МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ
Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

ОП.10 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Специальность СПО
09.02.07 Информационные системы и программирование

Пятигорск 2024

Методические указания для практических занятий по дисциплине ОП.10 Численные методы составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

При изучении дисциплины следует соблюдать единство терминологии и обозначения в соответствии с действующими стандартами, Международной системной единицы (СИ).

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать:**

- методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений;
- методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Целью выполнения практических работ является усвоение и закрепление теоретического материала, приобретение практических навыков приближенного решения математических задач с помощью соответствующих численных методов.

При выполнении заданий каждый шаг качественного характера следует подкреплять теоретическими положениями. Предполагается, что общее время на исследования, составление компьютерных программ (если они необходимы), вычисления и подготовку письменного отчета по работе не должно превышать 2 — 4 часов.

Требования к вычислительным средствам минимальны. Ручные расчеты можно выполнять на микрокалькуляторе, для автоматизации вычислений достаточно простейшей ПЭВМ.

В работах, где основные расчеты организуются в программном режиме, по крайней мере, один шаг метода рекомендуется выполнить вручную. Это поможет лучше понять алгоритм вычислений, а затем описать его в виде компьютерной программы. В программах для итерационных процессов целесообразно предусмотреть вывод таблицы, отражающей результаты каждого шага процесса. Она явится хорошим наглядным материалом для анализа вычислений и беседы преподавателя с обучающимся.

В письменном отчете по практической работе необходимо отразить следующее: тему работы и задание с учетом предложенного варианта; теоретические исследования (в краткой форме) и вычисления согласно порядку выполнения работы; программу для расчетов (если она необходима); выводимую программой таблицу (если она предусмотрена); итоговые результаты в требуемой форме.

Практическая работа №1.
Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами.

Цель: сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Краткие теоретические сведения.

Приближенное число заменяет собой число точное, которое чаще всего остается неизвестным.

Верной цифрой называют такую, погрешность которой не превышает половины единицы следующего разряда.

Сомнительная цифра – это цифра, следующая за верной.

Значащими цифрами данного числа называют цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля, и кончая последней, за точность которой еще можно поручиться.

Пример. 0,000<u>15</u> – две значащие цифры, <u>12,150</u> – все цифры значащие.

Округлением числа *a* называется замена его числом *b* с меньшим количеством значащих цифр.

Значащую цифру приближенного числа называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра (в узком смысле) или единицы разряда (в широком смысле).

Правила оценки погрешностей

Пусть *A* и *a* – два «близких» числа. *A* – точное, *a* – приближенное.

Величина $\Delta(a) = |A - a|$ называется абсолютной погрешностью приближенного числа *a* , а величина $\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|}$ относительной погрешностью. a

Числа Δ_a и δ_a такие, что $\Delta_a \ge \Delta a$ и $\delta_a \ge \delta a$ называются оценками или границами абсолютной или относительной погрешностей (предельные погрешности).

Пусть *a* и *b* – два приближенных числа.

Абсолютные погрешности:

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b,$$

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b,$$

$$\Delta(a \cdot b) = a\Delta b + b\Delta a,$$

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}.$$

Относительные погрешности:

$$\delta(a+b) = \frac{\Delta(a+b)}{|a+b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} = \frac{|a|}{|a+b|}\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{|b|}{|a+b|}\frac{\Delta b}{|b|} = \frac{|a|}{|a+b|}\delta a + \frac{|b|}{|a+b|}\delta b,$$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|} = \frac{|a|}{|a-b|}\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{|b|}{|a-b|}\frac{\Delta b}{|b|} = \frac{|a|}{|a-b|}\delta a + \frac{|b|}{|a-b|}\delta b,$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta a + \delta b,$$

$$\delta(a^k) = k\delta a.$$

Для приближенного числа, полученного округлением, *предельная абсолютная погрешность* Δ_a равна половине единицы последнего разряда числа.

Пример. $a = 0{,}817$, $\Delta_a = 0{,}0005$

Задания на практическую работу

Задача 1.

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки: а) в узком смысле;

б) в широком смысле.

Определить абсолютную погрешность результата.

3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:

а) в узком смысле;

б) в широком смысле.

1. 1) $\sqrt{44} = 6{,}63$; $\frac{19}{41} = 0{,}463$. 2) а) $22{,}553(\pm 0{,}016)$; б) $2{,}8546$; $\delta = 0{,}3\%$. 3) а) 0,2387; б) 42,884.	**5.** 1) $\sqrt{83} = 9{,}11$; $\frac{6}{11} = 0{,}545$. 2) а) $21{,}68563$; $\delta = 0{,}3\%$; б) $3{,}7834(\pm 0{,}0041)$. 3) а) 41,72; б) 0,678.
2. 1) $\sqrt{10{,}5} = 3{,}24$; $\frac{4}{17} = 0{,}235$. 2) а) $34{,}834$; $\delta = 0{,}1\%$; б) $0{,}5748(\pm 0{,}0034)$. 3) а) 11,445; б) 2,043.	**6.** 1) $\sqrt{44} = 6{,}63$; $\frac{21}{29} = 0{,}723$. 2) а) $0{,}3567$; $\delta = 0{,}042\%$; б) $13{,}6253(\pm 0{,}0021)$. 3) а) 18,357; б) 2,16.
3. 1) $\sqrt{4{,}8} = 2{,}19$; $\frac{6}{7} = 0{,}857$. 2) а) $5{,}435(\pm 0{,}0028)$; б) $10{,}8441$; $\delta = 0{,}5\%$. 3) а) 8,345; б) 0,288.	**7.** 1) $\sqrt{31} = 5{,}56$; $\frac{13}{17} = 0{,}764$. 2) а) $3{,}6878(\pm 0{,}0013)$; б) $15{,}873$; $\delta = 0{,}42\%$. 3) а) 14,862; б) 8,73.
4. 1) $\sqrt{22} = 4{,}69$; $\frac{2}{21} = 0{,}095$. 2) а) $2{,}4543(\pm 0{,}0032)$; б) $24{,}5643$; $\delta = 0{,}1\%$. 3) а) 0,374; б) 4,348.	**8.** 1) $\sqrt{30} = 5{,}48$; $\frac{7}{15} = 0{,}467$. 2) а) $17{,}2834$; $\delta = 0{,}3\%$; б) $6{,}4257(\pm 0{,}0024)$. 3) а) 3,751; б) 0,537.

9. 1) $\sqrt{18}=4,24$; $\frac{17}{11}=1,545$. 2) а) $24,3618$; $\delta=0,22\%$; б) $0,8647(\pm0,0013)$. 3) а) 2,4516; б) 0,863.	**15.** 1) $\sqrt{6,8}=2,61$; $\frac{12}{11}=1,091$. 2) а) $8,24163$; $\delta=0,2\%$; б) $0,12356(\pm0,00036)$. 3) а) 12,45; б) 3,4453.
10. 1) $\sqrt{14}=3,74$; $\frac{49}{13}=3,77$. 2) а) $83,736$; $\delta=0,085\%$; б) $5,6483(\pm0,0017)$. 3) а) 5,6432; б) 0,00858.	**16.** 1) $\sqrt{9,8}=3,13$; $\frac{19}{41}=0,463$. 2) а) $23,574$; $\delta=0,2\%$; б) $8,3445(\pm0,0022)$. 3) а) 20,43; б) 0,576.
11. 1) $\sqrt{12}=3,46$; $\frac{19}{12}=1,58$. 2) а) $0,096835$; $\delta=0,32\%$; б) $4,88445(\pm0,00052)$. 3) а) 12,688; б) 4,636.	**17.** 1) $\sqrt{52}=7,21$; $\frac{17}{19}=0,895$. 2) а) $13,537(\pm0,0026)$; б) $7,521$; $\delta=0,12\%$. 3) а) 0,5746; б) 236,58.

12. 1) $\sqrt{22}=4,69$; $\frac{18}{7}=2,57$. 2) а) $46,453$; $\delta=0,15\%$; б) $0,39642(\pm0,00022)$. 3) а) 15,644; б) 6,125.	**18.** 1) $\sqrt{27}=5,19$; $\frac{50}{19}=2,63$. 2) а) $1,784(\pm0,0063)$; б) $0,85637$; $\delta=0,21\%$. 3) а) 0,5746; б) 236,58.
13. 1) $\sqrt{11}=3,32$; $\frac{16}{7}=2,28$. 2) а) $24,3872$; $\delta=0,34\%$; б) $0,75244(\pm0,00013)$. 3) а) 16,383; б) 5,734.	**19.** 1) $\sqrt{13}=3,60$; $\frac{7}{22}=0,318$. 2) а) $27,1548(\pm0,0016)$; б) $0,3945$; $\delta=0,16\%$. 3) а) 0,3648; б) 21,7.
14. 1) $\sqrt{10}=3,16$; $\frac{15}{7}=2,14$. 2) а) $2,3485(\pm0,0042)$; б) $0,34484$; $\delta=0,4\%$. 3) а) 2,3445; б) 0,745.	**20.** 1) $\sqrt{18}=4,24$; $\frac{17}{11}=1,545$. 2) а) $0,8647(\pm0,0013)$; б) 243618; $\delta=0,22\%$. 3) а) 2,4516; б) 0,863.

Задача 2.

1. Вычислить и определить погрешности результата.
2. Вычислить и определить погрешности результата.
3. Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.

Вариант 1	080116	080601
1) $X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$		
a	$3,85(\pm 0,01)$	$4,16(\pm 0,005)$
b	$2,0435(\pm 0,0004)$	$12,163(\pm 0,002)$
c	$962,6(\pm 0,1)$	$55,18(\pm 0,01)$
2) $X = \left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$		
a	$4,3(\pm 0,05)$	$5,2(\pm 0,04)$
b	$17,21(\pm 0,02)$	$15,32(\pm 0,01)$
c	$8,2(\pm 0,05)$	$7,5(\pm 0,05)$
m	$12,417(\pm 0,003)$	$21,823(\pm 0,002)$
n	$8,37(\pm 0,005)$	$7,56(\pm 0,003)$
3) $X = \frac{h^2}{18} : \frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$		
a	1,141	2,234
b	3,156	4,518
h	1,14	4,48

Вариант 2	080116	080601
1) $X = \frac{\sqrt{a}b}{c}$		
a	$228,6(\pm 0,06)$	$315,6(\pm 0,05)$
b	$86,4(\pm 0,02)$	$72,5(\pm 0,03)$
c	$68,7(\pm 0,05)$	$53,8(\pm 0,04)$
2) $X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$		
a	$13,5(\pm 0,02)$	$18,5(\pm 0,03)$
b	$3,7(\pm 0,02)$	$5,6(\pm 0,02)$
m	$4,22(\pm 0,004)$	$3,42(\pm 0,003)$
c	$34,5(\pm 0,02)$	$26,3(\pm 0,01)$
d	$23,725(\pm 0,005)$	$14,782(\pm 0,006)$
3) $X = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12}$		
a	8,53	6,44
b	6,271	5,323
h	12,48	15,44

Вариант 3	080116	080601
1) $X = \frac{\sqrt{ab}}{c}$		
a	$3,845(\pm 0,004)$	$4,632(\pm 0,003)$
b	$16,2(\pm 0,05)$	$23,3(\pm 0,04)$
c	$10,8(\pm 0,1)$	$11,3(\pm 0,06)$
2) $X = \frac{m(a+b)}{(c-d)^2}$		
a	$2,754(\pm 0,001)$	$3,236(\pm 0,002)$
b	$11,7(\pm 0,04)$	$15,8(\pm 0,03)$
m	$0,56(\pm 0,005)$	$0,64(\pm 0,004)$
c	$10,536(\pm 0,002)$	$12,415(\pm 0,003)$
d	$6,32(\pm 0,008)$	$7,18(\pm 0,006)$
3) $X = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5}$		
a	0,562	0,834
b	0,2518	0,3523
h	0,68	0,74

Вариант 4	080116	080601
1) $X = \frac{a^2 b}{c}$		
a	$3,456(\pm 0,002)$	$1,245(\pm 0,001)$
b	$0,642(\pm 0,0005)$	$0,121(\pm 0,0002)$
c	$7,12(\pm 0,004)$	$2,34(\pm 0,003)$
2) $X = \frac{m(a+b)}{\left(\sqrt{c}-d\right)}$		
a	$23,16(\pm 0,02)$	$17,41(\pm 0,01)$
b	$8,23(\pm 0,005)$	$1,27(\pm 0,002)$
c	$145,5(\pm 0,08)$	$342,3(\pm 0,04)$
d	$28,6(\pm 0,1)$	$11,7(\pm 0,1)$
m	$0,28(\pm 0,006)$	$0,71(\pm 0,003)$
3) $X = \frac{h}{3} \cdot S\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right)$		
a	8,51	5,71
A	23,42	32,17
S	45,8	51,7
h	3,81	2,42

Вариант 5	080116	080601
1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$		
a	$0,643(\pm 0,0005)$	$0,142(\pm 0,0003)$
b	$2,17(\pm 0,002)$	$1,71(\pm 0,002)$
c	$5,843(\pm 0,001)$	$3,727(\pm 0,001)$
2) $X = \dfrac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}$		
a	$27,16(\pm 0,006)$	$15,71(\pm 0,005)$
b	$5,03(\pm 0,01)$	$3,28(\pm 0,02)$
c	$3,6(\pm 0,02)$	$7,2(\pm 0,01)$
m	$12,375(\pm 0,004)$	$13,752(\pm 0,001)$
n	$86,2(\pm 0,05)$	$33,7(\pm 0,03)$
3) $X = \dfrac{h^2}{18} \cdot \left(\dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2} \right)$		
h	21,1	17,8
a	22,08	32,47
b	31,11	11,42

Вариант 6	080116	080601
1) $X = \dfrac{ab}{c^2}$		
a	$0,3575(\pm 0,0002)$	$0,1756(\pm 0,0001)$
b	$2,63(\pm 0,01)$	$3,71(\pm 0,03)$
c	$0,854(\pm 0,0005)$	$0,285(\pm 0,0002)$
2) $X = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$		
a	$16,342(\pm 0,001)$	$12,751(\pm 0,001)$
b	$2,5(\pm 0,03)$	$3,7(\pm 0,02)$
c	$38,17(\pm 0,002)$	$23,76(\pm 0,003)$
d	$9,14(\pm 0,005)$	$8,12(\pm 0,004)$
m	$3,6(\pm 0,04)$	$1,7(\pm 0,01)$

3) $X=\frac{1}{6}\pi h\left(3a^2+h^2\right)$		
a	2,456	7,751
h	1,76	3,35
Вариант 7	**080116**	**080601**
1) $X=\frac{\pi^2}{4}Dd^2$		
π	3,14	3,14
D	$54(\pm 0,5)$	$72(\pm 0,3)$
d	$8,235(\pm 0,001)$	$3,274(\pm 0,002)$
2) $X=\frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-d^4}$		
D	$36,5(\pm 0,1)$	$41,4(\pm 0,2)$
d	$26,35(\pm 0,005)$	$31,75(\pm 0,003)$
π	3,14	3,14
3) $X=c^2\left(1+\frac{2\beta}{c}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)$		
c	2,435	7,834
β	0,15	0,21
γ	1,27	3,71

Вариант 8	**080116**	**080601**
1) $X=\frac{m^2n}{c^3}$		
m	$1,6531(\pm 0,0003)$	$2,348(\pm 0,002)$
n	$3,78(\pm 0,002)$	$4,37(\pm 0,004)$
c	$0,158(\pm 0,0005)$	$0,235(\pm 0,0003)$
2) $X=\frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$		
a	$9,542(\pm 0,001)$	$8,357(\pm 0,003)$
b	$3,128(\pm 0,002)$	$2,48(\pm 0,004)$
m	$2,8(\pm 0,03)$	$3,17(\pm 0,01)$
c	$0,172(\pm 0,001)$	$1,315(\pm 0,0004)$
d	$5,4(\pm 0,02)$	$2,4(\pm 0,02)$
3) $X=\frac{1}{15}\pi h\left(2D^2+Dd+0.75d^2\right)$		
h	84,2	76
D	28,3	17,2
d	42,08	9,344

Вариант 9	080116	080601
1) $X=\sqrt{\frac{cd}{b}}$		
c	$0,7568(\pm 0,0002)$	$0,6384(\pm 0,0002)$
d	$21,7(\pm 0,02)$	$32,7(\pm 0,04)$
b	$2,65(\pm 0,01)$	$4,88(\pm 0,03)$
2) $X=\frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$		
a	$10,82(\pm 0,03)$	$9,37(\pm 0,004)$
b	$2,786(\pm 0,0006)$	$3,108(\pm 0,0003)$
m	$0,28(\pm 0,006)$	$0,46(\pm 0,002)$
n	$14,7(\pm 0,06)$	$15,2(\pm 0,04)$
3) $X=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$		
h	46,3	10,5
D	29,72	34,18
d	37,654	27,327

Вариант 10	080116	080601
1) $X=\frac{Qe^3}{48E}$		
Q	$54,8(\pm 0,02)$	$38,5(\pm 0,01)$
e	$2,45(\pm 0,01)$	$3,35(\pm 0,02)$
E	$0,863(\pm 0,004)$	$0,734(\pm 0,001)$
2) $X=\frac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$		
n	$2,0435(\pm 0,0001)$	$4,5681(\pm 0,0001)$
x	$4,2(\pm 0,05)$	$6,3(\pm 0,02)$
y	$0,82(\pm 0,01)$	$0,42(\pm 0,03)$
3) $X=\frac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\frac{\beta(ab-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$		
α	5,27	7,31
β	0,0562	0,0761
a	158,35	234,36
b	61,21	81,26

Примеры выполнения заданий.

Задача 1.

1. *Определить, какое равенство точнее* $9/11=0,818$ *или* $\sqrt{18}=4,24$ *?*

Решение. Находим значения данных выражений с бóльшим числом десятичных знаков: $a_1=9/11=0,8181818...$, $a_2=\sqrt{18}=4,2426...$. Затем вычисляем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\alpha_{a_1}=|0,81818-0,818|\le 0,00019,\quad \alpha_{a_2}=|4,2426-4,24|\le 0,0027.$$

Предельные относительные погрешности составляют

$$\delta_{a_1}=\frac{\alpha_{a_1}}{a_1}=\frac{0,00019}{0,818}=0,00024=0,024\%;$$

$$\delta_{a_2}=\frac{\alpha_{a_2}}{a_1}=\frac{0,0027}{4,24}=0,00064=0,064\%.$$

Так как $\delta_{a_1}<\delta_{a_2}$, то равенство $9/11=0,818$ является более точным.

2. Округлить сомнительные цифры числа $72,353(\pm 0,026)$*, оставив верные знаки в узком смысле.*

Решение. Пусть $72,353(\pm 0,026) = a$. Согласно условию, погрешность $\alpha_a = 0,026 < 0,05$; это означает, что в числе 72,353 верными в узком смысле являются цифры 7, 2, 3. По правилам округления найдем приближенное значение числа, сохранив десятые доли:

$$a_1 = 72,4;\ \alpha_{a_1} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0,026 + 0,047 = 0,073.$$

Полученная погрешность больше $0,05$; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до двух:

$$a_2 = 72;\ \alpha_{a_2} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0,026 + 0,353 = 0,379.$$

Так как $\alpha_{a_2} < 0,5$, то обе оставшиеся цифры верны в узком смысле.

Округлить сомнительные цифры числа $2,3544;\ \delta = 0,2\%$*, оставив верные знаки в широком смысле.*

Решение. Пусть $a = 2,3544$; $\delta_a = 0,2\%$; тогда $\alpha_a = a \cdot \delta_a = 0,00471$. В данном числе верными в широком смысле являются три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти три цифры:

$$a_1 = 2,35;\ \alpha_{a_1} = 0,0044 + 0,00471 = 0,00911 < 0,01.$$

Значит, в округленном числе $2,35$ все три цифры верны в широком смысле.

