

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского  
федерального университета

Дата подписания: 18.04.2024 16:02:29

Уникальный программный ключ: «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

# Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине «ФИЗИКА» для студентов направления подготовки

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

## Содержание

№ п/п		Стр.
	Введение	
1.	Цель и задачи изучения дисциплины	
2.	Оборудование и материалы	
3.	Наименование практических работ	
4.	Содержание практических работ	
4.1	Практическая работа №1 Кинематика материальной точки.	
4.2	Практическая работа №2 Динамика материальной точки.	
4.3.	Практическая работа №3 Работа и энергия. Механика твердого тела.	
4.4	Практическая работа №4 Механические колебания и волны.	
4.5	Практическая работа №5 Основы молекулярно-кинетической теории.	
4.6	Практическая работа №6 Основы термодинамики.	
4.7	Практическая работа №7 Электростатика.	
4.8	Практическая работа №8 Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в диэлектриках.	
4.9	Практическая работа №9 Законы постоянного тока.	
	Практическая работа №10. Понятие о магнитном поле. Закон Био – Савара-Лапласа.	
	Практическая работа №11. Электромагнитное поле.	
	Практическая работа №12. Переменный электрический ток.	
	Практическая работа №13. Геометрическая оптика.	
	Практическая работа №14. Волновая оптика. Интерференция и дифракция света.	
	Практическая работа №15. Квантовая природа излучения.	
	Практическая работа №16. Модели атома Томсона и Резерфорда. Теория атома водорода по Бору.	
	Практическая работа №17. Основы физики атомного ядра. Элементарные частицы.	
5	Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1	Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины	
5.2	Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	
5.3	Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины	

## Введение

Практические занятия создают оптимальные дидактические условия для деятельностного освоения студентами содержания и методологии изучаемой дисциплины «Физика», использование специального лабораторного оборудования и технических средств. Практические занятия занимают преимущественное место при изучении общепрофессиональных и профессиональных дисциплин. Практические занятия проводятся с целью выработки практических умений и приобретения навыков в решении задач, отработки упражнений, выполнении чертежей, производстве расчётов и т.п.

Целью практических занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнять определённые действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных, необходимых в последующей учебной деятельности по общепрофессиональным и профессиональным дисциплинам.

Библиографический список содержит сведения о справочной литературе и дополнительных изданиях, необходимых для углубленного изучения отдельных вопросов.

## ***1. Цель и задачи изучения дисциплины***

Целью освоения дисциплины «Физика» является формирование у студентов компетенций позволяющий выработать навыки физических исследований в сферах академической, профессиональной и общенациональной деятельности.

Задачи освоения дисциплины:

- изучение законов окружающего мира в их взаимосвязи;
- овладение фундаментальными принципами и методами решения научно-технических задач;
- формирование навыков по применению положений фундаментальной физики к грамотному научному анализу ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться при создании новых технологий;
- освоение основных физических теорий, позволяющих описать явления в природе, и пределов применимости этих теорий для решения современных и перспективных технологических задач.

## ***2. Оборудование и материалы***

Аппаратные средства: переносной ноутбук, проектор, доска магнитно-маркерная.

Учебная аудитория для проведения учебных занятий, оснащена оборудованием и техническими средствами обучения.

## ***3. Наименование практических работ***

Для заочной формы обучения предусмотрены следующие практические работы:

Практическая работа №1. Простейшие физические модели, положение материальной точки. – 2 часа, Практическая работа №2. Скорость. Вычисление пройденного пути. Ускорение – 2 часа. Практическая работа №3 Нормальное и тангенциальное ускорение. – 2 часа  
Практическая работа №9 Законы постоянного тока. – 2 часа Практическая работа №10 Магнитное поле тока – 2 часа Практическая работа №11 Электромагнитные колебания в колебательном контуре – 2 часа Практическая работа №12 Переменный электрический ток. Электромагнитное поле – 2 часа.

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
2 семестр			
1	<b>Практическая работа № 1. Кинематика материальной точки.</b> Кинематика поступательного движения. Кинематика вращательного движения	2	

	материальной точки. Тангенциальное, нормальное и полное ускорения		
2	<b>Практическая работа № 2. Динамика материальной точки.</b> Первый закон Ньютона. Сила, масса, импульс. Второй закон Ньютона. Принцип независимости действия сил. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса. Закон движения центра масс	2	
3	<b>Практическая работа №3. Работа и энергия. Механика твердого тела.</b> Работа, мощность, энергия: понятия и взаимосвязь. Закон сохранения энергии. Момент инерции. Законы механики вращательного движения твёрдого тела. Кинетическая энергия при вращательном движении.	2	
4	<b>Практическая работа №4. Механические колебания и волны.</b> Колебательные процессы в механике. Гармонические колебания. Свободные затухающие колебания. Вынужденные колебания. Резонанс. Волновые процессы в механике	2	
5	<b>Практическая работа №5. Основы молекулярно-кинетической теории.</b> Основные понятия и законы молекулярно-кинетической теории. Статистические распределения и следствия из них. Элементы физической кинетики	2	
6	<b>Практическая работа №6. Основы термодинамики.</b> Внутренняя энергия идеального газа. Внутренняя энергия многоатомного газа Работа в термодинамике. Работа газа при изотермическом процессе. Начала термодинамики и следствия из них.	2	
7	<b>Практическая работа №7.</b> <b>Электростатика.</b> Электрические заряды и закон сохранения заряда. Закон Кулона. Электрическое поле. Напряженность поля. Теорема Гаусса для напряженности электрического поля. Разность потенциалов. Связь напряженности и разности потенциалов. Основные уравнения электростатики в вакууме	2	
8	<b>Практическая работа №8. Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в диэлектриках.</b> Проводник во внешнем электрическом поле. Электроемкость. Конденсаторы. Энергия заряженного проводника. Энергия	2	

	электрического поля. Поляризация диэлектриков. Диэлектрики в электрическом поле.		
	<b>Итого за 2 семестр:</b>	<b>16</b>	
<b>3 семестр</b>			
9	<b>Практическая работа №9. Законы постоянного тока.</b> Постоянный электрический ток. Закон Ома. Правила Кирхгофа и их применение к расчету электрических цепей. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока. Классическая электронная теория проводимости металлов	2	
10	<b>Практическая работа №10. Понятие о магнитном поле. Закон Био – Савара-Лапласа.</b> Характеристики магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Теорема о циркуляции магнитного поля. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов	2	
11	<b>Практическая работа №11. Электромагнитное поле.</b> Закон полного тока. Ток смещения. Единая теория электрических и магнитных явлений Максвелла. Система уравнений Максвелла. Скорость распространения электромагнитного поля Релятивистская трактовка магнитных явлений	2	
12	<b>Практическая работа №12. Переменный электрический ток.</b> Переменный электрический ток: основные понятия и законы. Вихревое электрическое поле. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока	2	
13	<b>Практическая работа №13. Геометрическая оптика.</b> Фотометрия. Основы геометрической оптики. Законы отражения и преломления света. Явление полного внутреннего отражения. Принцип Ферма. Линзы, формула тонкой линзы. Оптическая сила линзы. Изображение предметов с помощью линз. Зеркала. Система линз как основа оптических приборов	2	
14	<b>Практическая работа №14. Волновая оптика. Интерференция и дифракция света.</b> Явление интерференции световых волн. Дифракция световых волн. Дифракционная решетка. Взаимодействие	2	

	электромагнитных волн с веществом. Дисперсия света. Поглощение света. Рассеяние света. Эффект Доплера. Поляризация света		
15	<b>Практическая работа №15. Квантовая природа излучения.</b> Законы теплового излучения. Закон Стефана-Больцмана. Закон Вина. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Масса, энергия и импульс фотона. Давление света. Эффект Комптона и его элементарная природа	2	
16	<b>Практическая работа №16. Модели атома Томсона и Резерфорда. Теория атома водорода по Бору.</b> Модели атома Томсона и Резерфорда. Линейчатый спектр атома водорода. Постулаты Бора. Спектр атома водорода по Бору. Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества. Некоторые свойства волн де Броиля. Общее уравнение Шредингера. Элементы современной физики атомов и молекул	2	
17	<b>Практическая работа №17. Основы физики атомного ядра. Элементарные частицы.</b> Состав, заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа. Дефект массы и энергия связи ядра. Спин ядра и его магнитный момент. Ядерные силы, их свойства, модели ядра. Закон радиоактивного распада. Элементарные частицы. Космическое излучение. Классификация элементарных частиц. Физическая картина мира.	2	
<b>Итого за 3 семестр</b>		<b>18</b>	
<b>Итого</b>		<b>34</b>	

#### **4. Содержание лабораторных работ**

##### **Раздел 1. Механика**

###### **Практическое занятие 1.**

###### **Тема занятия. Кинематика материальной точки**

**Цель занятия.** Изучить закономерности движения материальной точки.

###### **Теоретическая часть.**

###### *Поступательное движение*

Средняя (путевая) скорость:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где  $\Delta s$  – путь, пройденный точкой за интервал времени  $\Delta t$ . Путь  $\Delta s$  не может убывать и принимать отрицательные значения, т.е.  $\Delta s \geq 0$ .

Мгновенная скорость (проекция на ось  $x$ ):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Среднее ускорение:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Мгновенное (линейное) ускорение (проекция на ось  $x$ ):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Основные уравнения кинематики поступательного движения: скорость и путь равнопеременного поступательного движения:

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

где  $v_0$  – начальная скорость (в момент времени  $t = 0$ ); для равнозамедленного движения  $a < 0$ , для равноускоренного  $a > 0$ ).

При движении тела по вертикальному направлению в поле силы тяжести Земли  $a = g$ .

###### *Движение материальной точки по окружности*

Угловая скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при движении точки по окружности:

$$v = \omega R, \quad a_t = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R,$$

где  $v$  – модуль линейной скорости;  $a_t$  и  $a_n$  – модули тангенциального и нормального ускорений;  $\omega$  – модуль угловой скорости;  $\varepsilon$  – модуль углового ускорения;  $R$  – радиус окружности.

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Основные уравнения кинематики вращательного движения: угловая скорость и угловой путь

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}.$$

Для равнопеременного вращательного движения ( $\varepsilon = \text{const}$ ),  $\varepsilon > 0$  – ускоренное вращение,  $\varepsilon < 0$  – замедленное вращение.

Связь частоты вращения  $n$  и угловой скорости:

$$\omega = 2\pi n.$$

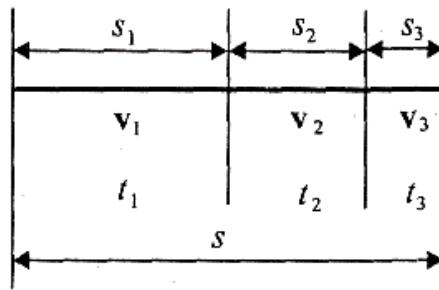
Связь углового перемещения и числа оборотов  $N$ :

$$\varphi = 2\pi N.$$

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью  $v_1 = 16$  км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью  $v_2 = 12$  км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью  $v_3 = 5$  км/ч. Определите среднюю скорость движения студента на всем пути.

Решение:



Длина первой части пути  $s_1 = v_1 t_1$ , второй части пути  $s_2 = v_2 t_2$ , третьей части,  $s_3 = v_3 t_3$ .

По условию,  $s_1 = s_2 + s_3$ , а время  $t_2 = t_3$ . Средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

так как  $s_1$ - половина пути, то весь путь равен  $2s_1$ , время  $t_1 = s_1/v_1$ , оставшееся время  $t_2 + t_3$ , тогда

$$\langle v \rangle = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{2s_1}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

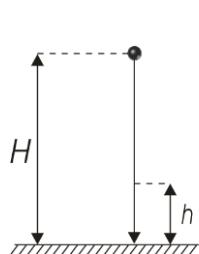
**Задача 2.** Последние 2 метра пути вертикально падающее тело прошло за 0,3 с. С какой высоты падало тело?

Дано:

$$h = 2 \text{ м}$$

$$t_2 = 0,3 \text{ с}$$

$$H = ?$$



Высоту  $H$  падения тела (без начальной скорости) можно определить по формуле  $H = \frac{gt^2}{2}$ . Здесь  $t$  – полное время падения. Очевидно  $t = t_1 + t_2$ , где  $t_1$  – время прохождения первого участка;  $t_2$  – время прохождения последних 2-х метров пути.

Запишем уравнение движения для двух последних метров пути, считая движение равноускоренным:

$$h = v_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2},$$

где  $v_1$  – скорость, с которой тело «входит» в этот участок пути.

Следовательно,

$$v_1 = \frac{h - \frac{gt_2^2}{2}}{t_2} = \frac{h}{t_2} - \frac{gt_2}{2}. \quad (1)$$

Первый участок пути тело проходит без начальной скорости, т.е.  $v_0 = 0$ , а так как  $g = \frac{v_1 - v_0}{t_1}$ , то  $t_1 = \frac{v_1}{g}$ . Учитывая (1), получим  $t_1 = \frac{h}{gt_2} - \frac{t_2}{2}$ .

Таким образом, общее время движения тела  $t = t_1 + t_2$  равно

$$t = \frac{h}{gt_2} - \frac{t_2}{2} + t_2 = \frac{h}{gt_2} + \frac{t_2}{2} \quad (2)$$

Подставляя (2) в формулу для  $H$ , окончательно, получим

$$H = \frac{g}{2} \left( \frac{h}{gt_2} + \frac{t_2}{2} \right)^2 = \frac{10}{2} \cdot \left( \frac{2}{10 \cdot 0,3} + \frac{0,3}{2} \right)^2 \approx 3,33 \text{ м.}$$

**Задача 3.** Тело брошено с начальной скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, дальность полета, а так же тангенциальное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории в начальный момент времени.

Дано:

$$v_0 = 20 \text{ м/с}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

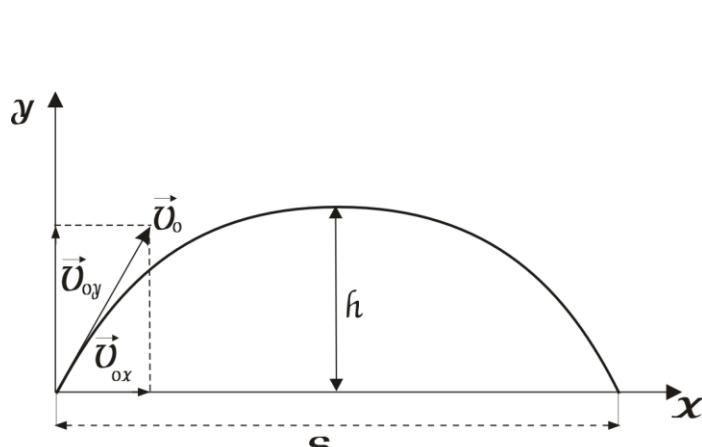
$$h = ?$$

$$S = ?$$

$$a_t = ?$$

$$a_n = ?$$

$$R = ?$$



Воспользуемся принципом суперпозиции движений: движение тела представим как два независимых движения вдоль осей координат  $X$  и  $Y$ .

Из треугольника скоростей найдем начальные скорости

$$v_{ox} = v_0 \cdot \cos \alpha, \quad v_{oy} = v_0 \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

Вдоль оси  $X$  движение равномерное (при отсутствии сопротивления движению, других сил, действующих вдоль оси  $X$ , нет). Поэтому  $v_x$  не изменяется, то есть  $v_x = v_{ox}$ .

Вдоль оси  $Y$  движение – равноускоренное за счет силы тяжести. При подъеме на высоту  $h$  скорость  $v_y$  изменяется со временем по закону:  $v_y = v_{oy} - gt$ . Считая, что в

максимальной точке подъема  $v_y = 0$ , найдем время подъема  $t_1$ :  $v_{oy} = gt_1$ . Учитывая (1), получим

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (2)$$

Из уравнения движения вдоль оси  $Y$  найдем высоту подъема

$$h = v_{oy} \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_0 \cdot \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 5 \text{ м.}$$

Из уравнения равномерного движения вдоль оси  $X$ , найдем дальность полета  $S$ :

$$S = v_{ox} \cdot t = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t,$$

где  $t$  - общее время движения, из соображений симметрии, равное удвоенному времени подъема, т.е.  $t = 2t_1$ . Тогда

$$S = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot 2t_1 = 2v_0 \cos \alpha \cdot v_0 \frac{\sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 34,6 \text{ м.}$$

Тангенциальное ускорение, по определению,  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ , а так как скорость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \text{ и } v_x = v_{ox}, \text{ а } v_y = v_{oy} - gt, \text{ значит } v = \sqrt{v_{ox}^2 + (v_{oy} - gt)^2}.$$

$$\text{Следовательно } a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\sqrt{v_{ox}^2 + (v_{oy} - gt)^2}}{dt} = \frac{(v_{oy} - gt) \cdot g}{\sqrt{(v_{oy} - gt)^2 + v_{ox}^2}}$$

В начальный момент времени  $t=0$ ,

$$a_\tau = \frac{v_{oy} \cdot g}{\sqrt{v_{ox}^2 + v_{oy}^2}} = \frac{v_{oy} \cdot g}{v_0} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha \cdot g}{v_0} = g \cdot \sin \alpha = 5 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение движения тела, очевидно, равно ускорению свободного падения  $g$ . Поэтому  $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g$ .

$$\text{Откуда } a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = 8,66 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{По определению, } a_n = \frac{v^2}{R}. \text{ Следовательно } R = \frac{v^2}{a_n} = 46,2 \text{ м.}$$

**Задача 4.** Две материальные точки движутся согласно уравнениям  $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ ,  $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$ , где  $A_1 = 4 \text{ м/с}$ ,  $B_1 = 8 \text{ м/с}^2$ ,  $C_1 = -16 \text{ м/с}^3$ ,  $A_2 = 2 \text{ м/с}$ ,  $B_2 = -4 \text{ м/с}^2$ ,  $C_2$

$= 1 \text{ м/с}^3$ . В какой момент времени  $t$  ускорение этих точек будут одинаковы? Найти скорости  $v_1$  и  $v_2$  точек в этот момент времени.

Дано:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3 \\ x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3 \\ A_1 = 4 \text{ м/с.} \\ A_2 = 2 \text{ м/с.} \\ B_1 = 8 \text{ м/с}^2. \\ B_2 = -4 \text{ м/с}^2. \\ C_1 = -16 \text{ м/с}^3 \\ C_2 = 1 \text{ м/с}^3 \end{array} \right|$$

Для одномерного движения ускорение есть вторая

производная от координаты, то есть  $a = d^2 x / dt^2$

или первая производная от скорости то есть  $a = dv / dt$ .

Поэтому надо, вначале определить скорости точек:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = (A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3)' = A_1 + 2B_1 t + 3C_1 t^2 \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = (A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3)' = A_2 + 2B_2 t + 3C_2 t^2 \quad (2)$$

Теперь найдем ускорения.

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = (A_1 + 2B_1 t + 3C_1 t^2)' = 2B_1 + 6C_1 t \quad (3)$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = (A_2 + 2B_2 t + 3C_2 t^2)' = 2B_2 + 6C_2 t \quad (4)$$

$a_1 = a_2$

Приравняв (3) и (4), найдем  $t$ :

$t = ?$   $v_1 = ?$   $v_2 = ?$

$$t = \frac{B_1 - B_2}{3(C_2 - C_1)} = \frac{8 - (-4)}{3(1 - (-16))} = 0,235 \text{ с.}$$

Теперь подставим это значение  $t$  в (1) и (2):

$$v_1 = 4 + 2 \cdot 8 \cdot 0,235 + 3 \cdot (-16) \cdot (0,235)^2 = 5,1 \text{ м/с,}$$

$$v_2 = 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 0,235 + 3 \cdot 1 \cdot (0,235)^2 = 0,286 \text{ м/с.}$$

**Задача 5.** Материальная точка движется на плоскости согласно уравнениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 \cos \left( \frac{\pi}{6} t \right); \quad x, y - \text{в метрах,} \\ y = 3 \sin \left( \frac{\pi}{6} t \right); \quad t - \text{в секундах.} \end{array} \right.$$

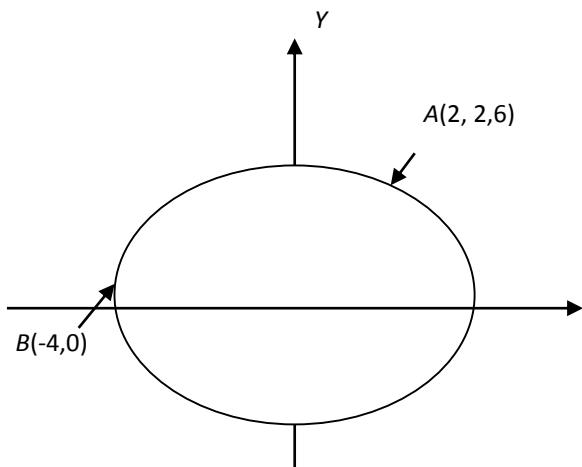
- Найти: 1) уравнение траектории;  
 2) координаты точки;  
 3) полную скорость;  
 4) полное ускорение;  
 5) тангенциальное и нормальное ускорение;  
 6) радиус кривизны траектории в моменты времени  $t_1=2$  с и  $t_2=6$  с.

Решение:

1. Для нахождения уравнения траектории (зависимости одной координаты от другой) исключим из уравнений переменную величину  $t$ :

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{y}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4^2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{y^2}{3^2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Это уравнение эллипса с полуосами  $a = 4$  м;  $b = 3$  м.



В момент  $t_1=2$  с

$$x_1 = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) \Rightarrow x_1 = 4 \cos\frac{\pi}{3} = 2 \text{ м}$$

$$y_1 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) \Rightarrow y_1 = 3 \sin\frac{\pi}{3} = 2,6 \text{ м}$$

В момент  $t_2=6$  с:  $x_2 = 4 \cos(\pi) = -4$  м,  $y_2 = 3 \sin(\pi) = 0$  м.

Таким образом, в момент времени  $t_1=0$  координаты точки:  $A(x,y) = (2, 2, 6)$ ;

в момент времени  $t_2=6$  с координаты точки:  $B(x,y) = (-4, 0)$ .

2. Для нахождения полной скорости найдем  $v_x$  и  $v_y$  в моменты  $t_1=2$  с и  $t_2=6$  с:

$$v_x = x' = \frac{dx}{dt} = \left( 4 \cos \frac{\pi}{6} \cdot t \right)' = -\frac{4\pi}{6} \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right) = \frac{2}{3} \pi \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right)$$

$$v_y = y' = \left( 3 \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right) \right)' = \frac{3\pi}{6} \cos \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right) = \frac{1}{2} \pi \cos \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right)$$

$$v_{x1} = -\frac{4\pi}{6} \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = -\frac{4\pi}{6} \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = -1,81 \text{ м/с.}$$

$$v_{y1} = \frac{1}{2} \pi \cos \left( 60^\circ \right) = 0,785 \text{ м/с.}$$

$$v_{\text{полн. 1}} = \sqrt{(-1,8)^2 + (0,785)^2} = 1,98 \text{ м/с.}$$

Аналогично находим, что

$$v_{x2} = -\frac{4\pi}{6} \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot 6 \right) = 0 \text{ м/с,} \quad v_{y2} = \frac{1}{2} \pi \cos \left( \pi \right) = -1,57 \text{ м/с.}$$

$$v_{\text{полн. 2}} = 1,57 \text{ м/с.}$$

3. Для нахождения полного ускорения  $a_{\text{полн}}$  найдем  $a_x$  и  $a_y$  в моменты времени  $t_1 = 2$  с и  $t_2 = 6$  с:

$$a_x = v_x' = -\frac{4}{6^2} \pi^2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right), \quad a_y = v_y' = -\frac{3}{6^2} \pi^2 \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right)$$

$$a_{x1} = -\frac{1}{9} \pi^2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = -\frac{1}{9} \pi^2 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = -0,55 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{y1} = -\frac{1}{12} \pi^2 \sin \left( \frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = -\frac{1}{12} \pi^2 \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) = -0,71 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{\text{полн. 1}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0,9 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{x2} = -\frac{1}{9} \pi^2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \cdot 6 \right) = -\frac{1}{9} \pi^2 \cos \left( \pi \right) = 1,1 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{y2} = -\frac{1}{12} \pi^2 \sin \left( \pi \right) = 0 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{\text{полн. 2}} = 1,1 \text{ м/с}^2.$$

4. Найдем нормальное (центростремительное) ускорение:  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , тангенциальное

$$\text{ускорение } a_x = \frac{dv}{dt}.$$

Найдем  $v_{\text{полн.}}$

$$v_{\text{полн.}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\pi \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\pi \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi^2 \left( \frac{8}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \right)}{12\pi \sqrt{\frac{4}{9} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)}};$$

$$a_{\tau 1} = 0,22 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Следовательно } a_{n1} = \sqrt{a_{\text{полн.}}^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{0,9^2 - 0,22^2} = 0,87 \text{ м/с}^2.$$

Так как  $v_{\text{полн.1}} = 1,98 \text{ м/с}$ , то радиус кривизны в точке  $A$  равен

$$R_A = \frac{v_1^2}{a_{n1}} = \frac{1,98^2}{0,81} = 4,84 \text{ м.}$$

Аналогично:  $a_{\tau 2} = \frac{25\pi \cos(\pi) \sin \pi}{12 \cdot 18 \sqrt{\frac{4}{9} \sin^2(\pi) + \frac{1}{4} \cos^2(\pi)}} = 0.$

$$\text{Следовательно } a_{n2} = a_2 = 1,1 \text{ м/с}^2 \Rightarrow R_B = \frac{1,57^2}{1,1} = 2,24 \text{ м.}$$

### Вопросы и задания

1. Механическое движение. Система отсчета.
2. Материальная точка. Траектория. Перемещение и путь.
3. Скорость и ускорение, как производные от радиус-вектора по времени.
4. Тангенциальное и нормальное ускорения.
5. Кинематика вращательного движения материальной точки.
6. Угловая скорость и угловое ускорение, как производные от угла поворота по времени.
7. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям  $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ ,  $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$ , где  $A_1 = 4 \text{ м/с}$ ;  $B_1 = 8 \text{ м/с}^2$ ;  $C_1 = -16 \text{ м/с}^3$ ;  $A_2 = 2 \text{ м/с}$ ;  $B_2 = -4 \text{ м/с}^2$ ;  $C_2 = 1 \text{ м/с}^3$ . Найти момент времени  $t$ , когда ускорения этих точек будут одинаковы. Найти скорости  $v_1$  и  $v_2$  точек в этот момент времени.
2. Точка движется по прямой согласно уравнению  $x = At + Bt^3$ , где  $A = 6 \text{ м/с}$ ;  $B = 1/8 \text{ м/с}^3$ . Найти среднюю путевую скорость  $\langle v \rangle$  точки в интервале времени от  $t_1 = 2 \text{ с}$  до  $t_2 = 6 \text{ с}$ .
3. Движение точки по прямой задано уравнением  $x = At + Bt^2$ , где  $A = 2 \text{ м/с}$ ;  $B = -0,5 \text{ м/с}^2$ . Определить среднюю путевую скорость  $\langle v \rangle$  движения точки в интервале времени от  $t_1 = 0 \text{ с}$  до  $t_2 = 3 \text{ с}$ .
4. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью  $v_0 = 10 \text{ м/с}$ . Высота балкона над поверхностью земли  $h = 12 \text{ м}$ . Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость  $\langle v \rangle$  с момента бросания до момента падения на землю.
5. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0 = 5 \text{ м/с}$ . Через  $t = 2 \text{ с}$  мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.
6. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте  $h = 8,6 \text{ м}$  два раза с интервалом  $\Delta t = 3 \text{ с}$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость брошенного тела.
7. Вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  брошен камень. Через  $\tau = 1 \text{ с}$  после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте  $h$  встретятся камни?
8. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ . Через какое время камень будет находиться на высоте  $h = 15 \text{ м}$ ? Найти скорость  $v$  камня на этой высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .
9. Камень падает с высоты  $h = 1200 \text{ м}$ . Какой путь  $s$  пройдет камень за последнюю секунду своего падения?
10. С какой высоты  $H$  упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время  $t = 0,1 \text{ с}$ ?
11. Тело брошено под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. Найти величину этого угла, если горизонтальная дальность  $s$  полета тела в четыре раза больше максимальной высоты  $H$  траектории.
12. Снаряд, выпущенный из орудия под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, дважды был на одной и той же высоте  $h$ : спустя время  $t = 10 \text{ с}$  и  $t = 50 \text{ с}$  после выстрела. Определить начальную скорость  $v_0$  и высоту  $h$ .
13. Пуля пущена с начальной скоростью  $v_0 = 200 \text{ м/с}$  под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Определить максимальную высоту  $H$  подъема, дальность  $s$  полета и радиус  $R$  кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.
14. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью  $v_0 = 30 \text{ м/с}$ . Определить скорость  $v$ , тангенциальное  $a_t$  и нормальное  $a_n$  ускорения в конце второй секунды после начала движения.

15. Тело брошено под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Найти тангенциальное  $a_t$  и нормальное  $a_n$  ускорения в начальный момент движения.
16. Диск радиусом  $r = 10$  см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 0,5$  рад/с<sup>2</sup>. Найти тангенциальное  $a_t$ , нормальное  $a_n$  и полное  $a$  ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.
17. Диск радиусом  $r = 20$  см вращается согласно уравнению  $\varphi = A + Bt + Ct^3$ , где  $A = 3$  рад;  $B = -1$  рад/с;  $C = 0, 1$  рад/с<sup>3</sup>. Определить тангенциальное  $a_t$ , нормальное  $a_n$  и полное  $a$  ускорения точек на окружности диска для момента времени  $t = 10$  с.
18. Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток времени  $\Delta t = 10$  с достиг частоты вращения  $n = 300$  мин<sup>-1</sup>. Определить угловое ускорение  $\varepsilon$  маховика и число  $N$  оборотов, которое он сделал за это время.
19. Велосипедное колесо вращается с частотой  $n = 5$  с<sup>-1</sup>. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени  $\Delta t = 1$  мин. Определить угловое ускорение  $\varepsilon$  и число  $N$  оборотов, которое сделает колесо за это время.
20. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав  $N = 50$  полных оборотов, оно изменило частоту вращения от  $n_1 = 4$  с<sup>-1</sup> до  $n_2 = 6$  с<sup>-1</sup>. Определить угловое ускорение  $\varepsilon$  колеса.

## Практическое занятие 2.

**Тема занятия.** Динамика материальной точки.

**Цель занятия.** Изучить законы динамики материальной точки.

**Теоретическая часть.**

### Динамика поступательного движения

Импульс абсолютно твердого тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $v$ :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Второй закон динамики (Ньютона):

$$d\vec{p} = \vec{F} dt,$$

где  $\vec{F}$  – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости  $F = -kx;$

где  $k$  – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость);  $x$  – абсолютная деформация;

б) сила тяжести:  $F = mg;$

$$\text{в) сила трения (скольжения): } F = \mu N,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения;  $N$  – сила нормального давления.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы остается постоянным

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}$$

Для двух тел при абсолютно упругом ударе:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$

где  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости тел перед соударением,  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  – скорости тел в момент после соударения.

Для абсолютно неупругого удара двух тел:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 1.** На гладком столе лежит брускок массой 3 кг. К брускому привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнурков подвешены гири массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 3$  кг. Найти ускорение  $a$ , с которым движется брускок и силу  $T$  натяжения каждого из шнурков. Массой блоков и трением пренебречь. Шнурсы считать нерастяжимыми.

