3}{5}^x, y = \frac{1}{\pi}^x$ и т. д.<br><br> |

| | | |
|---|---|---|
| | | Рис. 2. График показательной функции, основание степени меньше единицы<br>Свойства данного семейства функций:<br>Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty), x \in R$;<br>Область значений: $E(y) = (0;\ +\infty), y > 0$;<br>Функция убывает, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции;<br>Если аргумент стремится к минус бесконечности, функция стремится к плюс бесконечности, если аргумент стремится к плюс бесконечности функция стремится к нулю. |
| 210 | Логарифмическая функция, её свойства и график. | Функцию, заданную формулой y=logax, называют логарифмической функцией с основанием a.<br>(a>0,a≠1)<br><br><br><br><br>Основные свойства логарифмической функции:<br>1. Область определения логарифмической функции - множество всех положительных чисел.<br>D(f)=(0;+∞);<br>2. Множество значений логарифмической функции - множество R всех действительных чисел.<br>E(f)=(−∞;+∞);<br>3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает<br>при a>1 или убывает<br>при 0<a<1.<br>Обрати внимание! |

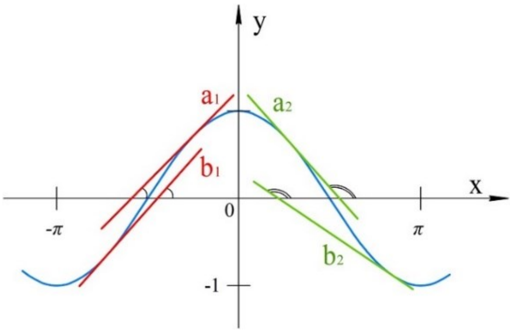
| | | |
|---|---|---|
| | | Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной; не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; не ограничена сверху, не ограничена снизу;<br>График любой логарифмической функции $y=\log_a x$ проходит через точку (1;0). |
| 211 | Функция y = sin x, ее свойства и график | Функция y=sinx определена на всей числовой прямой, является нечётной и периодической с периодом 2π.<br>График этой функции можно построить таким же способом, как и график функции y=cosx, начиная с построения, например, на отрезке [0;π]. Однако проще применить формулу sinx=cos(x−π/2), которая показывает, что график функции y=sinx можно получить сдвигом графика функции y=cosx вдоль оси абсцисс вправо на π/2<br><br><br>График функции y=sinx<br>Кривая, являющаяся графиком функции y=sinx, называется синусоидой.<br>Свойства функции y=sinx<br>1. Область определения - множество R всех действительных чисел.<br>2. Множество значений - отрезок [−1;1]<br>3. Функция y=sinx периодическая с периодом T=2π<br>4. Функция y=sinx- нечётная.<br>5. Функция y=sinx принимает: - значение, равное 0, при x=πn,n∈Z - наибольшее значение, равное 1, при x=π/2+2πn,n∈Z - наименьшее значение, равное −1, при x=−π/2+2πn,n∈Z - положительные значения на интервале (0;π) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn,n∈Z<br>- отрицательные значения на интервале (π;2π) и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на 2πn,n∈Z<br>6. Функция y=sinx<br>- возрастает на отрезке |

<table>
<tr><td></td><td></td><td>[−π/2;π/2] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn,n∈Z - убывает на отрезке<br>[π/2;3π/2] и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на 2πn,n∈Z</td></tr>
<tr><td>212</td><td>Функция y = cos x, ее свойства и график</td><td>Функцию косинуса обозначают как $y=\cos(x)$ где x — аргумент, а y — значение функции.<br>Также зависимость вида иногда называют косинусоидой.<br>Свойства функции y=cos(x):<br>1. Свойство четности. При любом значении аргумента x будет справедливо: cos(-x)=cos(x). Это значит, что функция y=cos(x) — четная. Докажем это свойство. Пусть числу s соответствует точка N(s). Тогда число (–s) обозначает точка M, симметричная N и расположенная в IV координатной четверти. Абсциссы точек M и N равны по величине и знаку, как и их косинусы: cos(-s)=cos(s).<br><br><br>2. При любом значении аргумента x справедливо: cos(x+2πn)=cos(x), где n — целое число, π≈3,14. Слагаемое 2πn можно трактовать как полный оборот вокруг окружности (на 360°), то есть x и (x+2πn) — это одна и та же точка.<br>3. При любом значении аргумента x справедливо: cos(x+π)=-cos(x). Точки, соответствующие числам x и (x+π) на единичной окружности, расположены симметрично относительно начала координат. Такие точки имеют одинаковые по величине, но разные по знаку абсциссы. Получим cos(x+π)=-cos(x).<br><br></td></tr>
</table>

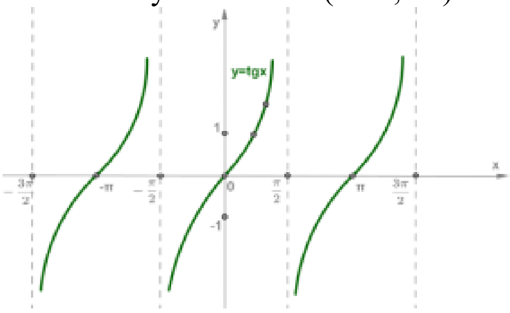
Построение графика, область определения
Для построения графика будем задавать значения переменной x и вычислять значения функции y=cos(x).
График косинуса имеет вид:

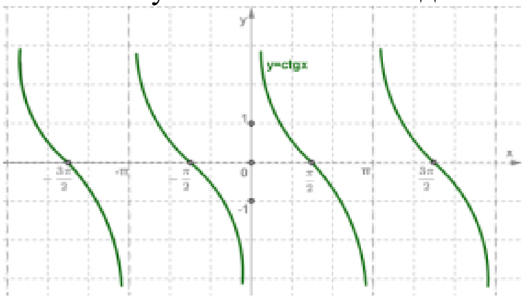



По графику видно, что аргумент функции может принимать любое значение, то есть область определения: $D(\cos(x)) = (-\infty;\ +\infty)$. Значения самого косинуса меняется от -1 до +1, при этом граничные точки:
$y_{наиб} = \cos(2\pi n) = 1$ и $y_{наим} = \cos(\pi + 2\pi$
. Область значений: $E(\cos(x)) = [-1;\ 1]$.
Исследуем функцию на монотонность. Для этого проведем касательные a1 и b1 к графику y=cos(x) в точках $x \in [-\pi;\ 0]$ и касательные a2 и b2 в точках $x \in (0;\ \pi]$.




Видно, что прямые a1 и b1 образуют с осью OX острые углы, а прямые a2 и b2 — тупые. Значит y=cos(x) возрастает на промежутке $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$
Период, таблица, как решить уравнение
При рассмотрении графика и основных свойств функции y=cos(x) можно заметить, что при заданном значении аргумента x значение y повторяется через некоторый промежуток $2\pi n$, где n — целое число. Пусть n=1,
тогда: $\cos(x - 2\pi) = \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.
Получили выражение, определяющее

| | | |
|---|---|---|
| | | периодическую функцию вида $f(x+T)$, где Т — период.<br>Сделаем вывод.<br>Функция y=cos(x) является периодической с периодом $T=2\pi n, n\in Z$. |
| 213 | Функции y = tg x и y = ctg x, их свойства и графики. | Функция y=tg x, ее свойства и график.<br>Функция y=tgx определена<br>при x≠π/2+πn,n∈Z, является нечётной и периодической с периодом π.<br>Поэтому достаточно построить её график на промежутке [0;π/2)<br>Выберем для построения контрольные точки, через которые проведём плавную кривую на координатной плоскости.<br>tg0=0 tgπ/6=3√3/tgπ4/=1/tgπ/3=√3<br>Затем, отобразив её симметрично относительно начала координат, получим график на интервале (−π/2;π/2)<br>Используя периодичность, строим график функции y=tgx на всей области определения.<br>График<br>функции y=tgx называют тангенсоидой.<br>Главной ветвью графика<br>функции y=tgx обычно называют ветвь, заключённую в полосе (−π/2;π/2)<br><br>Свойства функции y=tgx<br>1. Область определения – множество всех действительных чисел x≠π/2+πn,n∈Z<br>2. Множество значений – множество R всех действительных чисел<br>3. Функция y=tgx периодическая с периодом π<br>4. Функция y=tgx нечётная<br>5. Функция y=tgx принимает:<br>- значение 0, при x=πn,n∈Z;<br>- положительные значения на интервалах (πn;π2+πn),n∈Z;<br>- отрицательные значения на интервалах (−π2+πn;πn),n∈Z.<br>6. Функция y=tgx возрастает на интервалах (−π/2+πn;π/2+πn),n∈Z. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Функция y=ctgx и её свойства и график<br>Функция y=ctgx определена при $x\neq\pi n, n\in Z$, является нечётной и периодической с периодом $\pi$.<br>Рассуждая аналогично как при построении графика функции y=tgx, можно построить график функции y=ctgx.<br>График функции y=ctgx, как и график функции y=tgx, называют тангенсоидой.<br>Главной ветвью графика<br>функции y=ctgx обычно называют ветвь, заключённую в полосе от x=0 до $x=\pi$.<br><br>Свойства функции y=ctgx<br>1. Область определения – множество всех действительных чисел $x\neq\pi n, n\in Z$<br>2. Множество значений – множество R всех действительных чисел<br>3. Функция y=ctgx периодическая с периодом $\pi$<br>4. Функция y=ctgx нечётная<br>5. Функция y=ctgx принимает:<br>- значение 0, при $x=\pi 2+\pi n, n\in Z$;<br>- положительные значения на интервалах $(\pi n;\pi/2+\pi n), n\in Z$;<br>- отрицательные значения на интервалах $(-\pi/2+\pi n;\pi n), n\in Z$.<br>6. Функция y=ctgx убывает на интервалах $(\pi n;\pi+\pi n), n\in Z$. |
| 214 | Обратные тригонометрические функции | Обратные тригонометрические функции: **арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс**.<br>Функция арксинус и ее график<br>Рассмотрим свойства функции арксинус и построим ее график.<br>$y = arcsinx$<br><br>Определение. Арксинусом<br>числа x называют такое значение угла y,<br>$siny = x$<br>для которого .<br>$x\epsilon[-1; 1]$<br>Причем как ограничения на |

значения синуса, а $y\epsilon[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ как выбранный диапазон углов.

Основные свойства арксинуса:

1) $\sin(arcsinx)=x$ при $x\epsilon[-1;1]$,

2) $\arcsin(siny)=y$ при $y\epsilon[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Основные свойства функции арксинус:

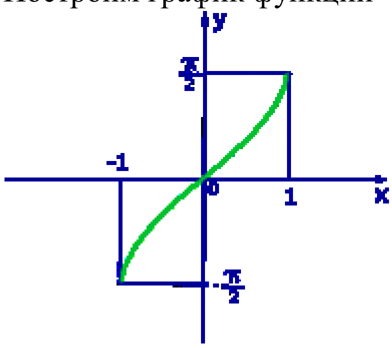
1) Область определения $D(x)=[-1;1]$;

2) Область значений $E(y)=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$;

3) Функция нечетная $\arcsin(-x)=-arcsinx$. Эту формулу желательно отдельно запомнить, т.к. она полезна для преобразований. Также отметим, что из нечетности следует симметричность графика функции относительно начала координат;

4) Функция монотонно возрастает.

Построим график функции $y=arcsinx$:




Обратим внимание, что никакой из участков графика функции не повторяется, а это означает, что арксинус не является периодической функцией, в отличие от синуса. То же самое будет относиться и ко всем остальным аркфункциям.

Функция арккосинус и ее график

Рассмотрим свойства функции арккосинус и построим ее график.

$y=arccosx$

Определение. Арккосинусом числа x называют такое значение угла y, для которого $\cos y = x$.

Причем $x \in [-1; 1]$ как ограничения на значения синуса, а $y \in [0; \pi]$ как выбранный диапазон углов.

Основные свойства арккосинуса:

1) $\cos(\arccos x) = x$ при $x \in [-1; 1]$,

2) $\arccos(\cos y) = y$ при $y \in [0; \pi]$.

Основные свойства функции арккосинус:

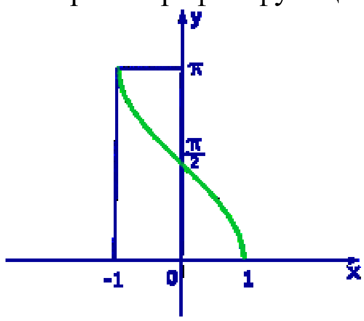
1) Область определения $D(x) = [-1; 1]$;

2) Область значений $E(y) = [0; \pi]$;

3) Функция не является ни четной ни нечетной, т.е. общего вида $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. Эту формулу тоже желательно запомнить, она пригодится нам позже;

4) Функция монотонно убывает.

Построим график функции $y = \arccos x$:




Функция арктангенс и ее график

Рассмотрим свойства функции арктангенс и построим ее график.

$y = \operatorname{arctg} x$

Определение. Арктангенсом числа x называют такое значение угла y, для которого $\operatorname{tg} y = x$. Причем $x \in \mathbb{R}$ т.к. ограничений на значения тангенса нет, а $y\epsilon(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ как выбранный диапазон углов.

Основные свойства арктангенса:

1) $tg(arctgx) = x$ при $x\epsilon\mathbb{R}$,

2) $\mathrm{arctg}(tgy) = y$ при $y\epsilon(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

Основные свойства функции арктангенс:

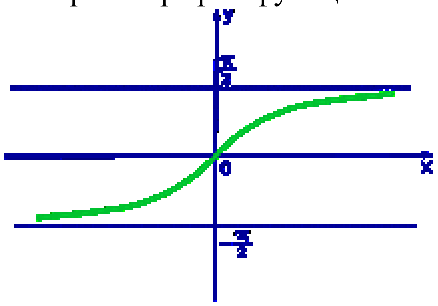
1) Область определения $D(x) = \mathbb{R}$;

2) Область значений $E(y) = (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$;

3) Функция нечетная $\mathrm{arctg}(-x) = -arctgx$. Эта формула тоже полезна, как и аналогичные ей. Как в случае с арксинусом, из нечетности следует симметричность графика функции относительно начала координат;

4) Функция монотонно возрастает.