3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа 0,4357, если они имеют только верные цифры в узком смысле.

Решение. Так как все четыре цифры числа $a = 0,4357$ верны в узком смысле, то абсолютная погрешность $\alpha_a = 0,00005$, а относительная погрешность

$$\delta_a = 1/\left(2 \cdot 4 \cdot 10^3\right) = 0,000125 = 0,0125\%.$$

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа 12,384, если они имеют только верные цифры в широком смысле.

Решение. Так как все пять цифр числа $a = 12,384$ верны в широком смысле, то $\alpha_a = 0,001$, $\delta_a = 1/10^4 = 0,0001 = 0,01\%$.

Задача 2.

1. Вычислить и определить погрешности результата.

$X = \dfrac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, *где* $m = 28,3(\pm 0,02)$, $n = 7,45(\pm 0,01)$, $k = 0,678(\pm 0,003)$.

Решение. Находим $m^2 = 800,9$; $n^3 = 413,5$; $\sqrt{k} = 0,8234$;

$$X = \frac{800,9 \cdot 413,5}{0,8234} = 402200 = 4,022 \cdot 10^5.$$

Далее имеем

$$\delta_m = 0,02/28,3 = 0,00071,\ \delta_n = 0,01/7,45 = 0,00135,\ \delta_k = 0,003/0,678 = 0,00443,$$

откуда

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0,5\delta_k = 0,00142 + 0,00405 + 0,00222 = 0,00769 = 0,77\%,$$

$$\alpha_X = 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,0077 = 3,1 \cdot 10^3.$$

2. *Вычислить и определить погрешности результата.*

$N = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, *где* $n = 3,0567(\pm 0,0001)$, $m = 5,72(\pm 0,02)$.

Решение. Имеем

$$n-1 = 2,0567(\pm 0,0001), \quad m+n = 3,057(\pm 0,0004) + 5,72(\pm 0,02) = 8,777(\pm 0,0204),$$

$$m-n = 5,72(\pm 0,02) - 3,057(\pm 0,0004) = 2,663(\pm 0,0204).$$

$$N = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{2,663^2} = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{7,092} = 2,545 \approx 2,55;$$

$$\delta_N = \frac{0,0001}{2,0567} + \frac{0,0204}{8,777} + 2 \cdot \frac{0,0204}{2,663} = 0,000049 + 0,00233 + 2 \cdot 0,00766 =$$
$$= 0,00238 + 0,1532 = 0,0177 = 1,77\%$$

$$\alpha_N = 2,55 \cdot 0,0177 = 0,046.$$

3. *Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.*

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right), \text{ где } h = 11,8, \; R = 23,67.$$

Решение. Находим

$$V = 3,142 \cdot 11,8^2 \cdot (23,67 - 3,933) = 3,142 \cdot 11,8^2 \cdot 19,737 =$$
$$= 3,142 \cdot 139,2 \cdot 19,737 = 437,37 \cdot 19,737 = 8630 \approx 8,63 \cdot 10^3$$

Контрольные вопросы.

1. Как классифицируют виды погрешностей?
2. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
3. В чем разница между абсолютной погрешностью и относительной?
4. Как находится погрешность округленного числа?
5. Как определить количество верных цифр по абсолютной погрешности.
6. Что значит цифра, верная в строгом, широком смыслах?
7. Каким числом является результат действий с приближенными числами?
8. Почему при приближенных вычислениях погрешность может накапливаться?

Практическая работа № 2.
Решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Отделение корней.

Цель: научиться отделять корни алгебраического уравнения графическим и аналитическим способом.

Краткие теоретические сведения.

Число x = x* называется корнем уравнения *f(x) = 0,* если *f(x*) = 0.*

Если функция *f(x)* определена и непрерывна на [*a, b*] и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на [*a, b*] существует хотя бы один корень.

При определении приближенных значений корней уравнения необходимо решить две задачи:

1. *Отделить корень уравнения* — значит найти такой интервал, внутри которого находится один и только один корень данного уравнения.
2. *Уточнить корень* с наперед заданным числом верных знаков.

Корень уравнения геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, касания или другой общей точки графика функции *y = f(x)* и оси *OX* (рис.1.1).

Отделить корень уравнения –значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения.

Отделение корней

Графический метод отделения корней.

Отделение корней уравнения (1) можно выполнить графически, построив график функции *y = f(x),* по которому можно судить о том, в каких промежутках находится точка пересечения его с осью ОХ. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение *f(x)=0*в виде:

$\mathbf{f_1(x) = f_2(x)}$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ строились по возможности проще. Корень уравнения представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Таким способом можно найти, например, корни уравнения $x^3 + px + q = 0;$ это будут точки пересечения кубической параболы $y = x^3$ и прямой $y = - px – q$.

Решение.

Имеем $f(x) = x^3 + x^2 -11$, $f'(x)=3x^2+2x$ $f''(x)= 6x+2$. В указанном промежутке $f''(x)>0$, поэтому за первое приближение в способе касательных берем $x_0=2$, так как $f(2)=1>0$;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} = 1{,}9375 \approx 1{,}94$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} = 1 - \frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)} = 1 + \frac{9}{10} = 1{,}9$$

Искомый корень принадлежит промежутку *(1,9; 1,94).*

$f(1{,}9)= -0{,}531$, $f(1{,}94) =0{,}065$, $f'(1{,}94) = 15{,}172$.

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x11)} = 1{,}94 - \frac{0{,}065}{15{,}172} = 1{,}936$$

Следовательно,

$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12} - x_{11})f(x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})} = 1{,}9 - \frac{0{,}04\cdot(-0{,}531)}{0{,}065+0{,}531} = 1{,}936.$$

Так как значенияx_{21} и x_{22} , вычисленные с точностью до 0,001, совпали, то приближенным значением корня будет *1,936.*

Задания для выполнения.

Задание 1. Отделить корни алгебраического уравнения графическим и аналитическим способом.

1. $x^3 + 3x + 1 = 0$
2. $x^4 + x - 1 = 0$
3. $x^3 - 3x^2+ 2{,}5 = 0$
4. $4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$
5. $x^4 + x^3 – 2x^2+ 3x = 0$
6. $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$
7. $x^3 + 1{,}7x^2 + 1{,}7 = 0$
8. $x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$
9. $x^3 – 2x^2 +7 = 0$
10. $2x^3 + 2x^2 \quad x \quad 3 = 0$

Задание 2. Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом.

1. $x + \sin x – 1= 0$
2. $tg\, x = x$
3. $5^x – 6x – 3 = 0$
4. $x\, tgx = 1$
5. $2x^2 – 0{,}5^x – 3 = 0$
6. $2\sqrt{x} + x^2 = 3$
7. $\sqrt{x} = 1{,}5x – 3$
8. $e^x = (1+x)^2$
9. $x^2 – \sin x= 0$
10. $tg\, x= -x^3$

Задание 3. Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом.

1. $5\sqrt{x} = x^2$
2. $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x – 1{,}2 = 0$
3. II
4. $x \lg (x+1) – 1 = 0$
5. VII
6. $\sin(x + \pi) = x^2$
7. III
8. $x – 2 \sin x = 0$
9. VIII
10. $\sin 3x = x$
11. IV
12. $x^2 – \cos x = 0$
13. IX
14. $\sqrt{x} + \sin x = 0$
15. V
16. $2^x = \sqrt{x+1}$
17. X
18. $(x-1)^2 = \sin x$

Контрольные вопросы.

1. Что такое интервал изоляции корней?
2. Какому условию должна удовлетворять функция на интервале, если нам известно, что корень уравнения находится на этом интервале?

Практическая работа № 3.
Решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Методы уточнения корней: метод половинного деления (бисекции), метод простой итерации.

Цель: закрепить навыки решения уравнений приближенными методами.

Краткие теоретические сведения.

Метод половинного деления (бисекции).

В основе метода лежит деление отрезка пополам, на котором определен корень уравнения. Итерационная формула имеет вид:

$$x^{(k)} = \frac{a+b}{2}$$

где

x – искомый корень уравнения,

k – индекс приближенного значения корня,

a и *b* – отрезок [*a; b*] на котором определен корень уравнения.

Найдем середину отрезка [*a, b*]: $c = (a+b)/2$. Корень остался на одной из частей: [*a; c*] или [*c;b*]. Если $f(a)\cdot f(c) < 0$**,** то корень попал на отрезок $[a;c]$, тогда деление отрезка можно повторить, приняв в качестве нового правого конца точку *c* (то есть на следующей итерации положить $b = c$). В противном случае корень попал на половину [*c, b*], и необходимо изменить значение левого конца отрезка, при следующей итерации положив $a = c$. Поскольку корень всегда заключен внутри отрезка, итерационный процесс можно останавливать, если длина отрезка станет меньше заданной точности: $|b - a| < \varepsilon$.

Пример. Методом бисекции найти решение нелинейного уравнения на отрезке [*a, b*] с точностью ε = 10^{-2}. Выбрав полученное решение в качестве начального приближения, найти решение уравнения методом простой итерации с точностью ε = 10^{-4}. Для метода простой итерации обосновать сходимость и оценить достаточное для достижения заданной точности число итераций.

Уравнение	[a, b]
$e^x = 1/\sqrt{x}$	[0.3,0.8]

Проделаем первый шаг описанного алгоритма:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0;\;\; a = 0.3; b = 0.8$$

$$c = \frac{0.3 + 0.8}{2} = 0.55$$

$$f(a) = e^{0.3} - \frac{1}{\sqrt{0.3}} \approx -0.47588;$$

$$f(c) = e^{0.55} - \frac{1}{\sqrt{0.55}} \approx 0.38485;$$

$$f(b) = e^{0.8} - \frac{1}{\sqrt{0.8}} \approx 1.10751$$

f(a)•f(c) < 0, таким образом, корень попадает в отрезок [*a;c*] = [0.3;0.55], и в следующей итерации нужно положить *b* = *c* = 0.55. Остальные расчеты представим в таблице:

a_i	$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$	$\lvert b_i - a_i\rvert$
0,3	0,55	0,8	-0,47588	0,38485	1,10751	0,5
0,3	0,425	0,55	-0,47588	-0,00434	0,38485	0,25
0,425	0,4875	0,55	-0,00434	0,19601	0,38485	0,125
0,425	0,45625	0,4875	-0,00434	0,09768	0,19601	0,0625
0,425	0,44063	0,45625	-0,00434	0,04719	0,09768	0,03125
0,425	0,43281	0,44063	-0,00434	0,02156	0,04719	0,01563
0,425	0,42891	0,43281	-0,00434	0,00865	0,02156	0,00781

Как видно из таблицы, после седьмой итерации становится известно, что корень заданного уравнения принадлежит отрезку [0.425; 0.43281], длина которого 0.00781, что меньше ε = 0,01**.** Таким образом, с заданной точностью в качестве искомого корня можно принять середину найденного отрезка:

$$\mathbf{x_0} = 0.42891$$

Метод простой итерации.

Запишем исходное уравнение *f(x)=0* в виде *x=φ(x).* Пусть имеется начальное приближение к корню x = x_0. Подставим его в правую часть уравнения *x=φ(x)* и получим новое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$, затем аналогичным образом получим $x_2 = \varphi(x_1)$. и т.д., $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Считаем, что корень найден, если $|x_{к+1} - x_к| < ε$**,** где ε **-** заданная погрешность.

Необходимо установить, при каких условиях описанный итерационный процесс будет сходиться к корню уравнения x*. Пусть в итерационной формуле $x_{к+1} = \varphi(x_к)$

$$x_k = x^* + \varepsilon_k; x_{k+1} = x^* + \varepsilon_{k+1}$$

где ε **-** отклонения *k-го* и *k+1*-го приближений от корня.

Если процесс уточнения осуществляется вблизи корня x***,** то функцию *φ*(x) можно приближенно представить двумя членами ряда Тейлора**.** Тогда формула $x_{к+1} = \varphi$ $x_к$**)** примет вид:

$$x^* + \varepsilon_{k+1} \cong \varphi(x^*) + \varepsilon_k\varphi'(x^*)$$

Так как x* **-** корень уравнения, то x * = ^(x *) и, следовательно,

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k\varphi'(x^*)$$

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся, необходимо выполнение условия $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, что возможно лишь когда | *φ*'(x)| < 1.

Рассмотрим пример нахождения корня для предыдущего примера методом простой итерации. Преобразуем данное уравнение:

$$e^x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$x = e^{-2x}$$

Итак, $\varphi(x) = e^{-2x}$; $\varphi'(x) = -2e^{-2x}$.

С помощью метода бисекции ранее было определено, что начальное приближение x_0 = 0.42891 принадлежит отрезку [0.425; 0.43281].

$$0.425 < x < 0.43281$$

$$-2 \cdot 0.43281 < -2x < -2 \cdot 0.425$$

Так как функция $-2e^{-2x}$ монотонно возрастает, то

$$e^{-2\cdot 0.43281} < e^{-2x} < e^{-2\cdot 0.425}$$

$$-2e^{-2\cdot 0.425} < -2e^{-2x} < -2e^{-2\cdot 0.43281}$$

$$-0.85483 < -2e^{-2x} < -0.84158$$

Таким образом,

$$|\varphi'(x)| = |-2e^{-2x}| < 0.85483 < 1$$

Это означает, что итерационный процесс $x_{k+1} = e^{-2x_k}$ сходится к корню x*. Так как $|\varphi'(x)| < 0.85483$, можно сказать, что итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q = 0.85483. Исходя из этого, оценим количество итераций, требующихся для достижения заданной точности. Найдем, начиная с какого значения *n* будет выполняться:

$$|b_{n+1} - b_n| = |x_0 \cdot q^{n+1} - x_0 \cdot q^n| < \varepsilon$$

$$|x_0 \cdot q^n (q-1)| < \varepsilon$$

$$q^n < \frac{\varepsilon}{x_0(1-q)}$$

$$n > \log_q \frac{\varepsilon}{x_0(1-q)} = \log_{0.85483} \frac{10^{-4}}{0.42891(1-0.85483)} \approx 41$$

Следует заметить, что эта оценка как правило завышена и на практике используется редко.

Проведем вычисления, на каждой итерации вычисляя $|x_{k+1} - x_k|$:

k	x_k	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	
0	0,42891	0,424089		
1	0,424089	0,428195	0,0041058	$> \varepsilon$
2	0,428195	0,424693	0,0035018	$> \varepsilon$
3	0,424693	0,427678	0,0029848	$> \varepsilon$
4	0,427678	0,425132	0,0025455	$> \varepsilon$
5	0,425132	0,427302	0,0021698	$> \varepsilon$
6	0,427302	0,425452	0,0018503	$> \varepsilon$
7	0,425452	0,427029	0,0015774	$> \varepsilon$
8	0,427029	0,425684	0,0013450	$> \varepsilon$
9	0,425684	0,426831	0,0011467	$> \varepsilon$
10	0,426831	0,425853	0,0009777	$> \varepsilon$
11	0,425853	0,426686	0,0008336	$> \varepsilon$
12	0,426686	0,425976	0,0007108	$> \varepsilon$
13	0,425976	0,426582	0,0006060	$> \varepsilon$
14	0,426582	0,426065	0,0005167	$> \varepsilon$
15	0,426065	0,426506	0,0004405	$> \varepsilon$
16	0,426506	0,42613	0,0003756	$> \varepsilon$
17	0,42613	0,42645	0,0003202	$> \varepsilon$
18	0,42645	0,426177	0,0002730	$> \varepsilon$
19	0,426177	0,42641	0,0002328	$> \varepsilon$
20	0,42641	0,426211	0,0001985	$> \varepsilon$
21	0,426211	0,426381	0,0001692	$> \varepsilon$
22	0,426381	0,426236	0,0001443	$> \varepsilon$
23	0,426236	0,426359	0,0001230	$> \varepsilon$
24	0,426359	0,426254	0,0001049	$> \varepsilon$
25	0,426254	0,426344	0,0000894	$< \varepsilon$

Итак, после 25 итераций получили 0.426344. С точностью до **10^{-4},** искомый корень: x = 0.42634. Видно, что в действительности потребовалось существенно меньше итераций, чем в априорной оценке.

Практическая часть.

Задание 1. Отделить корни алгебраического уравнения графическим или аналитическим способом и уточнить корни методом половинного деления до 0,01.

1. $x^3 + 3x + 1 = 0$
2. $x^4 + x \quad 1 = 0$
3. $x^3 - 3x^2 + 2,5 = 0$
4. $4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$
5. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x = 0$
6. $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$
7. $x^3 + 1,7x^2 + 1,7 = 0$
8. $x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$
9. $x^3 - 2x^2 + 7 = 0$
10. $2x^3 + 2x^2 \quad x \quad 3 = 0$

Задание 2. Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом и уточнить их методом итераций до 0,001.

1. $-0,5x = \cos 2x$
2. $x = 2\sin 2x$
3. $-x/3 = \sin 3x$
4. $-x = 5\sin 3x$
5. $-0,3x = \cos x$

6. *cos3x = 2x*
7. *0,4x = cos(0,5x)*
8. *4sin(1,5x)-2,8x=0*
9. *-x = 4cosx*
10. *cos(2,5x)-4x=0*

Контрольные вопросы

1. Если итерационный процесс сходится, то какую точку можно брать в качестве нулевого приближения?
2. Можно ли графическим методом найти точку нулевого приближения?
3. Для какого типа уравнений применим метод половинного деления?

Практическая работа № 4.
Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.
Метод хорд. Метод касательных.

Цель: закрепить навыки решения уравнений приближенными методами.

Краткие теоретические сведения.

Метод хорд является одним из распространенных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений. В литературе он также встречается под названиями «метод ложного положения» (regula falsi), «метод линейного интерполирования» и «метод пропорциональных частей».

Пусть дано уравнение $f(x)=0$, где *f (x)*— непрерывная функция, имеющая в интервале (*a*, *b*) производные первого и второго порядков. Корень считается отделенным и находится на отрезке [*a*, *b*], т.е. *f* (a) • *f* (*b*)< 0.

Идея метода хорд состоит в том, что на достаточно малом промежутке [*a*, *b*] дуга кривой $y=f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой. В качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью *Ox.*

Рассмотрим метод хорд на конкретных примерах.

Пример 1. Методом хорд уточнить до ε = 0,001 меньший корень уравнения $x^3+3x^2-3=0$. Корни уравнения отделены и меньший корень содержится на отрезке [-3, -2].

Проверяем выполнение условия (6):

$$\left|f'(x)\right|=\left|3x^2+6x\right|;$$

$$M=\max_{[-3,-2]}\left|f'(x)\right|=|27-18|=9;$$

$$m=\min_{[-3,-2]}\left|f'(x)\right|=|12-12|=0; \quad M\le 2m.$$

Возьмем середину отрезка [-3, -2], т. е. точку *x* = -2,5, и выберем интервал [-3;-2,5]. Снова проверяем выполнение условия:

$$M=\max_{[-3,-2,5]}\left|f'(x)\right|=9; \quad m=\min_{[-3,-2,5]}\left|f'(x)\right|=3,75; \quad M\le 2m.$$

Возьмем теперь середину отрезка [-3; -2,5] – точку x = -2,75; имеем *f*(-2,75) < 0, *f*(-2,5) > 0, *f* (-3) < 0; отрезок [-2,75; -2,5]. Находим

$$M=\max_{[-2,75;-2,5]}\left|f'(x)\right|=6,189; \quad m=\min_{[-2,75;-2,5]}\left|f'(x)\right|=3,75,$$

т. е. в этом случае выполнено условие $M < 2m$.