Дано:

$$m = 3 \text{ кг}$$

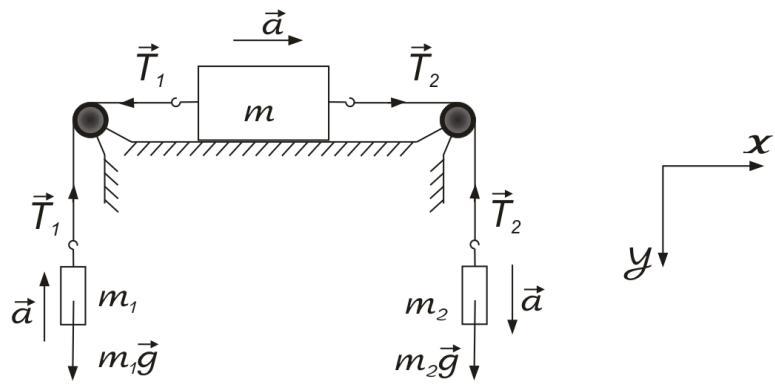
$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$m_2 = 3 \text{ кг.}$$

$$a - ?$$

$$T_1 - ?$$

$$T_2 - ?$$



Распишем силы, действующие на тела. Выберем систему координат, как указано на рисунке (на груз  $m$ , лежащий на столе вообще-то действуют еще две силы: сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$ . Но так как трением в задаче пренебрегается, то действие этих сил из рассмотрения мы исключаем).

Запишем второй закон Ньютона для каждого участвующего в движении тела:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 \\ m \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \end{cases}$$

(Поскольку шнуры считаются нерастяжимыми, то все тела движутся с одинаковым ускорением  $a$ ).

Выбираем направление ускорения, как указано на рисунке (по направлению часовой стрелки). Спроектируем систему уравнений на выбранные оси координат:

$$\begin{cases} -m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ ma = T_2 - T_1 \end{cases} \quad (1)$$

Из второго уравнения (1) вычитаем первое:

$$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g - (T_2 - T_1)$$

$$(m_2 + m_1)a = (m_2 - m_1)g - ma$$

$$(m_2 + m_1 + m)a = (m_2 - m_1)g, \text{ тогда}$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m} g \quad (2)$$

Подставляем численные значения:

$$a = \frac{3-2}{3+2+3} 10 = \frac{10}{8} = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

$$T_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a) = 2(10 + 1,25) = 22,5 \text{ Н,}$$

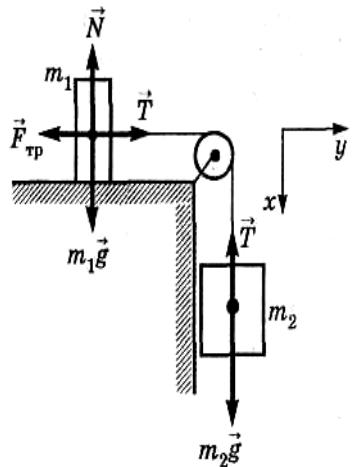
$$T_2 = m_2 (g - a) = 3(10 - 1,25) = 26,2 \text{ Н.}$$

**Задача 2.** Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых ( $m_1 = 400$  г) движется по поверхности стола, а другой ( $m_2 = 600$  г) — вдоль вертикали вниз. Коэффициент  $f$  трения груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определить: 1) ускорение  $a$ , с которым движутся грузы; 2) силу натяжения  $T$  нити.

Решение.

Выбрав оси координат (рис), запишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эти оси:

$$m_2 a = m_2 g - T$$



Учитывая, что

, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 a = T - f m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T, \end{cases}$$

откуда искомое ускорение:

$$a = \frac{(m_2 - f m_1) g}{m_1 + m_2}$$

Силу натяжения нити найдем из второго уравнения системы:

$$T = m_2 (g - a)$$

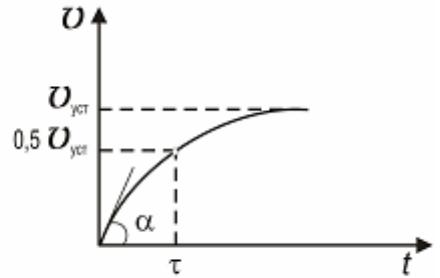
Вычисляя, получаем: 1)  $a = 5,49 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $T = 2,59 \text{ Н}$ .

**Задача 3.** При падении тела с большой высоты его скорость  $v_{\text{уст}}$  при установившемся движении достигает  $80 \text{ м/с}$ . Определить время  $\tau$ , в течение которого, начиная от момента начала падения, скорость становится равной  $v_{\text{уст}}/2$ . Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости тела.

Решение.



а)



б)

На падающее тело действуют две силы (рис.

а): сила тяжести  $mg$  и сила сопротивления воздуха  $F_c$ .

Сила сопротивления воздуха по условиям задачи пропорциональна скорости тела и противоположна ей по направлению:

$$\vec{F}_c = -k \vec{v},$$

(1)

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров, формы тела и от свойств окружающей среды.

Напишем уравнение движения тела в соответствии со вторым законом Ньютона в векторной форме:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_c$ . Заменив  $\vec{F}_c$  согласно (1), получим:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}.$$

(2)

Спроецируем все векторные величины на вертикально вниз направленную ось и напишем уравнение (2) для проекций:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

После разделения переменных получим

$$\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}.$$

Выполним интегрирование, учитывая, что при изменении времени от нуля до  $\tau$  (искомое время) скорость возрастает от нуля до  $\frac{1}{2}v_{\text{уст}}$  (рис. 1, б):

$$\int_0^{\frac{1}{2}v_{\text{уст}}} \frac{dv}{mg - kv} = \int_0^{\tau} \frac{dt}{m}; \quad -\frac{1}{k} \left| \ln(mg - kv) \right|_0^{\frac{1}{2}v_{\text{уст}}} = \frac{\tau}{m}.$$

Из полученного выражения найдем искомое время:

$$\tau = \frac{m}{k} \ln \frac{mg}{mg - \frac{1}{2}kv_{\text{уст}}} \quad (3)$$

Входящий сюда коэффициент пропорциональности  $k$  определим из следующих соображений. При установившемся движении (скорость постоянна) алгебраическая сумма проекций на вертикальную ось действующих на тело сил равна нулю, т. е.  $mg - kv_{\text{уст}} = 0$

, откуда  $k = \frac{mg}{v_{\text{уст}}}$ .

Подставим найденное значение  $k$  в формулу (3):

$$\tau = \frac{mv_{\text{уст}}}{mg} \ln \frac{mg}{mg - \frac{1}{2} \frac{mg}{v_{\text{уст}}} v_{\text{уст}}}$$

После сокращений и упрощений получим:  $\tau = \frac{v_{\text{уст}}}{g} \ln 2$

Подставив численные значения, получим  $\tau = 5,66$  с. Проверка размерности результата в данном случае не обязательна, так как она очевидна.

### **Вопросы и задания**

1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.
2. Взаимодействие тел. Сила, масса.
3. Импульс (количество движения).
4. Закон сохранения импульса.
5. Второй закон Ньютона.
6. Третий закон Ньютона.
7. Изолированная система материальных тел.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Самолет летит в горизонтальном направлении с ускорением  $a = 20$  м/с<sup>2</sup>. Какова перегрузка пассажира самолета? (Перегрузкой называется отношение силы  $F$ , действующей на пассажира, к силе тяжести  $P$ ).
2. Автоцистерна с керосином движется с ускорением  $a = 0,7$  м/с<sup>2</sup>. Под каким углом  $\varphi$  к плоскости горизонта расположен уровень керосина в цистерне?
3. Бак в тендере паровоза имеет длину  $l=4$  м. Какова разность  $\Delta l$  уровней воды у переднего и заднего концов бака при движении поезда с ускорением  $a = 0,5$  м/с<sup>3</sup>?
4. Катер массой  $m=2m$  трогается с места и в течение времени  $\tau = 10$  с развивает при движении по спокойной воде скорость  $v = 4$  м/с. Определить силу тяги  $F$  мотора, считая ее постоянной. Принять силу сопротивления  $F_c$  движению пропорциональной скорости; коэффициент сопротивления  $k = 100$  кг/с.
5. Начальная скорость  $v_0$  пули равна 800 м/с. При движении в воздухе за время  $t = 0,8$  с ее скорость уменьшилась до  $v = 200$ . Масса  $m$  пули равна 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления  $k$ . Действием силы тяжести пренебречь.
6. Материальная точка массой  $m = 2$  кг движется под действием некоторой силы  $F$  согласно уравнению  $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ , где  $C = 1$  м/с<sup>2</sup>,  $D = -0,2$  м/с<sup>3</sup>. Найти значения этой силы в моменты времени  $t_1 = 2$  с и  $t_2 = 5$  с. В какой момент времени сила равна нулю?
7. Наклонная плоскость, образующая угол  $\alpha = 25^\circ$  с плоскостью горизонта, имеет длину  $l = 2$  м. Тело, двигаясь равноускоренно, скользнуло с этой плоскости за время  $t = 2$  с. Определить коэффициент трения  $\mu$  тела о плоскость.
8. На гладком столе лежит брусков массой  $m = 4$  кг. К брускам привязаны два шнуром, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуром подвешены гири, массы которых  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2$  кг. Найти ускорение  $a$ , с которым движется брусков, и силу  $T$  натяжения каждого из шнуром. Массой блоков и трением пренебречь.
9. Два бруска массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 4$  кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением  $a$  будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу  $F = 10$  Н, направленную горизонтально? Какова будет сила  $T$  натяжения шнуром, соединяющего

брюски, если силу 10 Н приложить к первому бруски? Ко второму бруски? Трением пренебречь.

10. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перевешен шнур, к концам которого привязали грузы массами  $m_1 = 1,5$  кг и  $m_2 = 3$  кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

### Практическое занятие 3.

**Тема занятия. Работа и энергия. Кинематика и динамика вращательного движения.**

**Цель занятия.** Изучить законы сохранения энергии. Кинематику и динамику вращательного движения.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Работа. Работа переменной силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Связь между силой и потенциальной энергией. Энергия упруго деформированного тела. Кинетическая энергия и её связь с работой приложенных сил. Полная механическая энергия системы тел. Закон сохранения механической энергии. Диссипация энергии. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Закон сохранения энергии, а также законы динамики вращательного движения широко применяется при решении многих инженерных задач.

#### Теоретическая часть.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы остается постоянным

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}.$$

Для двух тел при абсолютно упругом ударе:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$

где  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  - скорости тел перед соударением,  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  - скорости тел в момент после соударения.

Для абсолютно неупругого удара двух тел:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

Кинетическая энергия  $T$  тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{m v^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{(2m)}.$$

Потенциальная энергия  $\Pi$ :

а) упругодеформированной пружины:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

где  $k$  – жесткость пружины;  $x$  – абсолютная деформация;

б) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести:

$$\Pi = mgh,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $h$  – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии  $h \ll R$ , где  $R$  – радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии: если в системе действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия системы не меняется

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Закон сохранения энергии при абсолютно упругом столкновении двух тел, движущихся в горизонтальной плоскости:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Закон сохранения энергии при абсолютно неупругом столкновении двух тел, движущихся в горизонтальной плоскости:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + Q,$$

где  $Q$  – энергия нагревания тел и их остаточной деформации.

Скорости двух тел после абсолютно упругого столкновения:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{(m_1 + m_2)},$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}.$$

Работа, совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии:

$$A = \Delta T = T_2 - T_1.$$

### Динамика вращательного движения

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

где  $\vec{M}$  – результирующий вектор моментов внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения;  $\vec{\varepsilon}$  – вектор углового ускорения;  $J$  – момент инерции системы относительно оси.

Моменты инерции некоторых тел массой  $m$  относительно оси вращения, проходящей через

центр масс:

а) материальной точки:  $J = mr^2$ ,

где  $r$  – расстояние от материальной точки до оси;

б) стержня длиной  $\ell$  относительно оси перпендикулярной стержню:

$$J = \frac{1}{12}m\ell^2;$$

в) обруча или тонкостенного цилиндра радиуса  $R$  относительно оси, совпадающей с осью цилиндра:

$$J = mR^2.$$

г) однородного (сплошного) диска (цилиндра) радиуса  $R$  относительно оси, совпадающей с осью диска:

$$J = \frac{1}{2}mR^2;$$

д) пустотелого цилиндра радиусами  $R_1$  и  $R_2$  с осью вращения, совпадающей с осью цилиндра:

$$J = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2);$$

е) шара с осью вращения, проходящей через его центр:

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Теорема Штейнера: момент инерции  $J_0$  тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_c$  этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы  $m$  на квадрат расстояния  $a$  между этими осями

$$J_0 = J_c + ma^2,$$

Момент импульса материальной точки массой  $m$ , имеющей скорость  $v$  и находящуюся на расстоянии  $r$  от оси вращения:

$$L = mv r.$$

Момент импульса  $L$  тела, вращающегося относительно неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$ :

$$L = J \omega.$$

Закон сохранения момента импульса систем тел, вращающихся вокруг неподвижной оси:

$$\sum_{i=1}^n J_i \vec{\omega}_i = \text{const}.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{L^2}{(2J)}.$$

Кинетическая энергия катящегося тела:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Снаряд массой  $m = 5\text{ кг}$  обладал скоростью  $v = 300 \text{ м/с}$  в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой  $m = 2 \text{ кг}$ , получила скорость  $v_1 = 500 \text{ м/с}$  и полетела вперед под углом  $60^\circ$  к горизонту. Найти скорость  $v_2$  после разрыва второй, большей части, и под каким углом к горизонту она полетела.

Дано:

$$m = 5\text{ кг}$$

$$v = 300 \text{ м/с}$$

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$\varphi_1 = 60^\circ$$

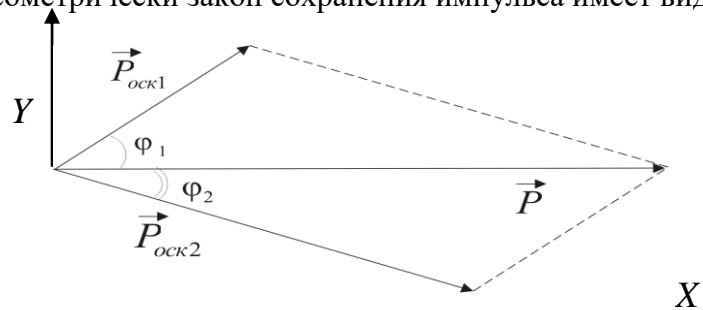
$$v_2 - ?$$

$$\varphi_2 - ?$$

В верхней части траектории, снаряд двигался горизонтально.

Геометрически закон сохранения импульса имеет вид

$$v_1 = 500$$



$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{OCK1}} + \vec{P}_{\text{OCK2}} \quad \text{или} \quad m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \quad (1)$$

Используя теорему косинусов, найдем  $|\vec{P}_{\text{OCK2}}|$

$$(P_{\text{OCK2}})^2 = P^2 + (P_{\text{OCK1}})^2 - 2P \cdot P_{\text{OCK1}} \cdot \cos \varphi_1. \quad (2)$$

Так как  $P_{\text{OCK2}} = (m - m_1)v_2$  получим, что

$$v_2 = \frac{P_{\text{OCK2}}}{m - m_1} = \frac{\sqrt{1500^2 + 1000^2 - 2 \cdot 1500 \cdot 1000 \cdot \cos 60^\circ}}{(5 - 2)} = 441 \text{ м/с.}$$

Спроектируем вектора  $\vec{P}_{\text{OCK1}}$  и  $\vec{P}_{\text{OCK2}}$  на направление  $\vec{P}$ . По теореме о проекции суммы векторов, получим

$$P = P_{\text{OCK1}\vec{P}} + P_{\text{OCK2}\vec{P}}, \text{ но } P_{\text{OCK1}\vec{P}} = |\vec{P}_{\text{OCK1}}| \cdot \cos \varphi_1, \text{ а}$$

$$P_{\text{OCK2}\vec{P}} = |\vec{P}_{\text{OCK2}}| \cdot \cos(-\varphi_2), \text{ т.к. угол } \varphi_2 \text{ лежит ниже оси } \vec{P},$$

откуда

$$\cos(-\varphi_2) = \frac{P - (\vec{P}_{\text{OCK.1}}) \cdot \cos \varphi_1}{|\vec{P}_{\text{OCK.2}}|} = \frac{1500 - 1000 \cdot \cos 60^\circ}{1322,9} = 0,756,$$

значит  $-\varphi_2 = \arccos(0,756) = 40,8^\circ$ , а  $\varphi_2 = -40,8^\circ$

Эту задачу можно решить и другим способом.

Выберем оси координат, как на рисунке. Записав уравнение (1) в проекциях на оси координат и, учитывая, что  $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}$  и  $\mathcal{V}_y = 0$ ,

получим

$$m\mathcal{V} = m_1\mathcal{V}_1 \cos \varphi_1 + m_2\mathcal{V}_2 \cos \varphi_2, \quad (3)$$

$$0 = m_1\mathcal{V}_1 \sin \varphi_1 - m_2\mathcal{V}_2 \sin \varphi_2.$$

Или

$$m_2\mathcal{V}_2 \cos \varphi_2 = m\mathcal{V} - m_1\mathcal{V}_1 \cos \varphi_1, \quad (4)$$

$$m_2\mathcal{V}_2 \sin \varphi_2 = m_1\mathcal{V}_1 \sin \varphi_1.$$

Возводя в квадрат оба равенства, и сложив их, после тривиальных преобразований получим формулу (2) для вычисления импульса и скорости второго осколка. Из второго уравнения системы (4) получаем выражение

$$\sin \varphi_2 = -\frac{m_1\mathcal{V}_1 \sin \varphi_1}{m_2\mathcal{V}_2},$$

из которого вычисляем угол  $\varphi_2$ .

**Задача 2.** На пружине жесткостью  $k = 5 \cdot 10^3$  Н/м подвешен блок в форме диска массой 5 кг и радиусом 0,2 м. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 3$  кг. Найти: 1) ускорение грузов и угловое ускорение блока; 2) силы натяжения шнура; 3) силу упругости пружины и удлинение пружины; 4) кинетическую энергию системы через 2 с; 5) изменение потенциальной энергии блока и грузов за 2 с; 6) найти ускорение центра масс грузов.

Дано:

$$m_0 = 5 \text{ кг}$$

Укажем все силы, действующие на каждое тело (см. рис.).

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

Напишем уравнение второго закона Ньютона в векторной форме для каждого тела, при этом блок совершает вращательное

$$m_2 = 3 \text{ кг}$$

$$k = 5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$$

движение. Учтем, также что  $I = m_0 r^2 / 2$  и

$$r = 0,2 \text{ м} \quad a = \varepsilon \cdot r \text{ (проскальзывания нет) и линейное}$$

$$t = 2 \text{ с} \quad \text{ускорение крайних точек блока равно}$$

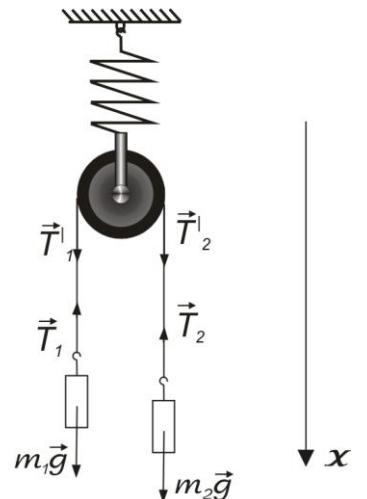
$$\underline{a - ? \ \varepsilon - ?} \quad \text{ускорению точек шнура. Заметим, что}$$

$$\text{по третьему закону Ньютона } T_1' = T_1 \text{ и } T_2' = T_2.$$

Для проекций сил на ось  $X$  получим

систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 \cdot r - T_1 \cdot r = \frac{1}{2} m_0 r^2 \cdot \frac{a}{r} \\ T_1 + T_2 + m_0 g - F = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$



Складывая первые три уравнения, получим

$$m_2 g - m_1 g = a \left( \frac{1}{2} m_0 + m_2 + m_1 \right) \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2} m_0 + m_2 + m_1} g \Rightarrow a = \frac{10 \cdot (3 - 2)}{7,5} = \frac{4}{3} \text{ м/с}^2 = 1,33 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{1,33}{0,2} = 6,66 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Из первого уравнения найдем:  $T_2 = T_2' = m_2 (g - a) = 26,0 \text{ Н.}$

Из второго уравнения найдем:  $T_1 = T_1' = m_1 (g + a) = 22,7 \text{ Н.}$

Из четвертого уравнения найдем  $F$ :

$$F = T_1 + T_2 + m_0 g = 98,7 \text{ Н.}$$

Удлинение пружины найдем из формулы закона Гука:

$$F = -k \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{98,7}{510} = 0,0197 \text{ м} = 1,97 \text{ см.}$$

Это удлинение пружины при движущихся грузах. Если застопорить блок, то  $F_1 = (m_1 + m_2 + m_0) \cdot g = 100 \text{ Н.}$ , что вызовет удлинение пружины точно 2 см. С началом

движения пружина сократится на  $\approx 0,3$  мм. Из системы уравнений (1) можно получить формулу для разности силы натяжения  $\Delta F = F_1 - F$ :

$$\Delta F = \frac{(m_2 - m_1)^2}{\frac{1}{2}m_0 + m_2 + m_1} g,$$

используя которую можно оценить изменение растяжения пружины

$$\Delta x' = \Delta F/k = 0,27 \text{ мм.}$$

Чтобы найти кинетическую энергию всей системы, найдем кинетическую энергию поступательного движения грузов  $K_{\text{тр}}$  и кинетическую энергию вращательного движения блока  $K_{\text{бл}}$ :

$$K_{\text{тр}} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2};$$

$$\text{Так как } v = at \Rightarrow K_{\text{тр}} = K_{\text{тр}} = \frac{(m_1 + m_2)a^2t^2}{2} = \frac{5 \cdot 1,33^2 \cdot 4}{2} \approx 17,7 \text{ Дж.}$$

$$K_{\text{бл}} = \frac{I\omega^2}{2} \text{ так как } \omega = v/r, \text{ и } I = m_0r^2/2, \text{ то } K_{\text{бл}} = \frac{m_0r^2v^2}{4 \cdot r^2} = 9 \text{ Дж.}$$

Таким образом полная кинетическая энергия  $K = K_{\text{тр}} + K_{\text{бл}} = 26,7$  Дж.

**Задача 3.** Два свинцовых шара массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 3$  кг подвешены на нитях длиной  $l = 70$  см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол  $\alpha = 60^\circ$  и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту  $h$ , на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию  $\Delta T$ , израсходованную на деформацию шаров при ударе.

Решение.

Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью  $v$ , которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v, \quad (1)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости шаров до удара. Скорость  $v_1$  малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1gh_1 = \frac{m_1v_1^2}{2},$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

(учли, что  $h = l(1 - \cos \alpha)$  ).

Из выражений (1) и (2) при условии, что  $v_2 = 0$ , получим:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

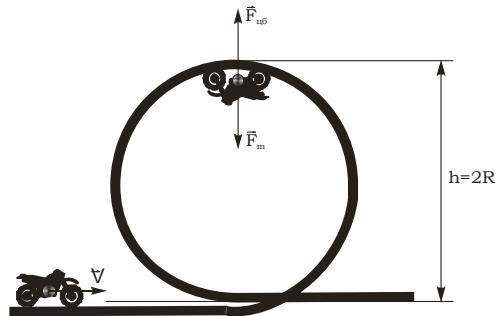
Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1 + m_2) \frac{v^2}{2} = (m_1 + m_2) gh,$$

откуда искомая высота:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}$$

(учли формулу (3)).



Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2, \quad (4)$$

или, подставив (2) в (4), находим:

$$\Delta T = 2gl \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя, получаем: 1)  $h = 5,6$  см; 2)  $\Delta T = 4,12$  Дж.

**Задача 4.** Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость  $v$  он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли» радиусом  $R = 4$  м. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

$R = 4$  м | Запишем уравнение движения

— мотоциклиста в верхней точке

$v = ?$  «мертвой петли»:

$$mg + N = ma.$$

Так как при минимальной скорости

$N = 0$ , то  $a = v^2/R$ , и следовательно

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg, \quad \text{и} \quad v_1 = \sqrt{gR} \quad (1),$$

где  $v_1$  – скорость мотоцикла в верхней точке «мертвой петли».

По закону сохранения энергии, полная энергия мотоциклиста на горизонтальной дороге, равная его кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ , будет равна полной энергии в верхней точке «мертвой петли», то есть сумме потенциальной энергии  $mgh$  и кинетической  $\frac{mv_1^2}{2}$ . Таким

образом имеем  $\frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{mv_1^2}{2}$ . Из последнего равенства получим  $v^2 = 2gh + v_1^2$ .

Так как  $h = 2R$ , то  $v_1^2 = v^2 - 4gR$ . Подставляем полученное выражение в (1) найдем, что

$$v^2 = 4gR + gR = 5gR, \quad \text{и} \quad v = \sqrt{5gR} = 0,141 \text{ м/с} = 14,1 \text{ см/с.}$$

**Задача 5.** Груз массой  $m = 80$  кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>. Длина наклонной плоскости  $l = 3$  м, угол  $\alpha$  ее наклона к горизонту равен  $30^\circ$ , а коэффициент трения  $f = 0,15$ . Определить: 1) работу, совершающую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

Решение.

Уравнение движения груза в векторной форме:  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{од}} + \vec{N}$ .

В проекциях на оси  $x$  и  $y$  (рис. 16) это уравнение примет вид  $ma = F - F_1 - F_{\text{од}}$ ,  $0 = N - F_2$ , где  $F_1 = mg \sin \alpha$ ,  $F_2 = mg \cos \alpha$ ,  $F_{\text{од}} = fN = fmg \cos \alpha$ .

Поэтому

$$F = m(a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha).$$

Работа, совершаемая подъемным устройством,

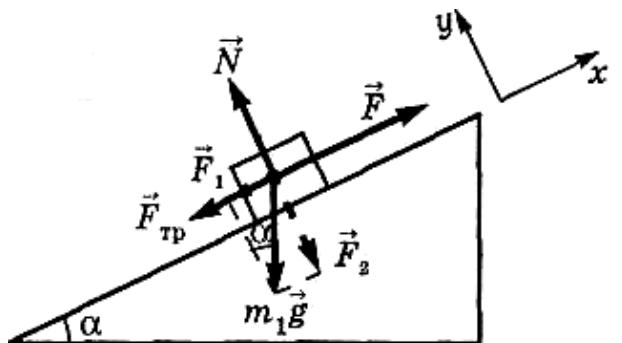
$$A = Fl = ml(a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha).$$

Средняя мощность, развиваемая подъемным устройством,

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t},$$

где  $t = \sqrt{2l/a}$  – время подъема груза.

$$\text{Следовательно, } \langle P \rangle = A \sqrt{\frac{a}{2l}}.$$



Максимальная мощность, развиваемая подъемным устройством:  $P_{\max} = FV_{\max} = Fat$ .

Подставляя значения, получаем  $P_{\max} = m\sqrt{2al}(a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha)$ .

Вычисляя, находим: 1)  $A = 1,72$  кДж; 2)  $\langle P \rangle = 702$  Вт; 3)  $P_{\max} = 1,41$  кВт.

**Задача 6.** Шарик массой  $m = 300$  г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс  $p_1$ , полученный стеной, если в этот момент перед ударом шарик имел скорость  $10\text{м/с}$ , направленную под углом  $\alpha = 30^\circ$  к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

Решение:

По условию задачи удар абсолютно упругий, следовательно, скорость шарика по абсолютному значению до и после удара одинаковы, т.е.  $v = v_0$ .

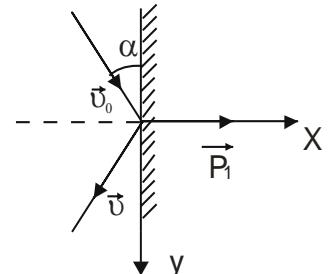
Применим закон сохранения импульса (в проекциях на оси координат):

$$y: p_{1y} = 0 = m(v_{0y} - v_y) = m(v_{0y} - v_{0y}) = 0$$

$$x: p_{1x} = p_1 = m(v_{0x} - (-v_{0x})) = 2mv_{0x},$$

где  $v_{0x} = v_0 \sin \alpha$

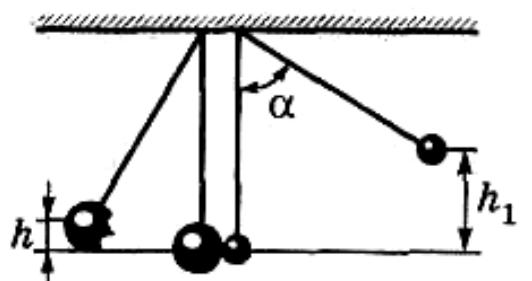
$$p_1 = 2mv_0 \sin \alpha$$



тогда

$$P_1 = 2 \cdot 0,3 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с} \cdot \sin 30^\circ = 15 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

**Задача 7.** Два свинцовых шара массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 3$  кг подвешены на нитях длиной  $l = 70\text{см}$ . Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол  $\alpha = 60^\circ$  и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить высоту  $h$ , на которую поднимутся шары после удара и энергию  $\Delta T$  израсходованную на деформацию шаров при ударе.



Решение.

Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся с общей скоростью  $v$ , которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (1)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости шаров до удара. Скорость  $v_1$  малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

(учли, что  $h_1 = l(1-\cos\alpha)$ ).

Из выражений (1) и (2) при условии, что  $v_2 = 0$ , получим:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1 + m_2) \frac{v^2}{2} = (m_1 + m_2) gh,$$

откуда искомая высота:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2m_1^2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{m_1 + m_2}$$

(учли формулу (3)).

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

$$\Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} v^2, \quad (4)$$

или, подставив (2) в (4), находим:

$$\Delta T = 2gl \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя, получаем: 1)  $h = 5,6$  см; 2)  $\Delta T = 4,12$  Дж.

**Задача 8.** Шар массой  $m = 5$  кг и радиусом  $R = 5$  см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид  $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ , где  $A = 2$  рад,  $B = 16$  рад/с<sup>2</sup>,  $C = -2$  рад/с<sup>3</sup>. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар и определить момент сил  $M$  в момент времени  $t = 2$  с.

Дано:

$$\begin{aligned} m &= 5 \text{ кг} \\ 5 \cdot 10^{-2} &\text{ м} \end{aligned}$$

$$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$$

$$A = 2 \text{ рад}$$

Так как момент инерции шара постоянный, основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

$$M = I \cdot \varepsilon, \quad (1)$$

где  $I$  – момент инерции,  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела,  $B =$

16 рад/с<sup>2</sup>

$M$  – момент сил, действующих на него.

$C = -2$

рад/с<sup>3</sup>.

Для шара момент инерции  $I = \frac{2}{5}mR^2$ .

(2)

$t = 2$  с

$M(t) = ?$   $M(2) = ?$

По определению угловое ускорение есть вторая производная от угла поворота вращающегося тел по времени

$$\varepsilon = \ddot{\varphi}(t) = (A + Bt^2 + Ct^3)'' = (2Bt + 3Ct^2)' = 2B + 6Ct. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и используя численные значения  $A$ ,  $B$  и  $C$  найдем закон изменения момента сил, действующих на шар.

$$M(t) = \frac{2}{5}mR^2 \cdot (2B + 6Ct) = (0,16 - 0,06t) \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Для момента времени  $t = 2$  с,  $M(2) = 0,04 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

**Задача 9.** Диск радиусом  $R = 0,5$  м и массой  $m = 50$  кг раскручен до частоты вращения  $n_1 = 10 \text{ с}^{-1}$  и предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через 60 с. Найти момент сил трения.

Дано:

$R = 0,5$  м

(1)

$m = 50$  кг

$n_1 = 10 \text{ с}^{-1}$

$t = 60$  с

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$dL_x/dt = M_x$$

где  $dL_x$  – изменение проекции на ось  $X$  момента импульса диска,

вращающегося относительно оси  $X$ , совпадающей с геометрической

осью диска, за интервал времени  $dt$ .  $M_x$  – проекция на ось  $X$  момента  $M = ?$  внешних сил (в данном случае сил трения), действующих на диск.

Считаем, что момент сил трения со временем не изменяется, тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$\Delta L_x = M_x \Delta t \quad (2)$$

Изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_x = I_x \cdot \Delta \omega, \quad (3)$$

где  $I = mR^2/2$  момент инерции диска относительно оси  $X$ .