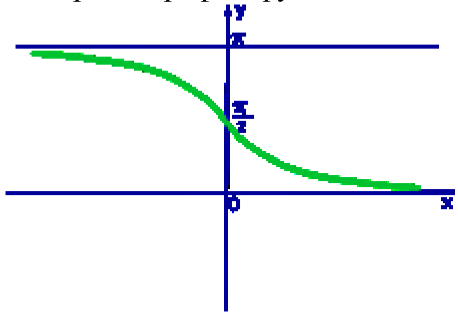
Построим график функции $y = arctgx$:




Функция арккотангенс и ее график

Рассмотрим свойства функции арккотангенс и построим ее график. $y = arcctgx$

Определение. Арккотангенсом числа x называют такое значение угла y, для которого $ctgy = x$. Причем $x\epsilon\mathbb{R}$ т.к. ограничений на значения котангенса нет, а $y\epsilon(0;\pi)$ как выбранный диапазон углов.

| | | |
|---|---|---|
| | | Основные свойства арккотангенса:<br>1) $ctg(arcctgx) = x$ при $x\epsilon\mathbb{R}$,<br>2) $\mathrm{arcctg}(ctgy) = y$ при $y\epsilon(0;\pi)$.<br>Основные свойства функции арккотангенс:<br>1) Область определения $D(x) = \mathbb{R}$;<br>2) Область значений $E(y) = (0;\pi)$;<br>3) Функция не является ни четной ни нечетной, т.е. общего вида $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - arcctgx$. Запомните и эту формулу, она нам тоже пригодится;<br>4) Функция монотонно убывает.<br>Построим график функции $y = arcctgx$:<br><br>Соотношения между обратными тригонометрическими функциями<br>Между рассмотренными обратными тригонометрическими функциями существует два полезных соотношения, которые позволяют выражать одну функцию через другую:<br>$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$<br>$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$<br>На этом уроке мы с вами рассмотрели такое понятие как обратная тригонометрическая функция, узнали их виды, свойства и построили графики.<br>В практической части урока мы займемся преобразованием выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. |
| 215 | Корень n-ой степени, свойства радикалов | Корнем n-ой степени из неотрицательного числа а (n=2, 3, 4...) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается число а. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Число а называют подкоренным числом, число n — показателем корня. Важно, что корень четной степени существует только из положительных чисел, а корень нечетной — как из положительных, так и отрицательных, поэтому выражение $\sqrt[4]{-27}$ не имеет смысл, а тот же корень третьей степени имеет $-\sqrt[3]{-27} = -3$<br>В алгебре корни нужны для более сокращенных и точных подсчетов, т.к самый простой корень из числа 3 будет равен длинной десятичной дроби, округлив которую получим лишь приблизительное значение. Такие числа называются иррациональными и намного удобнее представить их в виде радикала.<br>Знак радикала $\sqrt{\phantom{a}}$ как раз и используют для обозначения корня.<br>Основные свойства<br>Основные свойства корня n-ой степени с примерами:<br>1. $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} \lvert a \rvert, n - четно \\ a, n - нечетно \end{cases}$ Корень n-ой степени и возведение в эту же степень, эти операции являются взаимопоглощающими, поэтому при извлечении корня и возведении значения в степень, получаем искомое число а.<br>Пример: вычислите значение выражения $(\sqrt[3]{-5,8})^3$ По свойству получаем значение выражения равному -5,8.<br>2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$.Пример: найти значение выражения: $\sqrt[3]{25} * \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25*5 = \sqrt[3]{125}} = 25$.<br>3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0, b > 0$. Пример: найти значение выражения $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$.<br>4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$. Пример: найти значение выражения: $(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4$.<br>5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$. Пример: найти значение выражения:$\sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3*2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$.<br>6. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0$. Пример: найти значение выражения: $\sqrt[9]{8^6} = \sqrt[3*3]{8^{3*2}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.<br>7. $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, $n - нечетно$. Пример: найти значения корня: $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$ |
| 216 | Решение иррациональных уравнений | Иррациональными называются уравнения, которые содержат переменную под знаком корня.<br>Для решения иррациональных уравнений и неравенств мы используем различные методы и приемы. Вот некоторые из них:<br>Метод подстановки<br>Этот метод заключается в замене иррационального выражения на новую переменную, чтобы привести уравнение |

| | | |
|---|---|---|
| | | или неравенство к более простому виду. Затем мы решаем полученное уравнение или неравенство с помощью известных методов.<br>Метод возведения в квадрат<br>Если у нас есть иррациональное уравнение вида √(a + b√c) = d, мы можем возвести обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от корня. Затем мы решаем полученное квадратное уравнение.<br>Метод приведения к общему знаменателю<br>Если у нас есть иррациональное уравнение или неравенство с дробью, содержащей иррациональное выражение в знаменателе, мы можем привести все дроби к общему знаменателю, чтобы упростить уравнение или неравенство. Затем мы решаем полученное уравнение или неравенство.<br>Графический метод<br>Графический метод заключается в построении графика иррационального выражения и определении точек пересечения с осью абсцисс. Это позволяет нам найти значения переменных, при которых иррациональное уравнение или неравенство выполняются.<br>Важно помнить, что при решении иррациональных уравнений и неравенств могут возникать дополнительные ограничения на значения переменных, которые нужно учитывать при выборе решений. |
| 217 | Степень с рациональным и действительным показателями | Определение степени с рациональным показателем<br>Степень с рациональным показателем – это математическая операция, которая позволяет возвести число в степень, где показатель является рациональным числом. Рациональное число – это число, которое может быть представлено в виде дроби, где числитель и знаменатель являются целыми числами.<br>Формально, если у нас есть число a и рациональное число p/q, где p и q – целые числа, то a в степени p/q можно записать как a^(p/q).<br>Для вычисления степени с рациональным показателем мы используем следующее правило:<br>a^(p/q) = корень q-ой степени из a^p |

| | | |
|---|---|---|
| | | То есть, мы возводим число a в степень p, а затем извлекаем корень q-ой степени из результата.<br>Например, если у нас есть число 2 и показатель степени 3/2, то мы сначала возводим 2 в степень 3, получаем 8, а затем извлекаем корень квадратный из 8, что равно $2\sqrt{2}$.<br>Степень с рациональным показателем имеет ряд свойств, которые позволяют упростить вычисления и применять различные алгебраические операции.<br>Определение степени с действительным показателем<br>Степень с действительным показателем определяется как операция, в которой число a возводится в степень p, где p – действительное число.<br>Для положительного числа a и действительного числа p, степень a возводится в p-ую степень следующим образом:<br>$a^p = a * a * a * \ldots * a$ (p раз)<br>Если p равно нулю, то $a^p$ равно 1.<br>Если p равно 1, то $a^p$ равно a.<br>Если p равно отрицательному числу, то $a^p$ равно 1/a возводится в степень $\|p\|$.<br>Например, если у нас есть число 2 и показатель степени 3.5, то мы возводим 2 в степень 3, получаем 8, а затем извлекаем корень 2-ой степени из 8, что равно $2\sqrt{2}$.<br>Степень с действительным показателем также имеет ряд свойств, которые позволяют упростить вычисления и применять различные алгебраические операции.<br>Свойства степени с рациональным показателем<br>Степень с рациональным показателем имеет несколько свойств, которые помогают упростить вычисления и применять различные алгебраические операции. Давайте рассмотрим эти свойства подробнее:<br>Свойство 1: $a^m * a^n = a^{(m+n)}$<br>Это свойство гласит, что произведение двух чисел, возведенных в степень, равно числу, возведенному в сумму показателей степени. Например, если у нас есть число 2, возведенное в степень 3, и число 2, возведенное в степень 4, то их произведение будет равно числу 2, |

| | | |
|---|---|---|
| | | возведенному в степень 7 ($2^3 * 2^4 = 2^{(3+4)} = 2^7$).<br>Свойство 2: $(a^m)^n = a^{(m*n)}$<br>Это свойство гласит, что степень числа, возведенная в степень, равна числу, возведенному в произведение показателей степени. Например, если у нас есть число 2, возведенное в степень 3, и это число возводится в степень 4, то результат будет равен числу 2, возведенному в степень 12 ($(2^3)^4 = 2^{(3*4)} = 2^{12}$).<br>Свойство 3: $(a*b)^n = a^n * b^n$<br>Это свойство гласит, что степень произведения двух чисел равна произведению степеней этих чисел. Например, если у нас есть произведение чисел 2 и 3, возведенное в степень 4, то результат будет равен произведению числа 2, возведенного в степень 4, и числа 3, возведенного в степень 4 ($(2*3)^4 = 2^4 * 3^4$).<br>Свойство 4: $(a/b)^n = a^n / b^n$<br>Это свойство гласит, что степень частного двух чисел равна частному степеней этих чисел. Например, если у нас есть частное чисел 2 и 3, возведенное в степень 4, то результат будет равен частному числа 2, возведенного в степень 4, и числа 3, возведенного в степень 4 ($(2/3)^4 = 2^4 / 3^4$).<br>Эти свойства позволяют упростить вычисления и применять различные алгебраические операции при работе со степенями с рациональным показателем.<br>Свойства степени с действительным показателем<br>Свойство умножения степени с действительным показателем<br>Если у нас есть число a, возведенное в степень m, и число a, возведенное в степень n, то их произведение будет равно числу a, возведенному в степень m + n. То есть:<br>$a^m * a^n = a^{(m + n)}$<br>Свойство деления степени с действительным показателем<br>Если у нас есть число a, возведенное в степень m, и число a, возведенное в степень n, то их частное будет равно числу a, возведенному в степень m – n. То есть:<br>$a^m / a^n = a^{(m – n)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | Свойство возведения степени в степень с действительным показателем<br>Если у нас есть число a, возведенное в степень m, и мы возводим это выражение в степень n, то результат будет равен числу a, возведенному в степень m * n. То есть:<br>(a^m)^n = a^(m * n)<br>Свойство отрицательной степени с действительным показателем<br>Если у нас есть число a, возведенное в отрицательную степень n, то результат будет равен обратному числу a, возведенному в положительную степень n. То есть:<br>a^(-n) = 1 / a^n<br>Свойство степени с показателем 0<br>Любое число, кроме нуля, возведенное в степень 0, будет равно 1. То есть:<br>a^0 = 1, где a ≠ 0<br>Свойство степени с показателем 1<br>Любое число, возведенное в степень 1, будет равно самому числу. То есть:<br>a^1 = a<br>Эти свойства позволяют упростить вычисления и применять различные алгебраические операции при работе со степенями с действительным показателем. |
| 218 | Решение показательных уравнений и неравенств | Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.<br>Для решения показательных уравнений требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему: |
| | | Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a > 0, a ≠ 1) равносильно уравнению f(x) = g(x). |
| | | Помимо этого, полезно помнить об основных формулах и действиях со степенями:<br>$a > 0,\ b > 0:$<br>$a^0 = 1, 1^x = 1;$<br>$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z,\ n \in N);$<br>$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$<br>$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$<br>$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$<br>$(a^x)^y = a^{xy};$<br>$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$<br>$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$ |

Пример 1. Решите уравнение:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0.$$

Решение: используем приведенные выше формулы и подстановку:

$$t = 2^x.$$

Уравнение тогда принимает вид:

$$2t^2 - 5t - 88 = 0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) =$$

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2\cdot 2} = 8, \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2\cdot 2} = -5,5. \end{array}\right.$$

Переходя к обратной подстановке, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5,5. \end{array}\right.$$

Второе уравнение корней не имеет, поскольку показательная функция строго положительна на всей области определения. Решаем второе:

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3.$$

С учетом сказанного в теореме 1 переходим к эквивалентному уравнению: x = 3. Это и будет являться ответом к заданию.

Ответ: x = 3.

Пример 2. Решите уравнение:

$$3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207.$$

Решение: ограничений на область допустимых значений у уравнения нет, так как подкоренное выражение имеет смысл при любом значении x (показательная функция $y = 9^{4-x}$ положительна и не равна нулю).

Решаем уравнение путем равносильных преобразований с использованием правил умножения и деления степеней:

$$3^{x-1} - 3^{x-3} = \sqrt{3^{2x-8}} + 207 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-1} - 3^{x-3} - 3^{x-4} = 207 \Leftrightarrow$$

$$3^x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81}\right) = 207 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot \frac{23}{81} = 207 \Leftrightarrow 3^x = 3^6 \Leftrightarrow x = 6.$$

Последний переход был осуществлен в соответствии с теоремой 1.

Ответ: x = 6.

Пример 3. Решите уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x.$$

Решение: обе части исходного уравнения можно поделить на $0{,}2^x$. Данный переход будет являться равносильным, поскольку это выражение больше нуля при любом значении x (показательная функция строго положительна на своей области определения). Тогда уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: x = 0.

Пример 4. Решите уравнение:

$$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x.$$

Решение: упрощаем уравнение до элементарного путем равносильных преобразований с использованием приведенных в начале статьи правил деления и умножения степеней:

$$49 \cdot 3^x \cdot 7^x = 49 \cdot 4^x \Leftrightarrow$$
$$21^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{21}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Деление обеих частей уравнения на $4^x$, как и в предыдущем примере, является равносильным преобразованием, поскольку данное выражение не равно нулю ни при каких значениях x.

Ответ: x = 0.

Пример 5. Решите уравнение:

$$3^x = -x - \frac{2}{3}.$$

Решение: функция $y = 3^x$, стоящая в левой части уравнения, является возрастающей. Функция y = —x-2/3, стоящая в правой части уравнения, является убывающей. Это означает, что если графики этих функций пересекаются, то не более чем в одной точке. В данном случае нетрудно догадаться, что графики пересекаются в точке x = -1. Других корней не будет.

Ответ: x = -1.

Пример 6. Решите уравнение:

$$18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0.$$

Решение: упрощаем уравнение путем равносильных преобразований, имея в виду везде, что показательная функция строго больше нуля при любом значении x и используя правила вычисления произведения и частного степеней, приведенные в начале статьи:

$$2^x\cdot 3^{2x}-8\cdot 2^x\cdot 3^x-9\cdot 2^x=0 \Leftrightarrow$$

$$2^x(3^{2x}-8\cdot 3^x-9)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}2^x=0,\\ 3^{2x}-8\cdot 3^x-9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=9,\\ 3^x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: x = 2.

Решение показательных неравенств

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных неравенств требуется знание следующей теоремы:

Теорема 2. Если a > 1, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: f(x) > g(x). Если 0 < a < 1, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x) < g(x).

Пример 7. Решите неравенство:

$$16^x-2\cdot 12^x\leqslant 3^{2x+1}.$$

Решение: представим исходное неравенство в виде:

$$4^{2x}-2\cdot 4^x\cdot 3^x-3\cdot 3^{2x}\leqslant 0.$$

Разделим обе части этого неравенства на $3^{2x}$, при этом (в силу положительности функции $y = 3^{2x}$) знак неравенства не изменится:

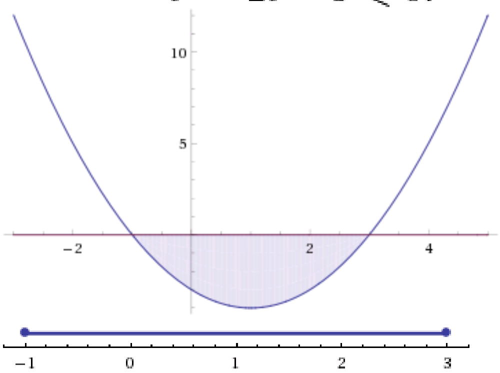
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-3\leqslant 0.$$

Воспользуемся подстановкой:

$$t=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}.$$

Тогда неравенство примет вид:

$$t^2-2t-3\leqslant 0.$$



Итак, решением неравенства является промежуток:

$$-1 \leqslant t \leqslant 3,$$

переходя к обратной подстановке, получаем:

$$-1 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{x} \leqslant 3.$$

Левое неравенства в силу положительности показательной функции выполняется автоматически. Воспользовавшись известным свойством логарифма, переходим к эквивалентному неравенству:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} 3}.$$

Поскольку в основании степени стоит число, большее единицы, эквивалентным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству:

$$x \leqslant \log_{\frac{4}{3}} 3.$$

Итак, окончательно получаем ответ:

$$x \in (-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 3].$$

Пример 8. Решите неравенство:

$$\frac{7^x - 30}{7^{x-1} + 1} \leqslant -14.$$

Решение: используя свойства умножения и деления степеней, перепишем неравенство в виде:

$$\frac{7^x - 30}{\frac{1}{7} \cdot 7^x + 1} \leqslant -14.$$

Введем новую переменную:

$$t = 7^x.$$

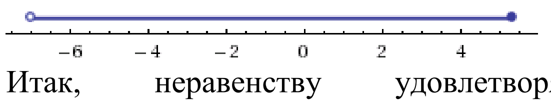
С учетом этой подстановки неравенство принимает вид:

$$\frac{t - 30}{\frac{1}{7} \cdot t + 1} + 14 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на 7, получаем следующее равносильное неравенство:

$$\frac{7t - 210}{t + 7} + 14 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{21t - 112}{t + 7} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3t - 16}{t + 7} \leqslant 0.$$




Итак, неравенству удовлетворяют следующие значения переменной t:

$$-7 \leqslant t \leqslant \frac{16}{3}.$$

Тогда, переходя к обратной подстановке, получаем:

$$-7 \leqslant 7^x \leqslant \frac{16}{3}.$$

$$7^x \leqslant 7^{\log_7 \frac{16}{3}}.$$

Поскольку основание степени здесь больше единицы, равносильным (по теореме 2) будет переход к неравенству:

$$x \leqslant \log_7 \frac{16}{3}.$$

Окончательно получаем ответ:

$$x \in \left(-\infty; \log_7 \frac{16}{3}\right].$$

Пример 9. Решите неравенство:

$$2^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} - 3^{2x^2-6x+3} \geqslant$$

Решение:

$$2 \cdot 2^{2x^2-6x+2} + 2^{x^2-3x+1} \cdot 3^{x^2-3x+1} -$$

Делим обе части неравенства на выражение:

$$3^{2x^2-6x+2}.$$

Оно всегда больше нуля (из-за положительности показательной функции), поэтому знак неравенства изменять не нужно. Получаем:

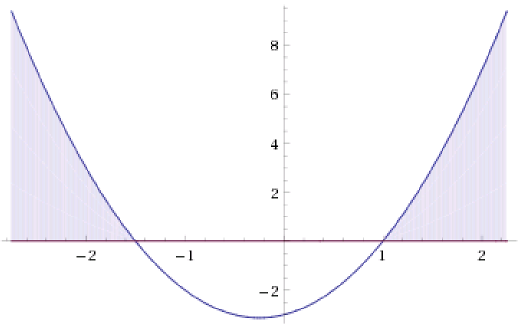
$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-6x+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} - 3 \geqslant 0.$$

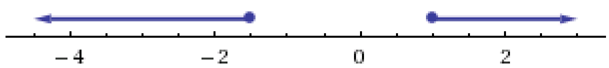
Воспользуемся заменой переменной:

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1}.$$

Исходное уравнение тогда принимает вид:

$$2t^2 + t - 3 \geqslant 0.$$



Итак, неравенству удовлетворяют значения t, находящиеся в промежутке:

$$t \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [1; +\infty).$$

Переходя к обратной подстановке получаем, что исходное неравенство распадается на два случая:

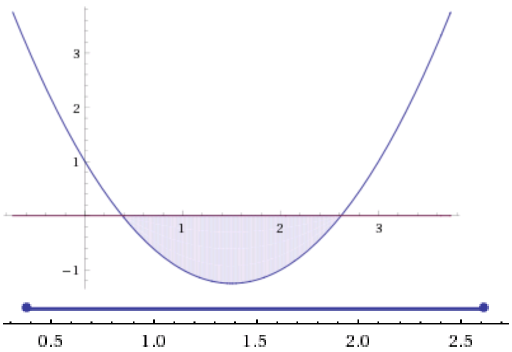
$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \leqslant -\frac{3}{2}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \geqslant 1 \end{array}\right.$$

Первое неравенство решений не имеет в силу положительности показательной функции. Решаем второе:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1} \geqslant$$

Поскольку основание степени в данном случае оказалось меньше единицы, но больше нуля, равносильным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству:

$$x^2 - 3x + 1 \leqslant 0.$$




Итак, окончательный ответ:

$$x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Пример 10. Решите неравенство:

$$2x + 2 - x^2 \geqslant 3^{x^2-2x+2}.$$

Решение:

Ветви параболы y = $2x+2-x^2$ направлены вниз, следовательно она ограничена сверху значением, которое она достигает в своей вершине:

$$x_t = -\frac{b}{2a} = 1, \; y_t = 3.$$

Ветви параболы y = $x^2-2x+2$, стоящей в показателе, направлены вверх, значит она ограничена снизу значением, которое она достигает в своей вершине:

| | | |
|---|---|---|
| | | $$x_t = -\frac{b}{2a} = 1,\ y_t = 1.$$ Вместе с этим ограниченной снизу оказывается и функция $y = 3^{x2-2x+2}$, стоящая в правой части уравнения. Она достигает своего наименьшего значения в той же точке, что и парабола, стоящая в показателе, и это значение равно $3^1 = 3$. Итак, исходное неравенство может оказаться верным только в том случае, если функция слева и функция справа принимают в одной точке значение, равное 3 (пересечением областей значений этих функций является только это число). Это условие выполняется в единственной точке $x = 1$.<br>Ответ: $x = 1$. |
| 219 | Логарифм. Правила действий с логарифмами | Для<br>$a > 0, a \neq 1, b > 0: a^c = b \Leftrightarrow c = log_a b$.<br>То есть, логарифм показывает: в какую степень необходимо возвести основание логарифма ($a$), чтобы получилось подлогарифмическое выражение ($b$).<br>Рассмотрим простейшие примеры вычисления логарифмов:<br>1) $log_2 4 = 2$, так как $2^2 = 4$.<br>2) $log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$.<br>3) $log_6 1 = 0$, так как $6^0 = 1$.<br>4) $log_5 0{,}2 = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.<br>Особые виды логарифмов<br>Существует два специальных вида логарифмов: десятичный и натуральный.<br>Десятичный логарифм – это логарифм с основанием 10. Он обозначается следующим образом: $log_{10} b = lg b$.<br>Натуральный логарифм – это логарифм с основанием $e$ ($e \approx 2{,}7$). Он обозначается следующим образом: $log_e b = ln b$.<br>Основное логарифмическое тождество<br>Исходя из определения логарифма $a^c = b \Leftrightarrow c = log_a b$, легко получить следующее свойство, которое называется основным логарифмическим тождеством. Для этого достаточно подставить вторую формулу в первую. В результате получаем: $a^{log_a b} = b$. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Это выражение называется основным логарифмическим тождеством.<br>Свойства логарифмов<br>Давайте сформулируем ещё несколько основных свойств логарифмов ( $a > 0; a \neq 1; b, c, > 0$).<br>1) $log_a a = 1$ (т.к. $a^1 = a$ ), $log_a 1 = 0$ (т.к. $a^0 = 1$).<br>2) $log_a b + log_a c = log_a bc$<br>(т.к. $a^{log_a b + log_a c} = a^{log_a b} \cdot a^{log_a c} = bc = a^{log}$<br>3) $log_a b - log_a c = log_a \frac{b}{c}$<br>4) $log_a b = \frac{1}{log_b a}$<br>(т.к. $a^{log_a b \cdot log_b a} = (a^{log_a b})^{log_b a} = b^{log_b a} = a$<br>5) Формула перехода к новому основанию: $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}, c \neq 1$<br>(т.к. $a^{\frac{log_c b}{log_c a}} = a^{log_c b \cdot log_a c} = (a^{log_a c})^{log_c b} = b =$<br>6) $log_a b^p = p \cdot log_a b$ (т.к. $a^{p \cdot log_a b} = (a^{log_a b})^p = b^p = a^{log_a b^p}$)<br>7) $log_{a^q} b = \frac{1}{q} \cdot log_a b$ (т.к. $a^{\frac{1}{q} \cdot log_a b} = (a^{log_a b})^{\frac{1}{q}} = b^{\frac{1}{q}} = a^{log_{a^q} b}$) |
| 220 | Решение логарифмических уравнений и неравенств | Теорема 1. Если f(x) > 0 и g(x) > 0, то логарифмическое уравнение log $_a$ f(x) = log $_a$ g(x) (где a > 0, a ≠ 1) равносильно уравнению f(x) = g(x). |
| | | Решение логарифмических уравнений и неравенств<br>Пример 1. Решите уравнение:<br>$\lg(x^2 - 6) = \lg(8 + 5x).$<br>Решение. В область допустимых значений входят только те x, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:<br>$\begin{cases} x^2 - 6 > 0, \\ 8 + 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 6, \\ x > -1,6. \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty), \\ x \in (-1,6; +\infty). \end{cases}$<br>С учетом того, что |

$$-1,6=-\sqrt{2,56}>-\sqrt{6},$$

получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

$$x\in(\sqrt{6};+\infty).$$

На основании теоремы 1, все условия которой здесь выполнены, переходим к следующему равносильному квадратичному уравнению:

$$x^2-6=8+5x\Leftrightarrow x^2-5x-14=0\Leftrightarrow$$
$$x_1=7,\ x_2=-2.$$

В область допустимых значений входит только первый корень.

Ответ: x = 7.

Пример 2. Решите уравнение:

$$\log_{0,2}(-x^2+4x+5)=\log_{0,2}(-x-31).$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств:

$$\begin{cases}-x^2+4x+5>0,\\ -x-31>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<5,\\ x<-31.\end{cases}$$

Очевидно, что эти два условия противоречат друг другу. То есть нет ни одного такого значения x, при котором одновременно выполнялись бы оба неравенства. Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит решений у данного логарифмического уравнения нет.

Ответ: корней нет.

Обратите внимание, что в этом задании нам вообще не пришлось искать корни уравнения. Достаточно оказалось определить, что его область допустимых значений не содержит ни одного действительно числа. Это одно из преимуществ такой последовательности решения логарифмических уравнений и неравенств (начинать с определения области допустимых значений уравнения, а затем решать его путем равносильных преобразований).

Примет 3. Решите уравнение:

$$3\log^2_{\frac{1}{2}}x+5\log_{\frac{1}{2}}x-2=0.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется здесь легко: x > 0.

Используем подстановку:

$$t=\log_{\frac{1}{2}}x.$$

Уравнение принимает вид:

$$3t^2+5t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1}{3}, \\ t_2=-2. \end{array}\right.$$

Обратная подстановка:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x=\frac{1}{3}, \\ \log_{\frac{1}{2}} x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Оба ответа входят в область допустимых значений уравнения, поскольку являются положительными числами.

Пример 4. Решите уравнение:

$$\log_{0,4}(x+2)+\log_{0,4}(x+3)=\log_{0,4}(1-x).$$

Решение. Вновь начнем решение с определения области допустимых значений уравнения. Она определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+3>0, \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>-3, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2;1).$$

Воспользовавшись правилом сложения логарифмов, переходим к равносильному в области допустимых значений уравнению:

$$\log_{0,4}(x+2)(x+3)=\log_{0,4}(1-x) \Rightarrow$$

Основания логарифмов одинаковы, поэтому в области допустимых значений можно перейти к следующему квадратному уравнению:

$$(x+2)(x+3)=(1-x) \Leftrightarrow x^2+6x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-5, \\ x_2=-1. \end{array}\right.$$

Первый корень не входит в область допустимых значений уравнения, второй — входит.

Ответ: x = -1.

Пример 5. Решите уравнение:

$$x^{\log_3 x}=81.$$

Решение. Будем искать решения в промежутке x > 0, x≠1. Преобразуем уравнение к равносильному:

$$x^{\log_3 x}=x^{\log_x 81} \Leftrightarrow x^{\log_3 x}=x^{\frac{4}{\log_3 x}} \Leftrightarrow$$

$$\log_3^2 x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=2, \\ \log_3 x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=\frac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Оба ответа входят в область допустимых значений уравнения.

Пример 6. Решите уравнение:

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$$

Решение. Система неравенств, определяющая область допустимых значений уравнения, имеет на этот раз вид:

$$\begin{cases} x+12>0, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>0,\ x\neq 1.$$

Используя свойства логарифма, преобразуем уравнение к равносильному в области допустимых значений уравнению:

$$\frac{\log_2(x+12)}{2\log_2 x}=1.$$

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получаем:

$$\log_x(x+12)=2 \Rightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=-3. \end{array}\right.$$

В область допустимых значений входит только один ответ: x = 4.

Перейдем теперь к логарифмическим неравенствам. Это как раз то, с чем вам придется иметь дело на ЕГЭ по математике. Для решения дальнейших примеров нам потребуется следующая теорема:

Теорема 2. Если f(x) > 0 и g(x) > 0, то:

при a > 1 логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: f(x) > g(x);

при 0 < a < 1 логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x) < g(x).

Пример 7. Решите неравенство:

$$\log_{0,5}(x^2+x-6)\geqslant \log_{0,5}(x+4).$$

Решение. Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x^2+x-6>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x\in(-\infty;-3)\cap(2;+\infty), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in(-4;-3)\cup(2;+\infty).$$

Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

$$x^2+x-6\leqslant x+4 \Leftrightarrow x^2\leqslant 10 \Leftrightarrow x\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}].$$

Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем ответ:

$$x \in [-\sqrt{10}; -3) \cup (2; \sqrt{10}].$$

Пример 8. Решите неравенство:

$$11 \cdot \log_9(x^2 - 12x + 27) \leqslant 12 + \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3}.$$

Решение. Вновь начнем с определения области допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 27 > 0, \\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty).$$

На множестве допустимых значений неравенства проводим равносильные преобразования:

$$11 \cdot \log_9(x-9)(x-3) - \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} \leqslant 12$$

$$\log_9 \left[(x-9)^{11}(x-3)^{11}\right] - \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} \leqslant 12$$

$$\log_9 \frac{(x-3)^{12}(x-9)^{11}}{(x-9)^{11}} \leqslant \log_9 9^{12}.$$

После сокращения и перехода к равносильному по теореме 2 неравенству получаем:

$$(x-3)^{12} \leqslant 9^{12} \Leftrightarrow -9 \leqslant x - 3 \leqslant 9 \Leftrightarrow x \in [-6; 12].$$

С учетом области допустимых значений получаем окончательный ответ:

$$x \in [-6; 3) \cup (9; 12].$$

Пример 9. Решите логарифмическое неравенство:

$$\log_{x+1}(x^3 + 3x^2 + 2x) < 2.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \\ x(x+1)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty).$$

Видно, что в области допустимых значений выражение, стоящее в основании логарифма, всегда больше единицы, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему неравенству:

$$x^3 + 3x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(x^2 + x - 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

С учетом области допустимых значений получаем окончательный ответ:

$$x \in \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Пример 10. Решите неравенство:

$$\frac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2} \leqslant 1.$$

Решение.

Область допустимых значений неравенства определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x>0, \\ x^2>0, \\ x^2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(4;+\infty).$$

I способ. Воспользуемся формулой перехода к новому основанию логарифма и перейдем к равносильному в области допустимых значений неравенству:

$$\log_{x^2}(x^2-4x)^2 \leqslant 1.$$

Неравенство будет равносильно двум системам. Первой:

$$\begin{cases} x\in(-1;0), \\ (x^2-4x)^2\geqslant x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1;0), \\ x^2(x-5)(x-3)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x\in(-1;0).$$

И второй:

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty), \\ x^2(x-5)(x-3)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;5].$$

Итак, окончательный ответ:

$$x\in(-1;0)\cup(4;5].$$

II способ. Решаем методом интервалов. Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{2\log_3(x^2-4x)-\log_3 x^2}{\log_3 x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

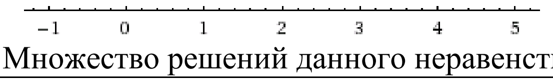
Вычтем из знаменателя $\log_3 1.$ Это ничего не изменит, поскольку $\log_3 1 = 0.$

$$\frac{\log_3(x^2-4x)^2-\log_3 x^2}{\log_3 x^2-\log_3 1} \leqslant 0$$

С учетом того, что выражения $\log_3 f-\log_3 g$ и $f-g$ — одного знака при $f,\,g>0,$ в области допустимых значений имеет место следующий равносильный переход:

$$\frac{(x^2-4x)^2-x^2}{x^2-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-5x)(x^2-3x)}{x^2-1} \leqslant 0.$$




Множество решений данного неравенства

| | | |
|---|---|---|
| | | Итак, $x \in (-1;1) \cup [3;5]$, а с учетом области допустимых значений получаем тот же результат: $x \in (-1;0) \cup (4;5]$. |
| 221 | Последовательность. Способы задания и свойства числовых последовательностей | Числовая последовательность – это числовая функция ($f$), которая определена на множестве натуральных чисел ($N$).<br>Областью определения является множество натуральных чисел ($N$).<br>Обозначают члены последовательности так:<br>$y_1 = f(1)$; $y_2 = f(2)$; $y_3 = f(3)$;…; $y_n = f(n)$<br>Числовая последовательность – это частный случай функции. Как и любая функция, последовательность может задаваться различными способами.<br>Способы задания числовой последовательности:<br>1. Аналитический (при помощи формулы)<br>2. Словесный<br>3. Рекуррентный<br>Аналитический способ задания числовой последовательности<br>Последовательность задана аналитически, если указана формула для вычисления ее -го члена.<br>$y_n = f(n)$, где $n \in N$<br>Рассмотрим примеры:<br>1. $y_n = \frac{1}{n}$,<br>Это аналитическое задание последовательности чисел: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3};…; \frac{1}{n};…$<br>Указав конкретное значение $n$, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером.<br>Построим график данной последовательности. Согласно определению графика функции, графиком данной последовательности является множество всех точек $\left(n; \frac{1}{n}\right)$,<br>где $n \in N$ (см. Рис. 1). Все эти точки лежат на правой ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$. |

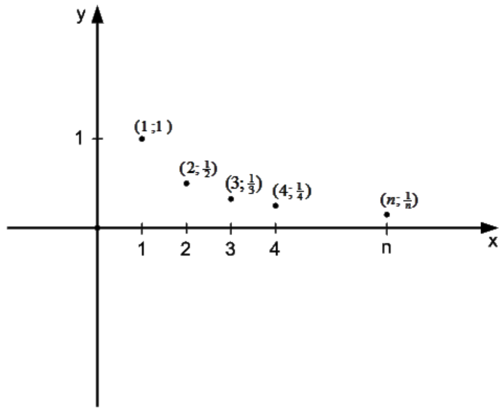



Рис. 1. График числовой последовательности $y_n = \frac{1}{n}$

Функция $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ убывает, следовательно, числовая последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ также убывает.