Таким образом, для оценки погрешности корня, лежащего на отрезке [-2,75; -2,5], можно пользоваться формулой: $|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, т. е. процесс последовательного приближения к корню следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$.

Определим знак второй производной и установим, по какой формуле надо производить вычисления. Находим $f''(x) = 6x + 6$; на отрезке [-2,75;-2,5] имеют место неравенства $f(-2,75) < 0$, $f(-2,5) \cdot f''(x) > 0$. Значит, за неподвижный конец отрезка нужно принять $x = -2,75$. Тогда вычисления следует вести по формулам:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}; \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

где $a = -2,75$ и $f(a) = -1,111$. Если последнее выражение представить в виде:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

то сразу же можно будет получать разность между двумя последовательными приближениями и производить проверку на окончание вычислений, т. е. проверять выполнение неравенства $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$.

Все вычисления удобно производить в следующей таблице:

n	x_n	x_n^3	x_n^2	$3x_n^2$	$f(x_n) = x_n^3 + 3x_n^2 - 3$	$x_n - a$	
0	-2,5	-15,625	6,250	18,75	0,125	0,25	-0,025
1	-2,525	-16,098	6,3756	19,1268	0,0288	0,225	-0,006
2	-2,531	-16,213	6,4060	19,2180	0,0050	0,219	-0,0009
3	-2,5319						

Из таблицы видно, что $|x_3 - x_2| < 0,001$; поэтому, округляя до тысячных долей, получим $\xi = -2,532$. ▲

Пример 2. Методом хорд уточнить до $\varepsilon = 0,001$ корень уравнения $x - \sin x = 0,25$, заключенный на отрезке $[0, \pi/2]$.

Запишем уравнение в виде $x - \sin x - 0,25 = 0$ и определим $f'(x) = 1 - \cos x$. Составим вспомогательную таблицу, в первых двух столбцах которой указаны начало и конец выбранного интервала изоляции корня.

a	b	Знаки $f(a)$	Знаки $f(b)$	M	m	Выполняется ли условие $M<2m$	$\frac{a+b}{2}$	Знак $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0,00	1,57	-	+	1,00	0	нет	0,785	-
0,785	1,57	-	+	1,00	0,2925	нет	1,178	+
0,785	1,178	-	+	0,6172	0,2925	нет	0,982	-
0,982	1,178	-	+	0,6172	0,4446	да		

Из последней строки таблицы видно, что на отрезке [0,982; 1,178] условие $M \le 2m$

выполняется. Следовательно, при оценке погрешности приближенного значения корня по методу хорд. можно воспользоваться неравенством $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Корень уравнения $x - \sin x - 0,25 = 0$ находится на отрезке 10,982: 1,178]. Определим знак второй производной внутри отрезка:

$$f'(x) = 1 - \cos x; \quad f''(x) = \sin x > 0$$.

Если возвратиться к прежним обозначениям, то a = 0,982; b = 1,178. Знак второй производной совпадает со знаком функции в точке b. Следовательно, этот конец отрезка является неподвижным, а все приближения к корню лежат со стороны конца a. Для вычисления корня пользуемся формулами:

$$f(x_1) = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

где b = 1,178; $f(b)$ = 0,00416. Составим следующую таблицу:

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n) = x_n$ $-\sin x_n - 0,25$	$b - x_n$	$-\dfrac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
0	0.982	-0.73161	-0.09961	0.196	0.189
1	1.171	-9392114	-0.00014	0.007	0.0002
2	1.171 2				

Итак, x = 1,171 с точностью до ε = 0,001. ▲

Метод Ньютона (метод касательных). Другим итерационным методом является метод Ньютона (метод касательных).

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке [a, b], причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки на всем отрезке [a, b].

Геометрически смысл метода Ньютона состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к этой кривой (отсюда и второе название этого метода – метод касательных.

Пример 3. Методом касательных уточнить до $\varepsilon = 0,001$ корень уравнения $x^3 + 4x - 3 = 0$, заключенный на отрезке $[0,1]$.

Выбираем *начальное приближение* x_0 корня. Обычно это один из концов отрезка. Начальное приближение должно удовлетворять следующему условию:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Найдём первую и вторую производные функции:

$f(x) = x^3 + 4x - 3$.

$f'(x) = (x^3 + 4x - 3)' = 3x^2 + 4$

$f''(x) = (3x^2 + 4)' = 6x$

и проверим левый конец отрезка:

$f(0) = 0^3 + 4 \cdot 0 - 3 = -3, \quad f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

$f(0) \cdot f''(0) = -3 \cdot 0 = 0$

Таким образом, ноль «не подошёл».

Проверяем правый конец отрезка:

$f(1) = 1^3 + 4 \cdot 1 - 3 = 2, \quad f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$

$f(1) \cdot f''(1) = 2 \cdot 6 = 12 > 0$ – условие выполняется.

В качестве начального приближения выбираем $x_0 = 1$.

Каждое последующее приближение корня x_{n+1} рассчитывается на основании предшествующих данных с помощью следующей *рекуррентной* формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Процесс завершается при выполнении условия $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < \varepsilon$, где ε – заранее заданная точность вычислений. В результате за приближённое значение корня принимается «энное» приближение: $x^* \approx x_n$.

$$f(x_0) = f(1) = 2$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 = 7$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{2}{7} \approx 0{,}28571$$

(округление обычно проводят до 5-6 знаков после запятой)

Поскольку полученное значение больше $\varepsilon = 0{,}001$, то переходим к 1-му приближению корня:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1 - 0{,}28571 = 0{,}71429$$

Вычисляем:

$$f(x_1) \approx f(0{,}71429) = (0{,}71429)^3 + 4 \cdot 0{,}71429 - 3 \approx 0{,}22157$$

$$f'(x_1) \approx f'(0{,}71429) = 3 \cdot (0{,}71429)^2 + 4 \approx 5{,}53061$$

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx \frac{0{,}22157}{5{,}53061} \approx 0{,}04006 > \varepsilon$$

, поэтому возникает потребность перейти ко 2-му приближению:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0{,}71429 - 0{,}04006 = 0{,}67422$$

Повторяем последовательность действий:

$$f(x_2) \approx f(0{,}67422) = (0{,}67422)^3 + 4 \cdot 0{,}67422 - 3 \approx 0{,}00338$$

$$f'(x_2) \approx f'(0{,}67422) = 3 \cdot (0{,}67422)^2 + 4 \approx 5{,}36373$$

$$\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx \frac{0{,}00338}{5{,}36373} \approx 0{,}00063 < \varepsilon$$

, таким образом, итерации закончены, и в качестве приближённого значения корня следует взять 2-е приближение, которое в соответствии с заданной точностью нужно округлить до одной тысячной:

$$x^* \approx x_2 \approx 0{,}67422 \approx 0{,}674$$

На практике результаты вычислений удобно заносить в таблицу, при этом, чтобы несколько сократить запись, дробь часто обозначают через $h_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	2	7	0,28571
1	0,71429	0,22157	5,53061	0,04006
2	0,67422	0,00338	5,36373	0,00063

Ответ: $x^* \approx 0{,}674$ с точностью до ε = 0,001.

Практическая часть.

Задание: уточнить с точностью $\varepsilon = 0,001$ корень заданного уравнения методом хорд и методом касательных.

Вариант	Вид алгебраического уравнения
1	$x^3+2x-7=0$
2	$x^3-12x+7=0$
3	$x^3-2x-5=0$
4	$x^3+3x+5=0$
5	$x^3=8x+4=0$
6	$x^3+x-3,5=0$
7	$x^3+3x-7=0$
8	$x^3+7x-3=0$
9	$x^3-4x-2=0$
10	$x^3+9x+1=0$
11	$x^3-6x-2,5=0$
12	$x^3+5x-8=0$
13	$x^3-8x-3=0$
14	$x^3+10x-7=0$
15	$x^3-x+8=0$
16	$x^3+4x+6=0$
17	$x^3-9x-1=0$
18	$x^3+6x+3=0$
19	$x^3-15x+6=0$
20	$x^3-3x+7=0$
21	$x^3+14x-10=0$
22	$x^3-7x+3=0$
23	$x^3+13x+2=0$
24	$x^3-10x+1=0$
25	$x^3+15x+1=0$
26	$x^3-3x+4=0$
27	$x^3+11x-13=0$
28	$x^3-14x+1=0$
29	$x^3-5x-9=0$
30	$x^3-13x-2=0$
31	$x^3-7x+2=0$
32	$x^3+8x-8=0$
33	$x^3-5x-3=0$
34	$x^3+4x+8=0$
35	$x^3-2x+5=0$
36	$x^3+6x-3=0$
37	$x^3+12x+7=0$
38	$x^3+x-9=0$
39	$x^3-4x+5=0$
40	$x^3-13x-4=0$

Контрольные вопросы.

1. Опишите свойства алгебраических и трансцендентных уравнений.
2. Для чего производится процедура отделения корней и предварительное исследование уравнений.
3. Приведите примеры известных вам способов исследования нелинейных уравнений.
4. Что понимают под сходимостью итерационной процедуры?
5. Поясните, что такое скорость сходимости и как она связана с эффективностью метода.
6. Опишите метод хорд. Назовите его достоинства и недостатки.
7. Опишите метод касательных. Укажите его достоинства и недостатки.

Практическая работа № 5.
Решение алгебраических и трансцендентных уравнений.
Комбинированный метод хорд и касательных.

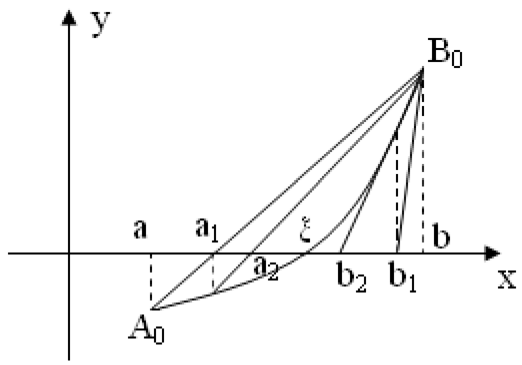
Цель: закрепить навыки решения уравнений приближенными методами.

Краткие теоретические сведения.

Методы хорд и касательных дают приближения корня с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом, тогда уточнение корня происходит быстрее.

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, корень отделен на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим случай, когда $f'(x)\, f''(x)>0$.



В этом случае метод хорд дает приближенное значение корня с недостатком (конец b неподвижен), а метод касательных – с избытком (за начальное приближение берем точку b).

Тогда вычисления следует проводить по формулам:

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Теперь корень ξ заключен в интервале $[a_1, b_1]$. Применяя к этому отрезку комбинированный метод, получим:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1-a_1)}{f(b_1)-f(a)}$$

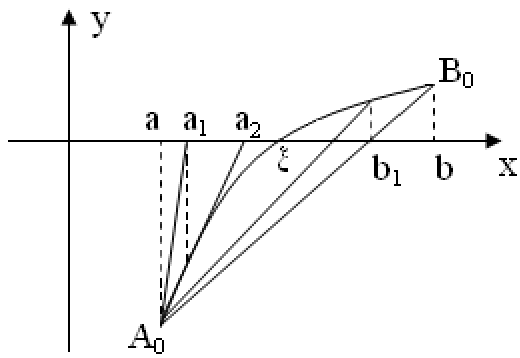
$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

и т.д.

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

Если же $f'(x)\, f''(x)<0$, то, рассуждая аналогично, получим следующие формулы для уточнения корня уравнения:



$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Вычислительный процесс прекращается, как только выполнится условие:

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon$$

Пример. Решить уравнение $x^3 + 8x + 10 = 0$ методом хорд и касательных с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, если известно, что корень уравнения $\bar{x} \in [-2;-1]$.

Решение.

1. Вычислим значения функции $f(x) = x^3 + 8x + 10$ на концах отрезка: $f(a) = f(-2) = (-2)^3 + 8(-2) + 10 = -14 < 0$, $f(b) = f(-1) = (-1)^3 + 8(-1) + 10 = 1 > 0$.
2. Проверим выполнение условия: $f(a) \cdot f(b) = -14 \cdot 1 < 0$ - условие выполняется.
3. Найдём производные: $f'(x) = (x^3 + 8x + 10)' = 3x^2 + 8$ и $f''(x) = (3x^2 + 8)' = 6x$.
4. На отрезке $[-2;-1]$ производные $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$, т.е. сохраняют знак, следовательно, условие выполняется.
5. Выберем значение x_0 для метода касательных. Т.к. $f''(x) < 0$ и , то $x_0 = -2$.
6. Найдём приближения корня:

а) по методу касательных:
$$x_{11} = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2{,}0000 - \frac{-14{,}0000}{3(-2{,}0000)^2 + 8} = -1{,}3000$$

б) по методу хорд:
$$x_{12} = -2 - \frac{(-1-(-2)) \cdot f(-2)}{f(-1) - f(-2)} = -2{,}0000 - \frac{1{,}0000 \cdot (-14{,}0000)}{1{,}0000 - (-14{,}0000)} \approx -1{,}0667.$$

7. Найдём первое приближение корня: $\xi_1 = \dfrac{-1{,}3000 + (-1{,}0667)}{2} \approx -1{,}1834$.
8. Проверим выполнение условия: $|\xi_1 - x_{11}| = |-1{,}1834 - (-1{,}3000)| = 0{,}1166 > 0{,}001$ - условие не выполняется, значит нужно продолжить вычисления.
9. Отрезок изоляции корня имеет вид: $\bar{x} \in [-1{,}3000;-1{,}0667]$.
10. Продолжим уточнение корня по схеме. Для этого найдём значения функции на концах суженного отрезка:

$f(-1{,}3000) = -2{,}1970 - 10{,}4000 + 10 = -2{,}5970$, $\quad f(-1{,}0667) = -1{,}2137 - 8{,}5336 + 10 = 0{,}2527$.

11. Проверим условие: $f(-1{,}3000) \cdot f(-1{,}0667) < 0$ - выполняется, значит можно продолжить применение метода.

12. Так как $f''(x) < 0$ и $f(-1{,}3000) < 0$ на отрезке $[-1{,}3000; -1{,}0667]$, то для метода касательных: $x_{11} = -1{,}3000$.

13. Вычислим значение производной: $f'(x_{11}) = f(-1{,}3000) = 13{,}0700$.

14. Найдём новые значения концов отрезка изоляции:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})} = -1{,}3000 - \frac{-2{,}5970}{13{,}0700} \approx -1{,}1013,$$

$$x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12} - x_{11}) \cdot f(x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})} = -1{,}3000 - \frac{(-1{,}0667 + 1{,}3000) \cdot (-2{,}5970)}{0{,}2527 + 2{,}5970} \approx -1{,}0874.$$

15. Найдём второе приближение корня: $\xi_2 = \frac{x_{21} + x_{22}}{2} = \frac{-1{,}1013 - 1{,}0874}{2} \approx -1{,}0944$.

16. Проверим выполнение условия: $|\xi_2 - x_{21}| = |-1{,}0944 + 1{,}1013| = 0{,}0069 > 0{,}001$ - неравенство неверное, значит необходимо продолжить вычисления.

17. Отрезок изоляции корня имеет вид: $[-1{,}1013; -1{,}0874]$.

18. Вычислим значения функции:

$f(-1{,}1013) = -0{,}1461$, $f(-1{,}0874) = 0{,}0150$.

19. Условие - выполняется.

20. Так как $f''(x) < 0$ и $f(-1{,}1013) < 0$ на $[-1{,}1013; -1{,}0874]$, то для метода касательных $x_{21} = -1{,}1013$.

21. Вычислим производную: $f'(x_{21}) = f'(-1{,}1013) = 11{,}6386$.

22. Вычислим: $x_{31} = x_{21} - \frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})} = -1{,}1013 - \frac{-0{,}1461}{11{,}6386} \approx -1{,}0887$,

$$x_{32} = x_{21} - \frac{(x_{22} - x_{21}) \cdot f(x_{21})}{f(x_{22}) - f(x_{21})} = -1{,}1013 - \frac{(-1{,}0874 + 1{,}1013) \cdot (-0{,}1461)}{0{,}0150 + 0{,}1461} \approx -1{,}0887.$$

23. Найдём третье приближение корня: $\xi_3 = \frac{x_{31} + x_{32}}{2} = \frac{-1{,}0887 - 1{,}0887}{2} = -1{,}0887$.

24. Проверим выполнение неравенства: $|\xi_3 - x_{31}| = |-1{,}0887 + 1{,}0887| = 0{,}0000 < 0{,}001$ - условие выполняется, значит, цель достигнута.

25. Следовательно, $\bar{x} = -1{,}0887$ или $\bar{x} \approx -1{,}088$ - приближённое значение корня с точностью до 0,001.

Ответ: $\bar{x} \approx -1{,}088$.

Практическая часть.

Задание: уточнить с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ корень заданного уравнения комбинированным методом хорд и касательных.

Вариант	Вид алгебраического уравнения
1	$x^3 + 2x - 7 = 0$
2	$x^3 - 12x + 7 = 0$
3	$x^3 - 2x - 5 = 0$
4	$x^3 + 3x + 5 = 0$
5	$x^3 = 8x + 4 = 0$
6	$x^3 + x - 3{,}5 = 0$

7	$x^3+3x-7=0$	
8	$x^3+7x-3=0$	
9	$x^3-4x-2=0$	
10	$x^3+9x+1=0$	
11	$x^3-6x-2{,}5=0$	
12	$x^3+5x-8=0$	
13	$x^3-8x-3=0$	
14	$x^3+10x-7=0$	
15	$x^3-x+8=0$	
16	$x^3+4x+6=0$	
17	$x^3-9x-1=0$	
18	$x^3+6x+3=0$	
19	$x^3-15x+6=0$	
20	$x^3-3x+7=0$	
21	$x^3+14x-10=0$	
22	$x^3-7x+3=0$	
23	$x^3+13x+2=0$	
24	$x^3-10x+1=0$	
25	$x^3+15x+1=0$	
26	$x^3-3x+4=0$	
27	$x^3+11x-13=0$	
28	$x^3-14x+1=0$	
29	$x^3-5x-9=0$	
30	$x^3-13x-2=0$	
31	$x^3-7x+2=0$	
32	$x^3+8x-8=0$	
33	$x^3-5x-3=0$	
34	$x^3+4x+8=0$	
35	$x^3-2x+5=0$	
36	$x^3+6x-3=0$	
37	$x^3+12x+7=0$	
38	$x^3+x-9=0$	
39	$x^3-4x+5=0$	
40	$x^3-13x-4=0$	

Контрольные вопросы.

1. Какое уравнение называется трансцендентным?
2. Какими способами можно определить интервалы корня?
3. В чем суть алгоритма решения уравнений по методу хорд и касательных?
4. Как учитывается абсолютная погрешность при вычислении корня?
5. Контроль каких вводимых данных необходимо осуществлять при решении трансцендентных уравнений?

Практическая работа № 6.
Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Метод Гаусса.

Цель: расширить представление о методах решения СЛАУ и отработать алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса.

Краткие теоретические сведения.

Метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в том, что при помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась *трапециевидной или близкой к трапециевидной:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Пример 1. Найти решение системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Решение.

Запишем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножая первую строку на –2, –3, 1 и складывая ее соответственно со второй, третьей, четвертой строками, получаем новую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножим вторую строку полученной матрицы на –3 и 2 и сложим соответственно с третьей и четвертой строками. Матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножим третью строку этой матрицы на ½ и сложим ее с четвертой строкой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Разделим четвертую строку на –2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

На этом прямой ход метода Гаусса заканчивается. Полученной матрице соответствует система линейных уравнений, эквивалентная заданной:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ 4x_3 + 12x_4 &= -4, \\ x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Система уравнений привелась к треугольному виду. Последовательно решая уравнения системы снизу вверх, получаем решение: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = -1$.