Из (2) и (3), имеем:

$$M_x \Delta t = mR^2 / 2 \cdot \Delta \omega. \quad (4)$$

Изменение угловой скорости  $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$ .

Тогда из (4) получим

$$M_x = \frac{\pi m R^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}.$$

Так как  $\Delta t = t$ , а  $n_2 = 0$  (диск остановился) то, подставив данные, получим, что

$$M = M_x = 65,4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Проверим размерность полученного результата:

$$\frac{\text{КГ} \cdot \text{М}^2 \text{с}^{-1}}{\text{с}} = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}}{\text{с}^2} \text{ М} = \text{Н} \times \text{м}.$$

**Задача 10.** Человек массой 60 кг стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения  $n_1 = 0,2 \text{ 1/с}$ . В вытянутых в сторону руках человек держит по гантели массой 6 кг каждая. Расстояние между гантелями 1,6 м. Определить: частоту вращения  $n_2$  скамьи с человеком, после того, как он опустит руки, и расстояние между гантелями станет равным 0,4 м. При расчете моментов инерции человека принять за цилиндр радиусом 10 см, а скамью считать диском радиусом 0,4 м и массой 10 кг. Найти изменение энергии вращающейся системы. Трением пренебречь.

Дано:

$$m_1 = 60 \text{ кг}$$

$$r_1 = 0,1 \text{ м}$$

$$m_2 = 10 \text{ кг}$$

$$r_2 = 0,4 \text{ м}$$

$$n_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$$

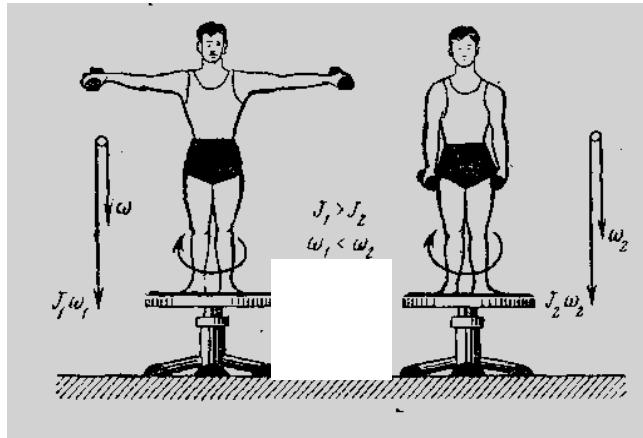
$$l_1 = 0,4 \text{ м}$$

$$l_2 = 1,6 \text{ м}$$

$$m_3 = 6 \text{ кг}$$

$$n_2 - ?$$

$$\Delta W - ?$$



Человек вместе со скамьей составляет замкнутую систему, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Для такой системы справедлив закон сохранения момента импульса:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (1)$$

где моменты импульса  $I_1\omega_1$  и  $I_2\omega_2$  в начальный и в любой другой момент времени.

Здесь  $I$  – момент инерции,  $\omega$  – угловая скорость.  $I_1$  состоит из моментов инерции скамьи  $I_{\text{ск}}=m_2r_2^2/2$ , человека –  $I_{\text{ч}}=m_1r_1^2/2$  (скамья и человек считаются сплошными цилиндрами) и двух гантелей  $I_{\text{г}}=2m_3(l_2/2)^2$ .

Поэтому

$$I_1 = \left( \frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \right)$$

Угловая скорость  $\omega_1 = 2\pi n_1$ . Аналогично, для второго положения гантелей имеем

$$I_2 = \left( \frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \right); \text{ и } \omega_2 = 2\pi n_2$$

Подставив эти выражения в(1) получим:

$$\left( \frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \right) \cdot 2\pi n_1 = \left( \frac{1}{2}m_2r_2^2 + \frac{1}{2}m_1r_1^2 + 2m_3\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 \right) \cdot 2\pi n_2.$$

$$n_2 = \frac{\left( \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,16 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0,01 + 12 \cdot 0,64 \right) \cdot 0,2}{\left( \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,16 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0,01 + 12 \cdot 0,04 \right)} = \frac{1,756}{1,58} = 1,1 \frac{\text{об}}{\text{с}}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела вычисляется по формуле  $W=I\omega^2/2$ .

$$W_1 = \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{8,78 \cdot 1,58}{2} = 6,9 \text{ Дж}; \quad W_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2} = \frac{1,58 \cdot 48,7}{2} = 38,5 \text{ Дж};$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 31,6 \text{ Дж.}$$

**Задача 11.** Однородный тонкий стержень массой  $m_1 = 0,2$  кг и длиной  $l = 1\text{м}$  может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси  $Z$ , проходящей через точку  $O$  (см рис.) В точку  $A$  на стержне попадает пластилиновый шарик, массой  $m_2 = 10$  г, летящий горизонтально со скоростью  $v = 10$  м/с и прилипает к стержню. Определить угловую скорость стержня  $\omega$  в начальный момент времени, если  $a=AO=l/3$ .

Дано:

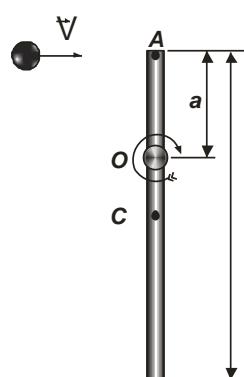
$$m_1 = 0,2 \text{ кг}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$m_2 = 10 \text{ г} = 0,01 \text{ кг}$$

$$v = 10 \text{ м/с}$$

$$a = l/3$$



$\omega = ?$

Считая систему тел из шарика и стержня замкнутой, применим закон сохранения момента импульса:  $L_0 = L$  (1)

В начальный момент удара угловая скорость стержня  $\omega_0 = 0$ , поэтому его момент импульса  $L_{01} = 0$ . При этом летящий шарик попадает в точку  $A$ , следовательно относительно точки  $O$  (оси вращения) обладает моментом импульса  $L_{02} = m_2va$ , где  $a$  – расстояние от точки попадания до точки  $O$ . Таким образом  $L_0 = 0 + m_2va$ .

Прилипший к стержню шарик будем считать материальной точкой, вращающейся с угловой скоростью стержня  $\omega$  и, его момент импульса равен  $L_2 = m_2a^2\omega$ .  $I\omega$  – момент импульса стержня, где  $I$  – его момент инерции относительно оси вращения. Тогда момента импульса системы стержень–шарик будет равен  $L_2 = I\omega + m_2a^2\omega$ . Подставляя приведенные выше выражения в (1), получим

$$m_2va = I\omega + m_2a^2\omega.$$

Следовательно,  $\omega = \frac{m_2va}{I + m_2a^2}$ . (2)

Чтобы найти  $I$  относительно точки  $O$ , воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_0 + m_1(OC)^2,$$

где  $I_0 = m_1l^2/12$  – момент инерции стержня относительно точки  $C$  (центра масс). Расстояние  $OC = l/2 - l/3 = l/6$ , тогда

$$I = \frac{m_1l^2}{12} + m_1 \frac{l^2}{36} = \frac{m_1l^2}{9}.$$

С учетом (2) получим  $\omega = \frac{m_2v \frac{l}{3}}{\frac{m_1l^2}{9} + \frac{m_2l^2}{9}} = \frac{3m_2v}{(m_1 + m_2)l} = \frac{3 \cdot 0,01 \cdot 10}{(0,01 + 0,2) \cdot 1} = 1,43 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

### **Вопросы и задания.**

1. Работа. Работа переменной силы.
2. Мощность.
3. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия.
4. Связь между силой и потенциальной энергией.
5. Энергия упруго деформированного тела.
6. Кинетическая энергия и её связь с работой приложенных сил.
7. Полная механическая энергия системы тел.
8. Закон сохранения механической энергии.
9. Диссипация энергии.
10. Понятие абсолютно твердого тела.
11. Поступательное и вращательное движения тела.
12. Число степеней свободы.
13. Центр инерции (масс) твердого тела.

14. Момент силы. Момент инерции.
15. Основной закон динамики вращательного движения.
16. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.
17. Работа по вращению тела.
18. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Снаряд массой  $m = 10$  кг обладал скоростью  $v = 200$  м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой  $m_1 = 3$  кг получила скорость  $u_1 = 400$  м/с в прежнем направлении. Найти скорость  $u_2$  второй, большей части после разрыва.
2. Грузик, привязанный к шнуре длиной  $l = 50$  см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол  $\varphi$  образует шнур с вертикалью, если частота вращения  $n = 1$  с<sup>-1</sup>.
3. Грузик, привязанный к нити длиной  $l = 1$  м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период  $T$  обращения, если нить отклонена на угол  $\varphi = 60^\circ$  от вертикали.
4. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус  $R$  кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения  $\mu$  колес о покрытие дороги равен 0,1 (гололед). При какой скорости  $v$  автомобиля начнется его занос?
5. Какую наибольшую скорость  $v_{\max}$  может развить велосипедист, проезжая закругление радиусом  $R = 50$  м, если коэффициент трения скольжения  $\mu$  между шинами и асфальтом равен 0,3? Каков угол  $\varphi$  отклонения велосипеда от вертикали, когда велосипедист движется по закруглению?
6. Камень скользит с наивысшей точки полусферы, радиуса  $R$ . Какой длины дугу опишет камень, прежде чем оторвется от ее поверхности? Трением пренебречь.
7. Ракета массой  $m = 1$  т, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, поднимается с ускорением  $a = 2g$ . Скорость  $v$  струи газов, вырывающихся из сопла, равна 1200 м/с. Найти расход  $Q_m$  горючего.
8. Шарик массой  $m = 300$  г ударился о стену и отскочил от нее. Определить импульс  $p_1$ , полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость  $v_0 = 10$  м/с, направленную под углом  $\alpha = 30^\circ$  к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.
9. Тело массой  $m = 5$  кг брошено под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 20$  м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы  $F$ , действующей на тело, за время его полета; 2) изменение  $\Delta p$  импульса тела за время полета.
10. Материальная точка массой  $m = 1$  кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса  $r = 1,2$  м в течение времени  $t = 10$  с. Найти изменение  $\Delta p$  импульса точки.
11. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покойится. В результате прямого удара меньший шар потерял  $3/4$  своей кинетической энергии  $T_1$ . Определить отношение  $k = M/m$  масс шаров.

12. Шар массой  $m = 1,8$  кг сталкивается с покоящемся шаром большей массы  $M$ . В результате прямого упругого удара шар потерял 36% своей кинетической энергии  $T_1$ . Определить массу большего шара.
13. Шар, массой  $m_1 = 200$  г, движущийся со скоростью  $v_1 = 10$  м/с, ударяет неподвижный шар массой  $m_2 = 200$  г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости  $u_1$  и  $u_2$  шаров после удара?
14. Молотком, масса которого  $m_1 = 1$  кг, забивают в стену гвоздь массой  $m_2 = 75$  г. Определить КПД  $\eta$  удара молотка при данных условиях.
15. Боек свайного молота массой  $m_1 = 500$  кг падает с некоторой высоты на сваю массой  $m_2 = 100$  г. Найти КПД  $\eta$  удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при углублении ее пренебречь.
16. Молот массой  $m_1 = 5$  кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса  $m_2$  наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить КПД  $\eta$  удара молота при данных условиях.
17. Молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в  $n = 3$  раза больше другого. Пренебрегая начальной кинетической энергией и импульсом молекулы, определить кинетические энергии  $T_1$  и  $T_2$  атомов, если их суммарная кинетическая энергия  $T = 0,032$  нДж.
18. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой  $m_1 = 5$  кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью  $v_2 = 1$  м/с. Масса конькобежца  $m_1 = 60$  кг. Определить работу  $A$ , совершенную конькобежцем при бросании гири.
19. Ядро атома распадается на два осколка массами  $m_1 = 1,6 \cdot 10^{-25}$  кг и  $m_2 = 2,4 \cdot 10^{-25}$  кг. Определить кинетическую энергию  $T_2$  второго осколка, если энергия  $T_1$ , первого осколка равна 18 нДж.
20. При выстреле из орудия снаряд массой  $m_1 = 10$  кг получает кинетическую энергию  $T_1 = 1,8$  кДж. Определить кинетическую энергию  $T_2$  ствола орудия вследствие отдачи, если масса  $m_2$  ствола орудия равна 600 кг.
21. Через неподвижный блок массой  $m = 0,2$  кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами  $m_1 = 0,3$  кг и  $m_2 = 0,5$  кг. Определить силы  $T_1$  и  $T_2$  натяжения шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.
22. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой  $m_1 = 100$  г и  $m_2 = 110$ . С каким ускорением  $a$  будут двигаться грузики, если масса  $m$  блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.
23. Вал массой  $m = 100$  кг и радиусом  $R = 5$  см вращался с частотой  $n = 8$  с<sup>-1</sup>. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой  $F = 40$  Н, под действием которой вал остановился через  $t = 10$  с. Определить коэффициент трения  $\mu$ .
24. На горизонтальную ось насажаны маховик и легкий шкив радиусом  $R = 5$  см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой  $m = 0,4$  кг. Опускаясь равномерно, груз прошел путь  $s = 1,8$  м за время  $t = 3$  с. Определить момент инерции  $J$  маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

25. Тонкий однородный стержень длиной  $l = 50$  см и массой  $m = 400$  г вращается с угловым ускорением  $\varepsilon = 3$  рад/с<sup>2</sup> около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент  $M$ .

26. Шар массой  $m=10$  кг и радиусом  $R=20$  см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид  $\varphi=A+Bt^2+Ct^3$ , где  $B=4$  рад/с<sup>2</sup>;  $C=-1$  рад/с<sup>3</sup>. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил  $M_1$  в момент времени  $t_1 = 2$  с.

27. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой  $m=0,4$  кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью  $v = 20$  м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии  $r = 0,8$  м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью  $\omega$  начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции  $J$  человека и скамьи равен 6 кг·м<sup>2</sup>?

#### Практическое занятие 4.

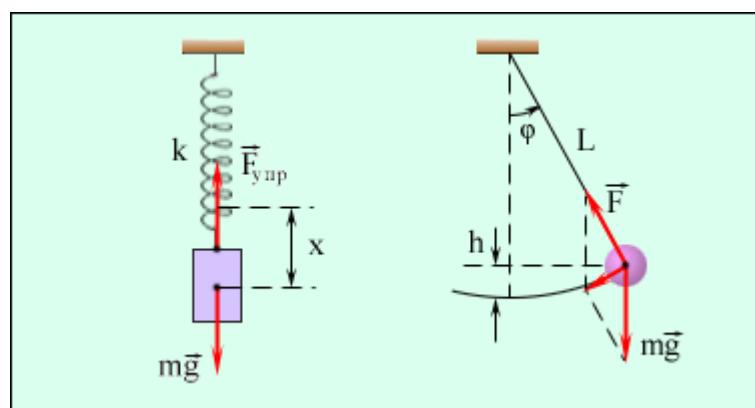
##### Тема занятия. Механические колебания и волны

**Цель занятия.** Изучить основные закономерности колебательных процессов в механике.

##### Теоретическая часть.

**Механическими колебаниями** называют движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени. Примерами простых колебательных систем могут служить груз на пружине или математический маятник.

Колебания широко распространены в природе и технике. Колебательные процессы лежат в основе таких отраслей техники как электротехника, радиотехника и т.д.).



В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему, различают: свободные, (собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

1. Свободные колебания, совершаются под действием **внутренних сил** системы, после того, как система была выведена из состояния равновесия. (Колебания груза на пружине или колебания маятника являются свободными колебаниями.).
2. Вынужденные - система подвергается воздействию внешней, периодически изменяющейся силы (колебание моста при прохождении солдат, идущих в ногу).
3. Автоколебания - система сама управляет внешним воздействием (маятник часов получает толчки в момент прохождения её через среднее положение).
4. Параметрические колебания - происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы за счет внешнего воздействия (например длины нити математического маятника).

Основные характеристики гармонического колебания:

1.  $x$ - смещение- отклонение от положения равновесия в данный момент времени (может быть  $>0$  и  $<0$ )/
2.  $A$  – амплитуда - максимальное отклонение от положения равновесия.
3.  $T$ - период - совершения одного полного колебания.
4.  $wt$ - фаза колебания - характеризует состояние колебательной системы в любой заданный момент времени.
5.  $v$ - частота - число колебаний в единицу времени.

Если к началу наблюдения фаза имела некоторое начальное значение  $\varphi_0$ , то уравнение запишется:

$$x = A \cdot \sin(\varphi_0 + wt)$$
 - гармоническое колебание с начальной фазой.

### Скорость и ускорение гармонического колебания

Скорость - гармонических колебаний есть первая производная смещения по времени.

Известно, что скорость  $v = \frac{ds}{dt}$  для гармонического колебания скорость определяется следующим образом  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cdot \sin wt)}{dt} = A \cdot w \cdot \cos wt$ ;

$$v = A \cdot w \cdot \cos wt$$
 -скорость гармонического колебания.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A \cdot w \cdot \cos wt)}{dt} = -A \cdot w^2 \cdot \sin wt$$

$$a = -A \cdot w^2 \cdot \sin wt$$
 - ускорение при гармоническом колебании.

Колебательное движение выполняется под действием силы, которая может быть определена по второму закону Ньютона:  $F = m \cdot a$ , но ускорение при гармонических колебаниях определяется по формуле  $a = -A \cdot w^2 \cdot \sin wt$ , подставим значение ускорения во второй закон Ньютона, то  $F = -m \cdot A \cdot w^2 \cdot \sin wt$ , но  $A \cdot \sin wt = x$ , то

$$F = -m \cdot x \cdot w^2$$
 - сила действующая на колеблющееся тело.

Она пропорциональна смещению, знак «-» указывает на, то что сила направлена в противоположную сторону относительно смещения.  $k = m \cdot v^2$

$$F = -k \cdot x$$
 - квазиупругая сила, вызывающая колебательные движения.

### Энергия гармонического колебательного движения

Квазиупругая сила является консервативной и поэтому полная механическая энергия системы остаётся постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия состоит только из потенциальной энергии, которая достигает своего максимального значения.

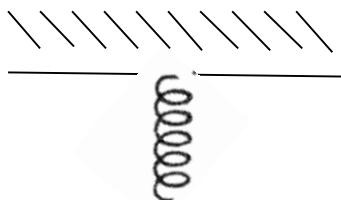
$$E = E_{n.\max} = \frac{k \cdot A^2}{2}, A - \text{амплитуда}$$

При прохождении системы через положение равновесия полная энергия состоит только из кинетической энергии, которая достигает своего максимума.

$$E = E_{kin.\max} = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2} = \frac{m \cdot A^2 \cdot w^2}{2}$$

### Пружинный, математический и физический маятники

Пружинный маятник- это груз массой  $m$  подвешенный на упругой пружине и совершающий гармонические колебания.



**m**

Колебания маятника совершаются под действием угловой силы.  $F = -k \cdot x$ ,  $k$ -коэффициент упругости, а в случае с пружиной он называется коэффициентом жёсткости.

Уравнение движения маятника записывается:

$$m \cdot a = -k \cdot x \quad (3)$$

Ускорение- это вторая производная смещения по времени:

$$m \cdot x'' = -k \cdot x, \text{ т.к } a = x''$$

Разделим обе части уравнения на m, то получим

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0 \quad (4)$$

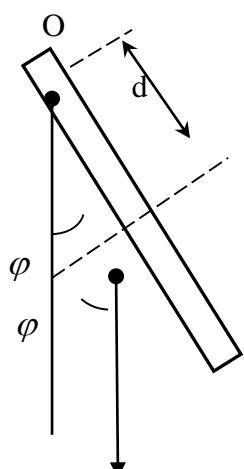
Сравним между собой уравнения (2) и (4), очевидно, что  $w^2 = \frac{k}{m}$ , а  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $w = \frac{2\pi}{T}$  ;

$T = \frac{2\pi}{w}$  - период колебания, подставим в формулу периода колебания значение  $w$ , через k

и m, то  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$
 - период колебания пружинного маятника.

**Физический маятник** - твёрдое тело способное совершать колебания относительно оси, не совпадающей с центром масс.



mg

Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$J \cdot \varepsilon = M, \text{ где}$$

$$M = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin \varphi$$

Для малых колебаний можно поучить  $J \cdot \varepsilon - M = 0$

$$J \cdot \varphi'' + m \cdot g \cdot d \cdot \varphi = 0 \quad (3)$$

Разделим уравнение (3) на  $J$

Введём обозначение  $w_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot d}{J}$ , получим уравнение

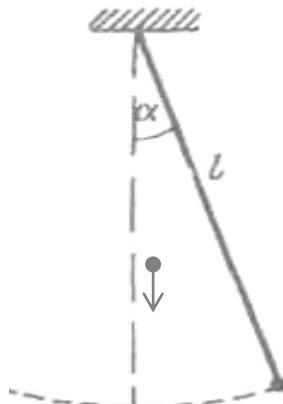
$\varphi'' + w^2 \varphi = 0$ , которое аналогично полученному ранее.

Период колебания физического маятника  $T = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{J}}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot d}}$$

**Математический маятник** - материальная точка подвешенная на невесомой нерастяжимой нити.

Реальный маятник, у которого масса тела во много раз больше массы нити, а размеры тела во много раз меньше длины нити, можно считать математическим.



mg

Учитывая, что момент силы тяжести  $M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha$  и момент инерции точки  $J = m \cdot l^2$ , из динамического уравнения вращательного движения получим:  $J \cdot \varepsilon = M$ .

$$m \cdot l^2 \cdot \alpha'' + m \cdot g \cdot l \cdot \alpha = 0 \quad (4)$$

Разделим уравнение (4) на  $ml^2$ , получим

$$\alpha'' + \frac{m \cdot g \cdot l}{m \cdot l^2} \cdot \alpha = 0$$
$$\alpha'' + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0, \Rightarrow \alpha'' + w_0^2 \cdot \alpha = 0 \quad w_0^2 = \frac{g}{l}$$

Период колебания математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Мы приходим к выводу, что во всех случаях колебания описываются одним и тем же уравнением  $x'' + w_0^2 \cdot x = 0$ , совпадающим с уравнением движения гармонического осциллятора.

### Вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания

Вынужденными колебаниями называется незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на неё внешних сил, периодически изменяющихся с течением времени.

Сила, вызывающая вынужденные колебания, называется возмущающий (вынуждающий) силой.

Вынуждающая сила изменяется по закону:

$$F(t) = F_0 \cdot \cos w \cdot t$$

$F_0$ - амплитуда вынуждающей силы,  $w$ - циклическая частота.

Под действием этой силы в системе устанавливаются гармонические колебания с циклической частотой  $w$ .

$$\Delta x = A \cdot \cos(w \cdot t + \varphi_1)$$

Где  $A$  - амплитуда вынужденных колебаний смещения.  $\varphi_1$  - разность фаз между вынужденными колебаниями  $\Delta x$  и силой  $F(t)$ .

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы и её частоты, зависимость амплитуды колебаний от частоты приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда вынужденного колебания достигает максимального значения. Это явление получило название резонанса, а соответствующая частота резонансной частоты.

$\beta \neq 0$ , то  $A$  достигнет максимального значения при частоте  $w_{pes} \neq w_0$

$$w = w_{pes} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2} = w_0 \sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{w_0^2}}$$

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению  $w_{pes}$  – называется резонансом,  $w_{pes}$  – резонансная циклическая частота.

При наличии трения резонансная циклическая частота  $w_{pes}$  несколько  $\angle w_{zam} = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$  и меньше  $w_0$ .

Форма резонансных кривых зависит от значения  $\beta$ . Чем больше  $\beta$ , тем более пологими становятся кривые.

Примеры резонанса: явление резонанса используется в акустике - для анализа звуков, их усиления и т.д.

Под действием периодически изменяющихся нагрузок в машинах и различных сооружениях могут возникнуть явления резонанса, которые могут быть опасны для эксплуатации машин.

Автоколебания- Колебательная система, совершающая незатухающие колебания за счёт источника энергии, не обладающего колебательными свойствами- называется автоколебательной системой.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Материальная точка массой  $m = 10$  г совершает гармонические колебания с частотой  $V = 0,2$  Гц. Амплитуда колебаний  $A$  равна 5 см. Определить: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

#### Решение

Уравнение гармонического колебания

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Скорость и ускорение колеблющейся точки

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на точку,

$$F = ma = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$F = F_{\max}$  при  $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1$ , поэтому искомое максимальное значение силы

$$F_{\max} = A\omega_0^2 m = 4\pi^2 \nu^2 A m$$

(учли, что  $\omega_0 = 2\pi\nu$ ).

Полная энергия колеблющейся точки

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2}.$$

Подставив сюда  $\omega_0$ , найдем искомую полную энергию:

$$E = 2\pi^2 m \nu^2 A^2.$$

Вычисляя, получаем: 1)  $F_{\max} = 0,8$  мН; 2)  $E = 19,7$  мкДж.

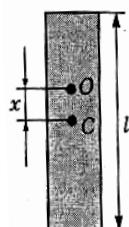
**Задача 2.** Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса  $O$  находится от центра масс  $C$  на расстоянии 20,2 см.

### Решение

Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{J}}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса маятника;  $J$  — момент его инерции.



Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии  $x$ ,

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}}. \quad (3)$$

Найдем экстремум функции (3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{6g(l^2 - 12x^2)}{x^{1/2}(l^2 + 12x^2)^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$l^2 - 12x^2 = 0,$$

т. е. искомая длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}x.$$

Вычисляя, получаем  $l = 70$  см.

**Задача 3.** Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями  $x = \cos \pi t$  и  $y = \cos \frac{\pi}{2} t$ . Определить уравнение траектории точки.

Решение

По условию задачи,

$$x = \cos \pi t ; \quad (1)$$

$$y = \cos \frac{\pi}{2} t . \quad (2)$$

Для определения уравнения траектории точки из уравнений (1) и (2) исключим время, тогда

$$\cos \pi t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - (1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} t) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t - 1 = 2y^2 - 1,$$

откуда искомое уравнение траектории точки

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

представляет собой параболу.

**Задача 4.** Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Решение

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}, \quad (1)$$

где  $A_0$  — амплитуда колебаний в момент  $t = 0$ ;  $\delta$  — коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания  $\Theta = \delta T$  ( $T = 1/\nu$  — условный период затухающих колебаний). Тогда  $\delta = \Theta \nu$  и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\Theta \nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\Theta \nu} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Число искомых полных колебаний

$$N = \frac{t}{T} = t\nu.$$

Вычисляя, получаем: 1)  $t = 6$  с; 2)  $N = 300$ .

**Задача 5.** Груз массой  $m = 50$  г, подвешенный на нити длиной  $l = 20$  см, совершает колебания в жидкости. Коэффициент сопротивления  $r = 0,02$  кг/с. На груз действует вынуждающая сила  $F = 0,1 \cos \omega t$ , Н. Определить: 1) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 2) резонансную амплитуду.

#### Решение

Очевидно, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, является резонансной частотой:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  — собственная частота колебаний системы;  $\delta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания.

Груз, подвешенный на нити, можно принять за математический маятник, тогда  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Подставив значения  $\omega_0$  и  $\delta$  в формулу (1), найдем искомую резонансную частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}.$$

Подставив формулу (1) в выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 - 4\delta^2 \omega^2)}},$$

где  $F_0$  — амплитудное значение вынуждающей силы (по условию задачи,  $F_0 = 0,1$  Н), найдем искомую резонансную амплитуду:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{r^2}{2m^2}}}.$$

Вычисляя, получаем: 1)  $\omega_{\text{рез}} = 7 \text{ рад/с}$ ; 2)  $A_{\text{рез}} = 71,4 \text{ см}$ .

### **Вопросы и задания.**

1. Гармонические колебания.
2. Основные характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, частота, период.
3. Динамика гармонических колебаний.
4. Пружинный, математический и физический маятники. Квазиупругие силы.
5. Кинетическая, потенциальная и полная энергия гармонического колебания.
6. Гармонический осциллятор.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой  $A = 5 \text{ см}$ , если за время  $t = 1 \text{ мин}$  совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Начертить график этого движения.

2. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой  $A = 50 \text{ мм}$ , периодом  $T = 4 \text{ с}$  и начальной фазой  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Найти смещение  $x$  колеблющейся точки от положения равновесия при  $t = 0$  и  $t = 1,5 \text{ с}$ . Начертить график этого движения.

3. Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний  $T = 24 \text{ с}$ , начальная фаза  $\varphi = 0$ .

4. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению  $x = 7 \sin \frac{\pi}{2} t$  проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

5. Начальная фаза гармонического колебания  $\varphi = 0$ . При смещении точки от положения равновесия  $x_1 = 2,4 \text{ см}$  скорость точки  $v_1 = 3 \text{ см/с}$ , а при смещении  $x_2 = 2,8 \text{ см}$  ее скорость  $v_2 = 2 \text{ см/с}$ . Найти амплитуду  $A$  и период  $T$  этого колебания.

6. Уравнение колебаний материальной точки массой  $m = 10 \text{ г}$  имеет вид  $x = 5 \sin \left( \frac{\pi}{5} t + \frac{\pi}{4} \right)$  см. Найти максимальную силу  $F_{\text{max}}$ , действующую на точку, и полную энергию  $W$  колеблющейся точки.

7. Уравнение колебания материальной точки массой  $m = 16 \text{ г}$  имеет вид  $x = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{4} \right)$  см. Построить график зависимости от времени  $t$  (в пределах одного периода) кинетической  $W_k$ , потенциальной  $W_n$  и полной  $W$  энергии точки.

8. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение,  $W = 30$  мкДж; максимальная сила, действующая на тело,  $F_{\max} = 1,5$  мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний  $T = 2$  с и начальная фаза  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

9. К пружине подвешен груз массой  $m = 10$  кг. Зная, что пружина под влиянием силы  $F = 9,8$  Н растягивается на  $l = 1,5$  см, найти период  $T$  вертикальных колебаний груза.

10. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = 2 \sin \omega t$  м и  $y = 2 \cos \omega t$  м. Найти траекторию результирующего движения точки.

## Раздел 2. Основы молекулярно-кинетической теории и термодинамика

### Практическое занятие 5.

**Тема занятия. Основы молекулярно-кинетической теории. Статистическая физика**

**Цель занятия.** Изучить основные понятия и законы молекулярно-кинетической теории.

#### **Теоретическая часть.**

Представление о том, что все тела построены из мельчайших частиц – атомов, возникло еще в древности и было высказано греческим философом Демокритом (V в. до н. э.). Однако, в дальнейшем эти представления были забыты и лишь во второй половине XVII в. были разработаны в качестве научной теории, получившей название **классической молекулярно-кинетической теории**.

Она основана на следующих положениях.

#### **1. Все вещества состоят из очень маленьких частиц – молекул.**

Каждое вещество состоит из одинаковых молекул. Сколько веществ в природе, столько и видов молекул.

#### **Молекулы состоят из еще более мелких частиц – атомов.**

Число атомов равно числу химических элементов и их изотопов (109 хим. элементов и более 1500 изотопов известно в наше время).

Молекулы – различные комбинации из атомов (молекулярно-кинетическая теория не рассматривает строение атома).

#### **2. Между молекулами тела одновременно действуют силы взаимного притяжения (сцепления) и силы взаимного отталкивания, причем силы отталкивания с увеличением расстояния убывают быстрее, чем силы сцепления. Поэтому на определенном расстоянии друг от друга молекулы могут находиться в устойчивом равновесии. Согласно современным исследованиям, положение устойчивого равновесия соответствует минимуму их потенциальной энергии.**

### 3. Молекулы, образующие тело, находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения.

Скорость движения молекул возрастает с увеличением температуры, поэтому движение называется тепловым движением.

По мере увеличения интенсивности теплового движения, среднее расстояние между молекулами возрастает, следовательно, тело переходит из твердого состояния в жидкое. При дальнейшем нагреве расстояние между молекулами увеличивается настолько, что силы сцепления исчезают, следовательно, тело переходит в газообразное состояние.

#### **Идеальный газ. Его параметры**

Идеальным газом называется газ, между частицами которого отсутствуют силы взаимного притяжения. При соударениях между собой, частицы газа ведут себя как упругие шарики крайне малого размера.