2. $y_n = |n - 5|$

Выпишем несколько членов данной числовой последовательности:

$y_1 = |1 - 5| = 4$; $y_2 = |2 - 5| = 3$; $y_3 = |3 - 5| = 2$;…

График данной последовательности – это множество точек с координатами $(n; |n - 5|)$, где $n \in N$ (см. Рис. 2). Все эти точки лежат на ломаной $y = |x - 5|$.

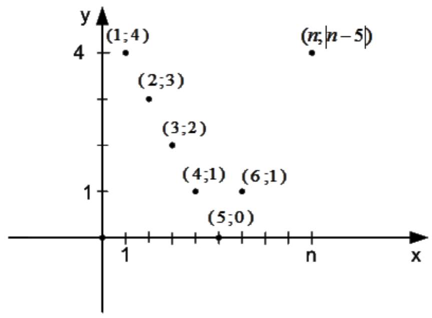


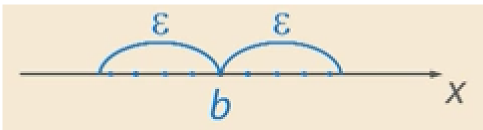

Рис. 2. График числовой последовательности $y_n = |n - 5|$

Числовая последовательность $y_n = |n - 5|$ убывает при $n \in [1; 5]$, возрастает при $n \in [5; +\infty)$.

Словесный способ задания числовой последовательности

Словесный способ задания числовой последовательности используется, когда

| | | |
|---|---|---|
| | | правило задания последовательности описано словами, не указывая формулы.<br>Пример<br>Дано: $a_n$ – это -я цифра после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{2}$.<br>$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$<br>$a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = 4$; $a_4 = 2$; $a_5 = 1$;…<br>Рекуррентный способ задания числовой последовательности<br>Последовательность задана рекуррентно, если указано правило, по которому -й член вычисляется по предыдущим членам.<br>Пример<br>$y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$,<br>где $n = 3{,}4{,}5\ldots$<br>В данном примере задана возможность получения любого -го члена последовательности:<br>$y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 1 + 1 = 2$<br>; $y_4 = 1 + 2 = 3$; $y_5 = 2 + 3 = 5$;… |
| 222 | Бесконечно убывающая геометрическая последовательность | Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль ее знаменателя меньше единицы $\|q\|<1$.<br>Сумма S всех членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии вычисляется как соотношение между первым членом геометрической прогрессии к разности между единицей и знаменателем прогрессии:<br>S=b1/(1−q).<br>Доказательством этой формулы является то, что величина qn по модулю становится все меньше и меньше и стремится к нулю, при этом величина n неограниченно возрастает.<br>Пример такой прогрессии:<br>1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,…<br>Сумма первых n членов геометрической прогрессии<br>Если q=1, то для вычисления суммы Sn первых n членов геометрической прогрессии применяют следующую формулу:<br>Sn=b1+...+bn=(b1−bnq)/(1−q)=b1(1−$q^n$)/(1−q).<br>Если q≠1, то формула видоизменяется в:<br>Sn=b1n. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Также для объяснения формулы, введем другое обозначение суммы первых членов прогрессии:<br>Sn=b1+b2+...+bn.<br>Тогда можно видоизменить формулу нахождения суммы Sn первых n членов геометрической прогрессии:<br>Sn=b1(qn−1)/(q−1).<br>Как найти q в геометрической прогрессии<br>Вычисление знаменателя<br>прогрессии q осуществляют через выведение из формулы на нахождение общего члена геометрической прогрессии:<br>bn=b1qn−1<br>Отсюда:<br>Отсюда:<br>q=bn+1/bn. |
| 223 | Предел последовательности | Числовая последовательность – частный случай функции, которая задана на множестве натуральных чисел. Некоторые числовые последовательности сходятся, то есть имеют предел, тогда пишут $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ либо по-иному: $y_n \to b,$ когда $n \to \infty$, это означает, что при достаточно больших $n$ , $y_n \approx b$ .<br>Более точно, если у нас есть предел и его $\varepsilon$ – окрестность, то начиная с некоторого номера все члены последовательности находятся в -окрестности точки $b$ .<br>Определение: число $b$ называется пределом последовательности $y_n$, если в любой заранее выбранной -окрестности точки $b$, $\varepsilon > 0$, содержатся все члены последовательности начиная с некоторого номера (рис. 4).<br>$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$<br><br><br>Рис. 4. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$<br>Число $\varepsilon$ может быть очень малым.<br>Сходящиеся последовательности – те последовательности, которые имеют предел. |

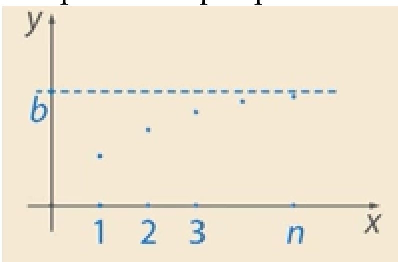
Свойства сходящейся числовой последовательности

Если последовательность сходится, то:

1. только к одному пределу;
2. она ограничена.

Как узнать, что последовательности сходятся? Для некоторых последовательностей это можно сделать. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Теорема Вейерштрасса




Последовательность возрастает. Число точек не ограничено, последовательность ограничена числом $b$. Значит, к числу $b$ либо к любому другому числу все точки последовательности сгущаются. Это наглядно показывает, что монотонность и ограниченность – два свойства, которые являются достаточными для того, чтобы последовательность имела предел. В этом смысл теоремы Вейерштрасса.

Теорема для вычисления пределов конкретных последовательностей

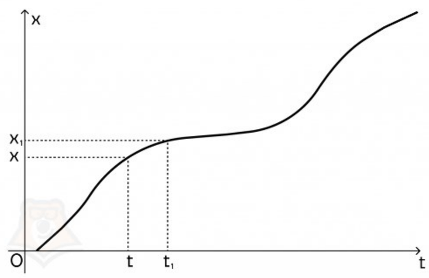
Даны две последовательности $x_n$ и $y_n$ , $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = c$.

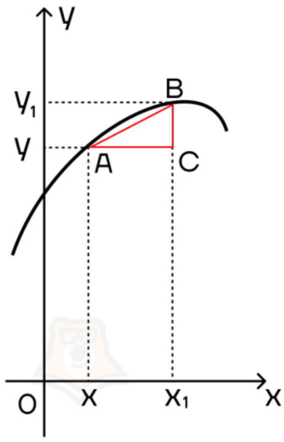
Последовательности сходящиеся.

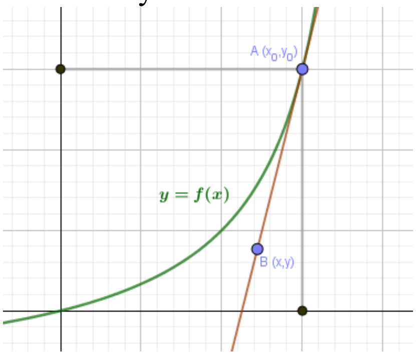
1. $x_n + y_n$ – новая последовательность, ее предел $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c$. Предел суммы последовательностей, равен сумме пределов этих последовательностей.
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = b \cdot c$. Этот предел равен произведению $b \cdot c$, то есть произведению этих пределов.
3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}$. Предел этой последовательности, то есть предел частного равен $\frac{b}{c}$, где $c \neq 0$.

$\lim_{n\to\infty}(k \cdot x_n) = k \cdot b$, где $k -$ постоянный множитель, который можно вынести за знак предела.

| | | |
|---|---|---|
| 224 | Производная функции | Функции достаточно часто встречаются при решении задач. Они могут быть как составными частями какого-то задания, так и отдельным номером. Разумеется, встречаются не только простые функции. Если открыть банк заданий, то мы удивимся, насколько сложными они бывают. Так что делать с такими сложными и непонятными функциями?<br>Производная — одно из самых важных понятий математического анализа. С ее помощью можно описать поведение любой функции.<br>Приращение функции — это разность между двумя значениями функции, то есть y.<br>Приращение аргумента — это разность между двумя значениями аргумента, то есть x.<br>Скорость изменения функции будет равна отношению приращения функции к приращению аргумента. При этом чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее мы приблизимся к верному значению.<br>Отсюда мы получаем определение производной функции.<br>Производная функции — это понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции.<br>Производную функции обозначают как f'(x).<br>$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *или* $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$<br>Если мы применим одинаковое приращение аргумента к разным участкам функции, то заметим, что приращение функции также будет разное. Где-то значение *y* изменится больше, где-то меньше. Именно так изменяется скорость функции на разных ее участках.<br>Нахождение производной называется дифференцированием. |
| 225 | Правила дифференцирования | В основные правила дифференцирования функций входят вынесение констант за знак производной, сумма и разность, умножение и деление функций:<br>1. Константу можно вынести за знак производной:(Cf(x))′=C(f(x))′ |

| | | |
|---|---|---|
| | | 2. Производная суммы/разности функций равна сумме/разности производных: $(f(x)\pm g(x))'=(f(x))'\pm(g(x))'$<br>3. Дифференцирование произведения двух функций выполняется по формуле$(f(x)\cdot g(x))'=(f(x))'\cdot g(x)+f(x)\cdot(g(x))'$<br>4. Дифференцирование частного двух функций выполняется по формуле: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ |
| 226 | Вычисление производной сложной функции | Сложной функцией называют такое выражение, в котором одна функция словно вложена в другую.<br>Производную сложной функции f (y) можно найти по следующей формуле: (f (y))′ = f′ (y)×y′. Другими словами, нужно умножить производную, условно говоря, внешней функции на производную внутренней. |
| 227 | Физический (механический) смысл производной | Физический смысл производной<br>Предположим, что некоторая точка движется прямолинейно, и ее путь можно описать по закону x(t). То есть за определенное время t точка пройдет расстояние x.<br>А теперь вспомним формулу скорости: v=x/t.<br>Чтобы найти среднюю скорость на каком-то участке пути точки, нужно разделить весь путь на все время или vср= Δx/Δt .<br>Таким образом, мы пришли к определению производной.<br><br>Физический (механический) смысл производной состоит в том, что производная от функции равняется скорости движения некоторого тела по траектории x(t) в момент времени t. x'(t) = v<br>Также вспомним, что скорость тела зависит от его ускорения. Тогда, применяя аналогичные рассуждения, получаем: v'(t) = a |

| | | |
|---|---|---|
| | | Производную можно брать несколько раз. Например, если мы дважды возьмем производную от x(t), то получим ускорение точки:<br>x”(t)=v'(t) = a<br>Как найти скорость и ускорение точки с помощью производной?<br>Для этого необходимо воспользоваться физическим смыслом производной: производная от функции равна скорости движения некоторого тела. Производная от скорости равна ускорению тела. |
| 228 | Геометрический смысл производной | Геометрический смысл производной<br>Достроим прямоугольный треугольник ABC. Заметим, что отношение Δy/Δx= tgBAC, то есть равняется отношению противолежащего катета к прилежащему катету. Иначе это отношение можно записать как tgBAC=BC/AC .<br>Поскольку в этом примере мы взяли достаточно большое расстояние между значениями x, то AB — секущая. Если мы будем сокращать расстояние между значениями аргумента, то две точки на графике будут ближе друг к другу, а секущая будет стремиться к касательной.<br><br><br>Следовательно, мы можем описать скорость изменения функции через тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке.<br>Из этих рассуждений мы можем вывести геометрический смысл производной:<br>Если провести касательную к функции в некоторой точке, то производная в этой точке будет равна тангенсу угла ее наклона. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Рассмотрим касательную отдельно. Это прямая, которая имеет уравнение y = kx+b, где к — коэффициент наклона.<br>Тогда мы получаем следующее уравнение: f'(x) = k = tg(a)<br>Геометрический смысл производной — главный совместный номер. Производная равняется тангенсу угла наклона касательной, проведенной к функции в определенной точке. |
| 229 | Уравнение касательной к графику функции | Касательная к графику функции f(x) — это прямая y=f(x) в точке x0, если она проходит через точку через точку A(x0; f(x0)) и имеет угловой коэффициент f′(x0).<br>Выведем уравнение касательной.<br>Рассмотрим кривую y=f(x).<br>Выберем на ней точку A с координатами (x0,y0), проведем касательную AB в этой точке.<br><br><br>Угловой коэффициент касательной равен производной от функции f в точке x0: k=f'(x0)<br>Уравнение прямой AB, проведенной через две точки: (yB - yA) = k (xB - xA).<br>Для A(x0,y0), B(x,y) получаем:<br>(y-y0) = k(x - x0)<br>y = k(x - x0) + y0<br>y = f'(x0)(x - x0) + f(x0)<br>Вывод: уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке x0 задается следующей формулой:<br>$y = f'(x0)(x - x0) + f(x0)$, при условии, что производная f′(x0)=a≠∞ — существует и конечна.<br>Чтобы записать уравнение касательной с угловым коэффициентом в виде y=kx+b, нужно раскрыть скобки и привести подобные:<br>y = f'(x0)(x - x0) + f(x0) = f'(x0)x + f(x0) - f'(x0)x0<br>f'(x0) = k, f(x0) - f'(x0)x0 = b |

| | | |
|---|---|---|
| | | Вывод: уравнение касательной с угловым коэффициентом будет выглядеть следующим образом: y=kx+b.<br>Смысл элементов уравнения касательной<br>A(x0;y0) — точка касания касательной и графика с координатами (x0;y0).<br>y=f(x) — график функции.<br>B(x;y) — произвольная точка на касательной с координатами (x;y).<br>f(x0) — значение функции в точке x0.<br>f″(x) — производная. f'(x) = tg x = k , то есть равна угловому коэффициенту.<br>f″(x0) — значение производной в точке x0.<br>b — вычисленное числовое значение.<br>Алгоритм построения касательной к графику функции<br>Дано: уравнение кривой y=f(x), абсцисса точки касания x0.<br>Необходимо вывести уравнение касательной.<br>Решение:<br>1. Найти значение функции в точке касания f(x0)<br>2. Найти общее уравнение производной f'(x)<br>3. Найти значение производной в точке касания f'(x0)<br>4. Записать уравнение касательной y = f'(x0)(x - x0) + f(x0), привести его к виду y = kx + b<br>В итоге получаем уравнение касательной в виде y = kx + b. |
| 230 | Непрерывность функции и метод интервалов | Применения непрерывности<br>Функция называется непрерывной в точке x0, если f(x) стремится к f(x0) при стремлении x к x0. При этом f(x) – A = f(x) – f(x0) = Δf. Если функция f непрерывна в каждой точке некоторого промежутка A, то эта функция будет являться непрерывной на всем промежутке A. A сам промежуток A, называют в таком случае промежутком непрерывности функции f.<br>График непрерывных функций, изучаемых в школьном курсе математики, можно нарисовать «не отрывая карандаш от бумаги», так как он представляет собой сплошную линию. Если на некотором интервале (a;b) функция f непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она будет сохранять постоянный знак. |

Это свойство очень легко для понимания. Функция, расположенная выше оси Ох, имеет знак «плюс», функция, расположенная ниже оси Ох, имеет знак «минус». Если линия функции не пересечет ось Ох (на оси Ох функция равна нулю), то она явно не изменит свой знак.

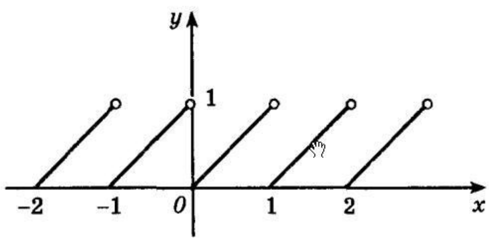
Метод интервалов

Одним из ярких применений свойств непрерывности функций является метод интервалов, который используется для решения неравенств с одной переменной. Пусть некоторая функции непрерывна на интервале А и обращается в нуль в конечном числе точек принадлежащих этому интервалу.