Произведем обратный ход.

Умножим четвертое уравнение матрицы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

на –12, 4 и –1 и сложим соответственно с третьей, второй и первой строками. Матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Разделим третье уравнение на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножим третье уравнение на 3 и –2 и сложим со вторым и третьим уравнениями соответственно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Разделим второе уравнение на –2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножим второе уравнение на –3 и сложим с первым:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

В итоге получаем решение системы, аналогичное полученному выше.

Выполненные действия удобно записать в таком виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Практическая часть.

Найти решение СЛАУ методом Гаусса.

1	$x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 8,$ $3x_1 + 2x_2 = 6,$ $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2.$	2	$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6,$ $4x_1 + 2x_3 = 2.$	3	$4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12,$ $4x_2 - x_3 = 0.$
4	$2x_1 - x_2 = 7,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7,$ $-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4.$	5	$x_1 + 6x_2 - x_3 = 7,$ $3x_1 - 2x_2 = -7,$ $3x_2 - 2x_3 = -2.$	6	$2x_1 + 3x_3 = 1,$ $x_1 - 4x_2 + x_3 = 2,$ $-3x_1 + x_2 - 3x_3 = -6.$
7	$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,$ $-x_2 + 4x_3 = 7,$ $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6.$	8	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5,$ $2x_1 - x_2 - x_3 = 1,$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6.$	9	$3x_1 + x_2 - 5x_3 = 16,$ $2x_2 - 4x_3 = 8,$ $x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -6.$
10	$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6,$ $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20,$ $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6.$	11	$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1,$ $2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4,$ $4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2.$	12	$x_1 + 5x_2 + x_3 = 0,$ $2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4,$ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8.$
13	$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$ $8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2,$ $4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3.$	14	$x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3,$ $3x_1 + x_2 + x_3 = 5,$ $3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9.$	15	$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31,$ $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20,$ $3x_1 - x_2 + x_3 = 9.$

Контрольные вопросы.

1. Что значит решить СЛАУ?
2. Какая система называется совместной?
3. Что такое разрешающее уравнение в методе Гаусса?
4. Как решают систему линейных уравнений методом Гаусса?

Практическая работа №7.
Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Метод простых итераций (метод Якоби).

Цель: расширить представление о приближенных методах решения СЛАУ и отработать алгоритм решения СЛАУ методом простых итераций (методом Якоби).

Краткие теоретические сведения.

Итерационные методы – это численные и приближенные методы решения СЛАУ. Их суть: нахождение по приближённому значению величины следующего приближения, которое является более точным. Методы позволяют получить значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов (итерационный процесс). Характер сходимости и сам факт сходимости метода зависит от выбора начального приближения корня x_0.

Рассмотрим систему Ax=b.

Чтобы применить итерационный метод, необходимо привести систему к эквивалентному виду x=Bx+d. Затем выбираем начальное приближение к решению СЛАУ $x^{(0)}=(x_1^0,\ x_2^0,...x_m^0)$ и находим последовательность приближений к корню.

Для сходимости итерационного процесса является достаточным заданное условие $||B||<1$. Окончание итерации зависит от того, какой итерационный метод применили.

Метод Якоби – один из наиболее простых методов приведения системы матрицы к виду, удобному для итерации: из 1-го уравнения матрицы выражаем неизвестное x_1, из 2-го выражаем неизвестное x_2 и т.д.

Результатом служит матрица B, в которой на главной диагонали находятся нулевые элементы, а все остальные вычисляются по формуле:

$$b_{ij}= -a_{ij}/a_{ii}, \qquad i,j=1,\ 2,\ ...,\ n$$

Элементы (компоненты) вектора d вычисляются по следующей формуле:

$$d_i = b_i/a_{ii}, \qquad i=1,\ 2,...,\ n$$

Расчетная формула метода простой итерации:

$$x^{(n+1)} =Bx^{(x)}+d$$

Матричная запись (координатная):

$$x_i^{(n+1)} =b_{i1}x^n{}_1 + b_{i2}x^{(n)}{}_2 +... + b$$

Критерий окончания в методе Якоби:

$$||x^{(n+1)} - x^{(n)}||< \varepsilon_1,\ \text{где}\ \varepsilon_1=(1-||B||/\ ||B||)\varepsilon$$

В случае если B<1/2, то можно применить более простой критерий окончания итераций:

$$||x^{(n+1)}-x^{(n)}||< \varepsilon$$

Пример. Решить СЛАУ методом Якоби:
$10x_1 + x_2 - x_3 = 11,$
$x_1 + 10x_2 - x_3 = 10,$
$-x_1 + x_2 + 10x_3 = 10.$
Решить систему с показателем точности $\varepsilon = 10^{-3}$.
Решение.
Приводим СЛАУ к удобному виду для итерации:
$x_1 = -0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 1{,}1$
$x_2 = -0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 + 1$
$x_3 = 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + 1$

Выбираем начальное приближение, например: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — вектор правой части.

В таком случае, первая итерация имеет следующий внешний вид:

$x_1^{(1)} = -0{,}1\times1 + 0{,}1\times1 + 1{,}1 = 1{,}1$

$x_2^{(1)} = -0{,}1\times1{,}1 + 0{,}1 + 1 = 0{,}99$

$x_3^{(1)} = 0{,}1\times1{,}1 - 0{,}1\times1 + 1 = 1{,}01$

Аналогичным способом вычисляются приближения к решению:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}102 \\ 0{,}991 \\ 1{,}011 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}102 \\ 0{,}9909 \\ 1{,}0111 \end{pmatrix} \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1{,}10202 \\ 0{,}99091 \\ 1{,}01111 \end{pmatrix}$$

Находим норму матрицы B, для этого используем норму $||B||_\infty$.

Поскольку сумма модулей элементов в каждой строке равна 0,2, то $||B||_\infty = 0{,}2<1/2$, поэтому можно вычислить критерий окончания итерации:

$$||x^{(n+1)}-x^{(n)}|| < \varepsilon$$

Далее вычисляем нормы разности векторов:

$||x^{(3)} - x^{(2)}||_\infty = 0{,}002$, $\qquad ||x^{(4)} - x^{(3)}||_\infty = 0{,}00002$.

Поскольку $||x^{(4)} - x^{(3)}||_\infty < \varepsilon$, то можно считать, что мы достигли заданной точности на 4-ой итерации.

Ответ: $x_1 = 1{,}102$; $x_2 = 0{,}991$; $x_3 = 1{,}011$.

Практическая часть.

Найти решение СЛАУ методом Якоби.

1	$x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 8,$ $3x_1 + 2x_2 = 6,$ $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2.$	2	$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6,$ $4x_1 + 2x_3 = 2.$	3	$4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12,$ $4x_2 - x_3 = 0.$
4	$2x_1 - x_2 = 7,$ $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7,$ $-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4.$	5	$x_1 + 6x_2 - x_3 = 7,$ $3x_1 - 2x_2 = -7,$ $3x_2 - 2x_3 = -2.$	6	$2x_1 + 3x_3 = 1,$ $x_1 - 4x_2 + x_3 = 2,$ $-3x_1 + x_2 - 3x_3 = -6.$
7	$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,$ $- x_2 + 4x_3 = 7,$ $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6.$	8	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5,$ $2x_1 - x_2 - x_3 = 1,$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6.$	9	$3x_1 + x_2 - 5x_3 = 16,$ $2x_2 - 4x_3 = 8,$ $x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -6.$
10	$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6,$ $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20,$ $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6.$	11	$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1,$ $2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4,$ $4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2.$	12	$x_1 + 5x_2 + x_3 = 0,$ $2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4,$ $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8.$
13	$x_1 + x_2 - x_3 = 1,$ $8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2,$ $4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3.$	14	$x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3,$ $3x_1 + x_2 + x_3 = 5,$ $3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9.$	15	$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31,$ $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20,$ $3x_1 - x_2 + x_3 = 9.$

Контрольные вопросы.

1. При каких условиях применим методы простой итерации (метод Якоби) сходится?
2. Каким образом делается апостериорная оценка погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений, получаемого с помощью метода Якоби?

Практическая работа №8.
Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Метод последовательных приближений.

Цель: расширить представление о приближенных методах решения СЛАУ и отработать алгоритм решения СЛАУ методом последовательных приближений.

Краткие теоретические сведения.

Приближенные методы дают возможность найти решение системы как предел бесконечного вычислительного процесса, позволяющего по уже найденным приближениям к решению построить следующее, более точное приближение. Важной чертой таких методов является их самоисправляемость и простота реализации. Если в точных методах ошибка в вычислениях, когда она не компенсируется случайно другими ошибками, неизбежно ведет к ошибкам в результате, то в случае сходящегося итерационного процесса ошибка в каком-то приближении исправляется в последующих вычислениях, и такое исправление требует только нескольких лишних шагов единообразных вычислений.

Условия и скорость сходимости каждого итерационного процесса существенно зависят от свойств уравнений, т.е. от свойств матрицы системы и от выбора начальных приближений.

Метод простой итерации (метод последовательных приближений).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Запишем эту систему в матричном виде: AX = B, где

Предполагая, что диагональные элементы $a_{ii} \neq 0 \ \left(i = 1, 2, \dots, n\right)$, выразим x_1 через первое уравнение системы, x_2 – через второе уравнение и т.д. В результате получим систему, эквивалентную системе (1):

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_1 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n,$$
$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{1n}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{2n}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_{n-1}. \qquad (2)$$

Обозначим $\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i; \ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij},$ где $i = 1, 2, \dots, n; \ j = 1, 2, \dots, n$. Тогда система (2) запишется таким образом:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \dots \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) называется системой, приведенной к *нормальному виду*. Введя обозначения

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

запишем систему (3) в матричной форме: X = β + αX, или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Решим систему (4) методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем столбец свободных членов:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \end{bmatrix}$$

- нулевое приближение,

далее, построим столбцы

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

- первое приближение;

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

- второе приближение

и т.д.

Вообще, любое (k+1)-е приближение вычисляют по формуле

(5)

Если последовательность приближений $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, …, $X^{(k)}$ имеет предел X = lim $X^{(k)}$, то этот предел является решением системы (2), поскольку по свойству предела $\lim X^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim X^{(k)}$, т.е. $X = \beta + \alpha X$.

Практическая часть.

Решить систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \end{cases}$$

методом последовательных приближений с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Определить сходимость итерационного процесса и количество итераций, необходимых для нахождения корней системы с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Указания к выполнению практической работы.

1. Выбрать из таблицы 1 исходные данные (коэффициенты и свободные члены заданной системы).
2. Преобразовать исходную систему к нормальному виду. Вслед за этим произвести проверку достаточных условий сходимости.
3. Произвести расчет необходимого количества итераций.
4. Методом последовательных приближений определить корни системы с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.
5. Все вычисления сопровождать необходимыми объяснениями.

Таблица 1.

Варианты	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
0	1	0,66	0,44	0,22	-0,58
	2	1,54	0,74	1,54	-0,32
	3	1,42	1,42	0,86	0,83
1	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
2	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
3	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
6	1	0,06	0,92	0,03	-0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	-0,98
7	1	0,10	-0,07	-0,96	-2,04
	2	0,04	-0,99	-0,85	-3,73
	3	0,91	1,04	0,19	-1,67
8	1	0,62	0,81	0,77	-8,18
	2	0,03	-1,11	-1,08	0,08
	3	0,97	0,02	-1,08	0,06
9	1	0,98	0,88	-0,24	1,36
	2	0,16	-0,44	-0,88	-1,27
	3	9,74	-10,00	1,71	-5,31

Примеры выполнения практической работы.

Пример 1. Методом последовательных приближений решить систему

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26,$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7,$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7.$$

Решение.

1) Приведем систему к нормальному виду:

$x_1 = 3{,}25 - 0{,}125x_2 - 0{,}125x_3,$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

$x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3,$
$x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2;$

2) Проверим условие сходимости.

Возьмем суммы модулей элементов строк. Процесс итерации заведомо сходится, если элементы матрицы α удовлетворяют неравенству $|\alpha_{ij}|<1/n$, где n – число неизвестных данной системы. В нашем примере n = 3 и все элементы $|\alpha_{ij}|<1/3$.

$$|\alpha_{11}|+|\alpha_{21}|+|\alpha_{31}|=0.2+0.2=0.4<1;$$
$$|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|+|\alpha_{32}|=0.125+0.2=0.325<1;$$
$$|\alpha_{13}|+|\alpha_{23}|+|\alpha_{33}|=0.125+0.2=0.325<1.$$

Можно проверить сходимость итерационного процесса, используя какую-либо из норм матрицы. Возьмем, к примеру, вторую норму: $\|\alpha\|_2=\max(0.4;\ 0.325;\ 0.325)=0.4<1$.

3) Строим последовательные приближения. Нулевое приближение:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

Первое приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.03 \end{bmatrix}.$$

Второе приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.9 \\ 1.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.992 \\ 1.026 \end{bmatrix}.$$

Третье приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.992 \\ 1.026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9935 \\ 1.0068 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 2,9935$; $x_2 = 1,0068$; $x_3 = 1,0068$ и с точностью до 10^{-1} получаем $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Пример 2. Показать, что для системы

$$\begin{cases} 9.9x_1 - 1.5x_2 + 2.6x_3 = 0, \\ 0.4x_1 + 13.6x_2 - 4.2x_3 = 8.2, \end{cases}$$

итерационный процесс сходится, и определить, сколько итераций следует выполнить, чтобы найти корни системы с точностью до 10^{-4}.

Решение.

1) Приводим систему к нормальному виду.

Линейную систему можно привести к нормальному виду также следующим образом: записать коэффициенты при x_1, x_2, x_3 в соответствующих уравнениях системы в виде kx, где k – число, близкое к коэффициенту при соответствующем неизвестном и на которое легко разделить коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Например:

$10x_1 = 9{,}9x_1 + 0{,}1x_1$; $20x_2 = 13{,}6x_2 + 6{,}4x_2$; $10x_3 = 7{,}1x_3 + 2{,}9x_3$.

Тогда в нашем случае система будет иметь вид:

$$|10x_1 = 0{,}1x_1 + 1.5x_2 - 2.6x_3, ¿ |20x_2 = -0.4x_1 + 6.4x_2 + 4.2x_3 + 8.2, ¿¿¿$$

или

$$|x_1 = 0{,}01x_1 + 0.15x_2 - 0.26x_3, ¿ |x_2 = -0.02x_1 + 0.32x_2 + 0.21x_3 + 0.41, ¿¿¿$$

2) Матрица системы

$$\alpha = ¿ [\ 0.01\ \ 0.15\ \ -0.26 ¿ || -0.02\ \ 0.32\ \ 0.21 ¿] ¿ ¿¿ \ ¿$$
.

Используя норму $\|\alpha\|_2$, получим $\|\alpha\|_2$ = max (0.1; 0.51; 0.76) = 0.76 < 1. Следовательно, итерационный процесс сходится.

3) Имеем $\beta = ¿ [\ 0 ¿ || 0.41 ¿] ¿ ¿¿ \ ¿$, $\|\beta\|_2 = 0 + 0.41 + 0.13 = 0.54$.

4) Применяя формулу $\|X_i - X_i^{(k)}\| \le \dfrac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$, находим

$$\|X - X^{(k)}\| \le \frac{\|\alpha\|_2^{k+1}}{1-\|\alpha\|_2} \cdot \|\beta\|_2 = \frac{0.76^{k+1} \cdot 0.54}{0.46} \le 10^{-4};$$

$$0.76^{k+1} \cdot 0.54 \le 10^{-4} \cdot 0.46; \quad 0.76^{k+1} \le \frac{10^{-4} \cdot 46}{54};$$

$$(k+1)\lg 0.76 \le \lg 46 - \lg 54 - 4;$$

$$-(k+1) \cdot 0.1192 \le 1.6628 - 1.7324 - 2 = -4.0696;$$

$$k+1 > \frac{4.0696}{0.1192} = 32.9; \quad k > 32.9; \quad k = 33.$$

Контрольные вопросы.

1. К какому типу методов – прямым или итерационным – относится метод последовательных приближений?
2. Какова основная идея метода последовательных приближений?
3. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений?
4. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса?

Практическая работа №9.
Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Метод Зейделя.

Цель: расширить представление о приближенных методах решения СЛАУ и отработать алгоритм решения СЛАУ методом Зейделя.

Краткие теоретические сведения.

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода последовательных приближений. В методе Зейделя при вычислении (k+1)-го приближения неизвестного x_i учитываются уже найденные ранее (k+1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\ldots+\alpha_{1n}x_n \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\ldots+\alpha_{2n}x_n \\ \ldots\ldots \end{cases} \tag{1}$$

Выбираем произвольно начальные приближения корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и подставляем в первое уравнение системы (1):

$$x_1^{(1)}=\beta_1+\alpha_{11}x_1^{(0)}+\alpha_{12}x_2^{(0)}+\ldots+\alpha_{1n}x_n^{(0)};$$

полученное первое приближение $x_1^{(1)}$ подставляем во второе уравнение системы (1):

$$x_2^{(1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(1)}+\alpha_{22}x_2^{(0)}+\ldots+\alpha_{2n}x_n^{(0)};$$

полученные первые приближения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ подставляем в третье уравнение системы (1):

$$x_3^{(1)}=\beta_3+\alpha_{31}x_1^{(1)}+\alpha_{32}x_2^{(1)}+\ldots+\alpha_{3n}x_n^{(0)};$$

и т.д. Наконец

$$x_n^{(1)}=\beta_n+\alpha_{n1}x_1^{(1)}+\alpha_{n2}x_2^{(1)}+\ldots+\alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}+\alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

Аналогично строим вторые, третьи и т.д. итерации.

Таким образом, предполагая, что k-е приближения корней $x_i^{(k)}$ известны, по методу Зейделя строим (k+1)-е приближения по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)}=\beta_1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)}=\beta_2+\alpha_{21}x_1^{(k+1)}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j}x_j^{(k)},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n^{(k+1)}=\beta_n+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{nj}x_j^{(k+1)}+\alpha_{nn}x_n^{(k)},$$

где k = 0, 1, 2, …, n.

Практическая часть.

Решить систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \end{cases}$$

методом Зейделя с точностью $\varepsilon=10^{-4}$. Определить сходимость итерационного процесса и количество итераций, необходимых для нахождения корней системы с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Примеры выполнения практической работы.

Пример 1. Методом Зейделя решить систему

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9, \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7, \end{cases}$$

Решение.

1) Приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1.9 + 2.4x_1 - 0.5x_2 - 2.4x_3, \\ 10x_2 = 9.7 - 2.2x_1 + 0.9x_2 - 4.4x_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 0.19 + 0.24x_1 - 0.05x_2 - 0.24x_3, \\ x_2 = 0.97 - 0.22x_1 + 0.09x_2 - 0.44x_3, \end{cases}$$

Проверим, сходится ли процесс Зейделя. После приведения системы к нормальному виду получаем матрицу:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.24 & -0.05 & -0.24 \\ -0.22 & 0.09 & -0.44 \end{pmatrix}$$

Находим $\|\alpha\|_1 = \max(0.53;\ 0.75;\ 0.57) = 0.75 < 1$. Следовательно, процесс итерации для данной системы сходится к единственному решению, несмотря на то, что $\|\alpha\|_2 = \max \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| = \max(0.59;\ 0.16;\ 1.1) = 1.1 > 1$.