Существующие в действительности газы при не слишком низких температурах и достаточно малых давлениях называются разряженными газами и по своим свойствам близки к идеальному газу.

#### **Количество вещества (число молей)**

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

где  $N$  – число молекул,  $N_A$  – постоянная Авогадро,  $m$  – масса вещества,  $M$  – молярная масса.

$$\text{Уравнение Клапейрона-Менделеева} \quad pV = \nu RT,$$

где  $p$  – давление газа,  $V$  – его объем,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – термодинамическая температура.

#### **Уравнение молекулярно-кинетической**

$$\text{теории газов} \quad p = \frac{2}{3}n\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{1}{3}mn_0\langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где  $n$  – концентрация молекул,  $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$  – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы,  $m_0$  – масса молекулы  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  – средняя квадратичная скорость.

$$\text{Средняя энергия молекулы} \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана.

#### **Внутренняя энергия идеального газа**

$$U = \frac{i}{2}\nu RT.$$

Система из  $N$  материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет  $3N$  степеней свободы.

Молекулы газов, состоящие из одного атома (Ar, Xe, He) обладают тремя степенями свободы  $i=3$ ; молекулы газов, состоящие из двух атомов (O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>) обладают пятью степенями свободы  $i=5$ ; молекулы газов, состоящие из трех и более атомов (CO<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>) обладают шестью степенями свободы  $i=6$ .

**Скорость молекул:**

*средняя квадратичная*

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT/m_0} = \sqrt{3RT/M};$$

*средняя арифметическая*

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}.$$

*наиболее вероятная*

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}.$$

**Средняя длина свободного пробега молекулы**

$$\langle \lambda \rangle = (\sqrt{2\pi d^2 n})^{-1},$$

где  $d$  – эффективный диаметр молекулы.

**Среднее число столкновений молекулы в единицу времени**  $\langle z \rangle = \sqrt{2\pi d^2 n} \langle v \rangle$ .

**Распределение молекул в потенциальном поле сил**

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\Pi}{kT}\right),$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия молекулы.

**Барометрическая формула**

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right).$$

**Уравнение диффузии**

$$dm = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt,$$

где  $D$  – коэффициент диффузии,  $\rho$  – плотность,  $dS$  – элементарная площадка, перпендикулярная оси  $OX$ .

**Уравнение теплопроводности**

$$dQ = -\alpha \frac{dT}{dx} dS dt,$$

где  $\alpha$  – теплопроводность.

**Сила внутреннего трения**

$$dF = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} dS,$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость.

**Коэффициент диффузии**

$$D = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle.$$

**Вязкость (динамическая)**

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle = D \rho.$$

**Теплопроводность**

$$\alpha = \frac{1}{3} c_v \rho \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle = \eta c_v$$

,

где  $c_v$  – удельная изохорная теплоемкость.

**Примеры решения задач**

**Задача 1.** В баллоне вместимостью  $V = 6,9$  л находится азот массой  $m = 2,3$  г. При нагревании часть молекул диссоциировали на атомы. Степень диссоциации (отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа)  $\alpha = 0,2$ . Определить: 1) общее число  $N_1$  молекул и концентрацию  $n_1$  молекул азота до нагревания; 2) концентрации  $n_2$  молекул и  $n_3$  атомов азота после нагревания.

Дано:

$$V = 6,9 \text{ л} = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$m = 2,3 \text{ г} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$\alpha = 0,2$$

$$N_1 = ? \quad n_1 = ?$$

По определению, концентрация частиц газа есть

отношение числа газа к занимаемому газом объему:

$$n = \frac{N}{V}$$

1. Число молекул  $N_1$  газа до нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = ? \quad n_3 = ?$$

$$N_1 = \mathcal{V} \cdot N_A = \frac{m}{M} \cdot N_A,$$

где  $\mathcal{V}$  – количество вещества;  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $M$  – молярная масса (у азота  $M = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль).

Подставляя численные значения, получим

$$N_1 = \frac{2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 28} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 4,94 \cdot 10^{23} \text{ молекул, а}$$

$$n_1 = \frac{N_1}{V} = \frac{4,94 \cdot 10^{23}}{6,9 \cdot 10^{-3}} \text{ M}^{-3} = 7,16 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{M}^3}.$$

2. Концентрации молекул после нагревания найдем из соотношения

$$n_2 = \frac{N_2}{V} = \frac{N_1(1-\alpha)}{V}$$

где  $N_2$  – число молекул, не распавшихся на атомы. Подставим числовые значения:

$$n_2 = \frac{4,94 \cdot 10^{23} (1-0,2)}{6,9 \cdot 10^{-3}} \text{ M}^{-3} = 5,73 \cdot 10^{25} \text{ M}^{-3}.$$

Так как каждая молекула после распада дает два атома, то концентрация атомов после нагревания азота будет равна

$$n_3 = \frac{2N_1 \cdot \alpha}{V}$$

Следовательно,

$$n_3 = \frac{2 \cdot 4,94 \cdot 10^{23} \cdot 0,2}{6,9 \cdot 10^{-3}} \text{ M}^{-3} = 2,86 \cdot 10^{25} \text{ M}^{-3}.$$

**Задача 2.** В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определить удельный объем смеси.

Решение.

Согласно закону Дальтона, давление  $p$  смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2. \quad (1)$$

Из уравнения Клапейрона — Менделеева имеем:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \quad \text{и} \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Найдя отсюда  $p_1$  и  $p_2$  и подставив в (1), получим:

$$pV = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT.$$

Удельный объем смеси:

$$=\frac{\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)\cdot RT}{(m_1+m_2)\cdot p}$$

Вычисляя, получаем = 8,63 м<sup>3</sup>/кг.

### Задача 3.

Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты диффузии азота ( $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль) и углекислого газа ( $M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$  кг/моль), если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

#### Решение.

Коэффициент диффузии газа:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$  — средняя арифметическая скорость его молекул;  $\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}d^2n}$  — средняя длина свободного пробега молекул. Поскольку  $p = nkT$ , из условия задачи ( $T_1 = T_2, p_1 = p_2$ ) следует, что  $n_1 = n_2$ . Подставив значения  $\langle v \rangle, \langle l \rangle$  в формулу (1) и учитывая условие задачи, найдем

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Вычисляя, получаем  $\frac{D_1}{D_2} = 1,25$ .

#### *Вопросы и задания.*

1. Термодинамический метод исследования. Температурные шкалы. Идеальный газ.
2. Газовые законы.
3. Уравнение состояния идеального газа.
4. Основное уравнение М.К.Т.
5. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям.
6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.
7. Длина свободного пробега молекул. Опыты, подтверждающие МКТ.
8. Явления переноса.
9. Внутренняя энергия.

10. Закон Больцмана о равномерном распределении молекул.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Сколько молекул газа содержится в баллоне вместимостью  $V=30$  л при температуре  $T=300$  К и давлении  $p = 5$  МПа?
2. В сосуде находится смесь кислорода и водорода. Масса  $m$  смеси равна 3,6 г. Массовая доля  $\omega_1$  кислорода составляет 0,6. Определить количества вещества  $v$  смеси, а также  $v_1$  и  $v_2$  каждого газа в отдельности.
3. В баллоне вместимостью  $V = 3$  л находится кислород массой  $m = 4$  кг. Определить количество вещества  $v$  газа и концентрацию  $n$  его молекул.
4. Определить количество вещества  $v$  и число  $N$  молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью  $V=240$  см<sup>3</sup> при температуре  $T=290$  К и давлении  $p=50$  кПа.
5. Определить среднее значение  $\langle \varepsilon \rangle$  полной кинетической энергии одной молекулы следующих газов: гелия, кислорода и водяного пара при температуре  $T = 400$  К.
6. Определить число  $N$  молекул ртути, содержащихся в воздухе объемом  $V=1$  м<sup>3</sup> в помещении, зараженном ртутью, при температуре  $t=20$  °С, если давление  $p$  насыщенного пара ртути при этой температуре равно 0,13 Па.
7. Давление  $p$  газа равно 1 мПа, концентрация  $n$  его молекул равна 10<sup>10</sup> см<sup>-3</sup>. Определить:  
1) температуру  $T$  газа; 2) среднюю кинетическую энергию  $\langle \varepsilon_n \rangle$  поступательного движения молекул газа.
8. В колбе вместимостью  $V=240$  см<sup>3</sup> находится газ при температуре  $T=290$  К и давлении  $p=50$  кПа. Определить количество вещества  $v$  газа и число  $N$  его молекул.
9. Определить кинетическую энергию, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре  $T=1$  кК, а также среднюю кинетическую энергию  $\langle \varepsilon_n \rangle$  поступательного движения,  $\langle \varepsilon_v \rangle$  вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии  $\langle \varepsilon \rangle$  молекулы.
10. Смесь гелия и аргона находится при температуре  $T=1,2$  кК. Определить среднюю квадратичную скорость  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.
11. Средняя длина свободного пробега  $\langle l \rangle$  атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить диффузию  $D$  гелия.
12. Диффузия  $D$  кислорода при температуре  $t = 0$  °С равна 0,19 см<sup>2</sup>/с. Определить среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекул кислорода.
13. Вычислить диффузию  $D$  азота: 1) при нормальных условиях; 2) при давлении  $p = 100$  Па и температуре  $T = 300$  К.
14. Определить, во сколько раз отличается диффузия  $D_1$  газообразного водорода от диффузии  $D_2$  газообразного кислорода, если оба газа находятся при одинаковых условиях.
15. Определить зависимость диффузии  $D$  от температуры  $T$  при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном.

16. Определить зависимость диффузии  $D$  от давления  $p$  при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном.
17. Вычислить динамическую вязкость  $\eta$  кислорода при нормальных условиях.
18. Найти среднюю длину свободного пробега  $\langle l \rangle$  молекул азота при условии, что его динамическая вязкость  $\eta = 17 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$ .
19. Найти динамическую вязкость  $\eta$  гелия при нормальных условиях, если диффузия  $D$  при тех же условиях равна  $1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .
20. Определить зависимость динамической вязкости  $\eta$  от температуры  $T$  при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.

## Практическое занятие 6.

### Тема занятия. Основы термодинамики.

**Цель занятия.** Изучить основные понятия и законы термодинамики.

#### Теоретическая часть.

Термодинамика в отличие от молекулярно-кинетической теории не вдаётся в рассмотрение микроскопической картины явлений (оперирует с макропараметрами). Термодинамика рассматривает явления, опираясь на основные законы (начала), которые являются обобщением огромного количества опытных данных.

Внутренняя энергия – энергия физической системы, зависящая от её внутреннего состояния. Внутренняя энергия включает энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц системы (молекул, атомов, ионов и т.д.) и энергию взаимодействия этих частиц. Кинетическая энергия движения системы как целого и её потенциальная энергия во внешних силовых полях во внутреннюю энергию не входит. В термодинамике и её приложениях представляет интерес не само значение внутренней энергии, а её изменение при изменении состояния системы. Внутренняя энергия – функция состояния системы.

Работа термодинамической системы над внешними телами заключается в изменении состояния этих тел и определяется количеством энергии, передаваемой системой внешним телам при изменении объема.

- Уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где  $p$  - давление;  $V$  – объем;  $T$  - абсолютная температура;  $m$  – масса;  $\mu$  - молярная масса;  $R = 8,314 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$  – универсальная газовая постоянная.

- Уравнение состояния ван-дер-ваальсовского газа (для одного моля):

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

где  $V$  - объем, занимаемый молем газа при данных  $p$  и  $T$ ,  $a$  и  $b$  - постоянные Ван-дер-Ваальса для данного газа.

- Закон Дальтона: *давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений*(парциальное давление - это давление, которое оказывал бы на стенки сосуда один газ смеси в отсутствие остальных).
- Зависимость давления газа от высоты в поле силы тяжести в изотермическом приближении дается барометрической формулой:

$$p = p_0 e^{-\mu gh/RT},$$

где  $p_0$  - давление на высоте  $h = 0$ ,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  - ускорение свободного падения.

- Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где  $Q$  - количество тепла, сообщенное системе;  $A$  - работа, совершаемая системой;  $\Delta U$  - приращение внутренней энергии системы.

- Работа, совершаемая газом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

- Теплоемкость системы:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

- Уравнение Майера:

$$C_p - C_v = R$$

где  $C_p$ ,  $C_v$  - молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

- Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении определяются соотношениями:

$$C_v = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i},$$

где  $i$  - число степеней свободы молекулы газа.

- Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{m}{\mu} \cdot C_v T = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{\gamma-1} = \frac{pV}{\gamma-1}$$

- Молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе:

$$C = \frac{n - \gamma}{(n - 1)(\gamma - 1)} R$$

- Внутренняя энергия моля газа Ван - дер - Ваальса:

$$U = C_V T - \frac{C}{V}$$

- К. п. д. тепловой машины:

$$\eta = A/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1,$$

где  $Q_1$  - тепло, получаемое рабочим телом;  $Q_2$  - отдаваемое тепло.

- К.п.д. цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где  $T_1, T_2$  - температуры нагревателя и холодильника.

- Неравенство Клаузиуса:

$$\int \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

где  $\delta Q$  - элементарное тепло, полученное системой.

- Приращение энтропии системы:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T}$$

- Основное уравнение термодинамики для обратимых процессов:

$$TdS = dU + pdV$$

- Свободная энергия:

$$F = U - TS, \quad A_T = -\Delta F$$

- Связь между энтропией и статистическим весом  $\Omega$  (термодинамической вероятностью):

$$S = k \cdot \ln \Omega,$$

где  $k$  - постоянная Больцмана.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Определить удельную теплоемкость  $C_V$  смеси азота и водорода, если количество вещества газов в смеси одинаковы и равны  $v$ .

Решение:

Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме  $c_v$  найдем из следующих соображений:

1) теплоту, необходимую для нагревания смеси газов на  $\Delta T$  можно рассчитать по формуле:

$$Q = c_v (m_1 + m_2) \cdot \Delta T \quad (1)$$

2) ту же теплоту можно найти и другим способом:

$$Q = (c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2) \cdot \Delta T, \quad (2)$$

где  $c_{v_1}$  и  $c_{v_2}$  – удельные теплоемкости отдельных газов.

Приравнивая (1) и (2), получим

$$c_v (m_1 + m_2) \cdot \Delta T = (c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2) \cdot \Delta T, \text{ откуда}$$

$$c_v = \frac{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Так как  $c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}$ , где  $i$  – число степеней свободы молекулы.

Поскольку молекулы азота и водорода – двухатомные, то  $i = 5$ . Поэтому

$$c_{v_1} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_1},$$

$$c_{v_2} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_2}.$$

Подставляя эти выражения в (3), получим

$$c_v = \frac{\frac{5}{2} R \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right)}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{5}{2} R (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{5}{2} R \cdot 2v}{m_1 + m_2} = \frac{5Rv}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Количество вещества  $v = \frac{m}{M}$ , и  $m_1 = v \cdot M_1$ ,  $m_2 = v \cdot M_2$ .

В результате формула (4) примет вид

$$c_v = \frac{5Rv}{v M_1 + v M_2} = \frac{5R}{M_1 + M_2}$$

Подставляем числовые значения:

$$c_v = \frac{5 \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}} = 1385 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**Задача 2.** Определить количество теплоты, поглощаемой водородом  $m = 0,2$  кг при нагревании его от температуры  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершающую им работу.

Дано:

$$m = 0,2 \text{ кг}$$

$$t_1 = 0^\circ\text{C}; T_1 = 273 \text{ К}$$

$$t_2 = 100^\circ\text{C}; T_2 = 373 \text{ К}$$

$$Q = ? \quad \Delta U = ?$$

Количество теплоты  $Q$ , поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется по формуле

$$Q = \frac{m}{M} \cdot C_p \cdot \Delta T \quad (1)$$

где  $C_p$  – молярная теплоемкость газа при постоянном  $A = ?$  давлении.

Так как  $C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R$ , то (1) примет вид

$$Q = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} R \cdot \Delta T$$

Поскольку водород – двухатомный газ ( $M = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль), и число степеней свободы его молекул  $i = 5$ , то

$$Q = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 100 = 291 \cdot 10^3 \left[ \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \text{Дж} \right] = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия  $U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R T$ , следовательно

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T, \text{ тогда}$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 100 = 208 \cdot 10^3 \left[ \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \text{Дж} \right] = 208 \text{ кДж.}$$

Работу расширения газа найдем из выражения для первого начала термодинамики:  $Q = \Delta U + A$ , откуда

$$A = Q - \Delta U = 291 - 208 = 83 \text{ кДж.}$$

**Задача 3.** В цилиндре под поршнем находится водород массой  $m = 0,02$  кг при температуре  $T_1 = 300\text{K}$ . Водород начал адиабатно расширяться, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, уменьшив свой объем в 5 раз. Найти температуру  $T_2$  в конце адиабатного расширения и работу  $A$ , совершенную газом.

Дано:

$m = 0,02 \text{ кг}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$ $V_2 = 5V_1$ <hr/> $T_2 = ? \quad A = ?$	<p>Из уравнения Пуассона для адиабатного процесса имеем <math>T_1 = 300 \text{ К}</math></p> <p>(1) , где <math>\gamma = \frac{i+2}{i}</math> – показатель адиабаты.</p> <p>а <math>V_1 = V_3</math> по условию</p>	<p>Так как водород двухатомный газ, то <math>i = 5</math> и <math>\gamma = 1,4</math>.</p> <p>Из (1) <math>T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{1,4-1} K = 158 K</math>.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Работа  $A_1$  газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} C_V \cdot (T_1 - T_2), \text{ где } C_V = \frac{i}{2} R.$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_1 - T_2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (300 - 158) \text{ Дж} = 29,5 \text{ кДж.}$$

Работа  $A_2$  газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2 = -RT_2 \cdot \frac{m}{M} \ln \frac{V_2}{V_3} = -8,31 \cdot 158 \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \ln 5 = -21,1 \text{ кДж}$$

знак минус означает, что при сжатии работа газа совершена внешними силами.

Полная работа

$$A = A_1 + A_2 = 8,8 \text{ кДж.}$$

**Задача 4.** В цилиндре под поршнем находится водород массой  $m = 0,02 \text{ кг}$  при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$ . Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, уменьшив свой объем в 5 раз. Найти температуру  $T_2$  в конце адиабатного расширения и работу  $A$ , совершенную газом.

Решение:

Согласно уравнению Пуассона для адиабатного процесса

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad (1)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\gamma = \frac{i+2}{i}$  ( $i = 5$ , т.к. водород двухатомный газ), т.е.

$$\gamma = \frac{5+2}{5} = 1,4.$$

$$\text{Из (1)} \quad T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{1,4-1} T_2 = 158 \text{ K.}$$

Работа  $A_1$  газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} C_V \cdot (T_1 - T_2), \text{ где } C_V = \frac{i}{2} R, \text{ то есть}$$

$$A_1 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_1 - T_2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (300 - 158) \text{ Дж} = 29,5 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 29,5 \text{ кДж.}$$

Работа  $A_2$  газа при изотермическом сжатии выражается формулой

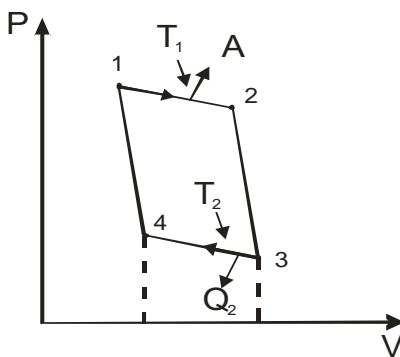
$$A_2 = -RT_2 \cdot \frac{m}{M} \ln \frac{V_2}{V_3} = -8,31 \cdot 158 \cdot \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \ln 5 = -21132 \text{ Дж} = -21 \text{ кДж}$$

знак «-» показывает, что при сжатии работа газа совершена внешними силами. Полная работа

$$A = A_1 + A_2 = 8,5 \text{ кДж}$$

**Задача 5.** Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура  $T_1$  нагревателя равна 470 К, температура  $T_2$  охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу  $A = 100$  Дж. Определить термический к.п.д.  $\eta$  цикла, а также количество теплоты  $Q_2$ , которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

Решение:



Термический к.п.д. цикла определяется выражением  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

Количество теплоты переданное охладителю при изотермическом сжатии (3-4) равно работе совершенной над газом сторонними силами

$$A_{34} = -Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Учитывая, что работа газа при изотермическом расширении (1-2)

$$A = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \nu R = \frac{A}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}, \text{ имеем:}$$

$$Q_2 = \frac{A}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = A \frac{T_2}{T_1}$$

**Задача 6.** Идеальный газ, совершающий цикл Карно, произвел работу  $A = 600$  Дж. Температура  $T_1$  нагревателя равна 500 К,  $T_2$  холодильника — 300 К. Определить: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл.

Решение.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Количество теплоты, отданное холодильнику,

$$Q_2 = Q_1 - A. \quad (1)$$

где  $Q_1 = A/\eta$  — количество теплоты, полученной от нагревателя.

Подставив это выражение  $Q_1$  в (1), найдем

$$Q_2 = A \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right).$$

Вычисляя, получаем: 1)  $\eta = 0,4$ ; 2)  $Q_2 = 900$  Дж.

**Задача 7.** Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при нагревании воды массой  $m = 100$  г от температуры  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  и последующем превращении воды в пар при той же температуре.

Решение:

Определим изменение энтропии  $\Delta S$  как сумму изменения энтропии  $\Delta S_1$  при нагреве воды и изменения энтропии  $\Delta S_2$  при ее превращении в пар:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Известно, что

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

При нагревании  $dQ = mc \cdot dT$ , где  $c$  – удельная теплоемкость воды,  $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ , тогда

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc \cdot dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,1 \cdot 4200 \cdot \ln \frac{373}{273} = 132 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

При превращении воды в пар температура не изменяется, значит

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T} \int_{1}^{2} dQ = \frac{Q}{T},$$

где  $Q$  – количество теплоты, переданное воде для превращения ее в пар,

$$Q = r \cdot m,$$

где  $r$  – удельная теплота парообразования,

$$r = 22,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}},$$

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T} = \frac{22,5 \cdot 10^5 \cdot 0,1}{373} = 603 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}, \text{ тогда}$$

$$\Delta S = 132 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} + 603 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 735 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Задача 8.** Определить изменение энтропии  $\Delta S$  при изотермическом расширении азота массой  $m = 10$  г, если давление газа уменьшилось от  $p_1 = 0,1$  МПа до  $p_2 = 50$  кПа.

Решение.

Изменение энтропии, учитывая, что процесс изотермический,

$$\Delta S = \int_{1}^{2} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_{1}^{2} dQ = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом,  $Q = A + \Delta U$ . Для изотермического процесса  $\Delta U = 0$ , поэтому  $Q = A$ . Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получаем  $\Delta S = 2,06 \text{ Дж/К.}$

### **Вопросы и задания.**

1. Основные законы термодинамики.
2. Первое начало термодинамики.
3. Работа, совершаемая газом при изменении объема. Работа газа при различных процессах.
4. Адиабатический процесс.
5. Энтропия. Неравенство Клаузиуса.
6. Статистическое истолкование энтропии.
7. Второе начало термодинамики.
8. Тепловой двигатель. Теорема Карно.
9. Холодильная машина.
10. Цикл Карно.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определить показатель адиабаты  $\gamma$  такой смеси.
2. Найти показатель адиабаты  $\gamma$  для смеси газов, содержащей гелий массой  $m_1=10 \text{ г}$  и водород массой  $m_2=4 \text{ г}$ .
3. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и равных объемах. Определить удельную теплоемкость  $c_p$  смеси.
4. Определить удельную теплоемкость  $c_v$  смеси газов, содержащей  $V_1=5 \text{ л}$  водорода и  $V_2=3 \text{ л}$  гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.
5. Каковы удельные теплоемкости  $c_v$  и  $c_p$  смеси газов, содержащей кислород массой  $m_1=10 \text{ г}$  и азот массой  $m_2=20 \text{ г}$ ?
6. Определить показатель адиабаты  $\gamma$  частично диссоциировавшего газообразного азота, степень диссоциации  $\alpha$  которого равна 0,4.
7. Азот массой  $m=5 \text{ кг}$ , нагретый на  $\Delta T=150 \text{ К}$ , сохранил неизменный объем  $V$ . Найти: 1) количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу; 2) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии; 3) совершенную газом работу  $A$ .
8. Водород занимает объем  $V_1=10 \text{ м}^3$  при давлении  $p_1=100 \text{ кПа}$ . Газ нагрели при постоянном объеме до давления  $p_2=100 \text{ кПа}$ . Определить: 1) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии газа; 2) совершенную газом работу  $A$ ; 3) количество теплоты  $Q$ , сообщенное газу.
9. Наименьший объем  $V_1$  газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем  $V_3$ , если объем  $V_2$  в конце изотермического расширения и объем  $V_4$  в конце изотермического сжатия соответственно равны: 600 л и 189 л.

10. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты  $Q_1=4,2$  кДж, совершил работу  $A=590$  Дж. Найти термический КПД  $\eta$  этого цикла. Во сколько раз температура  $T_1$  нагревателя больше температуры  $T_2$  охладителя?
11. Идеальный газ, совершающий цикл Карно. Температура  $T_1$  нагревателя в три раза выше температуры  $T_2$  охладителя. Нагреватель передал газу количество теплоты  $Q_1=42$  кДж. Какую работу  $A$  совершил газ?
12. Идеальный газ, совершающий цикл Карно,  $2/3$  количества теплоты  $Q_1$ , полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура  $T_2$  охладителя равна 280 К. Определить температуру  $T_1$  нагревателя.
13. Идеальный многоатомный газ совершают цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД  $\eta$  цикла.
14. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества  $v=1$  моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем  $V_{\min}=10$  л, наибольший  $V_{\max}=20$  л, наименьшее давление  $p_{\min}=246$  кПа, наибольшее  $p_{\max}=410$  кПа. Построить график цикла. Определить температуру  $T$  газа для характерных точек цикла и его термический КПД  $\eta$ .
15. Совершая замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты  $Q_1=4$  кДж. Определить работу  $A$  газа при протекании цикла, если его термический КПД  $\eta=0,1$ .
16. Кусок льда массой  $m=200$  г, взятый при температуре  $t_1=-10$  °С, был нагрет до температуры  $t_2=0$  °С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры  $t_3=10$  °С. Определить изменение  $\Delta S$  энтропии в ходе указанных процессов.
17. Найти изменение  $\Delta S$  энтропии при изобарическом расширении азота массой  $m=4$  г от объема  $V_1=5$  л до объема  $V_2=9$  л.
18. Кислород массой  $m=2$  кг увеличил свой объем в  $n=5$  раз один раз изотермически, другой – адиабатически. Найти изменения энтропии в каждом из указанных процессов.

### Раздел 3. Электричество

#### Практическое занятие 7.

##### **Тема занятия. Электростатика**

**Цель занятия.** Изучить основные законы электростатики.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Электрические свойства тел. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Электрическое поле. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса. Вычисление напряженностей полей заряженных тел различной геометрии. Работа сил электрического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал поля точечного заряда. Разность

потенциалов. Проводники в электрическом поле. Электрическое поле внутри заряженного проводника. Распределение зарядов в проводниках. Электроемкость проводников. Конденсаторы. Энергия электростатического поля. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Основные законы электростатики применяются при решении многих инженерных задач.

### Теоретическая часть.

**Закон Кулона:** сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна их величинам  $q_1$  и  $q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r_{12}$  между ними.

В скалярной форме закон Кулона:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}^2}.$$

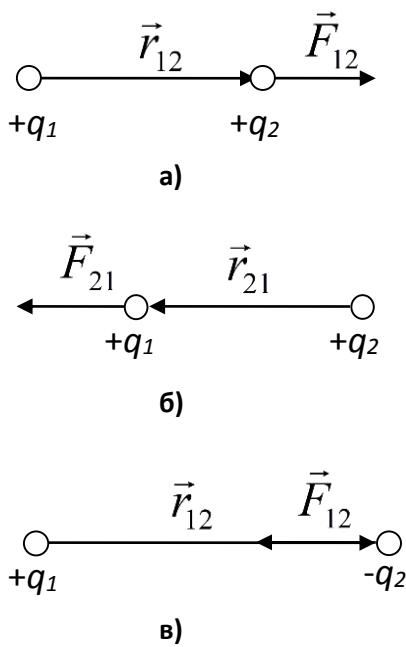


Рис. 1

Здесь:  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2$  (размерность может быть приведена к виду  $\Phi/\text{м}$ );  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме превышает

силу взаимодействия их в среде, т.е.  $\epsilon = \frac{F_0}{F}$  ( $F_0$  – сила Кулона в вакууме,  $F$  – в среде); диэлектрическая проницаемость вакуума  $\epsilon = 1$ , воздуха  $\epsilon = 1$ . Закон Кулона, записанный в векторной форме (1), (2), определяет силу, действующую на заряды  $q_2$  и  $q_1$  со стороны  $q_1$  и  $q_2$  соответственно.

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (1)$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{21}^3} \vec{r}_{21}. \quad (2)$$

Сила  $\vec{F}_{12}$  действует на заряд  $q_2$  со стороны  $q_1$ , при этом радиус-вектор  $\vec{r}_{12}$  фиксирует положение заряда  $q_2$  относительно начала системы координат, помещенного в точку, где находится заряд  $q_1$ . Радиус-вектор  $\vec{r}_{12}$  направлен от  $q_1$  к  $q_2$  (рис.1а). Сила  $\vec{F}_{21}$  действует на заряд  $q_1$  со стороны  $q_2$ , радиус-вектор  $\vec{r}_{21}$  (начало координат помещается в точку, где находится заряд  $q_2$ ) направлен от  $q_2$  к  $q_1$  (рис.1б). Сила Кулона направлена в ту же сторону (рис.1а,б), что и радиус-вектор  $\vec{r}$  при одинаковых знаках зарядов ( $q_1q_2>0$ ), и в противоположную радиус-вектору  $\vec{r}$  (рис.1в) – при различных знаках зарядов  $q_1$  и  $q_2$  ( $q_1q_2<0$ ).

Силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  по третьему закону Ньютона равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Напомним, что точечным зарядом называется наэлектризованное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других тел, с которыми оно взаимодействует.

### *Взаимодействие точечного заряда с распределенным зарядом*

Заряд, сообщенный телу, может распределяться по его поверхности (металл) или по объему (диэлектрик).

Характеристиками распределенного заряда служат:

1. Линейная плотность заряда ( $\tau$ ).
2. Поверхностная плотность заряда ( $\sigma$ ).
3. Объемная плотность заряда ( $\rho$ ).

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Здесь  $\Delta Q$  – заряд, находящийся соответственно на элементе длины  $\Delta l$ , поверхности  $\Delta S$ , объема  $\Delta V$  заряженного тела.

### *Напряженность поля точечного заряда*

Вектор напряженности электростатического поля в некоторой точке является физической величиной, численно равной силе, действующей на помещенный в эту точку единичный положительный заряд (пробный).

Направление вектора напряженности в некоторой точке поля совпадает с направлением силы, действующей на помещенный в данную точку электростатического поля положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}, \quad (3)$$

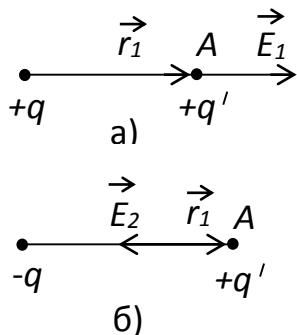
$q'$  - заряд, помещенный в данную точку поля. Размерность Е следует из выражения (3):

$$[E] = \frac{H}{Kl}.$$

Напряженность поля, созданного точечным зарядом  $q$  в точке на расстоянии  $r$  от заряда находят, используя выражение (3) и закон Кулона:

$$E = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2 q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Чтобы найти направление вектора напряженности в точке А (рис. 2), следует поместить в эту точку пробный положительный заряд  $q'$  и найти направление силы Кулона, действующей на  $q'$  со стороны заряда, создающего поле. Вектор напряженности поля, созданного положительным зарядом в точке А (рис. 2а), направлен в сторону от заряда (сравните с рис. 1), а в случае отрицательного заряда направлен в сторону заряда (рис. 2б).