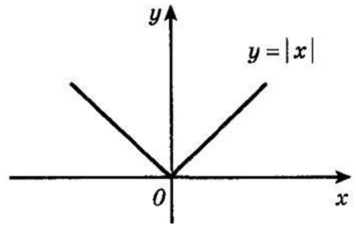
Используя свойство, приведенное выше, эти точки будут разбивать весь интервал А на промежутки, в которых функция будет сохранять свой знак. Чтобы определить знаки всех промежутков, достаточно знать знак одного любого из этих интервалов.

Пример функции, которая не является непрерывной

До сих пор мы сталкивались только с непрерывными функциями. Но существуют функции, которые не являются непрерывными в каждой точке, в которой они определены. Например, функция $f(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ – есть дробная часть числа x.
Её график изображен на следующем рисунке.



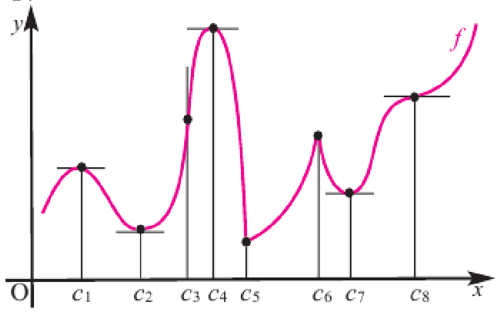

Легко заметить, что основное свойство непрерывности функции в точке x0 равное любому целому числу, не будет выполняться.
Но в тоже время функция $f(x) = \{x\}$ непрерывна во всех других точках, на которых она определена, кроме точек, где

| | | |
|---|---|---|
| | | x равно целому числу. На графике такие точки отмечены выколотыми кружками.<br><br>Функции непрерывные, но не дифференцируемые в данной точке<br><br>Есть функции которые являются непрерывными в каждой точке своей области определения. Но при этом не будут иметь производные в некоторых точках. Например, функция y=\|x\| непрерывна на все числовой оси, но при этом не дифференцируема в точке x = 0. Ниже представлен график этой функции.<br> |
| 231 | Связь производной с возрастанием и убыванием функции | **Теорема 1.** Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x_0) \geq 0$ (причём равенство $f'(x_0) = 0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.<br>Аналогично формулируется **теорема 2.** Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x_0) \leq 0$ (причём равенство $f'(x_0) = 0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.<br>Сразу обратим внимание на то, что теорема сформулирована для функций, непрерывных на промежутке X (что следует из их дифференцируемости ). |
| 232 | Критические точки функции, максимумы и минимумы | Критические точки и экстремумы функции<br>В некоторых точках из области определения производная функции может быть равна нулю или вообще может не существовать. Такие точки из области определения называются критическими |

точками функции. Покажем критические точки на графике заданной функции.

1. Для значений $x$, равных $c_1, c_2, c_4, c_7, c_8$ угловой коэффициент касательной к графику равен 0. Т.е. $f'(x) = 0$. Эти точки являются критическими точками функции.

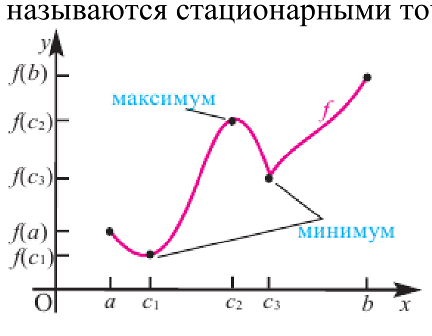
2. В точках $c_3, c_5, c_6$ функция не имеет производной. Эти тоже критические точки функции.




3. Для рассматриваемой нами функции критические точки $c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7$ делят ее область определения на чередующиеся интервалы возрастания и убывания. Точки $c_3, c_8$ - критические точки, которые не изменяют возрастание и убывание (или наоборот).

По графику видно, что в точках внутреннего экстремума $(c_1 \text{ и } c_2)$ производная функции равна нулю, а в точке $(c_3)$ производная не существует.

Точки, в которых производная функции равна нулю, также называются стационарными точками.

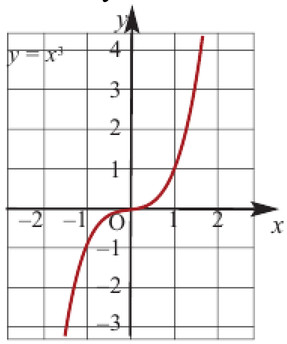


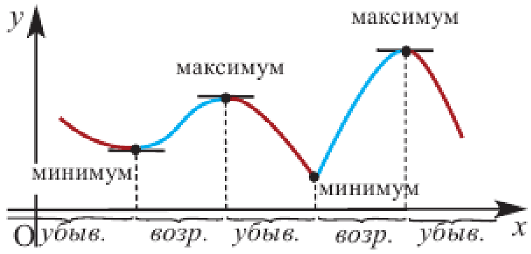

Теорема Ферма (Необходимое условие существовании экстремумов)

Во внутренних точках экстремума производная либо равна нулю, либо не существует.

Примечание. Точка, в которой производная равна нулю, может и не быть точкой экстремума. Например, в точке $x = 0$ производная функции $y = x^3$ равна нулю, но эта точка не является ни точкой максимума, ни точкой минимума.

На отрезке непрерывности функция может иметь несколько критических точек, точек максимума и минимума. Существование экстремума в точке зависит от значения функции в данной точке и в точках, близких к данной, т.е. имеет смысл локального (местного) значения. Поэтому иногда используют термин локальный максимум и локальный минимум.



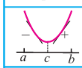
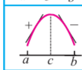
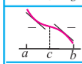
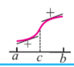

Достаточное условие существования экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$.

Если $x_0$ является критической точкой, в окрестности которой функция дифференцируема, то, если в этой окрестности:

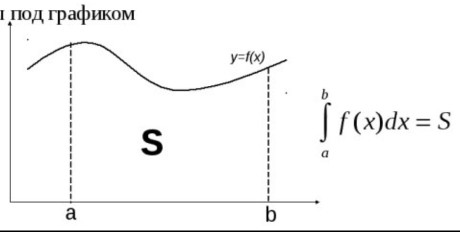
1 ) $f'(x)$ слева от точки $x_0$ положительна, а справа - отрицательна, то точка $x_0$ является точкой максимума.

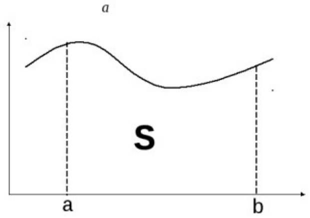
2) $f'(x)$ слева от $x_0$ отрицательна, а справа - положительна, то точка $x_0$ является точкой минимума

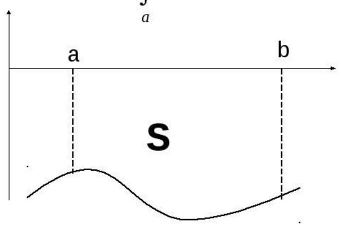
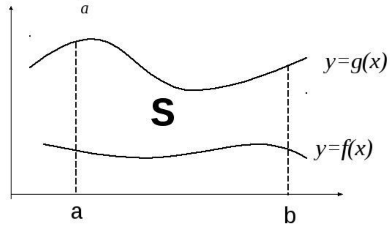
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>3) $f'(x)$ с каждой стороны от точки $x_0$ имеет одинаковые знаки, то точка $x_0$ не является точкой экстремума.<br>Чтобы найти наибольшее (абсолютный максимум) или наименьшее (абсолютный минимум) значение функции, имеющей конечное число критических точек на отрезке, надо найти значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее.<br>Соответствующие наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ записываются как $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.<br>Ниже представлены примеры определения максимума и минимума в соответствии со знаком производной первого порядка.
<table>
<tr><th>графики функций на отрезке $[a;b]$</th><th>$f(c)$</th><th>знак $f'(x)$ на интервале $(a; c)$</th><th>знак $f'(x)$ на интервале $(c; b)$</th><th>Возрастание или убывание</th></tr>
<tr><td></td><td>минимум</td><td>–</td><td>+</td><td>на $[a; c]$ убывает, на $[c; b]$ возрастает</td></tr>
<tr><td></td><td>максимум</td><td>+</td><td>–</td><td>на $[a; c]$ возрастает, на $[c; b]$ убывает</td></tr>
<tr><td></td><td>ни максимум и ни минимум</td><td>–</td><td>–</td><td>на $[a; c]$ убывает, на $[c; b]$ убывает</td></tr>
<tr><td></td><td>ни минимум и ни максимум</td><td>+</td><td>+</td><td>на $[a; c]$ возрастает, на $[c; b]$ возрастает</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>233</td>
<td>Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции</td>
<td>Наибольшим или наименьшим значением функции в определенной области называют наибольшее или наименьшее значение, которое достигает эта функция на указанной области.Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции в данной области, нужно решить задачу на экстремум, то есть найти производную заданной функции, приравнять её к нулю и найти точки, в которых производная функции обращается в нуль. Потом из этих точек нужно выбрать только те, которые входят в нашу заданную область. Затем нужно вычислить значение функций в этих точках. Кроме этого, нужно найти значение функции в граничных точках заданной области (если это отрезок) и сравнить их со значениями в точках экстремума. Потом можно сделать вывод о наименьшем или наибольшем значении функции в данной области.</td>
</tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | | Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.<br>1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значения.<br>2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.<br>3. Если наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.<br>Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции у = f(x) на отрезке [a; b]:<br>1. Найти производную f‘ (x) стационарные и критические точки функции, принадлежащие интервалу (a; b).<br>2. Найти f(a), f(b) и значения функции в стационарных точках, принадлежащих интервалу (a; b)и среди полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее<br>Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля<br>№1.Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 – 9x^2 + 12x – 2$ на отрезке [0; 3]<br>Решение. Действуем в соответствии с алгоритмом.<br>1) D(f) = (-∞; +∞).<br>2) $f'(x) = 6x^2 – 18x + 12$<br>3) Стационарные точки: x = 1; x = 2.<br>$1 \in (0; 3)$; $2 \in (0; 3)$<br>4) f(0) = -2<br>f(3) = 7<br>f(1) = 3<br>f(2) = 2<br>5) $f_{наим.}=f(0) = -2$<br>$f_{наиб.}=f(3) = 7$.<br>Ответ: $f_{наим}= -2$<br>$f_{наиб.}= 7$. |
| 234 | Первообразная функции | Первообразная для функции f(x) — это такая функция F(x), производная которой равна f(x). То есть выполняется равенство F'(x) = f(x).<br>Интегрирование — процесс поиска интеграла; восстановление функции по её производной. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Пример 1: мы знаем, что ускорение является производной от скорости. Тогда по нему можно найти скорость, восстановив функцию и найдя его первообразную.<br><br>Пример 2: производная функции –sin(x). Посмотрим внимательно в таблицу производных: cos'(x) = –sin(x). Тогда первообразная функции sin(x) будет равна –cos(x) + C с учётом постоянной величины.<br><br>Константа<br>Зачем добавлять константу к первообразной?<br><br>Представьте, что нам необходимо найти производную функций:<br><br>−cos(x) + 3,<br>−cos(x) + 5,<br>−cos(x) − 6.<br><br>Тогда производная будет равна sin(x) для всех трёх вариантов, так как производная любого числа равна нулю:<br><br>(−cos(x) + 3)' = sin (x),<br>(−cos(x) + 5)' = sin (x),<br>(−cos(x) − 6)' = sin (x).<br><br>Выходит, что получить исходную функцию в первозданном виде невозможно, но учесть дополнительное слагаемое в виде числа нам нужно. Именно поэтому в первообразной добавляют константу «+ C». Выражение, которое имеет общий вид F(x) + C, называется множеством первообразных функции.<br><br>Отсюда вытекает свойство первообразной: любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга не более чем на постоянную величину C. |
| 235 | Правила нахождения первообразных. | Нахождение первообразной функции технически связано с поиском неопределённого интеграла функции. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Неопределённый интеграл — это интеграл, для которого не задан промежуток интегрирования.<br><br>Важный момент: если продифференцировать можно любую функцию, то найти первообразную функции можно не всегда.<br><br>Об этом говорит достаточное условие интегрируемости: если на некотором промежутке функция непрерывна, то она интегрируема на нём.<br><br>Правила нахождения первообразных:<br>1. Если нужно найти первообразную от произведения числа на функцию, то первообразной выражения будет произведение этого числа на первообразную функции.<br>a*f(x) → a*F(x)<br>2. Если нужно найти первообразную от суммы/разности двух функций, то первообразной выражения будет сумма/разность первообразных этих двух функций.<br>g(x) ± f(x) → G(x) ± F(x)<br>3. Если F(x) есть некоторая первообразная для функции f(x), а k и b есть некоторые постоянные, причем k не равняется нулю, тогда (1/k)*F*(k*x+b) будет первообразной для функции f(k*x+b).<br>Данное правило следует из правила вычисления производной сложной функции:<br>((1/k)*F*(k*x+b))’ = (1/k)*F’(k*x+b)*k = f(k*x+b). |
| 236 | Интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница | **Определенный интеграл**<br>**Понятие определенного интеграла**<br>Пусть на отрезке *[a,b]* задана непрерывная положительная функция *y=f(x)*. Тогда определенным интегралом от функции *f(x)* на *[a,b]* называется площадь фигуры под графиком<br> |

| | | |
|---|---|---|
| | | Формула Ньютона-Лейбница, также известная как основная теорема исчисления, является одной из основных формул в математическом анализе. Она устанавливает связь между процессом дифференцирования и интегрирования.<br>Формула Ньютона-Лейбница гласит, что если функция F(x) является первообразной (антипроизводной) функции f(x) на некотором интервале [a, b], то определенный интеграл функции f(x) на этом интервале можно вычислить как разность значений первообразной F(x) в точках a и b:<br>$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) – F(a)$<br>Здесь f(x) – подынтегральная функция, F(x) – первообразная функция, a и b – границы интегрирования.<br>Формула Ньютона-Лейбница является основой для вычисления определенных интегралов и нахождения площадей под кривыми. Она позволяет связать процесс нахождения производной и интеграла, что делает ее одной из важнейших формул в математическом анализе. |
| 237 | Площадь криволинейной трапеции | Криволинейная трапеция – это плоская фигура, которая ограничена отрезком **[a; b]** координатной оси Ох, прямыми **$x = x_1$** и **$x = x_2$** и графиком некоторой функции **y(x)**. При этом **$x_1$** и **$x_2$** – это некоторые числа, неравные друг другу, а функция **y(x)** непрерывна и определена на отрезке **[a; b]**.<br>**Вычисление площадей плоских фигур**<br>1)Пусть y=f(x) – непрерывная и неотрицательная на [a,b] функция. Тогда площадь фигуры под графиком y=f(x) на [a,b] равна<br>$S = \int_a^b f(x)dx$<br> |

| | | |
|---|---|---|
| | | **Вычисление площадей плоских фигур**<br>2) Пусть y=f(x) – непрерывная и неположительная на [a,b] функция. Тогда площадь фигуры над графиком y=f(x) на [a,b] равна<br>$S=-\int_a^b f(x)dx$<br><br><br>**Вычисление площадей плоских фигур**<br>3) Пусть y=f(x) и y=g(x) – непрерывные на [a,b] функции, такие, что $f(x)\le g(x)\quad \forall x\in[a,b]$<br>Тогда площадь фигуры между графиками y=f(x) и y=g(x) на [a,b] равна<br>$S=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$<br><br> |
| 238 | Основные понятия комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения. | Комбинаторикой называется раздел математики, изучающий вопрос о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).<br>Если любые две группы $A_i$ и $A_j$ не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из $A_1$, или из $A_2$, …или из $A_k$ можно осуществить $N=n_1+n_2+\cdots+n_k$ спосо бами.<br>Правило умножения (основная формула комбинаторики)<br>Общее число $N$ способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждой группы и расставить их в определенном порядке (то есть получить упорядоченную совокупность $(a,b,c,d)$), равно:<br>$N=n_1\cdot n_2\ldots n_k$<br><br>В комбинаторике три базовые конфигурации:<br>Перестановки – это упорядоченные совокупности, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Число |