2). За нулевые приближения возьмем соответствующие значения свободных членов:

$$x_1^{(0)} = 0.19;\ x_2^{(0)} = 0.97;\ x_3^{(0)} = -0.14.$$

3). Строим итерации по методу Зейделя. Первые приближения:

$$x_1^{(1)} = 0.19 + 0.24 \cdot 0.19 - 0.05 \cdot 0.97 - 0.24 \cdot (-0.14) = 0.2207;$$
$$x_2^{(1)} = 0.97 - 0.22 \cdot 0.2207 + 0.09 \cdot 0.97 - 0.44 \cdot (-0.14) = 1.0703;$$
$$x_3^{(1)} = -0.14 + 0.13 \cdot 0.2207 - 0.02 \cdot 1.0703 + 0.42 \cdot (-0.14) = -0.1915.$$

Вторые приближения:

$$x_1^{(2)} = 0.19 + 0.24 \cdot 0.2207 - 0.05 \cdot 1.0703 - 0.24 \cdot (-0.1915) = 0.2354;$$
$$x_2^{(2)} = 0.97 - 0.22 \cdot 0.2354 + 0.09 \cdot 1.0703 - 0.44 \cdot (-0.1915) = 1.0988;$$
$$x_3^{(2)} = -0.14 + 0.13 \cdot 0.2354 - 0.02 \cdot 1.0988 + 0.42 \cdot (-0.1915) = -0.2118.$$

и т.д.

Решение примера сведем в таблицу:

№ итерации	X_1	X_2	X_3
0	0,19	0,97	-0,14
1	0,2207	1,0703	-0,1915
2	0,2354	1,0988	-0,2118
3	0,2424	1,1088	-0,2196
4	0,2454	1,1124	-0,2226
5	0,2467	1,1138	-0,2237
6	0,2472	1,1143	-0,2241
7	0,2474	1,1145	-0,2243
8	0,2475	1,1145	-0,2243

Построение итераций заканчивается, когда с заданной степенью точности получаем одинаковые значения в двух итерациях подряд. В нашем примере это итерации 7 и 8.

Окончательный ответ: $x_1 \approx 0.248; \quad x_2 \approx 1.114; \quad x_3 \approx -0.224.$

Пример 2. Подсчитать, сколько итераций по методу Зейделя необходимо выполнить, чтобы с точностью до 10^{-4} найти корни системы:

$$\left| 9.9x_1 - 1.5x_2 + 2.6x_3 = 0, \text{¿} \right| 0.4x_1 + 13.6x_2 - 4.2x_3 = 8.2, \text{¿¿¿}$$

Решение.

1) Приводим систему к нормальному виду:

$$\left| x_1 = 0{,}01x_1 + 0.15x_2 - 0.26x_3, \text{¿} \right| x_2 = -0.02x_1 + 0.32x_2 + 0.21x_3 + 0.41, \text{¿¿¿}$$

2) За нулевые приближения примем столбец свободных членов: $x_1^{(0)} = 0; \; x_2^{(0)} = 0.41; \; x_3^{(0)} = -0.13$ и вычислим первые приближения:

$$x_1^{(1)} = 0.01 \cdot 0 + 0.15 \cdot 0.41 - 0.26 \cdot (-0.13) = 0.0953;$$
$$x_2^{(1)} = 0.41 - 0.02 \cdot 0.0953 + 0.32 \cdot 0.41 + 0.21 \cdot (-0.13) = 0.5120;$$
$$x_3^{(1)} = -0.13 - 0.07 \cdot 0.0953 - 0.04 \cdot 0.5120 + 0.29 \cdot (-0.13) = -0.1948.$$

3) Матрица

$$\alpha = \text{¿} \left[0.01 \quad 0.15 \quad -0.26 \text{¿} \right] \left[-0.02 \quad 0.32 \quad 0.21 \text{¿} \right] \text{¿¿¿} \text{¿}$$

.

Значит, $\|\alpha\|_1 = \max(0.42; \; 0.55; \; 0.40) = 0.55 < 1$. Поскольку

$$X^{(0)} = \text{¿} \left[0 \text{¿} \right] \left[0.41 \text{¿} \right] \text{¿¿¿} \text{¿}$$ и $$X^{(1)} = \text{¿} \left[0{,}0953 \text{¿} \right] \left[0.5120 \text{¿} \right] \text{¿¿¿} \text{¿}$$,

имеем

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \text{¿} \left[0{,}0953 \text{¿} \right] \left[0.1120 \text{¿} \right] \text{¿¿¿} \text{¿}$$, т.е. $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1 = 0{,}1120.$

4) По формуле

$$\|X - X^{(k)}\|_1 \le \frac{\|\alpha\|_1^k}{1 - \|\alpha\|_1} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1$$

определяем k:

$$10^{-4} \le \frac{0{,}55^k}{0.45} \cdot 0.1120; \qquad 10^{-4} \cdot 0.45 \le 0.55^k \cdot 0.1120;$$
$$-4\lg 10 + \lg 0.45 \le k \lg 0.55 + \lg 0.1120;$$
$$-4 - 0.3468 \le k(-0.2596 - 0.9508); \quad k \ge \frac{4.3468}{1.2104} = 3.59; \; k = 4$$

Аналогично можно производить оценку метода Зейделя по норме 2.

Задания к практической работе.

1. Выбрать из таблицы 1 исходные данные (коэффициенты и свободные члены заданной системы).
2. Преобразовать исходную систему к нормальному виду. Вслед за этим произвести проверку достаточных условий сходимости.
3. Произвести расчет необходимого количества итераций.
4. Методом Зейделя определить корни системы с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.
5. Все вычисления сопровождать необходимыми объяснениями.

Таблица 1.

Варианты	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
0	1 2 3	0,66 1,54 1,42	0,44 0,74 1,42	0,22 1,54 0,86	-0,58 -0,32 0,83
1	1 2 3	0,21 0,30 0,60	-0,45 0,25 -0,35	-0,20 0,43 -0,25	1,91 0,32 1,83
2	1 2 3	-3 0,5 0,5	0,5 -6 0,5	0,5 0,5 -3	-56,5 -100 -210
3	1 2 3	0,45 -0,01 -0,35	-0,94 0,34 0,05	-0,15 0,06 0,63	-0,15 0,31 0,37
4	1 2 3	0,63 0,15 0,03	0,05 0,10 0,34	0,15 0,71 0,10	0,34 0,42 0,32
5	1 2 3	-0,20 -0,30 1,20	1,60 0,10 -0,20	-0,10 -1,50 0,30	0,30 0,40 -0,60
6	1 2 3	0,06 0,99 1,01	0,92 0,01 0,02	0,03 0,07 0,99	-0,82 0,66 -0,98
7	1 2 3	0,10 0,04 0,91	-0,07 -0,99 1,04	-0,96 -0,85 0,19	-2,04 -3,73 -1,67
8	1 2 3	0,62 0,03 0,97	0,81 -1,11 0,02	0,77 -1,08 -1,08	-8,18 0,08 0,06
9	1 2 3	0,98 0,16 9,74	0,88 -0,44 -10,00	-0,24 -0,88 1,71	1,36 -1,27 -5,31

Контрольные вопросы.

1. К какому типу методов – прямым или итерационным – относится метод Зейделя?
2. Какова основная идея метода Зейделя?
3. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений?
4. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса?
5. В чем отличие итерационного процесса метода Зейделя от аналогичного процесса метода простой итерации?

Практическая работа №10.
Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Цель: Научиться составлять и применять интерполяционный многочлен Лагранжа, и оценивать его погрешность.

Краткие теоретические сведения.

Основная задача интерполяции – нахождение значения таблично заданной функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана. Экстраполяция – несколько более «широкое» понятие, оно сводится к восстановлению функции в точках за пределами заданного интервала.

Концепция интерполяции. Решение задач интерполяции и экстраполяции обеспечивается построением интерполяционной функции L(x), приближенно заменяющей исходную f(x), заданную таблично, и проходящей через все заданные точки – узлы интерполяции. С помощью этой функции можно рассчитать искомое значение исходной функции в любой точке.

В связи с интерполяцией рассматриваются три основные проблемы:

1) выбор интерполяционной функции L(x);

2) оценка погрешности интерполяции R(x);

3) размещение узлов интерполяции для обеспечения наивысшей возможной точности восстановления функции f(x).

Специальные методы интерполяции позволяют определить искомое значение функции без непосредственного прямого построения интерполяционной функции. В принципе все интерполяционные методы, базирующиеся на использовании в качестве интерполяционной функции полиномов, дают одни и те же результаты, но с разными затратами. Кроме того, полином можно представить как усеченный ряд Тейлора, в который разложили исходную функцию. Это одно из главных достоинств полинома как интерполяционной функции.

Метод Лагранжа.

Пусть известны значения некоторой функции f(x) в n + 1 различны произвольных точках $y_i = f(x_i),\ i = \overline{0,\ n}$. Для интерполирования (восстановления) функции в какой – либо точке x, принадлежащей отрезку $[x_0, x_n]$, необходимо построить интерполяционный полином n-го порядка, который в методе Лагранжа представляется следующим образом:

$$L_n(x) = y_0 Q_0(x) + \ldots + y_i Q_i(x) + \ldots + y_n Q_n(x)$$

где $Q_i(x) = \dfrac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$.

Если раскрыть произведение всех скобок в числителе (в знаменателе все скобки – числа), то получим полином n-го порядка от x. Следовательно, интерполяционный полином Лагранжа не что иное, как обычный полином n-го порядка.

Оценить погрешность интерполяции в точке x из $[x_0, x_n]$ (т.е. решить вторую проблему интерполяции) можно по формуле

$$R(x) = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),\ где\ M_{n+1} = \max|f^{(n+1)}(x)| -$$

максимальное значение (n+1)-й производной исходной функции f(x) на отрезке $[x_0, x_n]$.

Пример 1. Дана таблично заданная функция

Х	0	1	2	6
У	-1	-3	3	1187

Требуется найти y при x = 4.

Решение.

В данном случае n = 3. Запишем функцию Лагранжа подробно:

$$L_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$-1\frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(0-1)(0-2)(0-6)}-3\frac{(4-0)(4-1)(4-6)}{(1-0)(1-2)(1-6)}+3\frac{(4-0)(4-1)(4-6)}{(2-0)(2-1)(2-6)}+1187\frac{(4-0)(4-1)(4-2)}{(6-0)(6-1)(6-2)}=255$$

Пример 2. Дана функция $y=\sqrt{x}$. Найти погрешность интерполяции функции при x = 115.

Решение.

Составляем таблицу:

X	100	121	144
У	10	11	12

Имеем всего три узла интерполяции, n = 2. Для оценки погрешности оценим максимальное значение третьей производной:

$y' = \frac{x^{-1/2}}{2}$; y''={ {-x rSup { size 8{-3/2} } } over {4} } ;"""" y''''={ {3x rSup { size 8{-5/2} } } over {8} } . } {} # M rSub { size 8{3} } =max lline y''' rline = { {3'(100') rSup { size 8{-5/2} } } over {8} } . {} } } {¿;

¿

Погрешность при интерполяции по трем узлам будет:

$$R\le\frac{3\,(100)^{-5/2}}{8\cdot 3\,!}\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right|\approx 1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

Практическая часть

1. По заданной таблице 1 значений функции вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.

Таблица 1.

№ варианта	Табулированная функция				Точка поиска
1	X	1	3	4	X = 2
	У	12	4	6	
2	X	2	5	7	X = 6
	У	4	6	-3	
3	X	-1	0	3	X = 1
	У	-3	5	2	
4	X	2	3	5	X = 4
	У	4	1	7	
5	X	0	2	3	X = 1
	У	-1	-4	2	
6	X	7	9	13	X = 11
	У	2	-2	3	
7	X	-3	-1	3	X = 0
	У	7	-1	4	
8	X	1	2	4	X = 3
	У	-3	-7	2	
9	X	-2	-1	2	X = 1
	У	4	9	1	

2. Дана функция $y=\sqrt[3]{x}$. Найти погрешность интерполяции функции при x = t (таблица 2).

Таблица 2.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	1,242	1,538	1,824	2,338	3,126	3,721	4,429	5,346	6,428

Задания к практической работе

Вариант 1.

X	-34	-27	-21	-11	-7	0	3	9	16
У	136	113	94	62	48	26	16	-3	-26

Вариант 2.

X	-11	-8	-4	-1	2	5	9	11	16
У	23	25	28	30	32	33	36	38	40

Вариант 3.

X	-16	-12	-7	-3	1	5	7	11	18
У	-73	-52	-26	-4	17	38	48	70	106

Вариант 4.

X	-5	-2	-1	1	4	7	10	15	18
У	7	6	5	4	3	2	0	-2	-3

Вариант 5.

X	-14	-9	-5	-1	3	7	12	18	21
У	-44	-27	-13	1	14	28	45	66	76

Вариант 6.

X	-10	-7	-4	-1	2	5	9	13	17
У	5	4,7	4,2	3,8	3,4	3	2,4	1,9	1,3

Вариант 7.

X	-15	-9	-7	-4	-1	3	7	11	18
У	-35	-21	-16	-10	-2	7	17	26	43

Вариант 8.

X	-4	-2	0	2	6	9	13	15	20
У	21	14	7	0	-13	-24	-38	-44	-62

Вариант 9.

X	-8	-5	-2	1	3	7	12	18	21
У	-50	-31	-12	6	18	43	74	111	130

Вариант 10.

X	-14	-10	-7	-3	1	3	6	11	15
У	96	67	46	18	-10	-24	-45	-81	-109

Контрольные вопросы

1. Для чего нужна интерполяция функций?
2. Что такое экстраполяция?
3. Охарактеризуйте виды интерполяции.
4. Сколько интерполяционных полиномов можно построить при заданном наборе узлов интерполяции?
5. Чем обуславливается выбор способов интерполяции?
6. Какие методы локальной интерполяции вам известны?
7. Какой из них наименее точный?
8. Какой метод локальной интерполяции проводится по трем точкам?
9. Что называется интерполяционным многочленом Лагранжа?

Практическая работа №11.
Интерполяционный многочлен Ньютона.

Цель: Научиться составлять и применять интерполяционный многочлен Ньютона и оценивать его погрешность.

Краткие теоретические сведения.

Пусть известны значения некоторой функции f(x) в n+1 произвольных, попарно не совпадающих точках $y_i=f(x_i),\ i=\overline{0,n}$. В общем случае интерполяция по формула Ньютона может производиться для произвольно расположенных узлов интерполяции, но чаще применяется для равномерно расположенных. Поэтому мы рассмотрим только случай с равномерным расположением узлов. Тогда $x_{i+1}=x_i+h,\ где\ h=(x-x_0)/n$.

Метод использует понятие конечных разностей. Конечная разность k-го порядка в i-й точке вычисляется следующим образом:

$$\Delta^k y_i=\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i ,$$

т.е. через конечные разности более низкого порядка.

Интерполяционный многочлен Ньютона записывается следующим образом:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0(x-x_0)}{h}+\frac{\Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}+\frac{\Delta^3 y_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!h^3}+\ldots+$$
$$+\frac{\Delta^i y_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}{i!h^i}+\frac{\Delta^n y_0(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!h^n}$$

Также как и в методе Лагранжа, это выражение есть не что иное, как полином n-го порядка от x.

Часто вводят безразмерную переменную q = (x – x_0) / h , показывающую, сколько содержится шагов от x_0 до заданной точки. В этом случае выражение для интерполяционного полинома запишется так:

$$P_n(x)=y_0+\Delta y_0 q+\frac{\Delta^2 y_0 q(q-1)}{2!}+\frac{\Delta^3 y_0 q(q-1)(q-2)}{3!}+\ldots+$$
$$+\frac{\Delta^i y_0 q(q-1)\ldots(q-i+1)}{i!}+\ldots+\frac{\Delta^n y_0 q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}$$

Обе приведенные формулы носят название первой интерполяционной формулы Ньютона и рекомендуются для применения при интерполяции вперед (в сторону увеличения x) или при экстраполяции назад (левее x_0).

Существует вторая формула, которая рекомендуется для применения при интерполяции назад (т.е. в конце интервала, но левее x_n) или при экстраполяции вперед, правее x_n. она записывается следующим образом:

$$P_n(x)=y_n+\Delta y_{n-1}q+\frac{\Delta^2 y_{n-2}q(q+1)}{2\,!}+\frac{\Delta^3 y_{n-3}q(q+1)(q+2)}{3\,!}+\ldots+$$
$$+\frac{\Delta^i y_{n-i}q(q+1)\ldots(q+i-1)}{i\,!}+\ldots+\frac{\Delta^n y_0 q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n\,!}$$

Погрешность интерполяции можно оценить так же, как и в предыдущем методе. Хотя при использовании относительной переменной q можно указать и другую формулу:

$$R(x)=|f(x)-L_n(x)|\le\frac{M_{n+1}h^{n+1}}{(n+1)\,!}q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)$$
.

Использование конечных разностей, которые для дискретных функций являются своеобразными аналогами производных непрерывных функций, помогает находить погрешность интерполяции. Учтем соотношения:

$$f'(x)\approx\frac{\Delta y}{h};\quad f''(x)\approx\frac{\Delta^2 y}{h^2};\quad f'''(x)\approx\frac{\Delta^3 y}{h^3};\quad\ldots;\quad f^{(i)}(x)\approx\frac{\Delta^i y}{h^i}$$
,

тогда для получения приближенного значения M_{n+1} достаточно иметь несколько (или одну) дополнительных точек x_{n+1}, x_{n+2}, …, с использованием которых легко найти максимальное значение конечной разности (или даже одно значение $\Delta^{(n+1)}y(x_0)$, если есть только одна дополнительная точка) (n+1)-го порядка $\max\{\Delta^{(n+1)}y(x)\}$.

$$R(x)=|f(x)-L_n(x)|\le\frac{\max\{|\Delta^{(n+1)}y(x)|\}}{(n+1)\,!}q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)$$
.

Пример 1.

Даны следующие точки:

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
У	0,0540	0,0440	0,0355	0,0283	0,0224	0,0175	0,0136

Необходимо найти у(2,05).

Решение.

Используем для интерполяции только три первые точки, а остальные используем для оценки погрешности.

Следовательно, n = 2, относительное значение аргумента q = $\frac{x-x_0}{h}=\frac{2,05-2,0}{0,1}=0,5$. Воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона для безразмерной переменной q, для чего предварительно составим таблицу конечных разностей:

X	У	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2,0	0,0540	-0,0100	0,0015	-0,0002
2,1	0,0440	-0,0085	0,0013	-0,0000
2,2	0,0355	-0,0072	0,0013	-0,0003
2,3	0,0283	-0,0059	0,0010	-0,0010
2,4	0,0224	-0,0049	0	
2,5	0,0175	-0,0049		
2,6	0,0136			

У(2,05) = 0,0540 + 0,5(-0,01) + 0,5(0,5 – 1) · 0,0015 / 3! = 0,0488125.

Оценим погрешность найденного значения у. Из таблицы находим, что M_3 = 0,0010, тогда

$$R\le\frac{0,001\cdot|0,5(0,5-1)(0,5-2)|}{3\,!}=0,0000625$$
.

Практическая часть

Вариант 1.

Х	-34	-27	-21	-11	-7	0	3	9	16
У	136	113	94	62	48	26	16	-3	-26

Вариант 2.

Х	-11	-8	-4	-1	2	5	9	11	16
У	23	25	28	30	32	33	36	38	40

Вариант 3.

Х	-16	-12	-7	-3	1	5	7	11	18
У	-73	-52	-26	-4	17	38	48	70	106

Вариант 4.

Х	-5	-2	-1	1	4	7	10	15	18
У	7	6	5	4	3	2	0	-2	-3

Вариант 5.

Х	-14	-9	-5	-1	3	7	12	18	21
У	-44	-27	-13	1	14	28	45	66	76

Вариант 6.