Для нахождения напряженности поля, созданного системой зарядов, следует воспользоваться принципом суперпозиции электрических полей: вектор напряженности электрического поля системы зарядов равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом в отдельности.

Рис.2

Потенциал

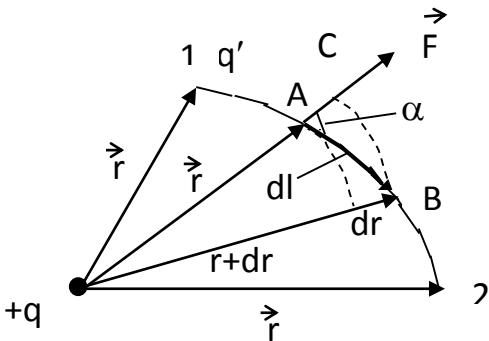
Пусть пробный заряд  $q'$  перемещается в поле точечного заряда  $q$  на бесконечно малый отрезок  $dl$  (рис. 3). Элементарная работа, совершаемая полем при перемещении заряда:

$$dA = Fdl \cos\alpha, \quad (5)$$

Где  $F$  – сила, действующая на заряд  $q'$  на отрезке  $dl$ ,  $\alpha$  - угол между  $\vec{F}$  и  $dl$  (рис. 3).

По закону Кулона

$$F = \frac{q'q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (6)$$



Из  $\Delta ABC$  (рис. 13) найдем, что приращение длины радиус-вектора  $\vec{r}$  численно равно:

$$dr = dl \cos \alpha. \quad (7)$$

Подставив выражения (6) и (7) в выражение (5), получим:

$$dA = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr. \quad (8)$$

Для нахождения полной работы, совершаемой полем при перемещении пробного заряда  $q'$  из положения 1 в положение 2 (рис. 13),

следует выражение (8) проинтегрировать по всему пути:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = q' \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = q' \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

то есть

$$A_{12} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (9)$$

Будем перемещать пробный заряд  $q'$  из точки 1 за пределы поля, т.е. в бесконечность, где напряженность электрического поля  $E_\infty$  равна 0. При этом в формуле (9)  $r_2 = \infty$ , и для  $A_{1\infty}$  получим

$$A_{1\infty} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r_1}. \quad (10)$$

Поделив выражение (10) на  $q'$ , получим величину, которая называется электрическим потенциалом данной точки поля:

$$\varphi = \frac{A_{1\infty}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11)$$

То есть, потенциал данной точки поля численно равен работе, которую совершают силы поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечно удаленную. Потенциал определяется с точностью до постоянной С. Для бесконечно удаленной точки пространства удобно принимать С=0. (В выражении (11) С принята равной 0). Единица измерения потенциала может быть найдена из выражения:

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{Дж}{Кл} = \frac{Кл \cdot В}{Кл} = В.$$

Как следует из выражения (11), потенциал поля точечного заряда в заданной точке поля вычисляют по формуле:

$$\varphi_{T.3.} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (12)$$

Здесь  $q$  – заряд, который создает поле,  $r$  - расстояние от заряда до точки, в которой вычисляется потенциал.

### Разность потенциалов

Разделив выражение (9) на  $q'$ , получим:

$$\frac{A_{12}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Отсюда:

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (13)$$

Величина  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  называется разностью потенциалов. Разность потенциалов двух точек измеряется работой, совершающей силами поля при перемещении положительного единичного заряда из первой точки во вторую.

### Потенциал поля системы точечных зарядов

равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами. То есть для потенциала, так же как и для напряженности поля, справедлив принцип суперпозиции электрических полей. При этом потенциал поля системы зарядов рассчитать всегда легче, чем напряженность, т.к. потенциал – величина скалярная (энергетическая характеристика поля). Поэтому в случаях, когда надо найти напряженность и потенциал в какой-либо точке поля, следует найти сначала потенциал, а напряженность поля искать, используя связь между напряженностью и потенциалом:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}. \quad (14)$$

Напряженность поля численно равна изменению потенциала на единицу длины, отсчитанной в направлении по силовой линии, и направлена в сторону убывания потенциала (этим объясняется знак минус в (14)).

Если поле неоднородно, то составляющая вектора напряженности электрического поля в данной точке по любому направлению равна производной от потенциала по этому направлению в той же точке, взятой со знаком минус:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}; \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}; \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Для однородного поля во всех его точках напряженность одна и та же. Если  $\varphi_1$  – потенциал точки 1, а  $\varphi_2$  – потенциал точки 2, расстояние между точками  $d$ , то:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

и выражение (14) для однородного поля имеет вид:

$$E = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}.$$

Потенциал поля заряженной сферы (шара) определяется как потенциал поля точечного заряда (формула 12). При этом считается, что заряд сосредоточен в центре сферы, т.е. расстояние  $r$  (формула 12) отсчитывается от центра сферы.

Решение задачи по нахождению потенциала поля, создаваемого системой точечных зарядов в данной точке, не вызывает затруднений, поэтому примеры решения задач на эту тему здесь не рассматриваются.

Более сложно решение задач по нахождению потенциала в точках поля распределенного заряда, на этом остановимся подробнее.

### *Расчет работы,*

совершаемой полем при перемещении заряда, и потенциальной энергии системы зарядов.

Работа сил поля, создаваемого зарядом  $Q$ , по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2 подсчитывается по формуле (9), т.е.

$$A_{12} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Из этого выражения следует, что величина работы по перемещению заряда в электростатическом поле не зависит от пути движения заряда  $q$ , а зависит лишь от его начального и конечного положений.

При нахождении работы считается, что перемещающийся заряд (обычно меньший по величине, чем заряд  $Q$ , который создает поле) не изменяет электростатического поля, в котором он движется.

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов  $q$  и  $Q$  равна:

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + W_\infty.$$

Обычно для упрощения расчетов бесконечно удаленную точку ( $r_2 = \infty$ ) принимают за начало отсчета энергии, т.е.  $W_\infty = 0$ . Тогда:

$$W(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (15)$$

Сравните (15) и (12).

Из (15) следует, что потенциал поля в данной точке численно равен потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля. Работа, как мера изменения энергии (в данном случае потенциальной):

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Итак, работа сил поля по перемещению заряда:

$$\text{a)} A = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$\text{б)} A = \int F dl, \text{ если } F = \text{const}: A = Fl = qEl.$$

(однородное поле, заряд движется по силовой линии)

$$\text{в)} A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

$$\text{г)} A_{12} = W_1 - W_2.$$

*Потенциал поля точечного заряда*

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

**Связь между потенциалом и напряженностью**

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

**Сила притяжения между двумя разноименно заряженными**

**обкладками конденсатора**

$$F = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2 S}{2} = \frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon \cdot S},$$

где  $S$  – площадь пластин.

**Электроемкость:**

*уединенного проводника*

$$C = \frac{q}{\varphi};$$

*плоского конденсатора*

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d};$$

*слоистого конденсатора*

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\sum d_i / \epsilon_i},$$

*шара*

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R,$$

где  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора,  $d_i$  – толщина  $i$ -го слоя диэлектрика,  $\epsilon_i$  – его диэлектрическая проницаемость,  $R$  – радиус шара.

**Электроемкость батареи конденсаторов, соединенных:**

*параллельно*

$$C = \sum C_i;$$

*последовательно*

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

**Энергия поля:**

заряженного проводника

$$W_{\exists} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2};$$

заряженного конденсатора

$$W_{\exists} = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2 V,$$

где  $V$  – объем конденсатора.

**Объемная плотность энергии**

электрического поля

$$W_{\exists} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{ED}{2}.$$

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Тонкий стержень длиной 20 см несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью  $\tau = 2 \text{ мКл/м}$ . На расстоянии 30 см от стержня находится заряд 20 нКл, равнодistantный от концов стержня. Найти силу взаимодействия заряда и стержня.

Дано:

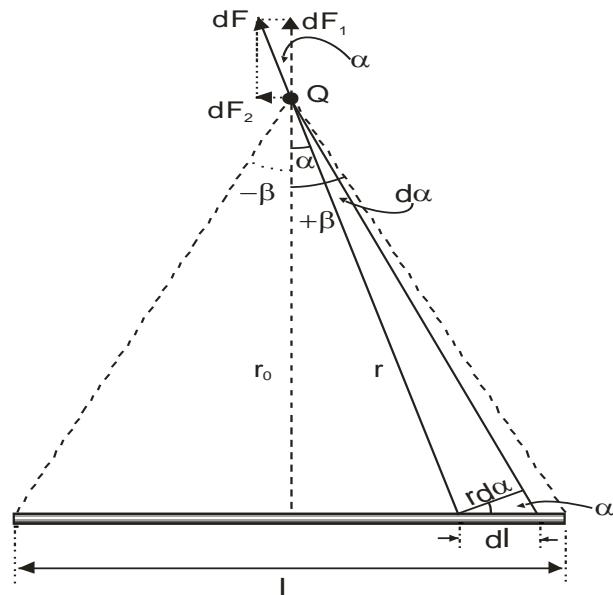
$$l = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$\tau = 2 \text{ мКл/м} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}$$

$$r_0 = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

$$Q = 20 \text{ нКл} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$$

$$F = ?$$



Выделим на стержне элементарный участок длиной  $dl$ . Заряд его  $dQ = \tau dl$  можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона сила взаимодействия между  $Q_1$  и  $dQ$  равна

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot dl}{r^2},$$

где  $r$  – расстояние от выделенного участка до заряда  $Q_1$  (см. рис.). Из рисунка следует, что  $r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$ ,  $dl = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha}$ , где  $r_0$  – расстояние от  $Q_1$  до стержня.

Подставив выражения для  $r$  и  $dl$  в формулу для силы  $dF$  получим, что

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot rd\alpha}{\frac{r_0^2}{\cos^2\alpha} \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot r_0 \cdot d\alpha}{\frac{r_0^2 \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{Q_1 \tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

Это векторная величина; разложим  $d\vec{F}$  на составляющие:

перпендикулярную стержню  $d\vec{F}_1$  и параллельную ему  $d\vec{F}_2$ . Очевидно,

$$dF_1 = dF \cdot \cos\alpha, \quad dF_2 = dF \cdot \sin\alpha, \text{ тогда}$$

$$dF_1 = \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha, \quad dF_2 = \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha$$

Проинтегрируем полученные выражения для сил в пределах изменения угла  $\alpha$  от  $-\beta$  до  $\beta$ .

$$F_1 = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \cdot \left| \sin\alpha \right|_{-\beta}^{+\beta} = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin\beta$$

$$F_2 = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} d\alpha = - \frac{Q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \cdot \left| \cos\alpha \right|_{-\beta}^{+\beta} = 0.$$

В результате получим, что  $F = F_1 = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \sin\beta$ .

Величину  $\sin\beta$  определим из рисунка:

$$\sin\beta = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} \quad \text{и подставим в выражение для силы } F.$$

$$F = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0 r_0} \cdot \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,3} \cdot \frac{0,2}{\sqrt{4 \cdot (0,3)^2 + (0,2)^2}} = 0,76 \cdot 10^{-3} \text{Н}$$

**Задача 2.** Тонкий стержень длиной  $l = 10$  см несет равномерно распределенный заряд  $Q = 1$  нКл. Определить потенциал  $\varphi$  электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от ближайшего его конца.

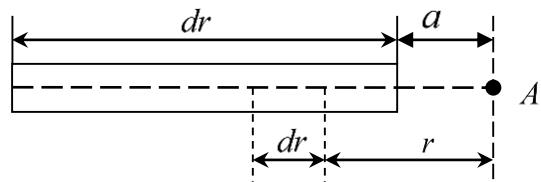
Дано:

$$l = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$Q = 1 \text{ нКл} = 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$a = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$$\varphi - ?$$



Выделим на стержне элементарный участок длиной  $dr$ . Заряд на стержне распределен равномерно, следовательно, его линейная плотность  $\tau = \frac{Q}{l}$  и на участке длиной  $dr$  размещен заряд  $dQ = \tau \cdot dr$ . Этот заряд можно считать точечным. Тогда потенциал электрического поля этого заряда в точке  $A$  равен

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \frac{dr}{r} \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние от элементарного участка  $dr$  до точки  $A$ .

Из принципа суперпозиции следует, что общий потенциал равен сумме потенциалов всех элементарных зарядов стержня.

Поэтому интегрируем выражение (1) для  $d\varphi$  в пределах изменения  $dr$  от  $a$  до  $l+a$ :

$$\varphi = \int_a^{l+a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \int_a^{l+a} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{l+a}{a} = \frac{10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} \cdot \ln \frac{0,1+0,2}{0,2} = 36,5 \text{ В.}$$

**Задача 3.** Конденсатор емкостью  $C_0 = 20$  мкФ заряжают до разности потенциалов  $U_0 = 400$  В и подключают к конденсатору емкостью  $C = 1$  мкФ, в результате чего последний заряжается. Отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор той же емкости ( $C = 1$  мкФ), затем третий, четвертый и т.д. Затем конденсаторы соединяют

последовательно. Какую максимальную разность потенциалов можно получить таким образом?

Дано:

$$C_0 = 20 \text{ мкФ} = 20 \cdot 10^{-6} \Phi$$

$$V \text{ равным } Q_0 = C_0 \cdot U.$$

После подключения к нему конденсатора емкостью  $C$

заряд  $Q_0$  распределяется между  $C_0$  и  $C$ . После отсоединения  $C$  от  $C_0$  на обоих конденсаторах будет одинаковая

разность потенциалов (т.к. их соединение было параллельным).

$$U_1 = \frac{Q_0}{C_0 + C} = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C}.$$

$$\text{На конденсаторе } C_0 \text{ останется заряд } Q_1 = C_0 \cdot U_1 = \frac{C_0^2 U_0}{C_0 + C}.$$

При последующем подключении второго конденсатора  $C$  на конденсаторе  $C_0$  останется заряд  $Q_2 = C_0 \cdot U_2$ .

$$\text{Причем } U_2 = \frac{C_2 U_2}{C_0 + C} = \left( \frac{C_0}{C_0 + C_1} \right)^2 U_0.$$

Повторяя эту операцию  $n$  раз, мы будем иметь набор конденсаторов, заряженных до напряжений  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).  $U_n = U_0 \left( \frac{C_0}{C_0 + C} \right)^n$ .

Общее напряжение после последовательного соединения всех  $n$  конденсаторов будет равно

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \frac{C_0 U_0}{C_0 + C} \left( 1 + \frac{C_0}{C_0 + C} + \frac{C_0^2}{(C_0 + C)^2} + \dots + \frac{C_0^n}{(C_0 + C)^n} \right).$$

Просуммировав полученную бесконечную убывающую геометрическую прогрессию найдем её сумму равную максимальной разности потенциалов  $U$ :

$$U = \frac{C_0 U_0}{C} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 400}{10^{-6}} = 8000 \text{ В.}$$

**Задача 4.** Батарею, состоящую из двух конденсаторов емкостями 4 и 5 мкФ каждый, соединили последовательно и включили в сеть с напряжением 220 В. Потом батарею отключили от сети, а конденсаторы разъединили и соединили параллельно обкладками,

имеющими одноименные заряды. Каким будет напряжение на зажимах полученной батареи?

Дано:

$$U_1 = 220 \text{ В} \\ = 4 \cdot 10^{-6} \Phi$$

Так как конденсаторы соединены последовательно, то  $C_1 = 4 \text{ мкФ}$   
заряд каждого из них и батареи в целом одинаковы:

$$C_2 = 5 \text{ мкФ} = 5 \cdot 10^{-6} \Phi$$

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q.$$

Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов вычисляется по формуле  $U_2 = ?$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

$$\text{Емкость батареи из двух конденсаторов равна } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

$$\text{а их заряд } Q = C U_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1.$$

При отключении конденсаторов заряд каждого из них сохранится. При параллельном их соединении будет равен сумме зарядов конденсаторов  $Q' = Q_1 + Q_2 = 2Q$ , а емкость батареи будет равна сумме емкостей  $C' = C_1 + C_2$ .

Общее напряжение станет равным

$$U_2 = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{2Q}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя в полученное выражение формулу для  $Q$ , получим:

$$U_2 = \frac{2C_1 C_2 U_1}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 220}{(4 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6})^2} = 108,6 \text{ В}$$

**Задача 5.** Какое количество теплоты  $Q$  выделится при разрядке плоского воздушного конденсатора, если разность потенциалов между пластинами равна 10 кВ, расстояние  $d=0,5$  мм, а площадь  $S$  каждой пластины равна  $100 \text{ см}^2$ ?

Дано:

$$U = 10 \text{ кВ} = 10^4 \text{ В}$$

$$d = 0,5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$Q = ?$$

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты  $Q$ , выделившееся в конденсаторе при его разрядке, равно энергии заряженного конденсатора

$$Q = \frac{C U^2}{2}$$

Емкость плоского конденсатора определяется по формуле

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха  $\epsilon=1$ ). Значит

$$Q = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 10^8}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 8,85 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 8,85 \text{ мДж.}$$

### **Вопросы и задания.**

1. Электрический заряд и его свойства. Закон сохранения заряда. Закон Кулона.
2. Напряженность электростатического поля. Линии напряженности электростатического поля. Поток вектора напряженности.
3. Принцип суперпозиции. Поле диполя.
4. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.
5. Применение теоремы Гаусса к расчету полей в вакууме.
6. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.
7. Потенциал электростатического поля. Разность потенциалов.
8. Связь между напряженностью и потенциалом. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля.
9. Диэлектрики. Поляризованность диэлектриков. Напряженность поля в диэлектрике.
10. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.
11. Проводники в электростатическом поле. Электроемкость. Соединение конденсаторов в батареи.
12. Энергия системы зарядов и уединённого проводника. Энергия конденсатора. Энергия электростатического поля

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностью плотностью  $\sigma_1 = 10 \text{ нКл/м}^2$  и  $\sigma_2 = -30 \text{ нКл/м}^2$ . Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь  $S$ , равную  $1 \text{ м}^2$ .
2. Две прямоугольные одинаковые параллельные пластины, длины сторон которых  $a = 10 \text{ см}$  и  $b = 15 \text{ см}$ , расположены на малом (по сравнению с линейными размерами пластин) расстоянии друг от друга. На одной из пластин равномерно распределен заряд  $Q_1 = 50 \text{ нКл}$ , на другой – заряд  $Q_2 = 150 \text{ нКл}$ . Определить напряженность  $E$  электрического поля между пластинами.

3. На отрезке тонкого прямого проводника длиной  $l = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 3$  мкКл/м. Вычислить напряженность  $E$ , созданную этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное его длине.
4. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды  $Q = 0,3$  нКл каждый. Какой отрицательный заряд  $Q_1$  нужно поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в положении равновесия?
5. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами  $Q_1 = 40$  нКл и  $Q_2 = -10$  нКл, находящимися на расстоянии  $d = 10$  см друг от друга. Определить напряженность  $E$  поля в точке, удаленной от первого заряда на  $r_1 = 12$  см и от второго на  $r_2 = 6$  см.
6. Три одинаковых заряда  $Q = 1$  нКл каждый расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд  $Q_1$  нужно поместить в центре треугольника, чтобы система зарядов находилась в положении равновесия? Будет ли это равновесие устойчивым?
7. Тонкая нить длиной  $l = 20$  см равномерно заряжена с линейной плотностью  $\tau = 10$  нКл/м. На расстоянии  $a = 10$  см от нити, против ее середины, находится точечный заряд  $Q = 1$  нКл. Вычислить силу  $F$ , действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.
8. В вершинах правильного шестиугольника со стороной  $a = 10$  см расположены точечные заряды  $Q, 2Q, 3Q, 4Q, 5Q, 6Q$  ( $Q = 0,1$  мкКл). Найти силу  $F$ , действующую на точечный заряд  $Q$ , лежащий в плоскости шестиугольника, равноудаленный от его вершин и равный заряду  $Q$ .
9. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau$  заряда, равной  $10$  мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его конца находится точечный заряд  $Q = 10$  нКл. Определить силу  $F$  взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.
10. Расстояние между двумя точечными зарядами  $Q_1 = 1$  мкКл и  $Q_2 = -Q_1$  равно  $10$  см. Определить силу  $F$ , действующую на точечный заряд  $Q = 0,1$  мкКл, удаленный на  $r_1 = 6$  см от первого и на  $r_2 = 8$  см от второго зарядов.
11. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии  $d = 0,5$  см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1 = 0,2$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = 0,3$  мкКл/м<sup>2</sup>. Определить разность потенциалов  $U$  между плоскостями.
12. Определить потенциальную энергию  $\Pi$  системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной длиной  $a = 10$  см. Заряды одинаковы по абсолютному значению  $Q = 10$  нКл, но два из них отрицательны. Рассмотреть два возможных случая расположения зарядов.
13. Какова потенциальная энергия  $\Pi$  системы четырех одинаковых точечных зарядов  $Q = 10$  нКл, расположенных в вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см?
14. Два конденсатора электроемкостями  $C_1 = 3$  мкФ и  $C_2 = 6$  мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС  $E = 120$  В. Определить заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  конденсаторов и разности потенциалов  $U_1$  и  $U_2$  между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

15. Конденсатор электроемкостью  $C_1 = 0,2\text{мкФ}$  был заряжен до разности потенциалов  $U_1 = 320\text{В}$ . После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов  $U_2 = 450\text{В}$ , напряжение  $U$  на нем изменилось до  $400\text{В}$ . Вычислить емкость  $C_2$  второго конденсатора.
16. Электрическое поле создано заряженной ( $Q = 0,1 \text{ мкКл}$ ) сферой радиусом  $R = 10 \text{ см}$ . Какова энергия  $W$  поля, заключенная в объеме, ограниченном сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в два раза больше радиуса сферы.
17. Шар радиусом  $R_1=8 \text{ см}$  заряжен до потенциала  $\varphi_1=500 \text{ В}$ , а шар радиусом  $R_2=4 \text{ см}$  – до потенциала  $\varphi_2=300 \text{ В}$ . Определить потенциал  $\varphi$  шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.
18. Шар радиусом  $R_1=6 \text{ см}$  заряжен до потенциала  $\varphi_1=300 \text{ В}$ , а шар радиусом  $R_2=4 \text{ см}$  – до потенциала  $\varphi_2=500 \text{ В}$ . Определить потенциал  $\varphi$  шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.
19. Сила  $F$  притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна  $50 \text{ мН}$ . Площадь  $S$  каждой пластины равна  $200 \text{ см}^2$ . Найти плотность энергии  $w$  поля конденсатора.
20. Какое количество теплоты  $Q$  выделится при разрядке плоского конденсатора, если разность потенциалов  $U$  между пластинами равна  $15 \text{ кВ}$ , расстояние  $d = 1 \text{ мм}$ , диэлектрик – слюда и площадь  $S$  каждой пластины равна  $300 \text{ см}^2$ ?
2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287>.

## Практическое занятие 8.

**Тема занятия. Проводники в электрическом поле. Электрическое поле в диэлектриках**

**Цель занятия.** Изучить проводники в электрическом поле.

### Теоретическая часть.

*Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Поляризация диэлектриков. Поляризационные заряды.*

Вектор поляризации (поляризованность) – это дипольный момент единицы объема, он определяется соотношением  $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ , где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость. Вектор электрической индукции (или вектор электрического смещения определяется выражением  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ .

**Поляризуемость.** Диэлектрическая проницаемость зависит от поляризумости молекул вещества,  $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$ . Тензор поляризуемости. В общем случае дипольный момент молекулы не совпадает по направлению с внешним магнитным полем, поэтому  $p_i = \beta_{ij} \epsilon_0 E_j$ .

*Плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком.* В этой системе связанные заряды будут только на поверхности, и существует связь  $|\vec{P}| = \sigma$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность связанных зарядов.

### *Теорема Гаусса для диэлектриков*

Для диэлектриков выполняются следующие соотношения:

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q', \quad \operatorname{div} \vec{P} = -\rho';$$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

### *Поле точечного заряда в диэлектрике*

Закон Кулона для бесконечного однородного диэлектрика имеет вид

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

*Условия на границе раздела двух диэлектриков во внешнем электрическом поле.*

На границе раздела диэлектриков выполняется равенство тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}$ :  $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$  и равенство нормальных составляющих вектора  $\vec{D}$ :  $\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}$ . Уравнение Пуассона для однородных диэлектриков имеет вид

$$\vec{\nabla} \left( \epsilon \vec{\nabla} \varphi \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Энергия системы электрических зарядов в диэлектрике. Энергия поля в диэлектриках. Плотность энергии электрического поля в диэлектриках определяется выражением

$$w = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}.$$

### *Электрический ток в проводниках*

Плотность тока, плотность тока и ток связаны соотношением  $\int \vec{j} d\vec{S} = I$ . Уравнение неразрывности (закон сохранения заряда)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

*Закон Ома для плотности тока. Удельная проводимость, удельное сопротивление*

Между плотностью тока и напряженностью электрического поля существует линейная связь,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (закон Ома в дифференциальной форме). Закон Ома для однородного проводника записывается в виде  $I = \frac{U}{R}$ . Закон Джоуля – Ленца задает количество тепла, которое выделяется в проводнике при протекании тока в единицу времени:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{U^2}{R}.$$

Правильное описание движения зарядов в проводниках дает только квантовая теория. Примитивная электронная теория протекания тока через металл основывается на движении зарядов как классических частиц, на которые действует сила со стороны электрического поля и сила трения со стороны среды.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Диполь с электрическим моментом  $P=50 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$ . Найти работу, необходимую для поворота диполя на угол  $\alpha=30^\circ$ .

Дано:

$$P=50 \text{ пКл}\cdot\text{м} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}\cdot\text{м}$$

$$E = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{м}} = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

$$\alpha=30^\circ$$

Элементарная работа при повороте диполя на угол  $d\alpha$

$$dA = M \cdot d\alpha,$$

где  $M = P \cdot E \cdot \sin \alpha$  – механический момент сил, действующий на диполь.  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ .  $A = ?$

Таким образом  $dA = P \cdot E \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$ .

При свободном положении диполь в электрическом поле  $\alpha = 0$ , значит полная работа может быть рассчитана по формуле

$$A = \int_0^\alpha P \cdot E \sin \alpha \cdot d\alpha = -PE \cdot \cos \alpha \Big|_0^\alpha.$$

$$A = -5 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^4 (\cos 30^\circ - \cos 0^\circ) = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж} = 0,2 \text{ мкДж.}$$

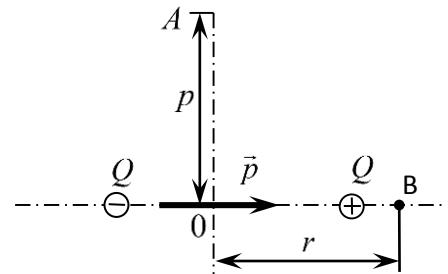
### Вопросы и задания.

1. Диэлектрики в электростатическом поле.
2. Поляризация диэлектриков, вектор поляризации.

3. Связь вектора поляризации с объемной и поверхностной плотностью связанных зарядов.
4. Теорема Гаусса для диэлектриков.
5. Поле точечного заряда в диэлектрике.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Точечный диполь с электрическим моментом  $p = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 9 \text{ МВ/м}$ . Диполь повернули на малый угол и предоставили самому себе. Определить частоту  $\nu$  собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции  $J$  диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен  $4 \cdot 10^{-12} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .
2. Диполь с электрическим моментом  $p = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 10 \text{ кВ/м}$ . Определить изменение потенциальной энергии  $\Delta P$  диполя при повороте его на угол  $\alpha = 60^\circ$ .
3. Диполь с электрическим моментом  $p = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 150 \text{ кВ/м}$ . Вычислить работу  $A$ , необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол  $\alpha = 180^\circ$ .
4. Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  поля, созданного точечным диполем в точках  $A$  и  $B$ . Его электрический момент  $p = 1 \text{ пКл}\cdot\text{м}$ , а расстояние  $r$  от точек  $A$  и  $B$  до центра диполя равно 10 см. (см. рисунок).



5. Расстояние  $l$  между зарядами  $Q = \pm 3,2 \text{ нКл}$  диполя равно 12 см. Найти напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  поля, созданного диполем в точке, удаленной на  $r = 8 \text{ см}$  как от первого, так и от второго заряда.
6. Два точечных диполя с электрическими моментами  $p_1 = 1 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  и  $p_2 = 4 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  находятся на расстоянии  $r = 2 \text{ см}$  друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.
7. Два точечных диполя с электрическими моментами  $p_1 = 20 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  и  $p_2 = 50 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  находятся на расстоянии  $r = 10 \text{ см}$  друг от друга так, что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.
8. Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  поля, создаваемого точечным диполем с электрическим моментом  $p = 4 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  на расстоянии  $r = 10 \text{ см}$  от центра диполя, в направлении, составляющем угол  $\alpha = 60^\circ$  с вектором электрического момента.

## Практическое занятие 9.

**Тема занятия.** Законы постоянного тока.

**Цель занятия.** Изучить законы постоянного тока

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Источники тока. Электродвигущая сила (ЭДС). Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Закон Ома для полной цепи. Разветвленные цепи. Законы Кирхгофа. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца. Тепловое действие электрического тока и его применение в технике. Элементарная классическая теория электропроводности металлов. Границы применимости классической теории электропроводности. Контактные явления. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Основные понятия и законы постоянного тока применяется при решении инженерных задач.

**Теоретическая часть.**

**Характеристики электрического тока и условия его существования**

В электростатике изучались явления, обусловленные неподвижными зарядами. Если по какой-либо причине возникает упорядоченное движение зарядов и через поверхность переносится заряд, отличный от нуля, то говорят, что возникает электрический ток.

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока – величина заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Если за время  $dt$  через поверхность переносится заряд  $dq$ , то сила тока равна:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Единицей силы тока является ампер (А). За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды или направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов. Свободные заряды, которые перемещаются в среде, называются носителями тока.

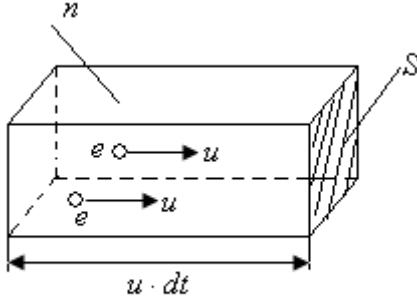
Электрический ток может быть распределен неравномерно по поверхности, через которую он течет. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока  $\vec{j}$ . Пусть зарженные частицы движутся в определенном направлении со скоростью  $\vec{u}$ . Вектором плотности тока  $\vec{j}$  называется вектор, по направлению совпадающий с направлением скорости положительных зарядов (или против направления скорости отрицательных зарядов), а по абсолютной величине равный отношению силы тока  $dI$  через элементарную площадку  $dS \perp$ , расположенную в данной точке пространства перпендикулярно к направлению движения носителей, к ее площади.

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

Число носителей тока в единице объема  $n$  называется плотностью носителей тока. Заряд отдельного носителя будет обозначаться  $e$ .

Если свободными зарядами являются, например, электроны, а положительные заряды неподвижны (это имеет место в металлах), то плотность носителей будет совпадать с числом свободных электронов в единице объема.

Вектор плотности тока можно выразить через плотность носителей тока и скорость их движения. Количество заряда, перенесенного за время



$dt$  через некоторую поверхность  $S$ , перпендикулярную к вектору скорости (рис. 20.1), равно  $dq = n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot S$ . За время  $dt$  площадку  $S$  пересекут все свободные заряды в параллелепипеде с основанием  $S$  и длиной  $u dt$ . Если площадка  $S$  достаточно мала, то плотность тока в её пределах можно считать постоянной и тогда:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{dq}{Sdt} = \frac{n \cdot e \cdot u \cdot dt \cdot S}{S \cdot dt} = n \cdot e \cdot u.$$

В векторной форме:

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{u}$$

Сила тока через произвольную поверхность

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

Электрический ток, обусловленный движением свободных зарядов в проводниках различной природы, называется током проводимости.