| | | |
|---|---|---|
| | | всех перестановок множества из $n$ элементов равно $P_n = n!$<br>Размещения – это упорядоченные совокупности элементов, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов.<br>Размещения без повторений, когда отобранный элемент перед отбором следующего не возвращается в генеральную совокупность. Такой выбор называется последовательным выбором без возвращения, а его результат – размещением без повторений из $n$ элементов по $k$.<br>Число различных способов, которыми можно произвести последовательный выбор без возвращения $k$ элементов из генеральной совокупности объема $n$, равно:<br>$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$<br>Сочетаниями $C_n^k$ из n элементов по k называются неупорядоченные совокупности, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.<br>Пусть из генеральной совокупности берется сразу несколько элементов (либо элементы берут последовательно, но порядок их появления не учитывается). В результате такого одновременного неупорядоченного выбора $k$ элементов из генеральной совокупности объема $n$ получаются комбинации, которые называются сочетаниями без повторений из $n$ элементов по $k$.<br>Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ равно:<br>$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ |
| 239 | Событие, вероятность события. | Теория вероятностей – раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними. Рассмотрим некоторые ключевые понятия, которые используются в теории вероятностей.<br>Определение.<br>Испытанием называется осуществление определенных действий. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Под событием понимают любой факт, который может произойти в результате испытания.<br>Любой результат испытания называется исходом.<br>Достоверным называют событие, которое в результате испытания обязательно произойдёт.<br>Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдёт в результате испытания.<br>События обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (A, B, C, D,…).<br>Рассматривая приведенный пример, мы можем сформулировать следующие заключения.<br>1. Процесс доставания предмета из коробки является испытанием.<br>2. Результат доставания предмета из корзины является событием.<br>3. Событие «вынутый предмет окажется клубком» является достоверным событием.<br>4. События «вынутый предмет не окажется клубком» или «вынутый предмет окажется красным клубком» являются невозможными событиями.<br>5. Событие «вынутый предмет окажется зеленым клубком» является вероятным событием.<br>A={вынутый предмет оказался клубком}.<br>B={вынутый предмет не оказался клубком.<br>C={вынутый предмет оказался зеленым клубком}.<br>D ={вынутый предмет оказался красным клубком}.<br>2. Определим еще несколько важных понятий теории вероятностей<br>Определение<br>Пространство элементарных событий Ω— множество всех различных исходов произвольного испытания.<br>Например, при броске одной игральной кости пространство элементарных событий $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, где $w_i$- выпадение i очков.<br>Если события не могут произойти одновременно в одном испытании, то события называются несовместными.<br>Например, при бросании монеты не могут одновременно выпасть «Орёл» и «Решка». |

| | | |
|---|---|---|
| | | Простейшим примером несовместных событий является<br>пара противоположных событий.<br>Противоположное событие происходит тогда, когда исходное событие<br>А не происходит.<br>Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой сверху.<br>Например:<br>• А – сдал экзамен по математике;<br>• Ā – не сдал экзамен по математике.<br>Определение.<br>Полной группой событий называется такая система событий, что в результате испытания непременно произойдет одно и только одно из них.<br>Пример .<br>Монету подбросили дважды. Укажите все элементарные события полной группы событий.<br>Элементарными событиями являются:<br>- Выпало два «орла»<br>- Выпало две «решки»<br>- Выпал один «орел» и одна «рещка».<br>3. Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, нужно подсчитать, как часто оно происходит.<br>Определение.<br>Число испытаний, в которых событие наступило, назовем абсолютной частотой и обозначим n. Общее число произведенных испытаний обозначим N.<br>Отношение абсолютной частоты к числу испытаний n/N называется относительной частотой события.<br>Относительная частота показывает, какая доля испытаний завершилась наступлением данного события. Эта относительная частота и<br>определяет вероятность случайного события. Ее еще называют статистической вероятностью события.<br>Статистическая вероятность события рассчитывается опытным путем.<br>Пример.<br>Еще со времен Древнего Китая за 2238 лет до нашей эры на основании метрик демографы обнаружили, что на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков. |

Это означает, что Вероятность рождения мальчика составляет 0,514.

1. Классическое определение вероятности применяется для равновозможных событий.

К равновозможным (равновероятностным) относятся такие события, для которых нет никаких объективных оснований считать, что одно является более возможным, чем другие.

Например, при бросании игрального кубика события выпадения любого из очков равно возможны.

Рассмотрим произвольный эксперимент. Пусть n- число всех исходов эксперимента, которые образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, m – число благоприятных событию A исходов. Тогда вероятностью события A называется число $P(A) = \frac{m}{n}$

Согласно определению вероятности наименьшее значение вероятности принимает невозможное событие, так как оно не может наступить и для него m=0, значит и вероятность равна 0.

Наибольшее значение принимает достоверное событие. В силу того, что оно гарантированно произойдет, для него m=n, P=m/n=n/n=1.

2 .Суммой событий A и B называется событие A+B, которое состоит в том, что наступит или событие A, или событие B, или оба события одновременно.

Произведением событий A и B называется событие A•B, состоящее в совместном осуществлении событий A и B.

Например:

1. Пусть A - идет дождь, B - идет снег, тогда A + B – «идет снег или дождь»
2. При 3-х выстрелах по мишени события: $A_0$ – «попаданий нет», $A_1$ – «одно попадание», $A_2$ – «два попадания», тогда $A=A_0+A_1+A_2$ - «произошло не больше двух попаданий»
3. Пусть C - из урны вынули белый шар, D - из урны вынули белый шар, тогда C·D - из урны вынули два белых шара
4. Пусть C - из урны вынули белый шар, D - из урны вынули белый шар,

| | | |
|---|---|---|
| | | тогда С $\overline{D}$ ·- из урны вынули два шара: белый и не белый<br>Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из<br>двух несовместных событий А или В равна сумме вероятностей этих событий:<br>Р(А+В)=Р(А)+Р(В) |
| 240 | Определение вероятности: классическое, статистическое и геометрическое | Классическое определение вероятности<br>Вероятностью наступления<br>события А называется число, равное отношению числа случаев, благоприятствующих событию А, к общему числу случаев (исходов, шансов или элементарных событий).<br>Вероятность (Р)<br>$P(A)=\frac{m}{n}$<br>Где n – общее число случаев, m – число случаев, благоприятствующих событию А.<br>Вероятность невозможного события:<br>$P(V)=\frac{0}{n}=0$<br>Вероятность достоверного события:<br>$P(U)=\frac{n}{n}=1$<br>Вероятность любого случайного события:<br>$0 \le P(A) \le 1$<br>Статистическое определение вероятности<br>Статистической<br>вероятностью события А называется относ ительная частота появления события в n – произведенных испытаниях.<br>Опытная (экспериментальная) вероятность:<br>$P(A)\approx\tilde{\omega}(A)=\frac{k}{n}$<br>Следовательно, $\tilde{\omega}(A)$ – есть доля тех фактически произведённых испытаний, в которых событиеА появилось. При $n\to\infty$ ,Р(А) ≈ $\tilde{\omega}$ (А)<br>Пример 1.<br>В коробке лежит 7 синих, 8 красных и 5 зеленых шаров.<br>Решение:<br>Событие А – шар зеленый;<br>$7+8+5=20;\ C_n^1=n$<br>$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_5^1}{C_{20}^1}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$<br>Пример 2. |

| | | |
|---|---|---|
| | | В коробке лежат 100 электроламп, из них 5 бракованных.<br>Решение:<br>Событие А – на удачу, выбранные 2 электролампы исправны.<br>$100-5=95-\text{исправных электроламп.}$<br>$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{95}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{\frac{95!}{93!\cdot 2!}}{\frac{100!}{98!\cdot 2!}}=\frac{94\cdot 95}{99\cdot 100}=\frac{893}{990}\approx 0{,}902$<br>Пример 3.<br>В коробке лежит 10 шаров: 6 белых и 4 черных.<br>Найти:<br>Вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.<br>Решение:<br>Найдем число благоприятных исходов: число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся шаров, равно:<br>$C_6^4=C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$<br>Общее число исходов определяется числом сочетаний из 10 по 5:<br>$C_{10}^5=252$<br>Искомая вероятность Р = 15/252 ≈ 0,06.<br>Геометрическая вероятность, то есть вероятность попадания точки в некоторую область, отрезок, часть плоскости.<br>Геометрической<br>вероятностью события А называют отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере всей области.<br>$P(A)=\frac{mes\,q}{mes\,g},$<br>где mes –мера (длина, площадь, объём области). |
| 241 | Основные статистические показатели: среднее арифметическое, размах, медиана и мода. | Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.<br>Для ряда $a_1,a_1,..,a_n$ среднее арифметическое вычисляется по формуле:<br>$\bar{a}=(a1+a2+...+an)/n$<br>Найдем среднее арифметическое для чисел 5,24, 6,97, 8,56, 7,32 и 6,23.<br>$\bar{a}=(5{,}24+6{,}97+8{,}56+7{,}32+6{,}23)/5=6.864$<br>Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.<br>Размах ряда 5,24, 6,97, 8,56, 7,32, 6,23 равен 8,56-5,24=3.32 |

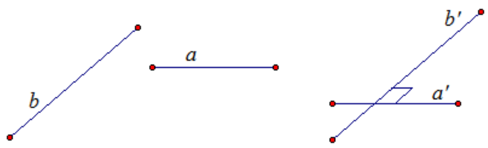
| | | |
|---|---|---|
| | | Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.<br>Ряд чисел может иметь более одной моды, а может не иметь моды совсем.<br>Модой ряда 32, 26, 18, 26, 15, 21, 26 является число 26, встречается 3 раза.<br>В ряду чисел 5,24, 6,97, 8,56, 7,32 и 6,23 моды нет.<br>Ряд 1, 1, 2, 2, 3 содержит 2 моды: 1 и 2.<br>Медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.<br>Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.<br>Медиана ряда 4, 1, 2, 3, 3, 1 равна 2.5. |
| 242 | Основные понятия стереометрии | Стереометрия – раздел геометрии, изучающий свойства тел и фигур, взаимное положение линий, плоскостей, поверхностей и тел в трехмерном пространстве.<br>Основными неопределяемыми понятиями в стереометрии являются: точка, прямая и плоскость.<br>1. точки обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C и т. д.<br>2. прямые – строчными латинскими буквами: a, ƅ, c и т. д. или двумя большими латинскими буквами: AB, BC и т. д.<br>3. плоскости – греческими буквами: α, β, γ и т. д.<br>Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.<br>А1: Через 3 точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.<br>Если взять четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость.<br>А2: Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.<br>В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Это свойство используется при проверке “ровности” линейки.<br>Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то говорят, что<br>они пересекаются.<br>А3: Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.<br>В этом случае говорят, что плоскости пересекаются по прямой. |
| 243 | Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве | Взаимное расположение прямых.<br>Возможны три случая: две прямые параллельны, пересекаются или скрещиваются.<br>Определение. Две прямые называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку.<br>Обозначение: $a \cap b = M$<br>Определение. Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.<br>Обозначение: $a \parallel b$<br>Определение. Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются скрещивающимися.<br>Обозначение: $a \dot{-} b$<br>Теорема (признак скрещивающихся прямых): Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.<br>Существуют три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:<br>– прямая лежит (находится) в плоскости<br>– прямая и плоскость имеют только одну общую точку (прямая и плоскость пересекаются)<br>– прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки (прямая и плоскость параллельны)<br>Взаимное расположение плоскостей.<br>Возможны два случая: две плоскости пересекаются или параллельны.<br>Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек<br>Теорема (признак параллельности плоскостей): Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум |

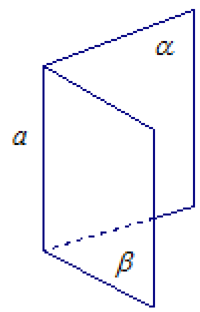
| | | |
|---|---|---|
| | | прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.<br>Определение. Две плоскости называются пересекающимися, если они имеют общую прямую. В этом случае они не имеют других общих точек вне этой прямой.<br>$\alpha \cap \beta = a$ |
| 244 | Углы между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. | Угол между прямыми в пространстве<br>Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.<br>Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.<br>Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.<br>Углы между прямой и плоскостью<br>Если нарисовать две прямые на листе бумаги, мы с легкостью можем измерить угол между ними с помощью транспортира. А если провести прямую к плоскости, как точно измерить угол между ними?<br>И в этом вопросе к нам снова на помощь приходит стереометрия. Но для начала рассмотрим, что такое угол между прямой и плоскостью.<br>Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.<br>Что такое проекция? Предположим, мы проткнем лист бумаги (плоскость) очень длинной иглой.<br>А теперь сделаем этот рисунок ближе к чертежу. Пусть плоскость а пересекает прямая а в точке О.<br>Начнем строить проекцию. Прежде чем разобраться, что такое проекция прямой на плоскость, найдем проекцию точки на плоскость.<br>Возьмем на нашей прямой а точку А и опустим из нее перпендикуляр к плоскости а. Точка, в которой перпендикуляр пересечет плоскость, будет называться проекцией точки на плоскость. На рисунке обозначим ее как $A_1$. |

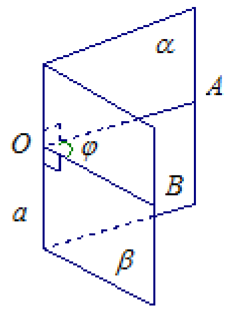
| | | |
|---|---|---|
| | | Проекция точки на плоскость — это основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.<br>Теперь, если мы будем брать каждую точку на прямой и проектировать ее на плоскость а, то получим проекцию этой прямой на плоскость. Но поскольку на прямой бесконечное множество точек, достаточно соединить точки $A_1$ и O, получаем, что $A_1O$ — проекция прямой а на плоскость а.<br>Заметим, что если мы проведем из любой точки прямой проекцию к плоскости, то попадем на прямую $A_1O$.<br>Проекция прямой а на плоскость — это прямая $a_1$, образованная проекциями всех точек прямой а на плоскость.<br>Таким образом можно построить проекции не только прямой, но и любой фигуры.<br>В этом случае мы также берем острый угол, образованный прямой и плоскостью.<br>Алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью:<br>Шаг 1. Построить проекцию прямой на плоскость.<br>Шаг 2. Найти угол между прямой и построенной проекцией.<br>Если прямая параллельна плоскости угол будет равен 0.<br>Проекция прямой на плоскость будет этой же прямой, просто лежащей в плоскости.<br>Когда прямая перпендикулярна плоскости, проекцией прямой на плоскость будет точка пересечения прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью будет равен 90°. |
| 245 | Параллельные прямые в пространстве | Определение: Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.<br>Обозначение параллельных прямых: a \|\| b.<br>$a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{cases}, a \cap b = \emptyset$<br>Теорема 1.<br>Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.<br>Лемма (о двух параллельных прямых, пересекающих плоскость) и ее доказательство |