Х	-10	-7	-4	-1	2	5	9	13	17
У	5	4,7	4,2	3,8	3,4	3	2,4	1,9	1,3

Вариант 7.

Х	-15	-9	-7	-4	-1	3	7	11	18
У	-35	-21	-16	-10	-2	7	17	26	43

Вариант 8.

Х	-4	-2	0	2	6	9	13	15	20
У	21	14	7	0	-13	-24	-38	-44	-62

Вариант 9.

Х	-8	-5	-2	1	3	7	12	18	21
У	-50	-31	-12	6	18	43	74	111	130

Вариант 10.

Х	-14	-10	-7	-3	1	3	6	11	15
У	96	67	46	18	-10	-24	-45	-81	-109

Контрольные вопросы

1. Что обозначает термин интерполяция?
2. Какие существуют методы интерполяции?
3. Напишите первую интерполяционную формулу Ньютона.
4. Какую интерполяционную формулу Ньютона необходимо применять в начале таблично заданной функции, какую – в конце?
5. Напишите вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Практическая работа №11.
Интерполяция сплайнами.

Цель: Изучение кусочно-полиномиальной интерполяции функции, заданной в узлах; построение интерполяционного кубического сплайна; исследование зависимости погрешности интерполирования сплайнами от числа узлов и гладкости функции.

Краткие теоретические сведения.

Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона при использовании большого числа узлов интерполяции на всем отрезке [*a*, *b*] часто приводят к плохому приближению из-за накопления погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязательно приводит к повышению точности. Для снижения погрешностей весь отрезок [*a*, *b*] разбивается на частичные отрезки и на каждом из них функцию $f(x)$ заменяют приближенно полиномом невысокой степени. Это называется *кусочно-полиномиальной интерполяцией*.

Один из способов интерполирования на всем отрезке [*a*, *b*] является *интерполирование сплайнами*.

Сплайном называется кусочно-полиномиальная функция, определенная на отрезке [*a*, *b*] и имеющая на этом отрезке некоторое количество непрерывных производных. Преимущества интерполяции сплайнами по сравнению с обычными методами интерполяции – в сходимости и устойчивости вычислительного процесса.

Степенью сплайна называется максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов, а дефектом сплайна - разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на [a,b] производной. Например, непрерывная ломанная является сплайном степени 1 с дефектом 1 (так как сама функция – непрерывна, а первая производная уже разрывна).

На практике наиболее часто используются *кубические* сплайны $S_3(x)$ - сплайны третьей степени с непрерывной, по крайней мере, первой производной. При этом величина $m_i = S_3'(x_i)$, называется наклоном сплайна в точке (узле) x_i.

Разобьём отрезок [a,b] на N равных отрезков [x_i, x_{i+1}], где $x_i = a + ih$, i=0,1,…,N-1, $x_N = b, h = (b-a)/N$.

Если в узлах x_i, x_{i+1} заданы значения f_i, f_{i+1}, которые принимает кубический сплайн, то на частичном отрезке [x_i, x_{i+1}] он принимает вид:

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2(2(x-x_i)+h)}{h^3} f_i + \frac{(x-x_i)^2(2(x_{i+1}-x)+h)}{h^3} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h^2} m_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2} m_{i+1}. \quad (1)$$

В самом деле, это легко проверить, рассчитав $S_3(x)$ и $S_3'(x)$ в точках x_i, x_{i+1}.

Можно доказать, что если многочлен третьей степени принимает в точках x_i, x_{i+1} значения f_i, f_{i+1} и имеет в этих точках производные, соответственно, m_i, m_{i+1}, то он совпадает с многочленом (1).

Таким образом, для того, чтобы задать кубический сплайн на отрезке, необходимо задать значения f_i, m_i, i=0,1…,N в N+1 в узле x_i.

Кубический сплайн, принимающий в узлах те же значения f_i, что и некоторая функция, называется *интерполяционным* и служит для аппроксимации функции *f* на отрезке [a,b] вместе с несколькими производными.

Существует несколько способов задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.

Способ 1 (упрощенный):

Положим:

$$m_i = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}, \text{ i=1,2,…, N-1, } (2)$$

$$m_0 = \frac{4f_1-f_2-3f_0}{2h}, \quad m_N = \frac{3f_N-f_{N-2}-3f_{N-1}}{2h} \quad (3)$$

Данные формулы являются формулами численного дифференцирования второго порядка точности относительно шага h=(b-a)/N.

Способ 2:

Если у нас имеются значения f_i' производной f' в узлах x_i, то полагаем $m_i = f_i'$, i=0,1,…,N.

Первые два способа называются локальными, так как с их помощью сплайн строится отдельно на каждом частичном отрезке [x_i, x_{i+1}] посредством применения формулы (1). Построенные таким образом сплайны, как правило, имеют деффект, равный двум, так как непрерывность первой производной в узлах соблюдается, а непрерывность второй производной при таком построении не гарантируется.

Способ 3 (глобальный):

Пусть $S_3''(x_i+0)$ - значение $S_3''(x)$ в узле x_i справа, его мы найдем из выражения (1), а $S_3''(x_i-0)$ значение $S_3''(x)$ в узле x_i слева – оно находится из соответствующего выражения $S_3(x)$ на частичном отрезке [x_i, x_{i+1}], которое получается из (1) заменой i на i-1.

Тогда получим:

$$S_3''(x_i+0) = \frac{-4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6\frac{f_{i+1}-f_i}{h^2},$$

$$S_3''(x_i-0) = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{f_i-f_{i-1}}{h^2}$$

Потребуем непрерывность $S_3''(x)$ в узлах:

$S_3''(x_i-0) = S_3''(x_i+0)$, i=1,2,…, N-1.

Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно наклонов:

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3(f_{i+1}-f_{i-1})}{h}, i = 1,2,\dots,N-1. \quad (4)$$

Так как система содержит N+1 неизвестных, необходимо задать два дополнительных условия, называемые *краевыми.*

Приведем три варианта задания краевых условий:

1) В случае, когда известны $m_N = f_N'$ задаем

$m_0 = f_0'$, $m_N = f_N'$.

2) Производные f_0', f_N' аппроксимируем формулами численного дифференцирования третьего порядка точности:

$$m_0 = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3)$$

$$m_N = \frac{1}{6h}(11f_N - 18f_{N-1} + 9f_{N-2} - 2f_{N-3}), \quad (6)$$

3) Иногда бывают известны значения f'' на концах отрезка [a,b], т.е. величины $f_0'' = f''(a), f_N'' = f''(b)$. Тогда требования $S_3''(a) = f_0''$, $S_3''(b) = f_N''$ приводят к краевым условиям

$$m_0 = \frac{-m_1}{2} + \frac{3}{2}\frac{f_1-f_0}{h} - \frac{h}{4}f_0''$$

$$m_N = \frac{-m_{N-1}}{2} + \frac{3}{2}\frac{f_N-f_{N-1}}{h} + \frac{h}{4}f_N''. \quad (7)$$

Условия (5)-(7) можно комбинировать , т.е. выбирать их независимо в левом и правом узлах.

Система (4) при всех рассмотренных краевых условиях имеет единственное решение, которое можно найти с помощью методов прогонки и итераций.

Таким образом, решая систему (4) при выбранных краевых условиях, находим наклоны m_i i=0,1,…,N, во всех узлах. Затем по формуле (1) задаем сплайн на каждом частичном отрезке [x_i, x_{i+1}], i=0,1,…,N-1. Построенный данным глобальным способом сплайн $S_3(x)$ имеет дефект не больше единицы, так как этот сплайн обладает на отрезке [a,b] непрерывной второй производной $S_3''(x)$.

Практическая часть.

Пример. Построим кубическую сплайн функцию.

i	0	1	2	3	4	5
x	-3,14	-1,88	-0,63	0,63	1,88	3,14
y	-0,996	-0,954	-0,558	0,558	0,954	0,996

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, i=1, 2, ..., N будем искать функцию $s(x)=s_i(x)$ в виде многочлена третьей степени

$$s_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+\frac{c_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{d_i}{6}(x-x_i)^3,$$

$$x_{i-1}\le x\le x_i,\quad i=1,2,\dots,N,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i - коэффициенты, подлежащие определению.

$$s_1(x)=a_1+b_1(x-x_1)+\frac{c_1}{2}(x-x_1)^2+\frac{d_1}{6}(x-x_1)^3$$

$$s_2(x)=a_2+b_2(x-x_2)+\frac{c_2}{2}(x-x_2)^2+\frac{d_2}{6}(x-x_2)^3$$

$$s_3(x)=a_3+b_3(x-x_3)+\frac{c_3}{2}(x-x_3)^2+\frac{d_3}{6}(x-x_3)^3$$

$$s_4(x)=a_4+b_4(x-x_4)+\frac{c_4}{2}(x-x_4)^2+\frac{d_4}{6}(x-x_4)^3$$

$$s_5(x)=a_5+b_5(x-x_5)+\frac{c_5}{2}(x-x_5)^2+\frac{d_5}{6}(x-x_5)^3$$

Введенные коэффициенты имеют следующий смысл:

$$s_i^{¿}(x)=b_i+c_i(x-x_i)+\frac{d_i}{2}(x-x_i)^2,$$

$$s_i^{//}(x)=c_i+d_i(x-x_i),\quad s_i^{///}(x)=d_i.$$

поэтому

$$a_i=s_i(x_i),\; b_i=s_i^{¿}(x_i),\; c_i=s_i^{//}(x_i),\; d_i=s_i^{///}(x_i).$$

Из условий интерполирования $s(x_i)=f(x_i)$, i=0, 1, ..., N получаем, что

$$a_i=f(x_i),\quad i=1,2,\dots,N.$$

Далее, требование непрерывности функции $s(x)$приводит к условиям

$$s_i(x_i)=s_{i+1}(x_i),\; i=1,2,\dots,N-1.$$

Отсюда, учитывая выражения для функций $s_i(x)$ получаем при $i=0, 1, \dots, N-1$ уравнения

$$a_i=a_{i+1}+b_{i+1}(x_i-x_{i+1})+\frac{c_{i+1}}{2}(x_i-x_{i+1})^2+\frac{d_{i+1}}{6}(x_i-x_{i+1})^3.$$

$$a_0=a_1+b_1(x_0-x_1)+\frac{c_1}{2}(x_0-x_1)^2+\frac{d_1}{6}(x_0-x_1)^3$$

$$a_1=a_2+b_2(x_1-x_2)+\frac{c_2}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{d_2}{6}(x_1-x_2)^3$$

$$a_2=a_3+b_3(x_2-x_3)+\frac{c_3}{2}(x_2-x_3)^2+\frac{d_3}{6}(x_2-x_3)^3$$

$$a_3=a_4+b_4(x_3-x_4)+\frac{c_4}{2}(x_3-x_4)^2+\frac{d_4}{6}(x_3-x_4)^3$$

$$a_4 = a_5 + b_5(x_4 - x_5) + \frac{c_5}{2}(x_4 - x_5)^2 + \frac{d_5}{6}(x_4 - x_5)^3 .$$

Учитывая формулы из условий непрерывности первой и второй производных:

$$h_i = x_i - x_{i-1} = h$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}$$

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}$$

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}$$

получим систему уравнений:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right). \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1 \quad c_0 = c_N = 0$$

$$\begin{cases} h_1 c_0 + 2(h_1 + h_2) c_1 + h_2 c_2 = 6\left(\frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}\right) \\ h_2 c_1 + 2(h_2 + h_3) c_2 + h_3 c_3 = 6\left(\frac{f_3 - f_2}{h_3} - \frac{f_2 - f_1}{h_2}\right) \\ h_3 c_2 + 2(h_3 + h_4) c_3 + h_4 c_4 = 6\left(\frac{f_4 - f_3}{h_4} - \frac{f_3 - f_2}{h_3}\right) \end{cases}$$

Решим эту систему, учитывая, что h постоянен и равен 1,26:

$$\begin{cases} hc_0 + 4hc_1 + hc_2 = 6\left(\frac{-0{,}558 + 0{,}954}{h} - \frac{-0{,}954 + 0{,}996}{h}\right) \\ hc_1 + 4hc_2 + hc_3 = 6\left(\frac{0{,}558 + 0{,}558}{h} - \frac{-0{,}558 + 0{,}954}{h}\right) \\ hc_2 + 4hc_3 + hc_4 = 6\left(\frac{0{,}954 - 0{,}558}{h} - \frac{0{,}558 + 0{,}558}{h}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 + 4c_1 + c_2 = 1{,}338 \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 2{,}721 \\ c_2 + 4c_3 + c_4 = -2{,}721 \end{cases}$$

Учитывая, что $c_0 = c_5 = 0$, найдем значения остальных коэффициентов c_i:

Given

$4c1 + c2 = 1.338$

$c1 + 4c2 + c3 = 2.721$

$c2 + 4c3 + c4 = -2.721$

$c3 + 4c4 = -1.338$

$$\mathrm{Find}(c0, c1, c2, c3, c4, c5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.118 \\ 0.868 \\ -0.868 \\ -0.118 \\ 0 \end{pmatrix}$$

По найденным коэффициентам c_i коэффициенты b_i d_i определяются с помощью явных формул

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right) c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right)$$

$i := 1..5$

$$c := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.118 \\ 0.868 \\ -0.868 \\ -0.118 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_i := \frac{c_i - c_{i-1}}{1.26} \qquad b_i := \frac{1.26}{2} \cdot c_i - \frac{1.26^2}{6} \cdot d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{1.26}$$

Èç óñëîâèÿ èíòåðïîëÿöèè :

$a_i := f_i$

$d_i =$

0.094
0.595
-1.378
0.595
0.094

$b_i =$

0.083
0.704
0.703
0.082
$8.553 \cdot 10^{-3}$

$$f := \begin{pmatrix} -0.996 \\ -0.954 \\ -0.558 \\ 0.558 \\ 0.954 \\ 0.996 \end{pmatrix}$$

$a_i =$

-0.954
-0.558
0.558
0.954
0.996

Таким образом, определили все неизвестные коэффициенты. Теперь можно записать выражения для каждой функции в виде многочлена третьей степени:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}\left(x - x_i\right)^2 + \frac{d_i}{6}\left(x - x_i\right)^3$$

Построим графики, используя полученные многочлены:

$y(x) := \tanh(x)$

$m := (\,-3.14\;\; -1.88\;\; -0.63\;\; 0.63\;\; 1.88\;\; 3.14\,)$ êîîðäèíàòû êîíöîâ èíòåðâàëîâ

$n := (\,-0.996\;\; -0.954\;\; -0.558\;\; 0.558\;\; 0.954\;\; 0.996\,)$

$x := -\pi, -3.14 .. \pi$

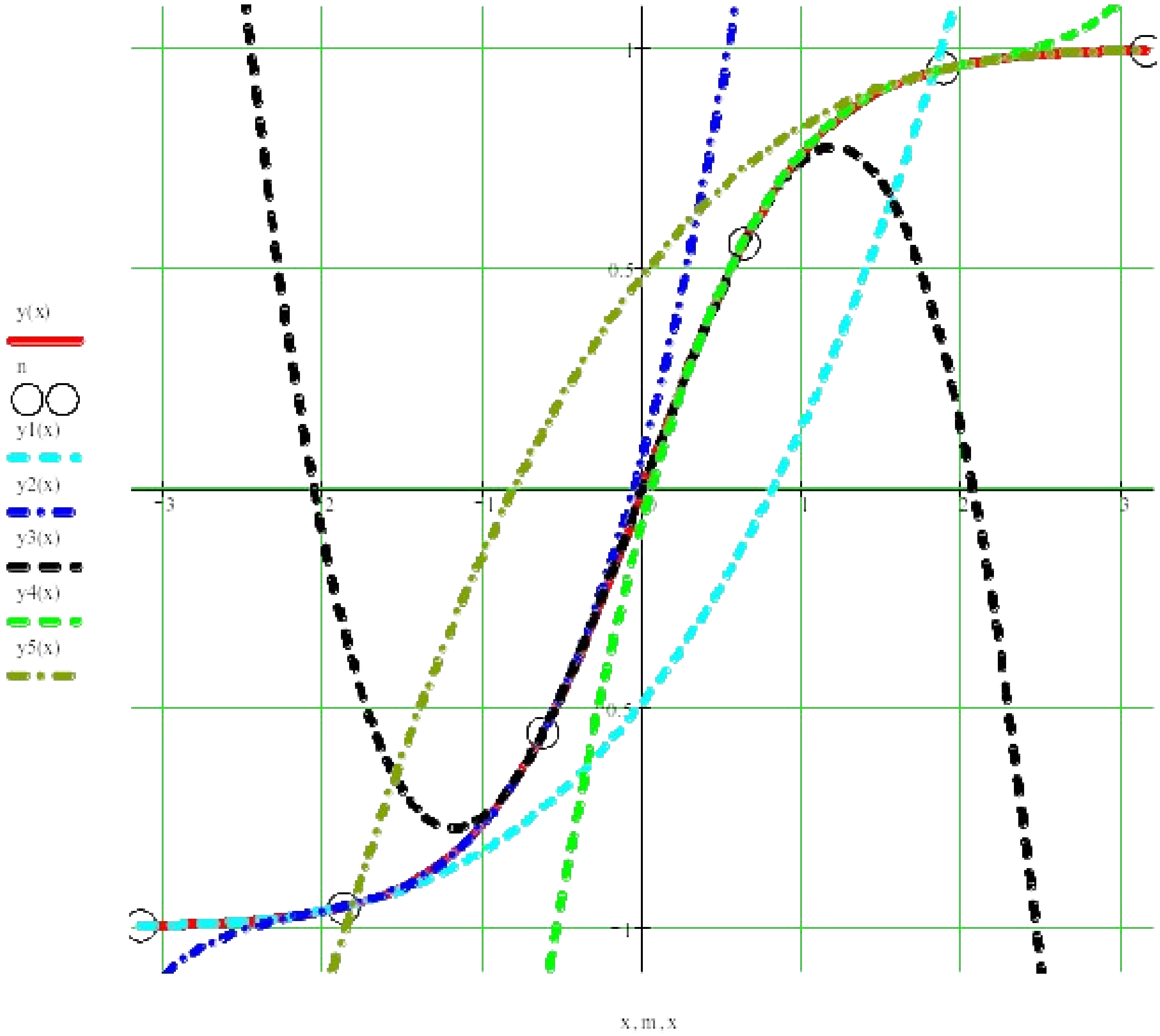
$$y1(x) := a_1 + b_1 \cdot (x + 1.88) + \frac{c_1}{2} \cdot (x + 1.88)^2 + \frac{d_1}{6} \cdot (x + 1.88)^3$$

$$y2(x) := a_2 + b_2 \cdot (x + 0.63) + \frac{c_2}{2} \cdot (x + 0.63)^2 + \frac{d_2}{6} \cdot (x + 0.63)^3$$

$$y3(x) := a_3 + b_3 \cdot (x - 0.63) + \frac{c_3}{2} \cdot (x - 0.63)^2 + \frac{d_3}{6} \cdot (x - 0.63)^3$$

$$y4(x) := a_4 + b_4 \cdot (x - 1.88) + \frac{c_4}{2} \cdot (x - 1.88)^2 + \frac{d_4}{6} \cdot (x - 1.88)^3$$

$$y5(x) := a_5 + b_5 \cdot (x - 3.14) + \frac{c_5}{2} \cdot (x - 3.14)^2 + \frac{d_5}{6} \cdot (x - 3.14)^3$$



Концы отрезков многочленов совпадают, как и их касательные в этих точках, значит приближение выполнено правильно.

Задания к практической работе.

Вариант 1.