Свободные заряды в проводнике испытывают столкновения с атомами проводника. За время «свободного пробега»  $\tau$  между двумя столкновениями заряд в проводнике приобретает направленную скорость вдоль внешнего электрического поля:

$$\vec{u} = \vec{w} \tau = \frac{e \vec{E}}{m_0} \tau$$

где  $\vec{E}$  напряженность электрического поля в проводнике. После очередного столкновения скорость теряется. Затем, до следующего столкновения, происходит новое наращивание направленной скорости.

Из вышеизложенного следует, что условиями существования тока являются:

- Наличие свободных зарядов;
- Наличие электрического поля внутри проводника, чтобы поддерживать перемещение зарядов.

## Электродвижущая сила, напряженность

Если бы на носитель тока действовали только силы электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из места с большим потенциалом к месту с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это привело бы к выравниванию потенциалов, и в результате ток бы прекратился. Чтобы этого не произошло, должны иметься участки на которых перенос положительных зарядов происходит в сторону возрастания  $\varphi$ , т.е. против сил электростатического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил не электростатического происхождения, называемых сторонними силами. Физическая природа сторонних сил может быть различна. Например, химическая (как в аккумуляторах), механическая, магнитная и другие.

Величина, равная отношению работы сторонних сил по перенесению заряда к величине этого заряда называется электродвижущей силой (ЭДС).

ЭДС измеряется в тех же единицах что и потенциал, т.е. в вольтах (В).

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде  $\vec{F}_{cmop} = \vec{E}_{cmop}q$ , где  $\vec{E}_{cmop}$  - напряженность поля сторонних сил. Работа сторонних сил над зарядом на некотором участке 1-2:

$$A_{cmop}^{1-2} = q \int_1^2 \vec{E}_{cmop} d\vec{l}$$

Разделив обе части согласно определению ЭДС на заряд, получим:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{cmop}^{1-2}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{cmop} d\vec{l}$$

Для замкнутой цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{cmop} d\vec{l}$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определенна как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ . Результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд, равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{cmop} = q(\vec{E} + \vec{E}_{cmop})$$

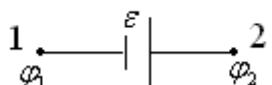
Работа, совершающаяся этой силой над зарядом  $q$  на участке цепи 1-2, определяется

выражением  $A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_{cmop} d\vec{l}$ . Т.к.  $q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а

$q \int_1^2 \vec{E}_{cmop} d\vec{l} = q\varepsilon_{12}$ , тогда работа равна  $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}$ .

Разделим обе части на  $q$ . В левой части отношение  $\frac{A_{12}}{q}$  обозначим  $U_{12}$ . Величина,

численно равная отношению работы и электростатических и сторонних сил по перемещению заряда к величине этого заряда называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи  $U_{12}$ .



Таким образом (рис. 20.2),

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

Заметим, что если на участке отсутствует ЭДС, то  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ . (Для замкнутой цепи точки 1 и 2 совпадают,  $\varphi_1 = \varphi_2$  и, тогда  $U_{12} = \varepsilon_{12}$ .) Можно показать, что  $U_{12} = IR$ , где  $R$  - полное сопротивление цепи и тогда

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

Это уравнение выражает закон Ома для неоднородного участка цепи (с ЭДС).

### **Классическая электронная теория электропроводимости металлов и ее недостаточность**

Внутренняя структура металлов характеризуется кристаллической решеткой. В узлах кристаллической решетки находятся положительные ионы; в пространстве между ними практически свободно движутся обобществленные электроны. Немецкий физик П. Друде предположил, что электроны ведут себя как частицы идеального газа, и предложил использовать для описания их поведения известные формулы кинетической теории газов.

Система свободных обобществленных в кристаллической решетке электронов называется электронным газом. В отличие от молекул газа, пробег которых определялся соударением молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами образующими кристаллическую решетку металла. Этими столкновениями обусловлено в частности, сопротивление металла электрическому току.

Хаотическое тепловое движение электронов в металлах можно характеризовать средней скоростью  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_e}}$  (для комнатных температур  $\langle v \rangle \sim 10^3 \text{ м/с}$ ). При наличии внешнего поля электроны обладают еще некоторой средней скоростью направленного движения  $\bar{u}$ . Обычно  $u \sim 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ м/с}$ , то есть  $u \ll \langle v \rangle$ .

## ***Выход законов Ома и Джоуля-Ленца из электронных представлений***

### Закон Ома.

Средний путь, проходимый свободно движущимися электронами между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки называется средней длиной свободного пробега  $\lambda$ . Среднее время между двумя столкновениями  $\tau = \frac{\lambda}{v}$  (определяется скоростью хаотического движения). При наличии поля  $\vec{E}$  направленная скорость электронов накапливается за время свободного пробега и к моменту следующего соударения достигает максимальной величины:

$$\vec{u}_{max} = \vec{w}\tau = \frac{e\vec{E}}{m} \frac{\lambda}{v}.$$

Скорость  $\vec{u}$  изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее за пробег значение равно половине максимального значения.

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{1}{2} \vec{u}_{max} = \frac{1}{2} \frac{e\vec{E}}{m} \frac{\lambda}{v}$$

Плотность тока:

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \langle \vec{u} \rangle = \frac{n \cdot e^2 \cdot \lambda}{2mv} \vec{E}$$

Коэффициент пропорциональности между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  обозначим  $\sigma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \lambda}{2mv}$  ( $\sigma$  - проводимость). В результате получим закон Ома в локальной форме (параметры относятся к данной точке сечения проводника).

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

Плотность тока в проводнике пропорциональна напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Коэффициентом пропорциональности является проводимость. (Замечание. Сравним полученную формулу с известной  $I = \frac{U}{R}$ . Проводимость  $\sigma$  обратно пропорциональна удельному сопротивлению  $\rho$   $\sigma = \frac{1}{\rho}$ . Плотность тока  $j = \frac{I}{S}$ . Напряженность поля  $E = \frac{U}{l}$  ( $l$  - длина проводника). Тогда  $\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$ , или  $I = \frac{U}{\rho \cdot l} S = \frac{U}{R}$ , что и требовалось.)

### Закон Джоуля – Ленца.

К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, среднее значение которой равно:

$$\langle \Delta E_k \rangle = \frac{m \cdot u_{max}^2}{2} = \frac{e^2 \lambda^2}{2m \nu^2} E^2$$

$$(\text{Напомним: } u_{max} = \frac{eE\lambda}{m\nu}).$$

Столкнувшись с атомом, электрон, по предположению, полностью передает приобретенную им энергию кристаллической решетке. Сообщенная решетке энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляясь в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем  $z = \frac{\nu}{\lambda}$  соударений. Обозначим число электронов проводимости в единице объема  $n$ , тогда полная энергия, переданная электронами за единицу времени в единице объема будет равняться:

$$W = n \cdot z \langle \Delta E_k \rangle = n \cdot z \cdot \frac{e^2 \lambda^2}{2m \nu^2} E^2 = \frac{ne^2 \lambda}{2m \nu} \frac{\lambda \nu}{\lambda} E^2 = \frac{ne^2 \lambda}{2m \nu} E^2.$$

Зная, что  $\sigma = \frac{ne^2 \lambda}{2m \nu}$  в результате получим закон Джоуля – Ленца в локальной форме:

$$W = \sigma \cdot E^2$$

Тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема при протекании электрического тока пропорциональна квадрату напряженности поля.

Переходя от  $\sigma$  и  $E$  к  $\rho$  и  $j$ : ( $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ,  $E = \frac{j}{\sigma}$ ), получим  $W = \frac{1}{\rho} \left( \frac{j}{\sigma} \right)^2 = \rho \cdot j^2$ , или

$$W = \rho \cdot j^2$$

Получили другую форму закона Джоуля – Ленца. (Объемная плотность тепловой мощности равна произведению удельного сопротивления на квадрат плотности тока).

**Затруднения классической электронной теории электропроводности металлов**

Классическая теория смогла объяснить полученные ранее экспериментально законы Ома и Джоуля – Ленца, но есть и существенные затруднения. Основными являются следующие:

1. Теоретическое значение проводимости изменяется с температурой  $\sigma_{theor} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$ , экспериментальная же зависимость  $\sigma = \frac{I}{T}$ .

2. Классическая теория не в состоянии объяснить такое явление как сверхпроводимость.

Имеются и другие затруднения и в этом недостаточность классической теории.

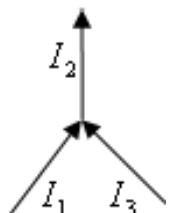
Современная квантовая теория электропроводимости металлов показывает, что все трудности классической теории связаны с тем, что представление об электронах как идеальном газе является грубым приближением. На самом деле электроны внутри металла не являются такими свободными, как это следует из классической теории.

В современной квантовой теории показывается, что электроны внутри металла, как и электроны в атоме не могут иметь любую энергию, а лишь вполне дискретные значения энергии – энергия электронов квантуется.

## 5. Законы Кирхгофа

1. Первый закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.



$$\sum I_k = 0$$

При этом токи, идущие к узлу, принято считать положительными, а от узла – отрицательными (можно и наоборот – это несущественно).

Заметим, что узел – это точка, где сходятся три и более тока. Например, для рис. 20.3 первый закон запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

2. Второй закон Кирхгофа (он относится к любому выделенному в цепи замкнутому контуру):

Алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления (сумма падений напряжений) равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$\sum I_k R_j = \sum \mathcal{E}_i$$

## Примеры решения задач

**Задача 1.** Даны 12 элементов с ЭДС  $\mathcal{E} = 1,5$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,4$  Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление  $R = 0,3$  Ом? Определить максимальную силу тока  $I_{max}$ .

Дано:

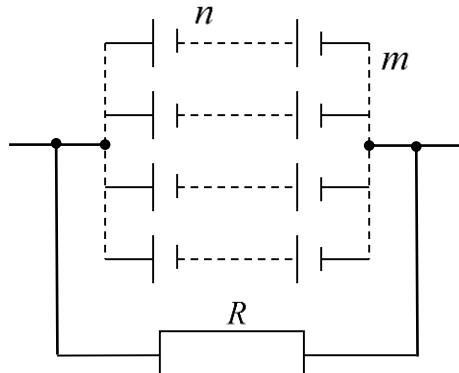
$$N=12$$

$$\mathcal{E} = 1,5 \text{ В}$$

$$r=0,4 \text{ Ом}$$

$$R=0,3 \text{ Ом}$$

$$I_{max} = ?$$



Предположим, что соединение состоит из  $m$  параллельно соединенных ветвей по  $n$  последовательно соединенных элементов в каждой (см. рис.). Очевидно,  $N = m \cdot n$ , При последовательном соединении ЭДС и внутреннего сопротивления элементов складываются; поэтому ЭДС каждой ветви  $\mathcal{E}_B = n \cdot \mathcal{E}$ , а внутреннее сопротивление  $r_B = n \cdot r$ .

При параллельном соединении  $\mathcal{E}$  системы равна  $\mathcal{E}$  отдельного элемента и  $\frac{1}{r_c} = \sum_1^m \frac{1}{r_i}$

. Следовательно, ЭДС соединения равна ЭДС отдельной ветви  $\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_B$ , а внутреннее сопротивление соединения  $r_c = \frac{r}{m}$ .

Таким образом, для батареи элементов имеем  $\mathcal{E}_C = n \cdot \mathcal{E}$ , и  $r_c = \frac{nr}{m}$ .

По закону Ома для замкнутой цепи получим

$$I = \frac{\mathcal{E}_C}{r_c + R} = \frac{n \cdot \mathcal{E}}{\frac{nr}{m} + R} = \frac{n \cdot m \mathcal{E}}{nr + mR} = \frac{N \cdot \mathcal{E}}{n \cdot r + mR} \quad (1)$$

Так как  $N = m \cdot n$  и  $n = \frac{N}{m}$ , то окончательно получим

$$I = \frac{N \cdot \mathcal{E}}{\frac{N}{m} r + mR} = \frac{N \mathcal{E} \cdot m}{Nr + m^2 R} \quad (2)$$

Исследуем на экстремум функцию  $I(m)$ , представленную формулой (2).

$$I'(m) = \left( \frac{N \mathcal{E} \cdot m}{Nr + m^2 R} \right)' = \frac{N \cdot \mathcal{E} \cdot (Nr + m^2 R) - N \cdot \mathcal{E} \cdot m \cdot (2mR)}{(Nr + m^2 R)^2} \quad (3)$$

Приравнивая (3) к нулю

$$\frac{N\mathcal{E}(Nr + m^2R) - 2N\mathcal{E} \cdot m^2R}{(Nr + m^2R)^2} = 0,$$

найдем максимальное значение  $m$ . В результате получим

$$m = \sqrt{\frac{Nr}{R}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,4}{0,3}} = 4, \text{ и } n = \frac{N}{m} = \frac{12}{4} = 3.$$

Таким образом:

$$I_{\max} = \frac{N\mathcal{E}}{nr + mR} = \frac{12 \cdot 1,5}{3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3} = 7,5 \text{ A.}$$

Ответ: соединение состоит из четырех ветвей по 3 последовательно соединенных элементов, максимальный ток 7,5 А.

**Задача 2.** При силе тока  $I_1=3$  А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность  $P_1=18$  Вт, при силе тока  $I_2=1$  А – соответственно  $P_2=10$  Вт. Определить ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  батареи.

Дано:

$I_1=3$ А	Так как мощность $P = I \cdot U$ , то напряжение в первом случае
$P_1=18$ Вт	$U_1 = \frac{P_1}{I_1}$ , а во втором $U_2 = \frac{P_2}{I_2}$ .
$I_2=1$ А	Из закона Ома для замкнутой цепи - $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ .
$P_2=10$ Вт	Из приведенных выше равенств следует
<hr/> $\mathcal{E} = ?$	

$$r = ? \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = I_1r + U_1 \\ \mathcal{E} = I_2r + U_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = I_1r + \frac{P_1}{I_1} \\ \mathcal{E} = I_2r + \frac{P_2}{I_2} \end{array} \right.$$

$$I_1r + \frac{P_1}{I_1} = I_2r + \frac{P_2}{I_2} \Rightarrow r = \frac{P_2I_1 - P_1I_2}{I_1I_2(I_1 - I_2)} = 2 \text{ Ом},$$

$$\text{и } \mathcal{E} = I_1 r + \frac{P_1}{I_1} = 12 \text{ В.}$$

**Задача 3.** По железному проводнику, диаметром  $d = 0,6 \text{ мм}$ , течет ток  $16 \text{ А}$ . Определить среднюю скорость  $\langle v \rangle$  направленного движения электронов, считая, что концентрация  $n$  свободных электронов равна концентрации  $n'$  атомов проводника.

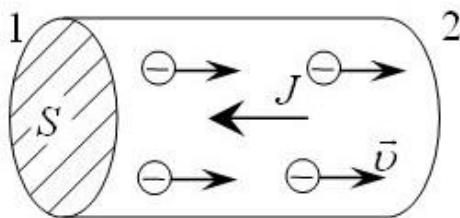
Дано:

$$d = 0,6 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$I = 16 \text{ А}$$

$$n = n'$$

$$\langle v \rangle = ?$$



Средняя скорость упорядоченного движения электронов

$$\langle v \rangle = \frac{l}{t} \quad (1)$$

где  $t$  – время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся между сечениями 1 и 2, пройдя сечение 2 (см. рис.), перенесут заряд  $Q = e \cdot N$ , создавая ток силой

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t} \quad (2)$$

где  $e$  – элементарный заряд,  $N$  – число электронов проводника,  $l$  – его длина.

$$\text{Очевидно число электронов } N = n \cdot V = n \cdot l \cdot S \quad (3)$$

где  $V$  – объем, а  $S$  – площадь сечения проводника. По условию,  $n = n'$ , следовательно

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M / \rho} = \frac{N_A \cdot \rho}{M}, \quad (4)$$

где  $N_A$  – число Авогадро,  $\rho$  – плотность железа  $\left( \rho = 7,87 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$ ,

$M$  – молярная масса железа  $\left( M = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right)$ .

Подставляя (4) в (3), а затем в (2), окончательно получим

$$I = \frac{N_A \cdot \rho \cdot l \cdot S \cdot e}{M \cdot t},$$

откуда

$$l = \frac{IMt}{N_A \rho Se}.$$

Подставим полученное выражение в (1), считая, что  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ,

После преобразования найдем, что

$$\langle v \rangle = \frac{4IM}{\pi d^2 N_A \cdot \rho \cdot e} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 6,0 \cdot 10^{23} \cdot 7,87 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 4,2 \text{ мм/с}$$

### **Вопросы и задания.**

1. Постоянный электрический ток и его характеристики. Закон Ома для участка цепи.
2. Сторонние силы. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для замкнутой цепи.
3. Работа и мощность тока. Закон Джоуля - Ленца.
4. Классическая электронная теория электропроводимости металлов и ее недостаточность
5. Обобщенный закон Ома. Правила Кирхгофа.
6. Электрический ток в металлах.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Три батареи с ЭДС  $E_1 = 12$  В,  $E_2 = 5$  В и  $E_3 = 10$  В и одинаковыми внутренними сопротивлениями  $r$ , равными 1 Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Определить силы токов  $I$ , идущих через каждую батарею.
2. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС каждого элемента равна 1,2 В, внутреннее сопротивление  $r = 0,2$  Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление  $R = 1,5$  Ом. Найти силу тока  $I$  во внешней цепи.
3. Внутреннее сопротивление  $r$  батареи аккумуляторов равно 3 Ом. Сколько процентов от точного значения ЭДС составляет погрешность, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением  $R_V = 200$  Ом, принять ее равной ЭДС?
4. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до  $I = 10$  А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление  $R_a$  амперметра равно 0,02 Ом и сопротивление  $R_{sh}$  шунта равно 5 мОм?
5. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от  $I_0 = 0$  до  $I = 3$  А в течение времени  $t = 10$  с. Определить заряд  $Q$ , прошедший в проводнике.

6. Даны 12 элементов с ЭДС  $E = 1,5$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,4$  Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление  $R = 0,3$  Ом? Определить максимальную силу тока  $I_{\max}$ .
7. Два элемента ( $E_1=1,2$  В,  $r_1=0,1$  Ом;  $E_2=0,9$  В,  $r_2=0,3$  Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление  $R$  соединительных проводов равно 0,2 Ом. Определить силу тока  $I$  в цепи.
8. Определить силу тока короткого замыкания источника тока, если при внешнем сопротивлении  $R_1=50$  Ом сила тока в цепи  $I_1=0,2$  А, а при  $R_2=110$  Ом сила тока в цепи  $I_2=0,1$  А.
9. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением  $R_v=1$  кОм. Показания амперметра  $I=0,5$  А, вольтметра  $U = 100$  В. Определить сопротивление  $R$  катушки. Сколько процентов от точного значения сопротивления катушки составит погрешность, если не учитывать сопротивления вольтметра?
10. К источнику тока с ЭДС  $E = 1,5$  В присоединили катушку с сопротивлением  $R=0,1$  Ом. Амперметр показал силу тока, равную  $I_1=0,5$  А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока  $I$  в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определить внутренние сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  первого и второго источников тока.
11. По проводнику сопротивлением  $R = 3$  Ом течет ток, сила которого возрастает. Количество теплоты  $Q$ , выделившееся в проводнике за время  $\tau = 8$  с, равно 200 Дж. Определить количество электричества  $q$ , протекшее за это время по проводнику. В начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю.
12. Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 12$  Ом равномерно убывает от  $I_0 = 5$  А до  $I = 0$  в течение времени  $t = 10$  с. Какое количество теплоты  $Q$  выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?
13. Сила тока в проводнике сопротивлением  $r = 100$  Ом равномерно нарастает от  $I_0 = 0$  до  $I_{\max} = 10$  А в течение времени  $\tau = 30$  с. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся за это время в проводнике.
14. При силе тока  $I_1 = 3$  А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность  $P_1 = 18$  Вт, при силе тока  $I_2 = 1$  А – соответственно  $P_2 = 10$  Вт. Определить ЭДС  $E$  и внутреннее сопротивление  $r$  батареи.
15. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через  $t_1 = 15$  мин, если только вторая, то через  $t_2 = 30$  мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? Параллельно?
16. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС  $E$  батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление  $r = 1$  Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность  $P = 80$  Вт. Вычислить силу тока  $I$  в цепи и КПД  $\eta$  нагревателя.
17. ЭДС  $E$  батареи равна 20 В. Сопротивление  $R$  внешней цепи равно 2 Ом, сила тока  $I = 4$  А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления  $R_1$  КПД будет равен 99%?

18. К батарее аккумуляторов, ЭДС Е которой равна 2 В и внутреннее сопротивление  $r$  равно 0,5 Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление  $R$  проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность  $P$ , которая при этом выделяется в проводнике.
19. ЭДС батареи аккумуляторов  $E=12$  В, сила тока  $I$  короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность  $P_{\max}$  можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?
20. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение  $U$  на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление  $R$  реостата равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность  $P=120$  Вт. Найти силу тока в цепи.
21. В медном проводнике длиной  $l=2$  м и площадью  $S$  поперечного сечения, равной  $0,4$  мм<sup>2</sup>, идет ток. При этом ежесекундно выделяется количество теплоты  $Q=0,35$  Дж. Сколько электронов  $N$  проходит за 1 секунду через поперечное сечение этого проводника?
22. Плотность тока  $j$  в медном проводнике равна 3 А/мм<sup>2</sup>. Найти напряженность  $E$  электрического поля в проводнике.
23. Плотность тока  $j$  в алюминиевом проводе равна 1 А/мм<sup>2</sup>. Найти среднюю скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 см<sup>3</sup> алюминия равно числу атомов.
24. Определить среднюю скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока  $I = 10$  А и сечении  $S$  проводника, равном 1 мм<sup>2</sup>. Принять, что каждый атом меди приходится два электрона проводимости.
25. Сила тока  $I$  в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение проводника  $S=4$  мм<sup>2</sup>. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится  $n=22,5 \cdot 10^{22}$  свободных электронов, определить среднюю скорость  $\langle v \rangle$  их упорядоченного движения.
26. В медном проводнике объемом  $V=6$  см<sup>3</sup> при прохождении по нему постоянного тока за время  $t=1$  мин выделилось количество теплоты  $Q=216$  Дж. Вычислить напряженность  $E$  электрического поля в проводнике.
27. Металлический проводник движется с ускорением  $a=100$  м/с<sup>2</sup>. Используя классическую теорию электропроводности металлов, определить напряженность  $E$  электрического поля в проводнике.
28. Медный диск радиусом  $R=0,5$  м равномерно вращается ( $\omega=10^4$  рад/с) относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциалов  $U$  между центром диска и его крайними точками.
29. Металлический стержень движется вдоль своей оси со скоростью  $v=200$  м/с. Определить заряд  $Q$ , который протечет через гальванометр, подключаемый к концам стержня, при резком его торможении, если длина  $l$  стержня равна 10 м, а сопротивление  $R$  всей цепи (включая цепь гальванометра) равно 10 мОм.
30. Удельная проводимость  $\gamma$  металла равна 10 МСм/м. Вычислить среднюю длину  $\langle l \rangle$  свободного пробега электронов в металле, если концентрация  $n$  свободных электронов

равна  $10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Среднюю скорость и хаотического движения электронов принять равной  $10^6 \text{ м/с}$ .

## Раздел 4. Магнетизм. Электромагнитные колебания и волны

### Практическое занятие 10.

**Тема занятия.** Понятие о магнитном поле. Закон Био – Савара – Лапласа.

**Цель занятия.** Изучить основные проявления магнитного поля постоянного тока.

**Теоретическая часть.**

#### Магнитная индукция и напряженность магнитного поля.

#### Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$

Термин магнитное поле ввел в 1845 году английский физик М.Фарадей, считавший, что как электрическое, так и магнитное взаимодействия осуществляются посредством единого материального поля.

Источниками макроскопического магнитного поля являются намагниченные тела, проводники с током и движущиеся электрически заряженные тела. Природа этих источников едина: магнитное поле возникает в результате движения заряженных микрочастиц.

Магнитное поле – силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Значение  $\vec{B}$  определяет силу, действующую в данной точке поля на движущийся электрический заряд и на тела, имеющие магнитный момент.

Вектор  $\vec{B}$  можно ввести одним из трех эквивалентных способов:

- а) исходя из силового действия магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу;
- б) основываясь на силовом действии магнитного поля на малый элемент проводника с током;
- в) исходя из силового действия магнитного поля на небольшую рамку с током.

Например, **магнитная индукция** – векторная величина, модуль которой определяется отношением максимальной силы  $F_{\max}$ , действующей со стороны магнитного поля на участок проводника с током, к силе этого тока  $I$  и длине участка  $\Delta l$  проводника

$$B = \frac{F_{\max}}{I \cdot \Delta l}, \quad [B] = \text{Тл} \quad (1)$$

Для графического изображения стационарного магнитного поля пользуются методом линий индукции. Линиями магнитной индукции (силовыми линиями магнитного поля) называются линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля

касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции в этой точке поля. Линии магнитной индукции нигде не обрываются, т. е. не начинаются и не кончаются. Они либо замкнуты, либо идут из бесконечности на бесконечность.

Магнитное поле называется однородным, если во всех его точках вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  имеет одно и то же значение. В противном случае магнитное поле называется неоднородным.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле  $\vec{B}$ , создаваемое несколькими источниками, равно векторной сумме полей  $\vec{B}_i$ , порождаемых каждым источником в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (2)$$

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца. Поэтому поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю. Следовательно, **теорема Гаусса для вектора  $\vec{B}$**  формулируется следующим образом:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad [\Phi_B] = B\delta \quad (3)$$

Наряду с индукцией  $\vec{B}$  используется понятие напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$ , как меры воздействия на проводники с током и магнитную стрелку (размерность её -  $A/m$ ). Напряженность  $\vec{H}$  характеризует магнитное поле, создаваемое макроскопическими токами и поэтому определяется их величинами, конфигурацией в пространстве и не зависит от свойств среды. Вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  связан с напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  соотношением

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (4)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды.

### Закон Био – Савара - Лапласа для элемента тока.

#### Расчет магнитных полей

На основании анализа опытных данных для магнитных полей постоянных токов был установлен **закон Био – Савара – Лапласа** вида:

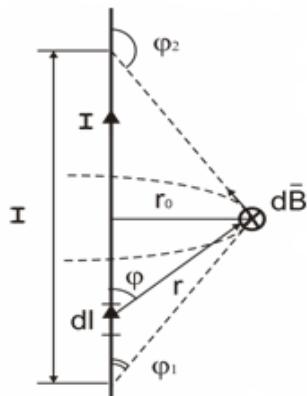
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{r^2}, \quad (5)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из элемента проводника в рассматриваемую точку поля;  $\varphi$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Направление вектора  $d\vec{B}$  можно найти по правилу Максвелла (правилу буравчика): если ввинчивать буравчик с правой резьбой по направлению вектора плотности тока в элементе проводника, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление вектора  $d\vec{B}$  магнитной индукции.

### I. Магнитное поле прямого тока.

Найдем с помощью закона Био-Савара-Лапласа магнитное поле прямолинейного проводника с током  $I$  (рисунок 1). Пусть  $r_0$  – расстояние от точки, в которой определяется поле, до проводника с током. Тогда расстояние  $r$  от участка проводника  $dl$  можно выразить так:  $r = r_0 / \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $dl$  и  $\vec{r}$ . Длина  $dl$  связана с углом  $\varphi$ , под которым виден этот участок проводника из рассматриваемой точки:



$$dl = \frac{rd\varphi}{\sin \varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (6)$$

Подставим эти значения в формулу (5)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot r_0 \cdot d\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{r_0^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \cdot \sin \varphi d\varphi. \quad (7)$$

В соответствии с принципом суперпозиции (2) магнитная индукция для участка проводника  $\vec{B}$  равна:

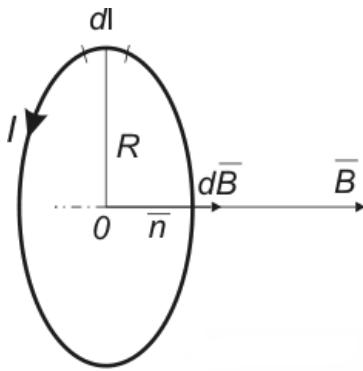
$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad (8)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – углы между вектором плотности тока в проводнике и радиус-векторами, проведенными в рассматриваемую точку из начала и конца участка проводника.

Рис.2.

Если проводник бесконечно длинный, то  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$  и индукция магнитного поля, как следствие закона Био – Савара – Лапласа, в любой точке пространства вычисляется по простой формуле вида:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0}. \quad (9)$$



Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой систему охватывающих провод концентрических окружностей.

## 2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током.

Как следует из рисунка 2, все элементы кругового проводника с током создают в его центре магнитное поле одинакового направления – вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов  $d\vec{B}$  можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиус-вектору ( $\sin\varphi=1$ ) и расстояния всех элементов проводника до центра кругового тока одинаковы и равны  $R$ , то согласно (5)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} dl. \quad (10)$$

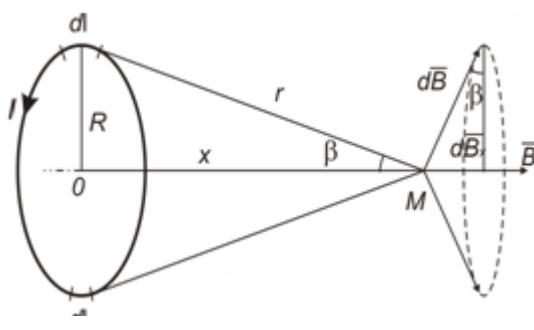
Тогда интеграл, взятый по контуру проводника,

$$B_0 = \oint_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl,$$

Так как  $\oint dl = 2\pi R$ , то магнитная индукция в центре кругового проводника с током в вакууме равна

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (11)$$

## 3. Магнитное поле на оси кругового витка с током.



Индукция магнитного поля вдоль оси, проведенной через центр кругового тока перпендикулярно его плоскости, будет уменьшаться по мере удаления от кругового тока. Если на оси выбрать точку  $M$  (рис. 3), то результирующая индукция  $\vec{B}$  определяется как сумма проекций  $dB_x$ , выраженных формулой.

$$dB_x = \sin \beta dB = \frac{R}{r} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl. \quad (12)$$

Откуда несложно получить, интегрируя (16.12)

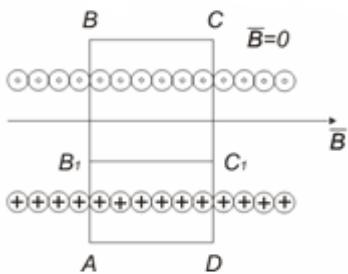
$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \oint_L dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{r^3} \cdot 2\pi R. \quad (13)$$

## Циркуляция вектора $\vec{B}$ . Магнитное поле соленоида и тороида

В целях упрощения в вычислении магнитных полей используется теорема о циркуляции результирующего вектора  $\vec{B}$ , которая формулируется на основании определения циркуляции с учетом индукций магнитных полей  $\vec{B}_k$ , создаваемых каждым из токов по (16.9) в соответствии с законом Био – Савара – Лапласа, в виде:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^m I_k, \quad (14)$$

где индексом "k" обозначены лишь токи, охватываемые контуром. Следовательно, **теорема: циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на  $\mu_0$ .**



Характерным примером использования теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  (или напряжённости  $\vec{H}$ ; закона полного тока) для получения расчётных формул являются поле бесконечно длинного соленоида, а также тороида.

**Соленоид** – свёрнутый в спираль изолированный проводник, по которому течёт электрический ток.

Рис. 4.

**Поле бесконечного соленоида** аксиально симметрично и может иметь лишь компоненту, параллельную оси соленоида (витки намотаны очень плотно, рис. 4).