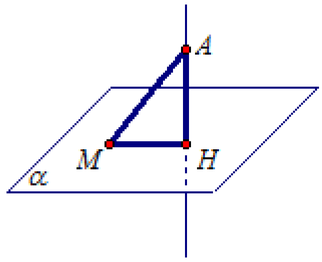
| | | |
|---|---|---|
| | | Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.<br>Теорема 2.<br>Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны. |
| 246 | Параллельность прямой и плоскости | Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.<br>Обозначение: a‖α.<br>Наглядный пример, который дает представление о прямой, параллельной плоскости - это линия пересечения стены и потолка - она параллельна плоскости пола.<br>Теорема (Признак параллельности прямой и плоскости).<br>Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости.<br>**Лемма**: если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.<br>Утверждение 1<br>Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.<br>Утверждение 2<br>Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости. |
| 247 | Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей. | Определение параллельности плоскостей<br>Плоскости называются параллельными, если они не пересекаются и не сходятся в бесконечности.<br>Другими словами, две плоскости считаются параллельными, если они не имеют общих точек или если их общие точки лежат на бесконечно удаленных прямых.<br>Параллельные плоскости можно представить как две параллельные поверхности, которые никогда не пересекаются, даже если их продолжить в бесконечность.<br>Признак параллельности двух плоскостей<br>Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны |

| | | |
|---|---|---|
| | | двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.<br>Свойства параллельных плоскостей<br>Параллельные плоскости обладают несколькими важными свойствами:<br>Расстояние между параллельными плоскостями<br>Расстояние между двумя параллельными плоскостями определяется как расстояние между любыми двумя параллельными прямыми, проведенными из этих плоскостей. Это расстояние является постоянным и не зависит от выбора прямых.<br>Параллельные плоскости имеют одинаковый наклон<br>Если две плоскости параллельны, то их наклоны равны. Наклон плоскости определяется углом, который она образует с горизонтальной плоскостью.<br>Параллельные плоскости имеют одинаковое направление<br>Если две плоскости параллельны, то они имеют одинаковое направление. Направление плоскости определяется вектором нормали, который перпендикулярен плоскости и указывает в определенном направлении.<br>Параллельные плоскости не пересекаются<br>Параллельные плоскости никогда не пересекаются, даже если их продолжить в бесконечность. Это означает, что они не имеют общих точек.<br>Параллельные плоскости не сходятся в бесконечности<br>Параллельные плоскости не сходятся в бесконечности, что означает, что они не приближаются друг к другу при удалении в бесконечность. |
| 248 | Перпендикулярные прямые в пространстве | Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.<br>$a \perp b$<br>Обозначение. .<br><br>Рассмотрим прямые a и b. Прямые могут пересекаться, скрещиваться, быть параллельными. Для того, чтобы |

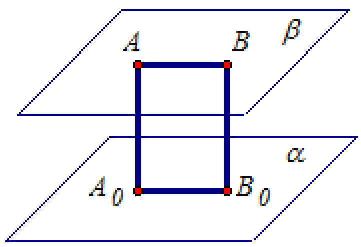
| | | |
|---|---|---|
| | | построить угол между ними нужно выбрать точку и через нее провести прямую $a'$, параллельную прямой a, и прямую $b'$, параллельную прямой b.<br>Прямые $a'$ и $b'$ пересекаются. Угол между ними и есть угол между прямыми a и b. Если угол равен 90°, то прямые a и b перпендикулярны.<br>Лемма<br>Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой. |
| 249 | Перпендикулярность прямой и плоскости | Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей данной плоскости.<br>Признак перпендикулярности прямой и плоскости<br>Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся и лежащим в одной плоскости прямым, также будет перпендикулярна и данной плоскости.<br>Теорема о единственности перпендикуляра к плоскости<br>Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.<br>Теорема<br>Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.<br>Свойства перпендикуляра к плоскости<br>1. Прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой.<br>2. Если плоскости параллельны, то прямая, которая перпендикулярна одной из этих плоскостей, будет перпендикулярна и второй.<br>3. Верно и обратное утверждение: если прямая перпендикулярна различным плоскостям, то данные плоскости параллельны друг другу. |
| 250 | Признак перпендикулярности плоскостей | Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. |

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.<br>Следствие из признака перпендикулярности плоскостей:<br>Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.<br>Следствие 2<br>Плоскость линейного угла перпендикулярна всем элементам соответствующего двугранного угла: ребру и граням.<br>Утверждение<br>Если в одной из перпендикулярных плоскостей проведена прямая перпендикулярно к их линии пересечения, то эта прямая перпендикулярна и к другой плоскости.<br>Прямоугольный параллелепипед – фигура, у которой все боковые ребра перпендикулярны основанию.</td></tr>
<tr><td>251</td><td>Двугранный угол</td><td>Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.<br><br><br>Рассмотрим две полуплоскости α и β. Их общая граница – a. Указанная фигура называется двугранным углом.<br>Терминология<br>Полуплоскости α и β – это грани двугранного угла.<br>Прямая a – это ребро двугранного угла.<br>Измерение двугранного угла<br>На общем ребре a двугранного угла выберем произвольную точку O (рис. 4). В полуплоскости α из точки O восстановим перпендикуляр OA к прямой a. Из той же</td></tr>
</table>

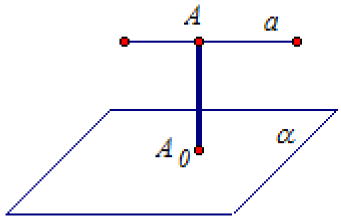
<table>
<tr><td></td><td></td><td>точки O во второй полуплоскости β восставим перпендикуляр OB к ребру a. Получили угол AOB, который называется линейным углом двугранного угла.<br>$\begin{cases} O \in a \\ OA \perp a, OA \subset \alpha \Rightarrow \angle AOB \\ OB \perp a, OB \subset \beta \end{cases}$ – линейный угол двугранного угла.<br><br><br>Свойство линейного угла<br>Плоскость линейного угла перпендикулярна ребру двугранного угла.<br>Виды двугранных углов<br>Двугранный угол измеряется своим линейным углом. Это означает, что, сколько градусов радиан содержится в линейном угле, столько же градусов радиан содержится в его двугранном угле. В соответствии с этим различают следующие виды двугранных углов.<br>- Острый<br>Двугранный угол острый, если его линейный угол острый, т.е. $\varphi \in (0°; 90°)$.<br>- Прямой<br>Двугранный угол прямой, когда его линейный угол равен 90°, $\varphi = 90°$ - Тупой<br>Двугранный угол тупой, когда его линейный угол тупой, т.е. $\varphi \in (90°; 180°)$.</td></tr>
<tr><td>252</td><td>Теорема о трех перпендикулярах</td><td>Расстояние от точки до плоскости<br>Рассмотрим плоскость α и точку A, которая лежит вне этой плоскости (рис. 1). Как известно, из точки A можно провести единственную<br>прямую AH перпендикулярную плоскости α. Проведем прямую AH перпендикулярно плоскости α, $H \in \alpha$.</td></tr>
</table>



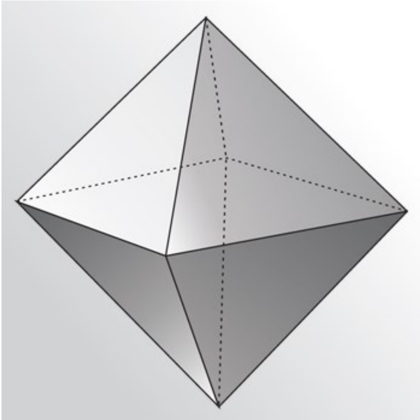

Определение. Отрезок АН называется перпендикуляром, проведенным из точки А к плоскости α. То есть, перпендикуляр – это отрезок.
Определение. Пусть точка М другая произвольная точка плоскости α. Тогда отрезок АМ называется наклонной, а отрезок МН называется проекцией наклонной АМ на плоскость α.
Определение. Расстоянием от точки А до плоскости α называют длину перпендикуляра АН. Обозн.: $\rho(A; \alpha) = AH$.
Заметим, что АН – наименьшее из расстояний между точкой А и любой точкой плоскости. Действительно, в прямоугольном
треугольнике АНМ перпендикуляр (катет АН) короче наклонной (гипотенузы АМ).
Таким образом, чтобы найти расстояние между точкой и плоскостью, нужно найти длину перпендикуляра от точки до плоскости.
Расстояние между параллельными плоскостями
Плоскость α и плоскость β параллельны. На плоскости β выберем произвольную точку А (рис. 2). Из точки А опустим перпендикуляр $AA_0$ на плоскость α. Перпендикуляр $AA_0$ и назовем расстоянием между плоскостями α и β.



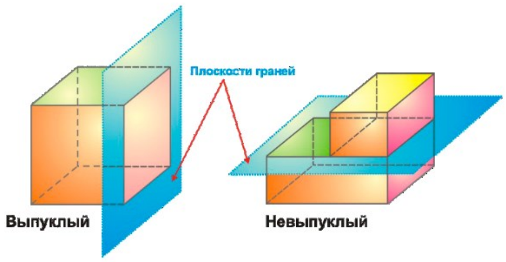

Расстояние между параллельными плоскостями
Заметим, что длина этого перпендикуляра не зависит от того, какую точку мы выбрали.

| | | |
|---|---|---|
| | | Например, выберем другую точку B, опустим перпендикуляр $BB_0$.<br>Прямые $AA_0$ и $BB_0$ перпендикулярны одной и той же плоскости, значит, прямые $AA_0$ и $BB_0$ параллельны. Тогда из свойств параллельных плоскостей отрезки $AA_0$ и $BB_0$ равны.<br>Расстояние между прямой и плоскостью<br>Расстояние между прямой и плоскостью определяется в случаях, когда прямая параллельна плоскости. Тогда все точки прямой а равноудалены от плоскости α. Выберем любую точку А на прямой а, опустим перпендикуляр $AA_0$ на плоскость α. Длина перпендикуляра $AA_0$ и называется расстоянием между прямой а и параллельной ей плоскостью α.<br>Обозн.: $AA_0$ = р(а; α).<br><br>Теорема о трех перпендикулярах<br>Теорема о трех перпендикулярах<br>Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.<br><br>Обратная теорема<br>Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции. |
| 253 | Понятие многогранника. Виды и элементы многогранников | Понятие многогранника<br>К определению понятия многогранника существует два подхода.<br>Многогранник - поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. В данной трактовке многогранник можно называть еще многогранной поверхностью.<br>Вторая трактовка понятия определяет многогранник как геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников.<br>Примеры многогранников<br>Уже известные вам тетраэдр и параллелепипед являются многогранниками. Потому что они |

являются геометрическими телами, ограниченные конечным числом плоских многоугольников. Еще один пример многогранника — октаэдр



Элементы многогранника
Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются
его гранями. Так, у тетраэдра и октаэдра гранями являются треугольники. У тетраэдра 4 грани, отсюда и его название от греч. τετρά-εδρον — четырёхгранник. У октаэдра 8 граней, а от греческого οκτάεδρον от οκτώ «восемь» + έδρα «основание».
Стороны граней называются ребрами, а концы ребер —
вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани,
называется диагональю многогранника.
Виды многогранников
Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. В остальных случаях многогранник
называется невыпуклым.

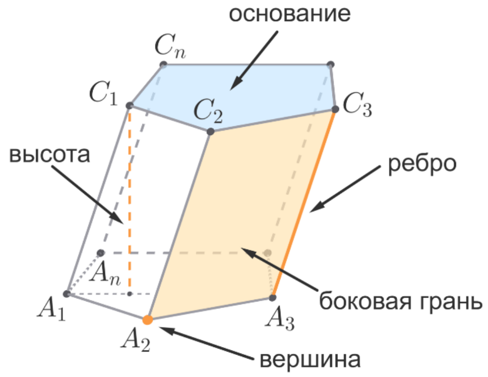
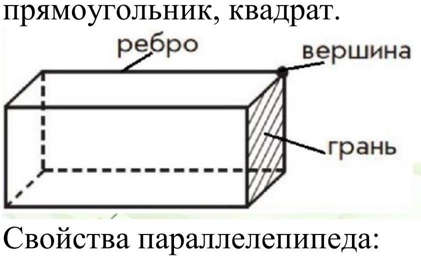



Сумма плоских углов при вершине выпуклого многогранника
Утверждение. В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше $360^0$.
Теорема Эйлера. Пусть В — число вершин выпуклого многогранника, Р — число его

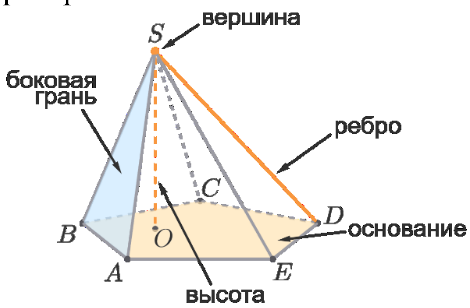
| | | |
|---|---|---|
| | | ребер, а Г — число его граней. Тогда верно равенство В – Р+Г= 2. |
| 254 | Взаимное расположение плоскости и многогранника | Взаимное расположение многогранника и плоскости:<br>Многогранник и плоскость не имеют общих точек.<br>Многогранник и плоскость имеют одну общую точку-вершину многогранника.<br>Многогранник и плоскость имеют общую грань.<br>Многогранник и плоскость имеют общий отрезок-ребро многогранника.<br>Виды сечений:<br>сечение параллельное плоскости основания,<br>диагональное сечение,<br>сечение, параллельное плоскости грани,<br>произвольное сечение. |
| 255 | Понятие тел вращения и их виды | Определение тела вращения<br>Тело вращения – это геометрическая фигура, которая образуется путем вращения некоторой кривой вокруг оси. Кривая, которая вращается, называется образующей, а ось вращения – осью симметрии.<br>Тела вращения могут иметь различные формы, включая цилиндры, конусы, шары и торы. Форма тела вращения зависит от формы образующей и оси вращения.<br>Основное свойство тела вращения заключается в том, что объем и площадь поверхности такого тела можно вычислить с использованием определенных формул, которые зависят от формы образующей и оси вращения.<br>Свойства тел вращения<br>Тела вращения обладают несколькими важными свойствами, которые помогают нам понять их характеристики и использование в геометрии и реальной жизни. Вот некоторые из этих свойств:<br>Ось симметрии<br>Тело вращения всегда имеет ось симметрии, которая является осью вращения. Это означает, что если мы разрежем тело вдоль оси вращения, получим две симметричные половины.<br>Объем<br>Объем тела вращения можно вычислить с использованием интеграла. Формула для вычисления объема зависит от формы образующей и оси вращения. Например, |

| | | |
|---|---|---|
| | | для цилиндра объем можно вычислить по формуле V = πr^2h, где r – радиус основания цилиндра, а h – высота цилиндра.<br>Площадь поверхности<br>Площадь поверхности тела вращения также можно вычислить с использованием интеграла. Формула для вычисления площади поверхности также зависит от формы образующей и оси вращения. Например, для цилиндра площадь поверхности можно вычислить по формуле S = 2πrh + 2πr^2, где r – радиус основания цилиндра, а h – высота цилиндра.<br>Равномерное распределение массы<br>Тела вращения, такие как цилиндры и шары, имеют равномерное распределение массы. Это означает, что масса тела равномерно распределена вокруг оси вращения. Это свойство позволяет использовать тела вращения в различных инженерных и строительных конструкциях.<br>Устойчивость<br>Тела вращения обладают устойчивостью благодаря своей форме и равномерному распределению массы. Это позволяет им легко вращаться вокруг своей оси и сохранять равновесие. Например, велосипедные колеса и шары для гимнастики обладают устойчивостью благодаря своей форме вращения.<br>Это лишь некоторые из свойств тел вращения. Изучение этих свойств помогает нам лучше понять и использовать геометрию и физику в повседневной жизни.<br>Примеры тел вращения<br>Цилиндр<br>Цилиндр – это тело вращения, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. У него две основания, которые являются параллельными и равными круглыми плоскостями, и боковая поверхность, которая представляет собой поверхность, образованную вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Примерами цилиндров являются банки, столбы и трубы.<br>Конус |

| | | |
|---|---|---|
| | | Конус – это тело вращения, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. У него одно основание, которое является круглой плоскостью, и боковая поверхность, которая представляет собой поверхность, образованную вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Примерами конусов являются шапки для мороженого и вершины пирамид.<br>Шар<br>Шар – это тело вращения, образованное вращением полуокружности вокруг ее диаметра. У него одна поверхность, которая представляет собой поверхность, образованную вращением полуокружности вокруг ее диаметра. Примерами шаров являются мячи, шары для гимнастики и планеты. |
| 256 | Призма и ее элементы | Призма – многогранник, составленный из равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов.<br>При этом равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, называются основаниями призмы, а параллелограммы – боковыми гранями призмы. Общие стороны боковых граней будем называть боковыми ребрами призмы.<br>Призму с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ и называют n-угольной призмой.<br>Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы. Обратите внимание, что все высоты призмы равны между собой, так как основания расположены на параллельных плоскостях. Также высота призмы может лежать вне призмы.<br>**Диагональ** — отрезок, соединяющий две точки, являющиеся вершинами, и при этом |