Х	-34	-27	-21	-11	-7	0	3	9	16
У	136	113	94	62	48	26	16	-3	-26

Вариант 2.

Х	-11	-8	-4	-1	2	5	9	11	16
У	23	25	28	30	32	33	36	38	40

Вариант 3.

Х	-16	-12	-7	-3	1	5	7	11	18
У	-73	-52	-26	-4	17	38	48	70	106

Вариант 4.

Х	-5	-2	-1	1	4	7	10	15	18
У	7	6	5	4	3	2	0	-2	-3

Вариант 5.

Х	-14	-9	-5	-1	3	7	12	18	21
У	-44	-27	-13	1	14	28	45	66	76

Вариант 6.

Х	-10	-7	-4	-1	2	5	9	13	17
У	5	4,7	4,2	3,8	3,4	3	2,4	1,9	1,3

Вариант 7.

Х	-15	-9	-7	-4	-1	3	7	11	18
У	-35	-21	-16	-10	-2	7	17	26	43

Вариант 8.

Х	-4	-2	0	2	6	9	13	15	20
У	21	14	7	0	-13	-24	-38	-44	-62

Вариант 9.

Х	-8	-5	-2	1	3	7	12	18	21
У	-50	-31	-12	6	18	43	74	111	130

Вариант 10.

Х	-14	-10	-7	-3	1	3	6	11	15
У	96	67	46	18	-10	-24	-45	-81	-109

Контрольные вопросы.

1. В чем преимущества сплайн-интерполяции по сравнению с интерполяционными полиномами?
2. Какие функции кубической сплайн-интерполяции вам известны, охарактеризуйте последовательность их использования?
3. Объясните разницу между глобальной и кусочно-полиномиальной интерполяцией на примере сплайн-функции.

Практическая работа №12.
Численное интегрирование. Метод прямоугольников.

Цель работы: освоение численных методов интегрирования; изучение возможности нахождения интегралов различными методами.

Теоретическая часть

1. *Постановка задачи численного интегрирования*

Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Из курса математического анализа известно, что для непрерывной на отрезке [a,b] функции *f* интеграл (1) существует и равен разности значений для первообразной *F* для функции *f* в точках *b* и *a*:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Однако в подавляющем большинстве практических задач первообразную *F* не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, функция f часто задается в виде таблицы ее значений для определенных значений аргумента. Все это порождает потребность в приближенных методах вычислении интеграла (19), которые можно условно подразделить на аналитические и численные. Первые заключаются в приближенном построении первообразной и дальнейшем использовании формулы (20). Вторые позволяют непосредственно найти числовое значение интеграла, основываясь на известных значениях подынтегральной функции (а иногда и ее производной) в заданных точках, называемых *узлами*. В настоящей главе остановимся лишь на численных методах интегрирования функций. Сам процесс численного определения интеграла называется *квадратурой*, а соответствующие формулы – *квадратурными*.

Пусть на отрезке [a,b] в узлах x_i заданы значения f_i некоторой функции *f*, принадлежащей определенному классу *F*. Требуется приближенно вычислить интеграл (1). Так обычно ставится задача численного интегрирования в том случае, когда подынтегральная функция задана в виде таблицы.

Один из способов решения сформулированной задачи основан на использовании различных квадратурных формул вида

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \equiv I_n \qquad (3)$$

С известным остаточным членом $R_n = [f] = I = I_n$ или его оценкой.

В общем случае, как узловые точки x_i, так и весовые множители (веса) A_i заранее не известны и подлежат определению при выводе каждой конкретной квадратурной формулы на основе предъявляемых к ней требований.

Алгоритм решения задачи:

1) Выбирают конкретную квадратурную формулу (3) и вычисляют I_n. Если значения функции f_i заданы приближенно, то фактически вычисляют лишь приближенное значение $\bar{I}_n$ для точного I_n.

2) Приближенно принимают, что $I \approx \bar{I}_n$

3) Пользуясь конкретным выражением для остаточного члена или оценкой его для выбранной квадратурной формулы, вычисляют погрешность метода:

$\Delta_1 = |I - I_n| = |R_n|$.

4) Определяют погрешность вычисления $\bar{I}_n$:

$\Delta_2 = |I - \bar{I}_n|$

по погрешности приближения значений f_i.

5) Находят полную абсолютную погрешность приближенного значения I_n:
$\Delta = \left| I - \bar{I}_n \right| \le \Delta_1 + \Delta_2$.

6) Получают решение задачи в виде
$I = \bar{I}_n \pm \Delta$.

Используемые в алгоритме квадратурные формулы строятся на основании тех или иных критериев, определяющих положение узловых точек и величины весовых множителей. Такими критериями могут быть: представление интеграла в виде интегральной суммы; аппроксимация подынтегральной функции (например, многочленом) и последующее интегрирование аппроксимирующей функции; требование, чтобы формула (21) была абсолютно точной для определенного класса функций, и др.

2. Простейшие квадратурные формулы

Формулы прямоугольников. Как известно, определенный интеграл в силу своего построения есть предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max h_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} h_i f(\xi_i) \quad , (22)$$

каждая, из которых соответствует некоторому разбиению D_n: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$ и произвольному набору точек для каждого разбиения; .

Ограничиваясь конечным числом слагаемых в правой части равенства (22) и принимая в качестве набора ξ_i те или иные значения аргумента из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, можно получить различные формы приближенного интегрирования. Так, принимая в качестве набора ξ_i значения левых или правых концов отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, получим соответственно *формулу левых* или *правых прямоугольников* $(h_i = 1/n = const)$:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f_i \equiv I_Л \quad , (23)$$

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f_i \equiv I_П \quad . (24)$$

Пример 1: С помощью формул левых и правых прямоугольников вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$, полагая $n = 4$.

Зная приделы интегрирования $a = 1$ и $b = 9$, находим шаг $h = \frac{b-a}{n} = 2$; тогда точками разбиения служат $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$, а значения подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{x+2}$ в этих точках таковы:

$$y_0 = f(x_0) = 1/3; y_1 = f(x_1) = 1/5; y_2 = f(x_2) = 1/7; y_3 = f(x_3) = 1/9; y_4 = f(x_4) = 1/11.$$

Далее найдем числовое значение интеграла, пользуясь формулой (23):

$$I_Л = \frac{a-b}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 2(1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9) \approx 1{,}6024.$$

Если вычисление определенного интеграла произвести по формуле (24), то получим:

$$I_П = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2(1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11) \approx 1{,}1053.$$

Наиболее часто используемой формулой, основанной на идее представления определенного интеграла в виде интегральной суммы, является *формула прямоугольников,* где в качестве ξ_i берут середины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Для равномерной сетки $h_i = h$ эта формула имеет следующий вид:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} \equiv I_n, \quad (25)$$

где $f_{i-1/2} = f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$; $x_0 = a$; $x_n = b$.

Выражение для остаточного члена квадратурной формулы (25):

$$R_n[f] = I - I_n = \frac{b-a}{24}h^2 f''(\eta). \quad (26)$$

Таким образом, оценку погрешности квадратурной формулы (25) можно представить в следующем виде:

$$\Delta_I = \left|\int_a^b f(x)dx - (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_{i-1/2}\right| \le \frac{b-a}{24}h^2 M_2, \quad (27)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$.

Суммарная вычислительная погрешность $\overline{I_n}$ составит

$$\Delta_2 = (b-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varepsilon = (b-a)\varepsilon. \quad (28)$$

Эта погрешность не зависит от числа разбиений отрезка интегрирования, а пропорциональна только его длине.

Пример 2: Вычислить с помощью формулы прямоугольников интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, полагая *n = 4*. Оценить погрешность полученного приближенного значения.

По заданным пределам интегрирования и числу разбиений n определим шаг:

$h = \frac{1-0}{4} = 0,25$. далее на основании формулы (25) имеем

$$I_4 = 0,25\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right].$$

Вычислив необходимые значения функции с тремя верными в узком смысле знаками $(\varepsilon = 0,0005)$, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,25(0,889 + 0,727 + 0,615 + 0,533) = 0,691.$$

Погрешность метода оценим по формуле (27), для чего предварительно найдем максимум абсолютной величины второй производной подынтегральной функции:

$$M_2 = \max_{[0,1]}\left|\left(\frac{1}{1+x}\right)''\right| = \max_{[0,1]}\frac{2}{(1+x)^3} = 2.$$

Таким образом, погрешность метода есть

$$\Delta_1 \le (1/24)\cdot 0,25^2 \cdot 2 \approx 0,0053.$$

Пользуясь формулой (28), найдем вычислительную погрешность:

$$\Delta_2 \le 1\cdot 0,0005 = 0,0005.$$

Следовательно за полную погрешность приближенного вычисления интеграла можно принять $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,006$, а окончательный ответ записать в виде $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,691 \pm 0,006.$ Для сравнения приведем несколько знаков точного значения вычислительного интеграла: $\ln 2 = 0,693147...$.

Практическая часть

Варианты заданий

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1.	$\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	2.	$\int_{2}^{3,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	3.	$\int_{0,5}^{1,6} \frac{x^2+0,5}{\sqrt{x^2+1}}dx$
4.	$\int_{2,2}^{3,4} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$	5.	$\int_{1,2}^{2} \frac{x-0,5}{\sqrt{x^2-1}}dx$	6.	$\int_{2,2}^{3,8} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}dx$
7.	$\int_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}dx$	8.	$\int_{1}^{2,6} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$	9.	$\int_{0,8}^{1,6} \frac{0,5x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$
10.	$\int_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$	11.	$\int_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$	12.	$\int_{2,6}^{3,4} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1,5}}dx$
13.	$\int_{0,8}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$	14.	$\int_{2,4}^{3,2} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx$	15.	$\int_{0,2}^{2} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}}dx$
16.	$\int_{0,7}^{1,7} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	17.	$\int_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}dx$	18.	$\int_{1,4}^{2,6} \frac{x}{\sqrt{x^2+2,5}}dx$
19.	$\int_{2,2}^{3,4} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	20.	$\int_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}dx$	21.	$\int_{-2,5}^{-1,3} \frac{x}{\sqrt{x^2+1,8}}dx$
22.	$\int_{-0,4}^{1,8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	23.	$\int_{0,6}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$	24.	$\int_{1,6}^{2,8} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1,2}}dx$
25.	$\int_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2,5}dx$	26.	$\int_{0,6}^{1,8} \frac{x^2}{\sqrt{x+1,7}}dx$	27.	$\int_{0,4}^{1,8} \frac{x^2+1,4}{\sqrt{x^2+0,2}}dx$
28.	$\int_{2,2}^{2,8} \frac{4-x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	29.	$\int_{0,8}^{1,5} \frac{x}{\sqrt{x^2+2,4}}dx$	30.	$\int_{0,4}^{1,7} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Контрольные вопросы

1. Как в методе прямоугольников уменьшить погрешность нахождения интеграла?
2. В каких случаях метод прямоугольников находит применение?

Практическая работа №12.
Численное интегрирование. Метод трапеций.

Цель работы: освоение численных методов интегрирования; изучение возможности нахождения интегралов различными методами.

Теоретическая часть

Формула трапеций. Перейдем теперь к другому способу построения квадратурных формул, связанному с аппроксимацией подынтегральной функции интерполяционным многочленом. Рассмотрим простейший случай аппроксимации многочленом первой степени с узлами в точках a и b:

$$f(x)f(a)+\frac{x-a}{b-a}\left[f(b)-f(a)\right]+(x-a)(x-b)\frac{f''(\bar{\eta})}{2};\ \bar{\eta}\in(a,b).$$

Интегрируя правую и левую части этого равенства и используя вторую теорему о среднем значении функции при интегрировании последнего слагаемого правой части, находим:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta);\ \eta\in(a,b).$$

Таким образом, предполагая, что отрезок интегрирования мал, получаем квадратурную формулу, называемую *формулой трапеций*:

$$I\equiv\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]\equiv I_2 \qquad (1)$$

с остаточным членом

$$R_2[f]=I-I_2=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta);\ \eta\in(a,b). \qquad (2)$$

Используя выражение (2) для остаточного члена, оценку погрешности квадратурной формулы можно представить в виде:

$$\Delta_1=\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right|\le\frac{(b-a)^3}{12}M_2, \qquad (3)$$

где

$$M_2=\max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

Полученные выражения для остаточного члена (2) и погрешности (3) показывают, что квадратурная формула является точной для всех линейных функций, поскольку вторая производная таких функций равна нулю, а, следовательно, равны пулю остаточный член и погрешность.

Пример. Вычислить с помощью формулы трапеций интеграл $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$. Оценить погрешность полученною приближенного значения.

На основании формулы (1) имеем

$$I_2=0{,}5\left[f(0)+f(1)\right].$$

Вычислив необходимые значения функции, получим

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx0{,}5(1+0{,}5)=0{,}75.$$

Погрешность метода оценим по формуле (3), используя значение *M=2*:

$$\Delta_1\le\frac{1^3}{12}\cdot2\approx0{,}17.$$

Вычислительная погрешность, очевидно, равна нулю, так как значения функции и I_2, найдены абсолютно точно.

Итак, окончательно имеем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{,}75 + 0{,}17$.

Отметим, что в данном примере получилось гораздо менее точное решение, чем в предыдущем примере. Однако использование в данном примере формулы трапеций имеет свои преимущества. Во-первых, если подынтегральная функция задана в виде таблицы ее значений в узлах x_i, то для использования формулы прямоугольников необходимо определить значения этой функции еще и в точках $x_i \pm h/2$, что вносит дополнительные трудности и дополнительную погрешность. Во-вторых, в примере 3 значения подынтегральной функции были вычислены всего лишь в двух точках, в то время как в примере 2 - в четырех точках, что, естественно, потребовало большего времени.

Практическая часть

Варианты заданий

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1.	$\int\limits_{-0{,}5}^{1{,}3} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	2.	$\int\limits_{2}^{3{,}5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	3.	$\int\limits_{0{,}5}^{1{,}6} \frac{x^2+0{,}5}{\sqrt{x^2+1}}dx$
4.	$\int\limits_{2{,}2}^{3{,}4} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$	5.	$\int\limits_{1{,}2}^{2} \frac{x-0{,}5}{\sqrt{x^2-1}}dx$	6.	$\int\limits_{2{,}2}^{3{,}8} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}dx$
7.	$\int\limits_{0{,}2}^{2{,}4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}dx$	8.	$\int\limits_{1}^{2{,}6} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$	9.	$\int\limits_{0{,}8}^{1{,}6} \frac{0{,}5x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$
10.	$\int\limits_{-0{,}4}^{1{,}6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$	11.	$\int\limits_{-0{,}8}^{1{,}4} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$	12.	$\int\limits_{2{,}6}^{3{,}4} \frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+1{,}5}}dx$
13.	$\int\limits_{0{,}8}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$	14.	$\int\limits_{2{,}4}^{3{,}2} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}dx$	15.	$\int\limits_{0{,}2}^{2} \frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+1}}dx$
16.	$\int\limits_{0{,}7}^{1{,}7} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	17.	$\int\limits_{0{,}2}^{2{,}5} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}dx$	18.	$\int\limits_{1{,}4}^{2{,}6} \frac{x}{\sqrt{x^2+2{,}5}}dx$
19.	$\int\limits_{2{,}2}^{3{,}4} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	20.	$\int\limits_{0{,}4}^{1{,}6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}dx$	21.	$\int\limits_{-2{,}5}^{-1{,}3} \frac{x}{\sqrt{x^2+1{,}8}}dx$
22.	$\int\limits_{-0{,}4}^{1{,}8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$	23.	$\int\limits_{0{,}6}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$	24.	$\int\limits_{1{,}6}^{2{,}8} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1{,}2}}dx$
25.	$\int\limits_{0{,}2}^{1{,}11} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2{,}5}dx$	26.	$\int\limits_{0{,}6}^{1{,}8} \frac{x^2}{\sqrt{x+1{,}7}}dx$	27.	$\int\limits_{0{,}4}^{1{,}8} \frac{x^2+1{,}4}{\sqrt{x^2+0{,}2}}dx$
28.	$\int\limits_{2{,}2}^{2{,}8} \frac{4-x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	29.	$\int\limits_{0{,}8}^{1{,}5} \frac{x}{\sqrt{x^2+2{,}4}}dx$	30.	$\int\limits_{0{,}4}^{1{,}7} \frac{x+2{,}2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Контрольные вопросы

1. Как уменьшить в методе трапеций погрешность нахождения интеграла?
2. В каких случаях метод трапеций находит применение?
3. Можно ли получить методами прямоугольников и трапеций точное значение интеграла?

Практическая работа №13.
Численное интегрирование. Метод Симпсона.

Цель работы: освоение численных методов интегрирования; изучение возможности нахождения интегралов различными методами.

Теоретическая часть

При вычислении определенного интеграла не всегда получаем точное решение. Не всегда удается представление в виде элементарной функции. Формула Ньютона-Лейбница не подходит для вычисления, поэтому необходимо использовать методы численного интегрирования. Такой метод позволяет получать данные с высокой точностью. Метод Симпсона (метод парабол) является таковым.

Метод парабол – суть, формула, оценка, погрешности, иллюстрации

Задана функция вида $y=f(x)$, имеющая непрерывность на интервале $[a;b]$, необходимо произвести вычисление определенного интеграла

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Необходимо разбить отрезок [a;b] на n отрезков вида $[x_{2i-2};x_{2i}]$, i=1, 2, ..., n с длиной $2h=(b-a)/n$ и точками $a=x_0<x_2<x_4<...<x_{2\pi-2}<x_{2\pi}=b$. Тогда точки x_{2i-1}, i=1, 2, ... , n считаются серединами отрезков $[x_{2i-2};x_{2i}]$, i=1, 2, ... , n. Данный случай показывает, что определение узлов производится через $x_i=a+i\cdot h$, i=0, 1, ... , 2n.

Каждый интервал $[x_{2i-2};x_{2i}]$, i=1, 2,..., n подынтегральной функции приближен при помощи параболы, заданной $y=a_ix^2+b_ix+c_i$, проходящей через точки с координатами $(x_{2i-2};f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1};f(x_{2i-1}))$, $(x_{2i};f(x_{2i}))$. Поэтому метод и имеет такое название.

Данные действия выполняются для того, чтобы интеграл

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}\left(a_ix^2d+b_ix+c_i\right)dx$$

взять в качестве приближенного значения

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

Это и есть суть метода парабол.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^5 \frac{xdx}{x^4+4}$ при помощи метода Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 5 частей.

Решение/

По условию известно, что $a=0$; $b=5$; $n=5$, $f(x)=\frac{x}{x^4+4}$.

Тогда запишем формулу Симпсона в виде

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}¿¿$$

Чтобы применить ее в полной мере, необходимо рассчитать шаг по формуле:

$$h=\frac{b-a}{2n},$$

определить точки $x_i=a+i\cdot h$, i=0, 1, ..., 2n и найти значения подынтегральной функции f(xi), i =0, 1, ..., 2n.

Промежуточные вычисления необходимо округлять до 5 знаков. Подставим значения и получим

$$h=\frac{b-a}{2n}=\frac{5-0}{2\cdot 5}=0,5$$

Найдем значение функции в точках:

i=0: $x_i=x_0=a+i\cdot h=0+0\cdot 0.5=0 \Rightarrow f(x_0)=f(0)=\frac{0}{0^4+4}=0$

i=1: $x_i=x_1=a+i\cdot h=0+1\cdot 0.5=0.5 \Rightarrow f(x_1)=f(0.5)=\frac{0.5}{0.5^4+4}\approx 0.12308$

...

i=10: $x_i=x_{10}=a+i\cdot h=0+10\cdot 0.5=5 \Rightarrow f(x_{10})=f(5)=\frac{5}{5^4+4}\approx 0.00795$

Наглядность и удобство оформляется в таблице, приведенной ниже

Необходимо подставить результаты в формулу метода парабол:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{x^4+4}\approx\frac{h}{3}¿¿$$

$$¿\frac{0.5}{3}¿$$

$$+2\cdot(0.2+0.1+0.03529+0.01538)+0.00795\approx 0.37171$$

Для вычисления мы выбрали определенный интеграл, который можно вычислить по Ньютону-Лейбницу. Получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{x^4+4}=\frac{1}{2}\int_0^5 \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+4}=(\frac{1}{4}arctg\frac{x^2}{2})\Big|_0^5=\frac{1}{4}arctg\frac{25}{2}\approx 0.37274$$

Ответ: Результаты совпадают до сотых.