Для определения  $\vec{B}$  внутри соленоида применим закон полного тока к контуру  $AB_1C_1DA$ , в нём  $N$  витков. Интеграл не равен нулю только на участке  $B_1C_1$  и поэтому

$$B_{B_1C_1} \cdot l = n \cdot l \cdot I \cdot \mu_0, \quad (13)$$

Из (13) видно, что **поле внутри соленоида** однородно и его индукция равна:

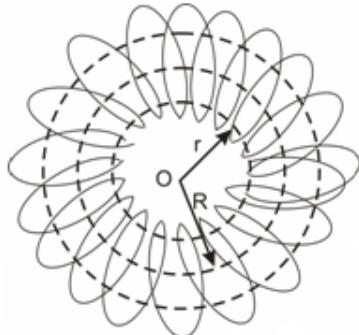
$$B = \mu_0 n I, \text{ где } n = N/l \quad (14)$$

Произведение  $nI$  называется числом ампер-витков на метр.

В магнитную индукцию на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад. Поэтому у конца полубесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (16.14)

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I. \quad (15)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (14) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (15) - для точек на оси вблизи его концов.



**Тороид** представляет собой провод, навитый на каркас, имеющий форму радиально изогнутого цилиндра, у которого входное и выходное сечения совпадают (рис.5).

Формула для определения магнитной индукции внутри тороида получается на основании теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  аналогичным образом, и имеет вид:

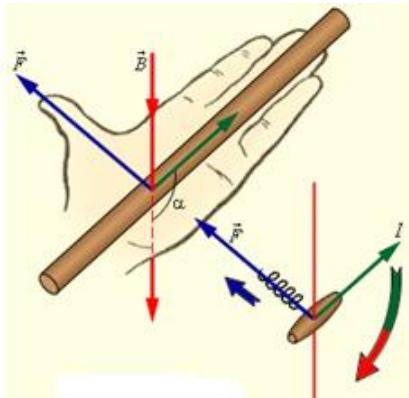
$$B = \mu_0 n I \cdot \frac{R}{r}. \quad (16)$$

Рис.5.

Вне тороида магнитная индукция равна нулю.

С помощью теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  можно решить и ряд других задач, например, найти индукцию в коаксиальном кабеле, который используется для передачи постоянного тока. Кроме того, этот закон используется при расчете магнитных цепей, где выполняет роль второго правила Кирхгофа.

### Сила Ампера. Сила Лоренца



**Ампер** на опыте установил, что на проводник с током в магнитном поле действует сила

$$\vec{F} = I[\vec{l} \vec{B}], \quad (17)$$

модуль которой определяется по формуле:

$$F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha,$$

а направление, по правилу правого винта или правилу «левой руки» (рис. 6).

Рис.6.

Возникновение этой силы связано с тем, что магнитное поле действует на заряженные частицы, движущиеся в проводнике с некоторой скоростью  $\vec{v}$ . Сила, действующая на заряд в этом случае, называется **силой Лоренца**, и определяется по формуле:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \vec{B}], \quad (18)$$

а ее модуль

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

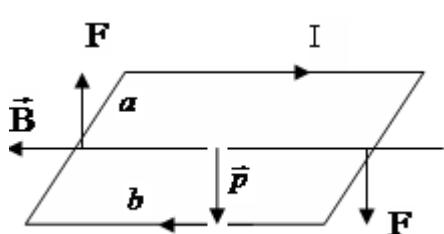
где  $\alpha$  – угол между направлениями скорости частицы и вектора магнитной индукции.

Магнитное поле не действует на покоящийся заряд и в этом состоит существенное отличие магнитного поля от электрического. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости частицы (ее перемещению) и поэтому работы не совершает, а, следовательно, не изменяет кинетическую энергию частицы. Выражение для силы Лоренца (18) позволяет определить характер движения заряженной частицы в магнитном поле. При  $\alpha = 90^\circ$  частица движется по окружности радиуса  $R = \frac{mv}{qB}$ . Если угол  $\alpha$  удовлетворяет условию

$0 < \alpha < 90^\circ$ , то частица движется по спирали с радиусом  $R$  и шагом  $h$ . Если скорость частицы  $\vec{v}$  составляет угол  $\alpha$  с вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то  $R$  и  $h$  уменьшаются. На этом основано явление фокусировки заряженных частиц в магнитном поле.

### Контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Рассмотрим контур с током, находящийся в однородном магнитном поле. Выделим элемент контура  $d\vec{l}$ . На него в магнитном поле будет действовать сила, согласно (17), равная  $d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$ . Результирующая сила, действующая на контур, будет равна геометрической сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т.е.



$$\vec{F} = \oint_L I[d\vec{l} \cdot \vec{B}] = I \cdot \vec{B} \oint_L d\vec{l} = 0.$$

(19)

Следовательно, в однородном магнитном поле результирующая сила, действующая на контур с током, будет равна нулю, и контур

перемещаться не будет.

Рис.7.

Для простоты рассуждений возьмем прямоугольный контур со сторонами «а» и «б» (рис. 7). В магнитном поле на него будет действовать врачающий момент пары сил  $\vec{F}$  и поэтому, контур будет вращаться. Вращающий момент пары сил  $M = F \cdot b \cdot \sin \alpha$ , но  $F = I \cdot B \cdot a$ , и, следовательно,  $M = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \alpha$ . Так как  $a \cdot b = S$  – площадь контура, то  $M = I \cdot B \cdot S \cdot \sin \alpha$ . Введем вектор  $\vec{p} = I \cdot S$  называемый **вектором магнитного момента** контура. Его направление совпадает с направлением положительной нормали к контуру, которая определяется с помощью правила правого винта. Тогда для врачающего момента, действующего на контур с током в магнитном поле, получим выражение:

$$M = pB \sin \alpha = [\vec{p} \vec{B}]. \quad (20)$$

Очевидно, что  $M=0$  при  $\sin\alpha=0$ , т.е. контур с током в магнитном поле ориентируется так, чтобы его вектор магнитного момента был параллелен вектору магнитной индукции.

*Рассмотрим контур, находящийся в неоднородном поле.* Работа, совершающаяся при повороте контура на угол  $d\alpha$ , определяется по формуле  $dA = M \cdot d\alpha$ . С учетом (20) получим:

$$dA = p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Полная механическая работа

$$A = \int dA = \int p \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = -pB \cos\alpha. \quad (21)$$

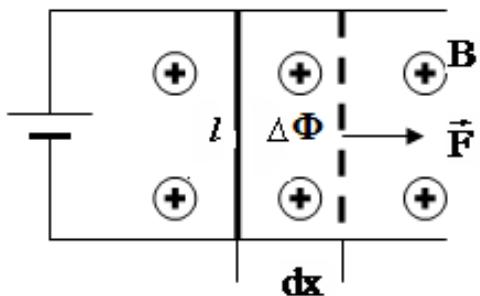
Механическая потенциальная энергия контура с током в магнитном поле будет определяться этим же выражением.

Ранее мы показали, что связь между силой и энергией  $F_x = -\frac{dW}{dx}$  и, следовательно, на контур с током в неоднородном магнитном поле будет действовать сила

$$F_x = p \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \cos\alpha. \quad (22)$$

При  $\alpha < 90^\circ$ ,  $F_x > 0$  контур втягивается в поле, при  $\alpha > 90^\circ$ ,  $F_x < 0$  контур выталкивается из поля.

В результате перемещения проводника с током или контура произвольной формы в магнитном поле совершается работа по преодолению сил поля. Не сложно получить формулу, определяющую эту работу.



Рассмотрим проводник длиной  $\ell$ , с током  $I$ , способный свободно перемещаться в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленной перпендикулярно проводнику (рис. 8).

Рис.8.

В этом случае на проводник будет действовать сила Ампера  $F = B \cdot I \cdot \ell$  и при перемещении проводника на расстояние  $dx$ , будет совершена работа  $dA = I \cdot B \cdot \ell \cdot dx$ , но  $\ell \cdot dx = dS$ , а элементарный магнитный поток  $B \cdot dS = d\Phi$  и тогда элементарная работа  $dA = I \cdot d\Phi$ . Интегрируя данное выражение, получим, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле будет определяться выражением

$$A = I \cdot \Delta\Phi, \quad (23)$$

где  $\Delta\Phi$  – магнитный поток, пересеченный проводником.

## Примеры решения задач

**Задача 1.** По тонкому проводу, изогнутому в виде равностороннего треугольника, течет ток силой  $I = 40\text{ A}$ . Длина стороны треугольника  $a = 30\text{ см}$ . Определить индукцию  $\vec{B}$  в точке пересечения высот треугольника.

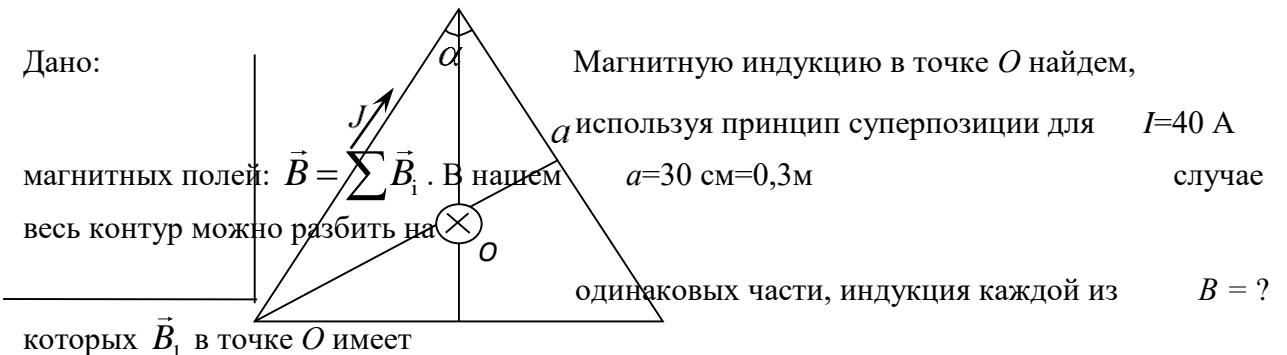


Рис. 1.

одинаковые величину и направление -

вертикально вниз (определенное по правилу правого винта). Поэтому индукция в точке  $O$  будет равной  $B=3B_1$  и направленной вниз перпендикулярно рис 1.

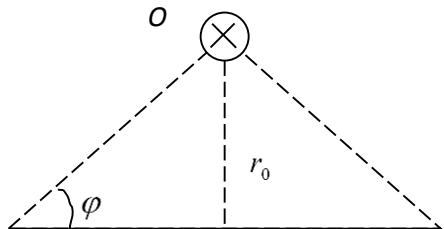


Рис. 2

Магнитную индукцию стороны треугольника  $B_1$  найдем используя формулу для индукции, отрезка проводника при симметричном расположении его концов относительно точки  $O$  (рис.2). Треугольник токов равносторонний и его высоты являются также и медианами и биссектрисами. Таким образом, имеем

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos \varphi \text{ и, } \varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, r_0 = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a} \text{ и } B = 3B_1 = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} = 240 \text{ мкТл.}$$

**Задача 2.** Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,03$  Тл по окружности радиусом  $r=10$  см. Определить скорость электрона.

Дано:

$$B=0,03 \text{ Тл}$$

$$r=10 \text{ см} =0,1 \text{ м}$$

$$e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

В магнитном поле на движущийся электрон действуют сила

Лоренца. Величина этой силы равна

$$F = e \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha .$$

Так как траектория электрона – окружность, то сила Лоренца  $v = ?$  является центростремительной силой, и угол  $\alpha = \pi/2$ .

Следовательно,

$$F = \frac{mv^2}{r} = evB .$$

Откуда имеем

$$v = \frac{eBr}{m} . \quad (1)$$

Подставив численные значения, получим

$$v = \frac{eBr}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-31}} = \frac{1,6}{3} \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 0,533 \cdot 10^8 \text{ м/с} .$$

То есть скорость  $v$  сравнима со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Это означает, что при расчетах необходимо использовать элементы специальной теории относительности (СТО).

Формулы классической механики применимы в СТО, если считать, что масса тела зависит от его скорости по закону,  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , где  $m_0$  - масса покоя тела и  $\beta = v/c$ .

Подставим эти выражения в (1). После несложных преобразований получим

$$\text{релятивистское выражение для скорости электрона} \quad v_p = \frac{v}{\sqrt{1 + \beta^2}} .$$

Таким образом, релятивистское значение скорости равно  $v_p = 0,525 \cdot 10^8$  м/с.

**Задача 3.** В магнитном поле с индукцией 0,1 Тл вращается рамка, содержащая 1000 витков площадью 150 см<sup>2</sup> каждый. Максимальное ЭДС, индуцируемое в рамке равно 94 В. Определить частоту вращения рамки.

Дано:

$$B=0,1 \text{ Тл}$$

По закону Фарадея для электромагнитной индукции имеем

$$N=1000=10^3 \quad \mathcal{E}_i = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (1)$$

$S=150\text{см}^2=1,5 \cdot 10^{-2}\text{м}^2$  где  $\psi$  – потокосцепление.

$$\mathcal{E}_i^{\max} = 94\text{В}$$

$$\psi = N \cdot \Phi,$$

где  $\Phi = BS \cos \alpha$  – магнитный поток.

$n = ?$  В условиях данной задачи  $\alpha = 2\pi \cdot n \cdot t$ , где  $n$  – частота

вращения рамки. Таким образом, закон Фарадея (1), после процедуры дифференцирования имеет вид

$$\mathcal{E}_i = NBS 2\pi n \cdot \sin(2\pi n \cdot t).$$

Из полученного выражения следует, что максимальное значение ЭДС

$\mathcal{E}_i^{\max} = NBS \cdot 2\pi n$ , возникает когда угол  $\alpha = \pi/2$ . Отсюда имеем

$$n = \frac{\mathcal{E}_i^{\max}}{NBS \cdot 2\pi} = \frac{94}{10^3 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3,14} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

### **Вопросы и задания.**

1. Магнитное поле и его основные характеристики.
2. Закон Био - Савара - Лапласа и его применение.
3. Закон Ампера.- Взаимодействие параллельных токов.
4. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лоренца.
5. Движение заряженных частиц в магнитном поле.
6. Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$ . Магнитные поля соленоида и тороида.
7. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля.
8. Работа по перемещению проводника в магнитном поле.
9. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея.
10. Правило Ленца. Вращение рамки в магнитном поле. Вихревые токи.
11. Индуктивность контура. Самоиндукция.
12. Токи при размыкании и замыкании цепи.
13. Взаимная индукция.
14. Трансформаторы. Энергия магнитного поля.
15. Магнитные свойства вещества. Диа- и парамагнетики.
16. Магнитное поле в веществе.

17. Закон полного тока.

18. Ферромагнетики и их свойства.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Расстояние  $d$  между двумя длинными параллельными проводами равно 5 см. По проводам в одном направлении текут одинаковые токи силой  $I = 30$  А каждый. Найти напряженность  $H$  магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии  $r_1 = 4$  см от одного и  $r_2 = 3$  см от другого провода.
2. По тонкому проводящему кольцу радиусом  $R = 15$  см течет ток силой  $I = 60$  А. Найти магнитную индукцию  $B$  в точке, равноудаленной от центра кольца на  $r = 20$  см.
3. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой  $I_1 = 20$  А и  $I_2 = 30$  А в противоположных направлениях. Расстояние  $d$  между проводами равно 20 см. Вычислить магнитную индукцию  $B$  в точке, удаленной на  $r_1 = 25$  см от первого и на  $r_2 = 40$  см от второго провода.
4. По двум бесконечно длинным параллельным проводам текут токи силой  $I_1 = 20$  А и  $I_2 = 30$  А в одном направлении. Расстояние  $d$  между проводами равно 10 см. Вычислить магнитную индукцию  $B$  в точке, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние  $r = 10$  см.
5. По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток силой  $I = 40$  А. Длина  $a$  стороны треугольника равна 30 см. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке пересечения высот.
6. По контуру в виде квадрата идет ток силой  $I = 50$  А. Длина  $a$  стороны квадрата равна 20 см. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке пересечения диагоналей.
7. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника, течет ток силой  $I = 60$  А. Длины сторон прямоугольника равны  $a = 30$  см и  $b = 40$  см. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке пересечения диагоналей.
8. По двум одинаковым квадратным контурам со стороной  $a = 20$  см текут токи силой  $I = 10$  А в каждом. Определить силу  $F$  взаимодействия контуров, если расстояние  $d$  между соответственными сторонами контуров равно 2 мм.
9. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом  $R = 10$  см, текут одинаковые токи силой  $I = 10$  А в каждом. Найти силу  $F$  взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние  $d$  между центрами колец равно 1 мм.
10. По трем прямым параллельным проводам, находящимся на одинаковом расстоянии  $a = 10$  см друг от друга, текут одинаковые токи силой  $I = 100$  А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу  $F$ , действующую на отрезок длиной  $l = 1$  м каждого провода.

11. По двум параллельным проводам длиной  $l = 1$  м каждый текут токи одинаковой силы. Расстояние  $d$  между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой  $F = 1$  мН. Найти силу тока  $I$  в проводах.
12. По двум параллельным прямым проводам длиной  $l = 2,5$  м каждый, находящимся на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга, текут одинаковые токи силой  $I = 1$  кА. Вычислить силу взаимодействия токов.
13. Прямой провод длиной  $l = 10$  см, по которому течет ток силой  $I = 20$  А, находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл. Найти угол  $\alpha$  между направлениями вектора  $B$  и тока, если на провод действует сила  $F = 10$  мН.
14. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл находится прямой провод длиной  $l = 8$  см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток силой  $I = 2$  А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние  $s = 5$  см. Найти работу  $A$  сил поля.
15. Соленоид индуктивностью  $L = 4$  мГн содержит  $N = 600$  витков. Определить магнитный поток  $\Phi$ , если сила тока  $I$ , протекающего по обмотке, равна 12 А.
16. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на  $\Delta I = 0,1$  А в 1 с. Индуктивность  $L$  катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции  $\langle E_i \rangle$ .

## Практическое занятие 11.

**Тема занятия.** Действие магнитного поля на движущийся заряд

**Цель занятия.** Изучить действие магнитного поля на движущийся заряд.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Сила Лоренца. Модуль силы Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Действие магнитного поля на движущийся заряд применяется при решении инженерных задач.

**Теоретическая часть.**

### Сила Лоренца

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера:

$$d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Сила Ампера обусловлена суммарным действием магнитного поля на все движущиеся в проводнике заряды. Определим силу, действующую на единичный движущийся в магнитном поле заряд.

Возьмем элемент длины проводника  $d\vec{l}$ . Обозначим  $N$  - число заряженных частиц, движущихся в элементе  $d\vec{l}$ ,  $q$  - заряд каждой частицы,  $\vec{v}$  - среднюю скорость их направленного движения. Тогда

$$i d\vec{l} = N q \vec{v}. \quad (2)$$

Подставим выражение (4.46) в формулу для силы Ампера (4.45), получим:

$$d\vec{F} = N q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (3)$$

Здесь  $d\vec{F}$  - суммарная сила, действующая со стороны магнитного поля на  $N$  носителей заряда. На одиночный электрический заряд в магнитном поле действует сила, равная

$$\vec{F}_l = \frac{d\vec{F}}{N}. \quad (4)$$

Подставим в это выражение формулу (4.47), получим:

$$\vec{F}_l = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5)$$

Эта сила называется *силой Лоренца*.

Свойства силы Лоренца определяются свойствами векторного произведения, поэтому она перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Для положительных зарядов ( $q>0$ ) направление силы Лоренца совпадает с направлением векторного произведения  $\vec{v} \times \vec{B}$ . Если заряд частицы отрицателен ( $q<0$ ), то направления векторов  $\vec{F}_l$  и  $\vec{v} \times \vec{B}$  противоположны.

Модуль силы Лоренца равен:

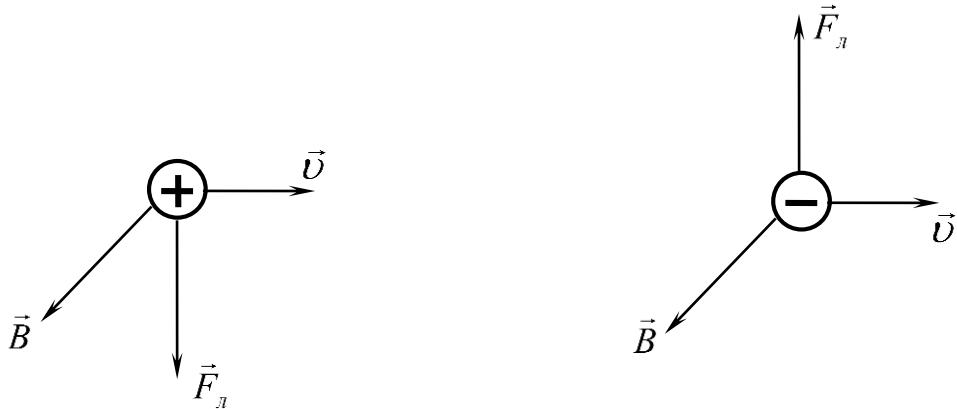
$$F_l = q v B \sin \alpha, \quad (6)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Из формулы (6) следует, что магнитное поле не действует на заряженную частицу в двух случаях:

- когда частица поконится ( $v=0$ );
- когда частица движется вдоль линий магнитного поля ( $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ).

Так как сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно вектору



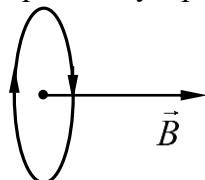
**Рис.1 . Взаимная ориентация векторов  $\vec{v}$  ,  $\vec{B}$  и  $\vec{F}_L$  .**

скорости, то она не совершаеет работы над частицей. Следовательно, постоянное магнитное поле не изменяет кинетическую энергию частицы.

### Движение заряженных частиц в магнитном поле

Пусть заряженная частица влетает в однородное поле с индукцией  $\vec{B}$ .

Рассмотрим наиболее простой случай, когда скорость частицы перпендикулярна вектору магнитной индукции. На частицу будет действовать сила Лоренца, перпендикулярная к направлению ее движения. Так как  $\vec{v} \perp \vec{B}$  ( $\alpha=\pi/2$ ), то модуль силы Лоренца равен:  $F_L = qvB$ . В результате траекторией заряженной частицы будет окружность (рис.4.14).



**Рис. 2.**

где  $R$  - радиус окружности.

Запишем второй закон Ньютона для этого случая:

$$ma_n = F_L, \quad (7)$$

или

$$\frac{mv^2}{R} = qvB. \quad (9)$$

Для радиуса окружности получим выражение:

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (10)$$

Формулу (10) также можно записать в виде:

$$R = \frac{v}{\frac{q}{m}B}. \quad (11)$$

Здесь  $\frac{q}{m}$  - удельный заряд частицы.

Период обращения частицы по окружности равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v}. \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражение для радиуса траектории и производя сокращения, получим:

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \quad (13)$$

Из выражений (11) и (13) следует:

- радиус окружности тем меньше, чем больше магнитная индукция;
- период обращения частицы в магнитном поле не зависит от её скорости, а зависит от величины удельного заряда и от магнитной индукции поля.

Изменяется лишь направление скорости, а это означает, что заряженная частица в однородном магнитном поле должна двигаться точно по окружности, если нет составляющей скорости вдоль магнитного поля.

Рассмотрим случай, когда скорость частицы составляет с магнитным полем угол  $\alpha$ , отличный от  $\pi/2$ .

Разложим вектор скорости на две составляющие: перпендикулярную магнитному полю  $\vec{v}_\perp$  и параллельную полю  $\vec{v}_\parallel$  (рис.3). Модули этих составляющих равны:

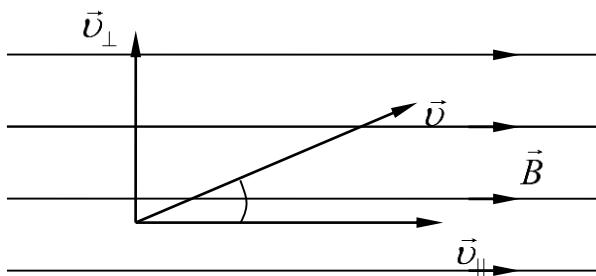


Рис. 3.

$$\begin{aligned} v_\perp &= v \cdot \sin \alpha, \\ v_\parallel &= v \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Сила Лоренца обусловлена только составляющей  $\vec{v}_\perp$  и равна (по модулю):

$$F_\perp = qvB \sin \alpha. \quad (14)$$

Заряженная частица будет участвовать в двух движениях:

- в равномерном движении в направлении вектора  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}_{||}$ ;
- в движении по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению вектора  $\vec{B}$ , со скоростью  $\vec{v}_{\perp}$ .

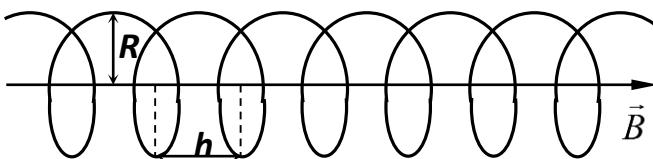


Рис. 4. Винтовая линия

В результате наложения этих двух движений траекторией частицы будет винтовая линия (рис.4.).

Определим параметры траектории частицы. Радиус винтовой линии будет равен:

$$R = \frac{v_{\perp}}{\left(\frac{q}{m}\right)B} = \frac{v \sin \alpha}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \quad (15)$$

Шаг винтовой линии

$$h = v_{||}T = v \cos \alpha \frac{2\pi}{\left(\frac{q}{m}\right)B}. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда заряженная частица влетает в неоднородное магнитное поле. Пусть магнитная индукция возрастает в направлении  $x$  (рис.3). Тогда заряженная частица будет двигаться по винтовой линии, радиус и шаг которой уменьшаются.

Таким образом, заряженные частицы, влетающие в постоянное магнитное поле, изменяют направление своего движения и "навиваются" на линии вектора  $\vec{B}$ . Этим свойством пользуются в некоторых приборах, чтобы удержать пучки заряженных частиц от расплывания.

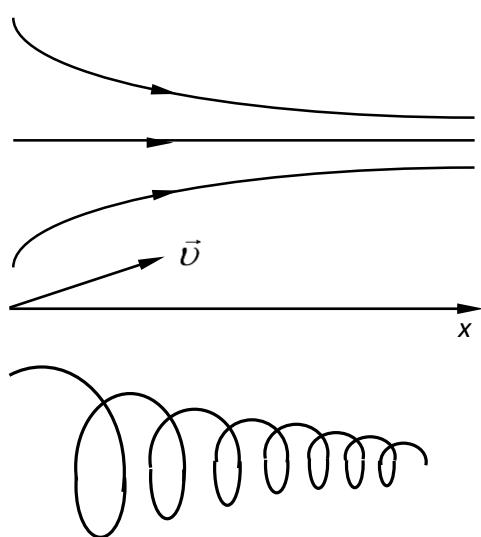


Рис.5. Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

Сущность метода магнитной фокусировки (в кратком варианте) состоит в следующем. Если частица движется точно вдоль линии вектора  $\vec{B}$ , то магнитное поле не оказывает на нее никакого воздействия. Если частица по каким-то причинам получит составляющую скорости, перпендикулярную к линиям поля, то она все равно не уйдет далеко в сторону от основной траектории и будет двигаться по винтовой линии.

### Примеры решения задач

**Задача 1.**  $\alpha$ -частица, ускоренная разностью потенциалов 250 В, влетает в однородное магнитное поле индукцией 25 мТл, перпендикулярно линиям магнитной индукции и движется по окружности. Найдите радиус окружности и период обращения  $\alpha$ -частицы.

Запишем краткое условие задачи.

Дано:	СИ
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг	
$U = 250$ В	
$B = 25$ мТл	$= 25 \cdot 10^{-3}$ Тл
$\alpha = 90^\circ$	

Решение:

Работа электрического поля затрачивается на увеличение кинетической энергии частицы:

R, T-?

$$qU = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

В магнитном поле на движущуюся заряженную частицу действует сила Лоренца:  $F_L = qBv \sin \alpha$ , угол  $\alpha = 90^\circ$  и  $\sin \alpha = 1$ . Согласно второму закону Ньютона  $F_L = ma_n$ ,

где  $a_n = \frac{mv^2}{R}$  - центростремительное ускорение частицы, движущейся по окружности

радиуса R. Получаем  $qBv = \frac{mv^2}{R}$ . Окончательно радиус окружности:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Период обращения частицы найдем, разделив длину окружности на скорость частицы:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Заряд  $\alpha$ -частицы:  $q = 2e = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл  $= 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл, ее масса

$$m = 4m_p = 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 6,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Проведем проверку размерности:

$$[R] = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{1}{H \cancel{(A \cdot m)}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \cancel{\text{Дж}}}{\text{Кл}}} = \frac{A \cdot m}{H} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}}{\text{Кл}^2}} =$$

$$\frac{A \cdot m}{H \cdot \text{Кл}} \sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{A \cdot m}{H \cdot A \cdot c} \sqrt{\text{кг} \cdot H \cdot m} = \frac{m}{H \cdot c} \sqrt{H^2 \cdot c^2} = m$$

$$[c] = \frac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \cancel{\text{Н}} / (\text{А} \cdot \text{м})} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Н}} = \text{с}$$

Произведем вычисления:  $R = \frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{2 \cdot 6,68 \cdot 10^{-27} \cdot 250}{3,2 \cdot 10^{-19}}} = 0,13 \text{ м}$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,68 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

Ответ: 0,13 м;  $5,2 \cdot 10^{-6}$  с.

### **Вопросы и задания.**

1. Сила Лоренца.
2. Модуль силы Лоренца
3. Движение заряженных частиц в магнитном поле.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 3 В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии 4 мм от него. Какая сила будет на него действовать, если по проводнику пропустить ток силой 5 А?
2. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 5 В, движется параллельно длинному проводу на расстоянии 4 мм от него. Какое ускорение приобретет электрон, если по проводнику пропустить ток силой 10 А?
3. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?
4. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, впадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона больше радиуса кривизны траектории электрона?
5. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 10 В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить радиус кривизны траектории электрона.
6. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна 0,001 Тл. Определить период и частоту обращения электрона по окружности.
7. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории альфа-частицы больше радиуса кривизны траектории протона?

8. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз период обращения альфа- частицы больше периода обращения протона?
9. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $10\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле так, что направление его скорости составляет угол  $30^\circ$  с направлением силовых линий. Индукция поля равна  $0,01\text{ Тл}$ . Определить радиус кривизны траектории электрона.
10. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $10\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна  $0,01\text{ Тл}$ . Чему равны тангенциальное и нормальное ускорения электрона?
11. Протон, ускоренный разностью потенциалов  $1000\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Индукция поля равна  $0,01\text{ Тл}$ . Определить тангенциальное и нормальное ускорение протона.
12. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $10\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет  $30^\circ$ . Индукция поля равна  $0,01\text{ Тл}$ . Определить тангенциальное и нормальное ускорение электрона.
13. Протон, ускоренный разностью потенциалов  $5000\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет  $45^\circ$ . Индукция поля равна  $0,005\text{ Тл}$ . Определить тангенциальное и нормальное ускорение протона.
14. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $60\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет  $30^\circ$ . Индукция поля равна  $0,01\text{ Тл}$ . Определить радиус кривизны траектории электрона и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
15. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $30\text{ В}$ , влетает в магнитное поле соленоида под углом  $30^\circ$  к его оси. Число ампер-витков соленоида равно  $5000$ . Длина соленоида  $25\text{ см}$ . Определить шаг винтовой траектории электрона в магнитном поле соленоида.
16. Протон влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет  $30^\circ$ . Индукция поля равна  $0,1\text{ Тл}$ . Определить кинетическую энергию протона, если радиус кривизны его траектории  $1,5\text{ см}$ .
17. В однородное магнитное поле с индукцией  $B = 10\text{ мТл}$  перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с кинетической энергией  $K = 30\text{ эВ}$ . Определить радиус кривизны траектории электрона.
18. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $71\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями составляет  $37^\circ$ , и описывает спираль радиусом  $54\text{ мм}$ . Определить индукцию магнитного поля и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.
19. Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $10\text{ В}$ , влетает в однородное магнитное поле так, что угол между направлением скорости и силовыми линиями

составляет  $53^\circ$ . Индукция поля равна 0,1 Тл. Определить радиус кривизны траектории и шаг винтовой линии, по которой движется электрон.