| | | |
|---|---|---|
| | | не лежащие на одной плоскости.  <br>Виды призм<br>Если боковые ребра призмы перпендикулярны основаниям, то призма называется прямой. В противном случае, призма называется наклонной.<br>Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.<br>Прямая призма называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник. В правильной призме все боковые грани – равные прямоугольники. |
| 257 | Параллелепипед и его свойства | Параллелепипедом называется призма, основаниями которой являются параллелограммы. Другими словами, параллелепипед — это многогранник с шестью гранями. Каждая грань — параллелограмм.<br>Основания параллелепипеда, расположены параллельно друг другу в плоскостях. А боковые ребра параллельны друг другу.<br>Основанием параллелепипеда является, в зависимости от его типа: параллелограмм, прямоугольник, квадрат.<br> <br>Свойства параллелепипеда:<br>1) Противолежащие грани параллелепипеда равны и параллельны друг другу.<br>2) Все 4 диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.<br>3) Параллелепипед симметричен относительно середины его диагонали.<br>4) Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Прямой параллелепипед — это параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны основанию.<br>Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм. В прямом параллелепипеде боковые грани — прямоугольники.<br>Свойства прямого параллелепипеда:<br>1) Основания прямого параллелепипеда — одинаковые параллелограммы, лежащие в параллельных плоскостях.<br>2) Боковые ребра прямого параллелепипеда равны, параллельны и перпендикулярны плоскостям оснований.<br>3) Высота прямого параллелепипеда равна длине бокового ребра.<br>4) Противолежащие боковые грани прямого параллелепипеда — равные прямоугольники.<br>5) Диагонали прямого параллелепипеда точкой пересечения делятся пополам.<br>Прямоугольным параллелепипедом называется параллелепипед, у которого основание — прямоугольник, а боковые ребра перпендикулярны основанию.<br>Прямоугольный параллелепипед обладает всеми свойствами произвольного параллелепипеда.<br>1) Прямоугольный параллелепипед содержит 6 граней. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.<br>2) Противолежащие грани параллелепипеда попарно параллельны и равны.<br>3) Все углы прямоугольного параллелепипеда, состоящие из двух граней — 90°.<br>4) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.<br>5) В прямоугольный параллелепипеде четыре диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.<br>6) Любая грань прямоугольного параллелепипеда может быть принята за основание.<br>7) Если все ребра прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед является кубом.<br>8) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов |

| | | |
|---|---|---|
| | | трех его измерений (длины, ширины, высоты). |
| 258 | Пирамида и ее элементы | Пирамида – многогранник, составленный из n-угольника и n треугольников<br>Основание пирамиды – грань пирамиды, являющаяся n-угольником<br>Вершина пирамиды – общая точка всех треугольников, лежащих в боковых гранях.<br>Боковая грань – грань пирамиды, являющаяся треугольником<br>Боковые ребра – общие отрезки боковых граней<br>Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее основание. Высота может лежать и вне пирамиды или быть одним из боковых ребер.<br><br><br>Тип многоугольника в основании определяет название пирамиды. Если в основании треугольник, то это треугольная пирамида. Другое название треугольной пирамиды – тетраэдр, что означает четырехгранник. Если в основании четырехугольник, то пирамида называется четырехугольной.<br>Правильная пирамида – пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину и центр основания пирамиды, является высотой<br>• Все боковые ребра правильной пирамиды равны.<br>• Боковые ребра правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками.<br>Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды |
| 259 | Цилиндр и его элементы | Совокупность параллельных прямых, соединяющих точки на окружностях, называется цилиндрической поверхностью, а сами прямые – образующими цилиндрической поверхности. И теперь мы готовы дать главное определение урока. |

Круговым цилиндром называется тело в пространстве, ограниченное двумя кругами и цилиндрической поверхностью.

Круги – основания цилиндра. Радиус каждого из оснований (они равны) – радиус цилиндра.

Отрезки образующих, заключенные между основаниями, – образующие цилиндра.

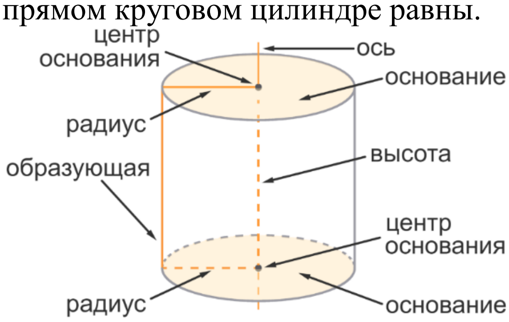
Само слово цилиндр происходит от греческого «килиндрос» – валик, каток. Напомним, цилиндр, который мы рассматриваем, еще называют круговым, так как в основаниях лежат круги. Если рассмотреть другую фигуру (например, эллипс), то получится эллиптический цилиндр.

Если образующие перпендикулярны основаниям цилиндра, такой цилиндр называется прямым.

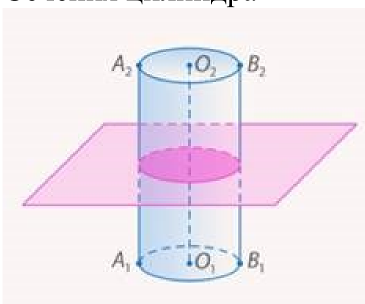
Отрезок, соединяющий центры оснований такого цилиндра, – ось цилиндра.

Вращая прямоугольник вокруг этой оси, можно получить наш цилиндр.

Высотой цилиндра назовем отрезок, соединяющий точки его оснований и перпендикулярный основаниям. Высотой прямого кругового цилиндра является ось (или образующая) – все равно: они в прямом круговом цилиндре равны.

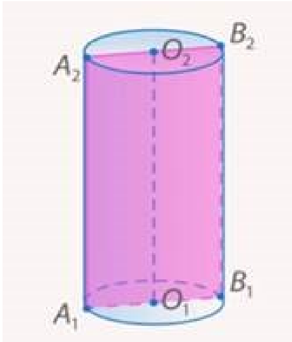
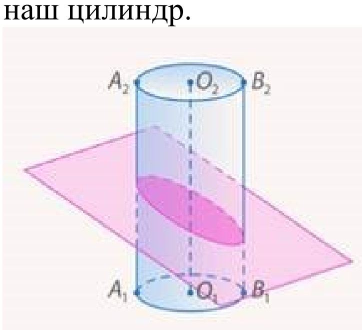


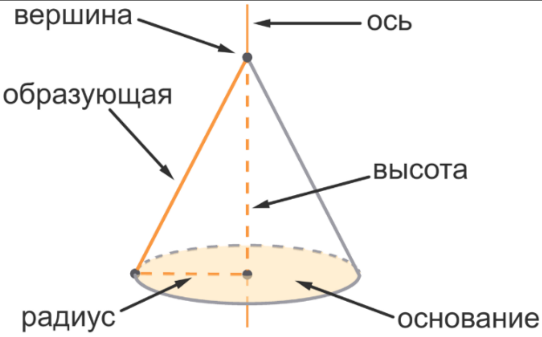

Сечения цилиндра

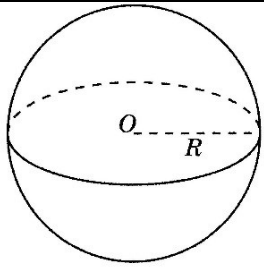
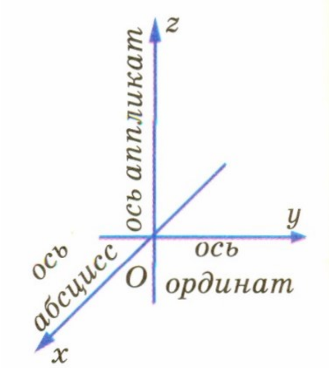



Перпендикулярное сечение цилиндра

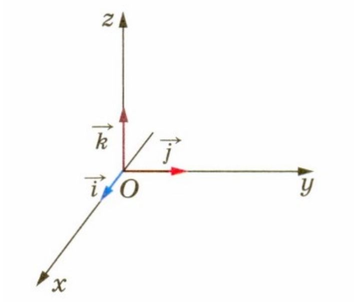
Далее рассмотрим перпендикулярное сечение такого цилиндра (то есть сечение, перпендикулярное оси). Несложно понять, что, где бы мы его ни провели, в сечении

| | | |
|---|---|---|
| | | будет такой же круг, что и в любом из оснований.   Осевое сечение Можно также рассмотреть сечение, проходящее через ось цилиндра. В этом случае оно представляет собой прямоугольник, одна сторона которого равна образующей (или оси), а другая является диаметром основания. Такое сечение называют осевым. Именно вращая такое сечение вокруг оси, мы и получаем наш цилиндр.   Неперпендикулярное сечение Наконец, можно говорить и о неперпендикулярном сечении: ведь ту же палку колбасы можно нарезать не только перпендикулярно, но и под углом. В этом случае сечение получится в форме эллипса, |
| 260 | Конус и его элементы. | Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга,— вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими, конуса. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности. |

| | | |
|---|---|---|
| | | <br>Конус называется прямым, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом. Наглядно прямой круговой конус можно представлять себе как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси. Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.<br>Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса. |
| 261 | Шар и сфера. Уравнение сферы. | Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние – радиусом шара. Граница шара называется сферой. Точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящей через центр шара, называется диаметром. |

| | | |
|---|---|---|
| | | <br>$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где $(x_0,y_0,z_0)$ — координаты центра сферы, R — её радиус |
| 262 | Прямоугольная система координат. Координаты вектора. | Прямоугольная система координат в пространстве.<br>Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана прямоугольная система координат в пространстве.<br><br>Прямые с выбранными на них направлениями называются осями координат, а их общая точка — началом координат. Она обозначается обычно буквой O. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается Oxyz. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox,<br>называются координатными плоскостями и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.<br>Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется положительной полуосью, а другой луч отрицательной полуосью.<br>Координаты вектора<br>Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz. На каждой из положительных полуосей отложим от |

начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через i единичный вектор оси абсцисс, через j— единичный вектор оси ординат и через k единичный вектор оси аппликат.




Векторы i, j, k назовем координатными векторами. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому любой вектор a и можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

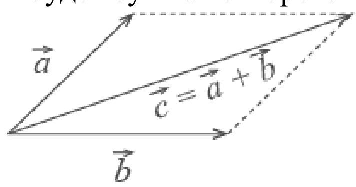
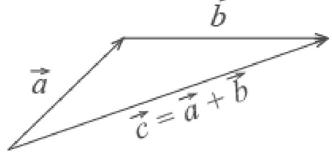
причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

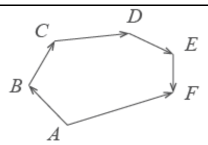
Коэффициенты x, y и z в разложении вектора a по координатным векторам называются координатами вектора a в данной системе координат. Координаты вектора a будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: a {x; y; z}.

Так как нулевой вектор можно представить в виде 0 = oi+ oj+ 0k то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, координаты равных векторов соответственно равны, т. е. если векторы a$\{x_1, y_1, z_1\}$ и b$\{x_2, y_2, z_2)$ равны, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$ (объясните почему).

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если a $\{x_1, y_1, z_1\}$ и b$\{x_2, y_2, z_2\}$ — данные векторы, то вектор a+b имеет координаты $\{x_1+x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$.

| | | |
|---|---|---|
| | | 2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если a $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ и b$\{x_2\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор a— b имеет координаты $\{x_1- x_2,\ y_1 – y_2,\ z_1 - z_2\}$.<br>3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если a {x; y; x} — данный вектор, α — данное число, то вектор αa имеет координаты {αx; αy; αz). |
| 363 | Действия над векторами | Действия над векторами: сложение векторов, вычитание векторов, умножение вектора на число<br>Сложение векторов<br>Для сложения векторов есть два способа.<br>1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов. $\vec{a}$ и $\vec{b}$<br><br><br>Помните басню про лебедя, рака и щуку? Они очень старались, но так и не сдвинули воз с места. Ведь векторная сумма сил, приложенных ими к возу, была равна нулю.<br>2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.<br><br><br>По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего. |




$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

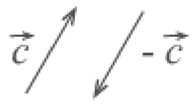
При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;

$\vec{c}\,(x_a + x_b\,,\, y_a + y_b)$.

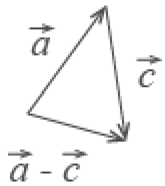
Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.



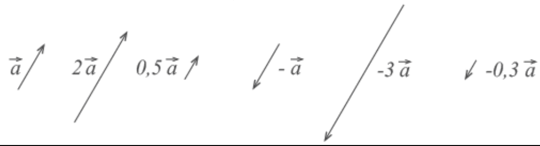
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$

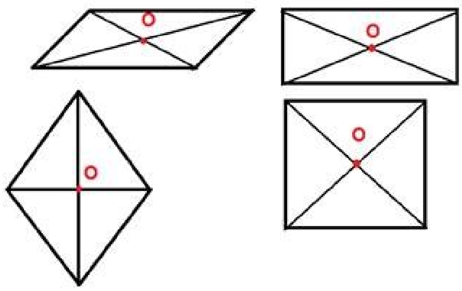


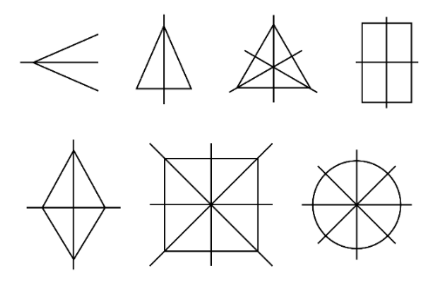
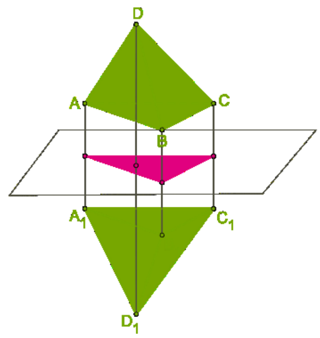
Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



| | | |
|---|---|---|
| | | **Линейные операции над векторами в координатной форме**<br><br>Если<br>$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$<br>Тогда<br>$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$<br>$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1)$ |
| 264 | Скалярное произведение двух векторов | Если векторы не являются сонаправленными, то лучи ОА и ОВ образуют угол АОВ.<br>$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\Rightarrow\alpha=180^0\alpha=90^0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$<br><br>$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\Rightarrow\alpha=0$<br><br>Определение: Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.<br>Скалярное произведение векторов:<br>*Определение:* Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Запишем формулу:<br>$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert cos\alpha$<br><br>Утверждение1. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.<br>Утверждение2. Скалярный квадрат вектора $(\vec{a}\cdot\vec{a})$ равен квадрату его длины. $\vec{a}^2=\lvert\vec{a}\rvert^2.$<br>Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.<br><br>$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$<br>Угол между векторами.<br>Косинус угла между векторами пространства $\bar{v}(v_1;v_2;v_3),\bar{w}(w_1;w_2;w_3)$, заданными в ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$, выражается формулой:<br>$\cos\angle(\bar{v};\bar{w})=\dfrac{v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}}$<br>Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:<br>1) $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.<br>2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).<br>3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распредел ительный закон).<br>4) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$ (сочетательный закон). |
| 265 | Симметрия: центральная, осевая и зеркальная | Симметрия — соразмерность, соответствие, сходность, порядок в расположении частей.<br>ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ<br>Две точки называются симметричными относительно центра симметрии О, если О - середина отрезка, соединяющего эти точки. Точка О считается симметричной самой себе.<br>Геометрическая фигура (или тело) называется симметричной относительно центра О, если для каждой точки этой фигуры может быть найдена другая точка этой же фигуры, так что отрезок, соединяющий эти точки, проходит через центр О и делится в этой точке пополам. Точка О называется центром симметрии.<br><br>СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ (ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ)<br>Одна точка называются симметричной другой относительно прямой, если данная прямая проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки, и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой а считается симметричной самой себе. Прямая называется осью симметрии фигуры если каждая точка фигуры симметрична относительно некоторой точки той же фигуры. |

| | | |
|---|---|---|
| | | <br>ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ<br>Геометрическая фигура называется симметричной относительно плоскости S, если для каждой точки этой фигуры может быть найдена другая точка этой же фигуры, так что отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен плоскости S и делится этой плоскостью пополам. Плоскость S называется плоскостью симметрии.<br><br>Симметричные фигуры, предметы и тела не равны друг другу в узком смысле слова (например, левая перчатка или ботинок не подходит для правой руки или ноги и наоборот). Они называются зеркально равными. |