Контрольные вопросы

1. Какой аппроксимирующей заменяется подынтегральная функция в методе Симпсона?
2. Если для построения аппроксимирующей функции средняя точка берется не в середине участка, то что изменится в алгоритме метода Симпсона?
3. Обязательно ли участок интегрирования разбивать при реализации метода Симпсона на более мелкие участки?
4. Дана подынтегральная функция *f(x)=x+7*, с каким методом совпадет метод Симпсона?
5. Почему метод Симпсона использует аппроксимацию подынтегральной функции квадратичной параболой, а способен интегрировать без ошибки и кубические параболы?

Практическая работа №14.
Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы Эйлера.

Цель занятия: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методами Эйлера.

Теоретическая часть

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

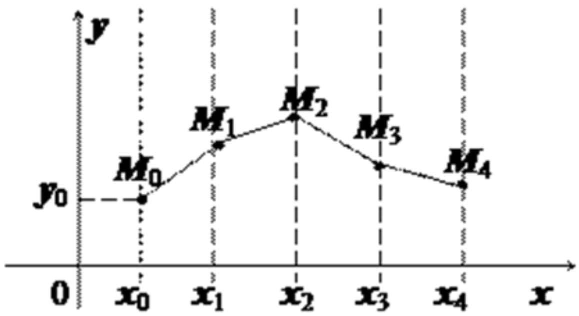
Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

Рассмотрим некоторые из них.

Метод Эйлера.

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию:



При подстановке заданных начальных условий $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке $\operatorname{tg}\alpha_0 = y' = f(x_0; y_0)$.

Заменив на отрезке $[\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1]$ интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0)$.

Производя аналогичную операцию для отрезка $[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2]$, получаем:

$y_2 = y_1 + f(x_1; y_1)(x_2 - x_1)$.

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**.

Можно записать общую формулу вычислений:

$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1})$.

Если последовательность точек $\boldsymbol{x}_i$ выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние $\boldsymbol{h}$, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера (Эйлера-Коши)** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0; y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0; y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0,y_0)$ и $f(x_1,y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0; y_0) + f(x_1; y_1)}{2}h$$

Затем находится значение производной в точке $(x_1; y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0,y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0,y_0)$ и $f(x_1; y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0; y_0) + f(x_1; y_1^{(1)})}{2}h,$$

Затем третье и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений y.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Практическая часть.

Варианты заданий

Решить с помощью методов Эйлера следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях, на заданном отрезке с шагом 0,2. Сравнить полученные результаты.

№ варианта	Уравнение $y' = f(x,y)$	Начальные условия (x_0, y_0)	Отрезок [x_0,$x_к$]
1	$y' = x + 1$	$x_0 = -1, y_0 = 0$	[–1, 1]
2	$y' = y - x$	$x_0 = 0, y_0 = 2$	[0, 2]
3	$y' = (y-1)^2$	$x_0 = 1, y_0 = 0$	[1, 3]
4	$y' = x(y-1)$	$x_0 = 0, y_0 = 2$	[0, 2]
5	$y' = 1 - 2x$	$x_0 = 0, y_0 = 2$	[0, 2]
6	$y' = \frac{x-1}{y}$	$x_0 = 1, y_0 = 1$	[1, 3]
7	$y' = -\frac{y}{x}$	$x_0 = 1, y_0 = 1$	[1, 3]
8	$y' = \frac{2y}{x}$	$x_0 = 1, y_0 = 2$	[1, 3]
9	$y' = x^2 + y$	$x_0 = 0, y_0 = 2$	[0, 2]
10	$y' = 2x - 3$	$x_0 = 2, y_0 = 0$	[2, 4]
11	$y' = y - 2x$	$x_0 = 0, y_0 = 3$	[0, 2]
12	$y' = (y+1)^2$	$x_0 = -3, y_0 = -2$	[–3, –1]
13	$y' = 2(x+2)y$	$x_0 = -2, y_0 = 1$	[–2, 0]
14	$y' = 1 + 4x$	$x_0 = -3, y_0 = 5$	[–3, –1]

15	$Y' = \frac{X}{Y+1}$	$X_0 = -4, Y_0 = 4$	[-4,-2]
16	$Y' = \frac{1-Y}{X+2}$	$X_0 = 2, Y_0 = 2$	[2,- 4]
17	$Y' = \frac{3(Y+1)}{X-2}$	$X_0 = 3, Y_0 = 0$	[3,5]
18	$Y' = 2Y + 6X + 3$	$X_0 = 0, Y_0 = -2$	[0,2]
19	$Y' = -\frac{1+Y^2}{XY}$	$X_0 = -3, Y_0 = 1$	[-3,-1]
20	$Y' = 2\sqrt{Y}$	$X_0 = 2, Y_0 = 9$	[2,4]
21	$Y' = -\frac{X(1+2Y)}{1+X^2}$	$X_0 = -2, Y_0 = -0.4$	[-2,0]
22	$Y' = \frac{Y}{1+X}$	$X_0 = -4, Y_0 = -2$	[-4,-2]
23	$Y' = \frac{Y}{2\sqrt{1+X}}$	$X_0 = 0, Y_0 = 2$	[0,2]
24	$Y' = -\frac{Y^2}{X^2}$	$X_0 = 1, Y_0 = 1$	[1,3]

Пример. Используя 1) метод Эйлера и 2) модифицированный метод Эйлера, найдите приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a,b]$ с шагом $h = 0,1$. Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y(0.6) = 0.8$, $x \in [0.6; 1.6]$

Решение.

1). Заданный интервал [0.6; 1.6] разобьем на $n = 10$ равных частей длины $h = 0,1$. Значения неизвестной функции y(x) в точках xi (i = 1…n) находятся по рекуррентной формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), i = 0,1,\ldots,n-1$$

Имеем:

$$y_0 = y(x_0) = y(0.6) = 0.8$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (x_i + \cos\frac{y_i}{\sqrt{10}})$$

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
0	0,6	0,8	1,5682
1	0,7	0,9568	1,6546
2	0,8	1,1223	1,7377
3	0,9	1,2960	1,8172
4	1	1,4778	1,8928
5	1,1	1,6670	1,9642
6	1,2	1,8635	2,0313
7	1,3	2,0666	2,0940
8	1,4	2,2760	2,1520
9	1,5	2,4912	2,2054
10	1,6	2,7117	

2) При решении методом Эйлера-Коши вначале вычисляется нулевое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

затем приближение уточняется

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h_i}{2}\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)\right)$$

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	y_i^0	$f\left(x_i, y_i^{(0)}\right)$
0	0,6	0,8	1,5682		
1	0,7	0,9611	1,6542	0,9568	1,6546
2	0,8	1,1307	1,7368	1,1266	1,7372
3	0,9	1,3084	1,8156	1,3044	1,8161
4	1	1,4937	1,8905	1,4899	1,8910
5	1,1	1,6863	1,9612	1,6827	1,9617
6	1,2	1,8858	2,0274	1,8824	2,0280
7	1,3	2,0916	2,0891	2,0885	2,0897
8	1,4	2,3034	2,1462	2,3005	2,1468
9	1,5	2,5207	2,1988	2,5180	2,1994
10	1,6	2,7430	2,2468	2,7406	2,2474

Ответ:

x	y (Эйлера)	y (Эйлера-Коши)
	0,8	0,8
	0,9568	0,9611
	1,1223	1,1307
	1,2960	1,3084
	1,4778	1,4937
	1,6670	1,6863
	1,8635	1,8858
	2,0666	2,0916
	2,2760	2,3034
	2,4912	2,5207
	2,7117	2,7430

Контрольные вопросы

1) Что является решением дифференциального уравнения?
2) Когда применяются численные методы решения дифференциальных уравнений?
3) На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
4) Перечислите известные вам численные методы решения дифференциальных уравнений.
5) В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
6) В чем заключается суть метода Эйлера?
7) В чем смысл уточненного метода Эйлера?
8) Как рассчитать погрешность вычислений в приближенных методах?

Практическая работа №15.
Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутты.

Цель занятия: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутты.

Теоретическая часть

Метод Рунге – Кутты является более точным по сравнению с методом Эйлера.

Метод Рунге-Кутты второго порядка основан на разложении функции y(x) в ряд Тейлора и учете трех его первых членов (до второй производной включительно).

Метод Рунге-Кутты второго порядка с полным шагом реализуется по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f_i + f\left(x_i + h, y_i + h \cdot f_i\right)\right]. \qquad (1)$$

Его геометрическая интерпретация (рис. 1.) заключается в следующем:

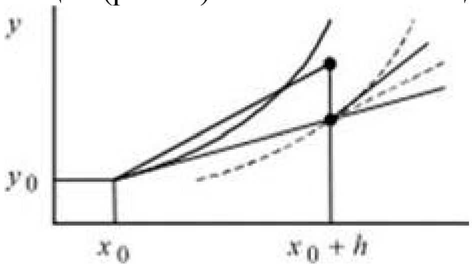


Рис. 1. Метод Рунге-Кутты второго порядка с полным шагом

1. Приближенно вычисляют значение функции в точке x_i+h по формуле Эйлера $y_{i+1} = y_i + h \cdot f_i$ и наклон интегральной кривой в этой точке $y'_{i+1} = f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$.
2. Находят средний наклон на шаге *h*:

$$\frac{y'_i + y'_{i+1}}{2}.$$

3. По этому наклону уточняют значение y_{i+1} по формуле (1).

Формула метода **Рунге-Кутта второго порядка с половинным шагом** имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f_i\right).$$

Геометрическая интерпретация метода заключается в следующем

1. Делают пробный шаг $x_i + \frac{h}{2}$ и по формуле Эйлера находят

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f_i.$$

2. В найденной точке определяют наклон интегральной кривой

$$y'_{i+1/2} = f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right).$$

3. По этому наклону определяют приращение функции на следующем шаге

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_{i+1/2}.$$

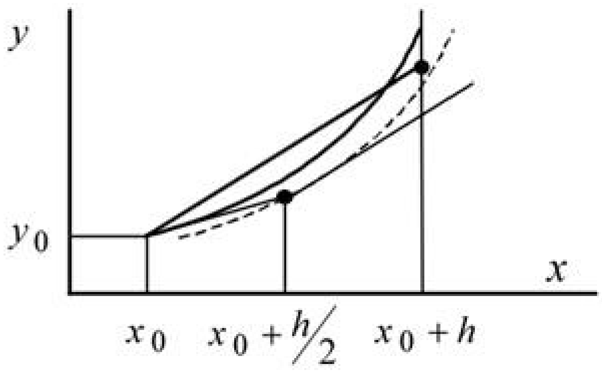


Рисунок 2. Метод Рунге-Кутта второго порядка с половинным шагом

Практическая часть

Пример. Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

на отрезке [a, b] с шагом h = 0,2 методом Рунге-Кутты 2-го порядка.
Решение.

$y' = \frac{2x-5}{x^2} y + 5;$ y(2) = 4; [2; 3] h = 0.2

1. Найдем сначала точное решение задачи.

$$y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5.$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 0,$$

$$y' = \frac{2x-5}{x^2} y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5}{x^2} y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x-5}{x^2} dx,$$

$$\int \frac{2x-5}{x^2} dx = \int \frac{2}{x} dx - \int 5x^{-2} dx = 2\ln x + \frac{5}{x} + C,$$

$$\ln y = 2\ln x + \frac{5}{x} + C,$$

$$y = e^{2\ln x + \frac{5}{x} + C} = e^{\ln x^2} \cdot e^{\frac{5}{x}} \cdot e^{C} = C_1 x^2 e^{\frac{5}{x}}.$$

Теперь положим $C_1 = C_1(x)$

$$y' = \left(C_1 x^2 e^{\frac{5}{x}}\right)' = C_1' x^2 e^{\frac{5}{x}} + 2C_1 x e^{\frac{5}{x}} + C_1 x^2 e^{\frac{5}{x}} \left(\frac{-5}{x^2}\right) = C_1' x^2 e^{\frac{5}{x}} + 2C_1 x e^{\frac{5}{x}} - 5C_1 e^{\frac{5}{x}}.$$

Подставим в уравнение

$$y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5.$$

Получим

$$C_1' x^2 e^{\frac{5}{x}} + 2C_1 x e^{\frac{5}{x}} - 5C_1 e^{\frac{5}{x}} - \frac{2x-5}{x^2} C_1 x^2 e^{\frac{5}{x}} = 5,$$

$$C_1' x^2 e^{\frac{5}{x}} + 2C_1 x e^{\frac{5}{x}} - 5C_1 e^{\frac{5}{x}} - 2C_1 x e^{\frac{5}{x}} + 5C_1 e^{\frac{5}{x}} = 5,$$

$$C_1' x^2 e^{\frac{5}{x}} = 5,$$

$$C_1' = \frac{5}{x^2 e^{\frac{5}{x}}},$$

$$C_1 = \int \frac{5}{x^2} e^{\frac{-5}{x}} dx = \int e^{\frac{-5}{x}} d\left(\frac{-5}{x}\right) = e^{\frac{-5}{x}} + C_2.$$

Итак, получили общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 x^2 e^{\frac{5}{x}} = \left(e^{\frac{-5}{x}} + C_2\right) x^2 e^{\frac{5}{x}} = x^2\left(1 + C_2 e^{\frac{5}{x}}\right).$$

Найдем константу C_2 из условия y(2) = 4:

$$4 = 2^2\left(1 + C_2 e^{\frac{5}{2}}\right),$$

$$4 = 4\left(1 + C_2 e^{\frac{5}{2}}\right),$$

$$1 + C_2 e^{\frac{5}{2}} = 1,$$

$$C_2 e^{\frac{5}{2}} = 0,$$

$$C_2 = 0.$$

Получим частное решение:

$$y = x^2\left(1 + 0 \cdot e^{\frac{5}{x}}\right),$$

$$y = x^2.$$

x	*y*
2	4
2,2	4,84
2,4	5,76
2,6	6,76
2,8	7,84
3	9

2. Найдем численное решение задачи методом Рунге-Кутты.

Схема Рунге-Кутты второго порядка описывается рекуррентными формулами:

$$k_1 = hf(x_i; y_i),$$

$$k_2 = hf ¿,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

На первом шаге имеем:

$$f(x, y) = \frac{2x - 5}{x^2} + 5,$$

h=0.2,

$x_0=2$; $y_0=4$,

$$k_1^0 = 0.2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 - 5}{2^2} \cdot 4 + 5\right) = 0.8,$$

$$x_1 + h = 2 + 0.2 = 2.2;\ y_1 + k_1^1 = 4 + 0.8 = 4.8,$$

$$k_2^0=0.2\left(\frac{2\cdot 2.2-5}{2.2^2}\cdot 4.8+5\right)=0.880992,$$

$$\Delta y_0=\frac{1}{2}\left(k_1^0+k_2^0\right)=\frac{1}{2}(0.8+0.880992)=0.840496,$$

$$y_1=y_0+\Delta y_0=4+0.840496=4.840496.$$

На втором шаге имеем: $x_1=x_0+h=2+0.2=2.2$; $y_1=4.840496$.

Приведем расчет дальнейших шагов в таблице:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y_i	4	4,840496	5,760627	6,760508	7,840208	8,999767
$f(x_i, y_i)$	4	4,399939	4,799978	5,200015	5,600016	
k_1^i	0,8	0,879988	0,959996	1,040003	1,120003	
x_i+h	2,2	2,4	2,6	2,8	3	
$y_i+k_1^i$	4,8	5,720484	6,720623	7,800511	8,960211	
$f(x_i+h;\, y_i+k_1^i)$	4,404959	4,801372	5,198835	5,596978	5,995579	
k_2^i	0,880992	0,960274	1,039767	1,119396	1,199116	
Δy_i	0,840496	0,920131	0,999881	1,079699	1,159559	

Итак, получили численное решение методом Рунге-Кутты второго порядка:

i	x_i	y_i
0	2	4
1	2,2	4,840496
2	2,4	5,760627
3	2,6	6,760508
4	2,8	7,840208
5	3	8,999767

1. В чем основная идея метода Рунге-Кутта?
2. В чем отличие одношаговых методов Эйлера и Рунге-Кутта?

3. Стадия (этап) метода Рунге – Кутты.
4. Сходимость метода.

Практическая работа №16.
Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка погрешности по правилу Рунге.

Цель занятия: закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; получить умения оценивать погрешности по правилу Рунге.

Практическая часть

Пример. Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

на отрезке [a, b] с шагом 2h = 0,4 методом Рунге-Кутты 2-го порядка с оценкой погрешности по правилу Рунге. Найти точное решение задачи.

Решение.

$y' = \frac{2x-5}{x^2} y + 5$;   y(2) = 4;   [2; 3]   2h = 0,4

Для оценки погрешности по правилу Рунге вычислим решение заданного уравнения с шагом 2h=0.4.

i	0	1	2
x_i	2	2,4	2,8
y_i	4	5,761111	7,838671
$f(x_i, y_i)$	4	4,799961	5,599898
k_1^i	1,6	1,919985	2,239959
$x_i + h$	2,4	2,8	3,2
$y_i + k_1^i$	5,6	7,681096	10,07863
$f(x_i + h; y_i + k_1^i)$	4,805556	5,587839	6,377938
k_2^i	1,922222	2,235136	2,551175
Δy_i	1,761111	2,07756	2,395567

i	x_i	y_i^h	y_i^{2h}
0	2	4	4
1	2,2	4,840496	
2	2,4	5,760627	5,761111
3	2,6	6,760508	
4	2,8	7,840208	7,838671
5	3	8,999767	

Формула

$$\frac{\left|y_i^h - y_i^{2h}\right|}{2^p - 1}$$

дает погрешность решения y_i^h. Здесь p = 2 – порядок точности решения.

y_i^h	y_i^{2h}	$\varepsilon = \frac{\left|y_i^h - y_i^{2h}\right|}{2^p - 1}$
4	4	0
4,840496		
5,760627	5,761111	0,000161
6,760508		
7,840208	7,838671	0,000512
8,999767		

Контрольные вопросы

1. Локальная и глобальная погрешности.
2. Перенесенная погрешность.
3. Правило Рунге.

Основная литература:

1. Гильмутдинов, Р.Ф. Численные методы / Р.Ф. Гильмутдинов, К.Р. Хабибуллина ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный

исследовательский технологический университет». – Казань : Издательство КНИТУ, 2018. – 92 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=500887
2. Корнеев, П.К. Численные методы : [16+] / П.К. Корнеев, Е.О. Тарасенко, А.В. Гладков ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет». – Ставрополь : СКФУ, 2017. – Ч. Часть 1. – 145 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=563066
3. Численные методы и программирование: Учебное пособие / В.Д. Колдаев; Под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 336 с

Дополнительная литература:

1. Численные методы : [16+] / П.К. Корнеев, Е.О. Тарасенко, А.В. Гладков, М.А. Дерябин ; Министерство науки и высшего образования РФ, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет». – Ставрополь : СКФУ, 2018. – Ч. Часть 2. – 107 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=562830