20. Определить кинетическую энергию протона, движущегося по дуге окружности радиусом 60 см в магнитном поле, индукция которого  $2 \cdot 10^{-3}$  Тл.
21. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью 106 м/с. Индукция магнитного поля 0,3 Тл. Радиус окружности 4 см. Определить заряд частицы, если известно, что ее энергия равна 12 кэВ.
22. В однородное магнитное поле с индукцией 0,01 Тл перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с кинетической энергией 30 кэВ. Определить радиус кривизны траектории движения частицы.
23. Протон и альфа-частица попадают в однородное магнитное поле, двигаясь перпендикулярно линиям индукции. Сравнить радиусы кривизны их траекторий, если они имеют одинаковую энергию.
24. Электрон, влетевший в однородное магнитное поле с индукцией 0,02 Тл перпендикулярно направлению магнитного поля, движется в нем по окружности радиусом 2 см. Определить разность потенциалов, которую прошел электрон перед тем, как влетел в магнитное поле.
25. Электрон, прошедший некоторую разность потенциалов, влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $1,5 \cdot 10^{-2}$  Тл перпендикулярно магнитным силовым линиям. В магнитном поле электрон описывает окружность радиусом 114 мм. Определить разность потенциалов, которую прошел электрон перед тем, как влетел в магнитное поле.

## Практическое занятие 12.

**Тема занятия.** Электромагнитные колебания в колебательном контуре.

**Цель занятия.** Изучить электромагнитные колебания в колебательном контуре.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Электрические колебания в колебательном контуре, дифференциальное уравнение собственных электрических колебаний. Затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс. Переменный ток, его промышленное получение. Переменный ток в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением, векторная диаграмма напряжений и токов. Электромагнитная индукция. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла. Система уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Основные свойства электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Электромагнитные колебания в колебательном контуре применяется при решении инженерных задач.

**Теоретическая часть.**

## Электромагнитные колебания в колебательном контуре

### Уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний

**Колебательный контур** – это электрическая цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$ . В **идеальном колебательном контуре** считается, что сопротивление  $R$  пренебрежимо мало ( $R \approx 0$ ), что позволяет в **идеальном контуре** (рис. 18), состоящем только из катушки индуктивности и конденсатора, получить **незатухающие электромагнитные колебания**.

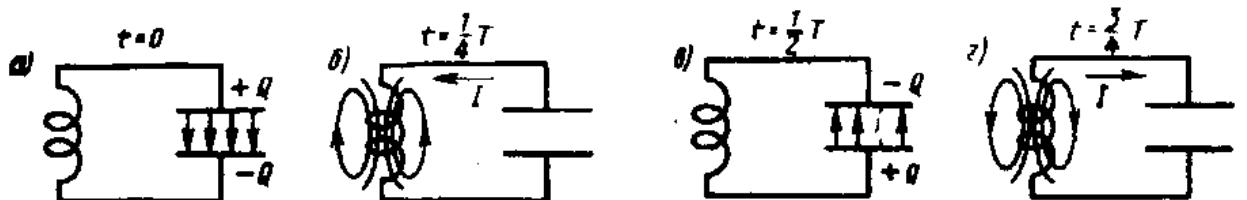


Рис. 18

Для возбуждения в контуре колебаний предварительно заряжают конденсатор, сообщая его обкладкам заряд  $\pm q$ . Тогда в начальный момент времени  $t=0$  (рис. 18, *а*) между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле. Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, конденсатор начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток  $I$ . Когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля конденсатора полностью перейдет в энергию магнитного поля катушки (рис. 18, *б*). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать, и, следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, тогда в ней согласно закону Фарадея индуцируется ток, который течет в соответствии с правилом Ленца в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который, в конце концов, обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 18, *в*). Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 18, *г*), и система к моменту времени  $t=T$  ( $T$  – период колебаний) придет в первоначальное состояние (рис. 18, *а*). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора, то есть начнутся периодические незатухающие колебания величины заряда  $q$  на обкладках конденсатора, напряжения  $U_C$  на конденсаторе и силы тока  $I$ , текущего через катушку индуктивности. Согласно закону Фарадея напряжение  $U_C$  на конденсаторе определяется скоростью изменения силы тока в катушке индуктивности идеального контура, то есть:

$$U_C = \varepsilon_S = -L \frac{dI}{dt}.$$

Исходя из того, что  $U_C = q/C$ , а  $I = dq/dt$ , получаем **дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний** величины заряда  $q$  на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q \quad \text{или} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 .$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция  $q(t)$ , то есть **уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний** величины заряда  $q$  на обкладках конденсатора:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

где  $q(t)$  – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени  $t$ ;

$q_0$  – амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора;

$\omega_0$  – круговая (или циклическая) частота колебаний ( $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ );

$\omega_0 = 2\pi/T$  ( $T$  – период колебаний,  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  – **формула Томсона**);

$(\omega_0 t + \varphi_0)$  – фаза колебаний в момент времени  $t$ ;

$\varphi_0$  – начальная фаза колебаний, то есть фаза колебаний в момент времени  $t=0$ .

### Уравнение свободных затухающих гармонических колебаний.

В реальном колебательном контуре учитывается, что, кроме катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$ , в цепи также имеется резистор сопротивлением  $R$ , отличным от нуля, что является причиной затухания колебаний в реальном колебательном контуре. **Свободные затухающие колебания** – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Для цепи реального колебательного контура напряжения на последовательно включенных конденсаторе емкостью  $C$  и резисторе сопротивлением  $R$  складываются. Тогда с учетом закона Фарадея для цепи реального колебательного контура можно записать:

$$U_C + IR = \mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt} ,$$

где  $\mathcal{E}_S$  – электродвижущая сила самоиндукции в катушке;

$U_C$  – напряжение на конденсаторе ( $U_C = q/C$ );

$IR$  – напряжения на резисторе.

Исходя из того, что  $I = dq/dt$ , получаем **дифференциальное уравнение свободных затухающих гармонических колебаний** величины заряда  $q$  на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 ,$$

где  $\delta$  – коэффициент затухания колебаний ( $\delta = \frac{R}{2L}$ ),  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Решением полученного дифференциального уравнения является функция  $q(t)$ , то есть **уравнение свободных затухающих гармонических колебаний** величины заряда  $q$  на обкладках конденсатора:

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $q(t)$  – величина заряда на обкладках конденсатора в момент времени  $t$ ;

$q_0 e^{-\delta t}$  – амплитуда затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора в момент времени  $t$ ;

$q_0$  – начальная амплитуда затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора;

$\omega$  – круговая (или циклическая) частота колебаний ( $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ );

$(\omega t + \varphi)$  – фаза затухающих колебаний в момент времени  $t$ ;

$\varphi$  – начальная фаза затухающих колебаний.

### Электромагнитные волны. Вектор Умова-Пойнтинга

Согласно теории Максвелла электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость  $\mathcal{V}$  распространения которых определяется выражением:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – соответственно электрическая и магнитная постоянные,

$\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды,

$c$  – скорость света в вакууме ( $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ).

В вакууме ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью света ( $c$ ), что согласуется с теорией Максвелла о том,

что свет представляет собой электромагнитные волны.

По теории Максвелла **электромагнитные волны являются поперечными**, то есть векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  напряженностей электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{V}$

скорости распространения волны, причем векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют правовинтовую систему (рис. 19).

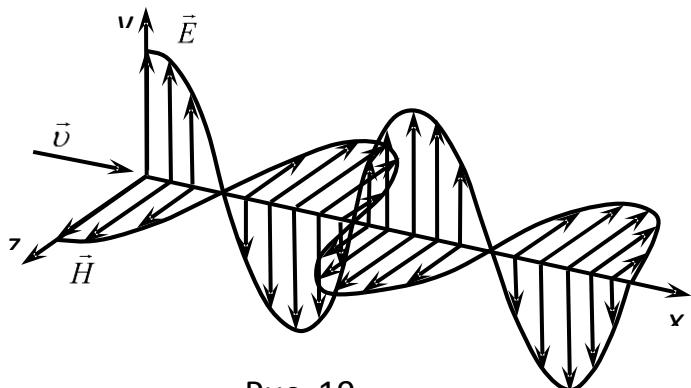


Рис. 19

Из теории Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в одинаковых фазах (рис. 19), то есть значения напряженностей  $E$  и  $H$  электрического и магнитного полей одновременно достигают максимума и одновременно обращаются в нуль, причем мгновенные значения  $E$  и  $H$  связаны соотношением:

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

**Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны** (индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают лишь то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей в соответствии с рис. 19):

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей,

$\omega$  – круговая частота волны,  $\omega = 2\pi/T$  ( $T$  – период колебаний),

$k$  – волновое число,  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  – длина волны),

$\varphi$  – начальная фаза колебаний (начальная фаза колебаний  $\varphi$  имеет одинаковое значение как для колебания электрического, так и магнитного векторов, так как в электромагнитной волне эти колебания происходят в одинаковых фазах).

**Энергия электромагнитных волн.** Электромагнитные волны переносят энергию. Объемная плотность  $w$  энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_{\text{эл}}$  электрического и  $w_{\text{м}}$  магнитного полей:

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} .$$

Учитывая выражение связи между величинами  $E$  и  $H$ , можно получить, что суммарная плотность энергии электрического и магнитного полей:

$$w = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} EH .$$

Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$  распространения волны в среде, получим модуль плотности потока энергии:

$$S = w v = EH .$$

Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны, то произведение  $EH$  совпадает с модулем вектора  $[\vec{E} \vec{H}]$  ( $[\vec{E} \vec{H}]$  – векторное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ). Кроме того, направление вектора  $[\vec{E} \vec{H}]$  совпадает с направлением распространения волны, то есть с направлением переноса энергии, что позволило ввести вектор  $\vec{S}$ , равный векторному произведению  $[\vec{E} \vec{H}]$ , как вектор плотности потока электромагнитной энергии, называемый вектором Умова–Пойнтинга:

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] .$$

Модуль вектора  $\vec{S}$  равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с пластинами площадью  $S=100 \text{ см}^2$  и катушки с индуктивностью  $L=1 \text{ мкГн}$ , резонирует на волну длиной  $\lambda=10 \text{ м}$ . Определить расстояние между пластинами конденсатора.

Дано:

$$S=100 \text{ см}^2=10^{-2} \text{ м}^2$$

$$L=1 \text{ мкГн}=10^{-6} \text{ Гн}$$

Емкость плоского конденсатора определяется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$$

$\lambda=10$  м

---

Следовательно,  $d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{C}$ . (1)

$d=?$

Длина волны связана с периодом колебаний  $T$  и скоростью

с электромагнитных волн соотношением

$$\lambda = c \cdot T. \quad (2)$$

По формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Выразив  $C$  из формулы Томсона, с учетом (2) и (1), получим

$$d = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon c^2 SL}{\lambda^2} = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}{10^2} = 3,14 \cdot 10^{-3} = 3,14 \text{ мм}$$

**Задача 2.** Резонанс в колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью  $C_1 = 1$  мкФ, наступает при частоте  $v_1 = 400$  Гц. Когда же параллельно конденсатору  $C_1$  подключили еще один емкостью  $C_2$ , резонансная частота становится равной  $v_2 = 100$  Гц. Найти емкость конденсатора  $C_2$ .

*Дано:*  $C_1 = 1$  мкФ =  $10^{-6}$  Ф;  $v_1 = 400$  Гц;  $v_2 = 100$  Гц.

*Найти:*  $C_2$ .

### *Решение*

Резонанс в колебательном контуре наступает, когда собственная частота колебаний становится равной частоте вынужденных колебаний, возбуждаемых внешним передатчиком. При этом амплитуда электромагнитных колебаний в контуре становится максимальной. Частота вынужденных колебаний, равная собственной частоте колебательного контура, называется резонансной частотой. Резонансная частота  $v_1$  в колебательном контуре, содержащем только один конденсатор  $C_1$ , определяется формулой

Томсона:  $v_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$ . (1),

где  $L$  – индуктивность катушки колебательного контура. Когда к конденсатору  $C_1$  подключили параллельно конденсатор  $C_2$ , емкость батареи конденсаторов стала равна

$$C_1 + C_2. \text{ Резонансная частота } v_2 \text{ при этом равна: } v_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}.$$

(2)

Обе частоты  $v_1$  и  $v_2$ , а также емкость  $C_2$  известны. Неизвестна индуктивность катушки  $L$  и искомая емкость  $C_2$ . Следовательно, необходимо исключить из уравнений (1) и (2) индуктивность  $L$ , например, поделив левые и правые части этих уравнений соответственно друг на друга. После деления, сокращения и упрощения получаем:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}{2\pi\sqrt{LC_1}}, \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{L(C_1 + C_2)}{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1}}$$

$$\text{Отсюда } \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = 1 + \frac{C_2}{C_1}; \quad \frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1; \quad C_2 = C_1 \left( \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1 \right).$$

Задача в общем, виде решена. Проведем вычисления:

$$C_2 = 10^{-6} \left( \left( \frac{400}{100} \right)^2 - 1 \right) = 1,5 \cdot 10^{-5} \Phi.$$

*Ответ:*  $C_2 = 1,5 \cdot 10^{-5} \Phi$ .

### **Вопросы и задания.**

1. Электрические колебания в колебательном контуре, дифференциальное уравнение собственных электрических колебаний.
2. Затухающие колебания. Добротность контура. Вынужденные колебания. Резонанс.
3. Переменный ток, его промышленное получение.
4. Переменный ток в цепи с индуктивностью, емкостью и активным сопротивлением, векторная диаграмма напряжений и токов.
5. Электромагнитная индукция. Вихревое электрическое поле.
6. Первое уравнение Максвелла. Ток смещения.
7. Второе уравнение Максвелла.
8. Система уравнений Максвелла.
9. Электромагнитные волны. Основные свойства электромагнитных волн.
10. Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна.
11. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Умова - Пойнтинга.
12. Экспериментальное исследование электромагнитных волн.
13. Шкала электромагнитных волн.

## Задачи для самостоятельного решения

1. По обмотке соленоида индуктивностью  $L=0,2$  Гн течет ток  $I=10$  А. Определить энергию  $W$  магнитного поля соленоида.
2. Индуктивность  $L$  катушки (без сердечника) равна 0,1 мГн. При какой силе тока  $I$  энергия  $W$  магнитного поля равна 100 мкДж?
3. Соленоид содержит  $N=1000$  витков. Сила тока  $I$  в его обмотке равна 1 А, магнитный поток  $\Phi$  через поперечное сечение соленоида равен 0,1 мВб. Вычислить энергию  $W$  магнитного поля.
4. На железное кольцо намотано в один слой  $N=200$  витков. Определить энергию  $W$  магнитного поля, если при токе  $I=2,5$  А магнитный поток  $\Phi$  в железе равен 0,5 мВб.
5. При некоторой силе тока  $I$  плотность энергии  $w$  магнитного поля соленоида (без сердечника) равна 0,2 Дж/м<sup>3</sup>. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?
6. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет  $n=10$  витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии  $w$  поля, если по обмотке течет ток  $I=16$  А.
7. Обмотка тороида содержит  $n=10$  витков на каждый сантиметр длины. Сердечник не магнитный. При какой силе тока  $I$  в обмотке плотность энергии  $w$  магнитного поля равна 1 Дж/м<sup>3</sup>?
8. Катушка индуктивностью  $L=1$  мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром  $D=20$  см каждая, соединены параллельно. Расстояние  $d$  между пластинами равно 1 см. Определить период  $T$  электрических колебаний в таком контуре.
9. Конденсатор электроемкостью  $C=500$  пФ соединен параллельно с катушкой длиной  $l=40$  см и площадью  $S$  сечения, равной 5 см<sup>2</sup>. Катушка содержит  $N=1000$  витков. Сердечник немагнитный. Найти период  $T$  электрических колебаний в этом контуре.
10. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L=20$  мкГн и конденсатора электроемкостью  $C = 80$  нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2%. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур.

## Практическое занятие 13.

**Тема занятия.** Переменный электрический ток.

**Цель занятия.** Изучить законы переменного электрического поля.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Переменный электрический ток. Действующее значение переменного тока. Электрическая цепь с резистором. Электрическая цепь с катушкой индуктивности. Электрическая цепь с конденсатором. Закон Ома для цепи переменного

тока. Мгновенная мощность. Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Электромагнитные колебания в колебательном контуре применяется при решении инженерных задач.

### **Теоретическая часть.**

#### **Переменный электрический ток**

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания в цепи с резистором, катушкой индуктивности и конденсатором можно рассматривать как *переменный электрический ток*. Если подводимые к контуру внешняя ЭДС или напряжение периодически изменяются по гармоническому закону, то переменный ток называют *синусоидальным* (рис. 1):

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

или

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где  $i$  – мгновенное значение силы тока, то есть значение тока для каждого момента времени;  $I_m$  – амплитудное значение силы тока.

При частоте  $\nu = 50 \text{ Гц}$  (промышленная частота) период электромагнитных колебаний составляет  $T = 0,02 \text{ с}$ .

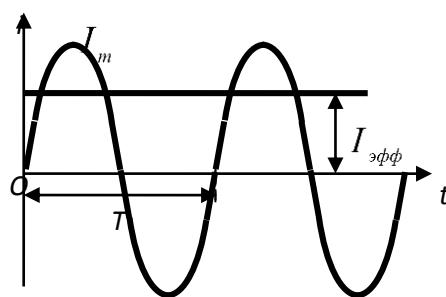


Рис.1.

Ввиду того, что в течение периода сила переменного тока изменяется, о величине такого тока судят не по мгновенным значениям, а по действующему или эффективному значению  $I_{\text{эфф}}$ . При этом действие переменного тока оценивают по тепловому эффекту, который сравнивают с тепловым эффектом постоянного тока.

#### **Действующее значение переменного тока**

Действующим (эффективным) значением переменного тока называют такую величину, которая равна силе постоянного тока, выделяющего в проводнике такое же количество теплоты, что и данный переменный ток за одно и то же время. Действующее значение переменного синусоидального тока связано с его амплитудным значением соотношением

$$I = I_{\text{эфф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Для мгновенных значений синусоидальных токов выполняются закон Ома и правила Кирхгофа.

Рассмотрим цепи, содержащие резистор, катушку индуктивности, конденсатор и все три элемента, соединенные последовательно, на зажимах которых приложено переменное напряжение

$$u = U_m \cos \omega t,$$

где  $U_m$  – амплитудное значение напряжения.

### Электрическая цепь с резистором

Сила тока, протекающего через резистор (рис.2), определяется законом Ома

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $I_m = \frac{U_m}{R}$  – амплитуда силы тока. Очевидно, что при чисто активном ( $R$ ) характере цепи сдвиг фаз колебаний тока и напряжения равен нулю (рис. 3).

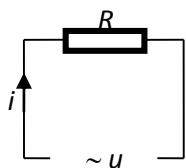


Рис. 2

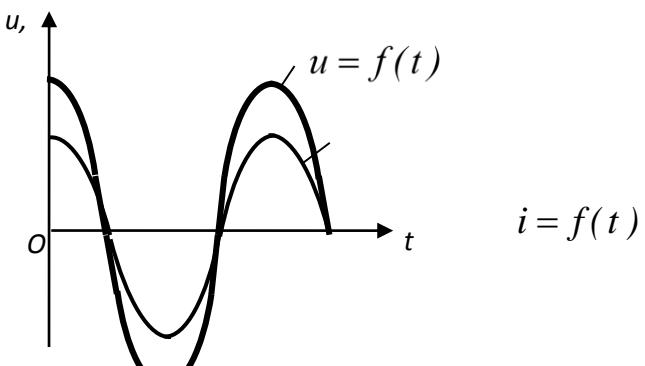


Рис. 3

## Электрическая цепь с катушкой индуктивности

В катушке без потерь ( $R \approx 0$ ) будет протекать ток, если напряжение на ее выводах компенсирует ЭДС самоиндукции (рис. 4), то есть

$$u = -\mathcal{E}_s = L \frac{di}{dt}, \quad (3)$$

откуда ток

$$i = \int \frac{1}{L} U_m \cos \omega t dt = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + A = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \quad (4)$$

Постоянная интегрирования  $A=0$ , так как ток изменяется по гармоническому закону, то есть не имеет постоянной составляющей. Очевидно, что амплитуда тока в цепи с катушкой

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (5)$$

где  $x_L = \omega L$  – индуктивное сопротивление, зависящее от частоты. При  $v=0$  (при протекании постоянного тока)  $x_L=0$ .

Таким образом, в цепи с катушкой индуктивности колебания силы тока отстают по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  от колебаний напряжения (рис.5).

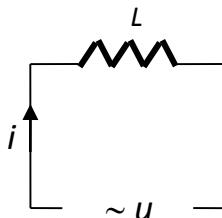


Рис. 4

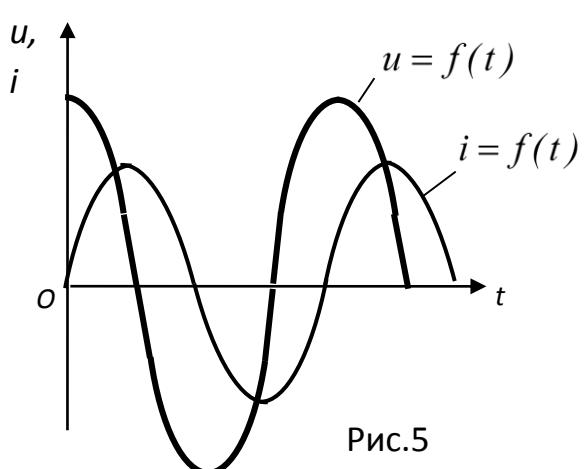


Рис.5

## Электрическая цепь с конденсатором

Если пренебречь активным сопротивлением соединительных проводов и обкладок конденсатора (рис.6), то напряжение на конденсаторе  $u_c = \frac{q}{C}$  будет равно напряжению на зажимах цепи, то есть  $U_m \cos \omega t = \frac{q}{C}$ ,

$$\text{на зажимах цепи, то есть } U_m \cos \omega t = \frac{q}{C},$$

откуда заряд конденсатора

$$q = U_m C \cos \omega t.$$

Сила тока в цепи конденсатора

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega U_m C \sin \omega t = U_m \omega C = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (6)$$

где  $I_m = U_m \omega C = \frac{U_m}{x_C}$ ,  $x_C = \frac{1}{\omega C}$  - емкостное сопротивление цепи. Чем меньше частота  $\nu$ , тем больше  $x_C$ . Поэтому в цепи постоянного тока ( $\nu = 0$ )  $x_C \rightarrow \infty$  и конденсатор не проводит электрический ток.

Таким образом, в цепи с конденсатором колебания силы тока опережают по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  колебания напряжения (рис.7).

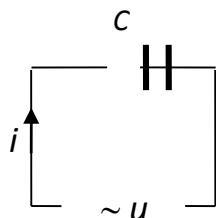


Рис.6

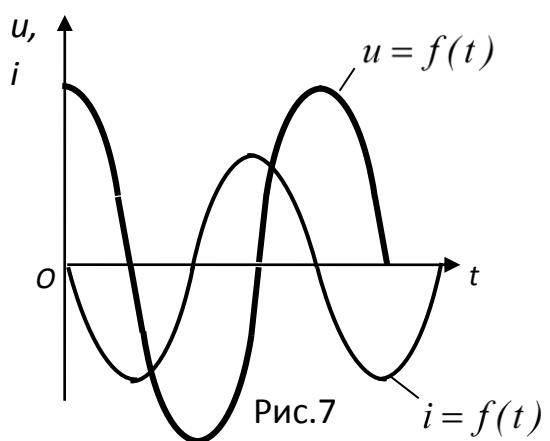


Рис.7

### Закон Ома для цепи переменного тока

Рассмотрим теперь электрическую цепь из последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора (рис.8).

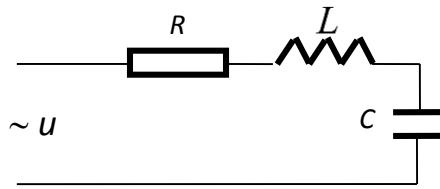


Рис. 8

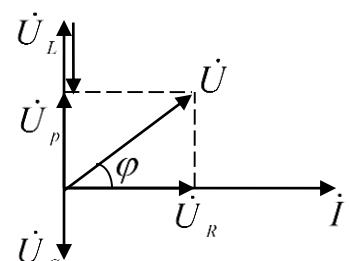


Рис. 9

По второму правилу Кирхгофа для мгновенных значений напряжение на зажимах цепи равно сумме напряжений на отдельных элементах

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Построим векторную диаграмму цепи с учетом полученных ранее фазовых соотношений: а) напряжение на резисторе совпадает по фазе с током; б) напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на  $\frac{\pi}{2}$ ; в) напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 9).

Из векторной диаграммы найдем модуль действующего значения напряжения

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_p^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}, \quad (20.9)$$

где  $U_p$  – реактивная составляющая напряжения.

Учитывая, что  $U_R = IR$ ,  $U_L = IX_L$ ,  $U_C = IX_C$ , получим:

$$U = I \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = IZ,$$

где  $Z$  – полное сопротивление цепи. Выражение

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (10)$$

называется законом Ома для цепи переменного тока.

Разность  $x_p = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  называют *реактивным сопротивлением*. Из векторной

диаграммы следует, что угол сдвига фаз между током и напряжением для рассматриваемой схемы

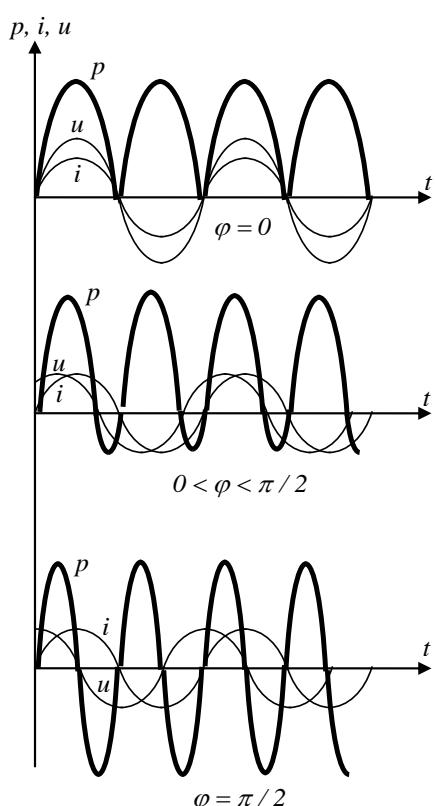
$$\varphi = \arctg \frac{U_p}{U_R} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (20.11)$$

Если  $x_L > x_C$ , цепь имеет индуктивный характер,  $\varphi > 0$ ; если  $x_L < x_C$ , цепь имеет емкостный характер,  $\varphi < 0$ ; если  $x_L = x_C$ , то реактивное сопротивление цепи  $x_p = 0$ ,  $\varphi = 0$  и цепь имеет активный характер даже при наличии в ней  $L$  и  $C$ .

### Мгновенная мощность

*Мгновенная мощность*, развивающаяся в цепи переменного тока, равна произведению мгновенных значений силы тока и напряжения:

$$p(t) = i(t)u(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)U_m \cos\omega t. \quad (12)$$



Среднее за период значение мгновенной мощности называют *активной мощностью*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt. \quad (13)$$

Из-за наличия сдвига фаз  $\varphi$  знаки у тока и напряжения в данный момент времени могут быть разные. Поэтому мгновенная мощность может быть отрицательной в некоторые доли периода переменного тока, что означает возвращение энергии из цепи источнику тока.

На рис.20.10 приведены графики изменения мгновенной мощности при различных углах сдвига фаз между колебаниями напряжения и тока.

При  $\varphi = 0$  в любой момент времени мощность положительна, она расходуется в цепи на совершение различных видов работы. При  $0 < \varphi < \pi/2$  в отдельные промежутки времени мощность отрицательна. Это объясняется тем, что при наличии в цепи катушки индуктивности возрастание тока приводит к созданию в ней магнитного поля, которое

обладает запасом энергии. При уменьшении силы тока магнитное поле исчезает и запасенная в нем энергия возвращается к источнику тока (генератору).

Аналогичный процесс происходит при наличии в цепи конденсатора: в течение той четверти периода, когда происходит зарядка конденсатора, энергия в нем запасается, а когда конденсатор разряжается, он отдает в цепь запасенную энергию.

При  $\varphi = \pi / 2$  положительная мощность равна отрицательной мощности, работа тока за период равна нулю, следовательно, средняя мощность также равна нулю. При этом периодически энергия запасается в магнитном и электрическом полях, а затем снова передается генератору. Последний случай возможен лишь при  $R=0$ .

Подставив (12) в (13) и выполнив преобразования, найдем среднее значение мощности переменного тока:

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = UI \cos \varphi, \quad (14)$$

где  $\cos \varphi$  – косинус угла сдвига фаз, который называется *коэффициентом мощности*.

Формула (14) показывает, что развиваемая в цепи переменного тока мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между напряжением и током.

*Коэффициент мощности*  $\cos \varphi$  характеризует потери энергии в цепи и, следовательно, является важнейшей технико-экономической характеристикой при проектировании электрооборудования переменного тока. Если нагрузки в цепи имеют большие емкостные и индуктивные сопротивления, то  $\varphi \neq 0$  и  $\cos \varphi$  может быть много меньше единицы.

В этих случаях для передачи требуемой активной мощности  $P$  (при заданном напряжении) необходимо увеличивать силу тока, что приводит к выделению в цепи большого количества теплоты. Поэтому приходится либо увеличивать сечение проводов ( $R \sim 1/S$ ), либо распределять реактивные нагрузки так, чтобы  $\cos \varphi$  был по возможности ближе к единице.

### Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений

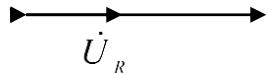
*Резонансом* в электрической цепи называется режим участка, содержащего индуктивный и емкостный элементы, при котором угол  $\varphi$  сдвига фаз колебаний напряжения и тока равен нулю. Резонанс характеризуется рядом особенностей, которые обусловили его широкое применение в радиотехнике, электротехнике, измерительной технике и других областях.

Различают несколько видов резонанса: резонанс напряжений (при последовательном соединении элементов), резонанс токов (при параллельном соединении элементов), резонанс в магнитно-связанных цепях и др.

*Резонанс напряжений.* Из выражения (1) следует, что при последовательном соединении  $R, L, C$  ток в цепи приобретает максимальное значение при  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ , то

есть при  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ . Этому условию удовлетворяет частота

$$\omega_{pes} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (15)$$



$\dot{I}$

В этом случае  $\varphi = 0$ ,  $Z = R \rightarrow \min$ , падения напряжения на катушке индуктивности и конденсаторе одинаковы по величине и противоположны по фазе (рис.11). Таким образом, при резонансе напряжений

$$U_L = U_C,$$

$\dot{U}_d$

и

$$U_L = \omega_{pes} L I = \frac{1}{\sqrt{LC}} L I = \sqrt{\frac{L}{C}} I = \frac{U}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = U Q,$$

(16)

где  $Q$  – добротность контура.

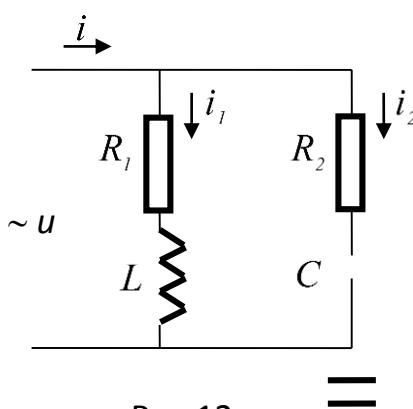


Рис.12

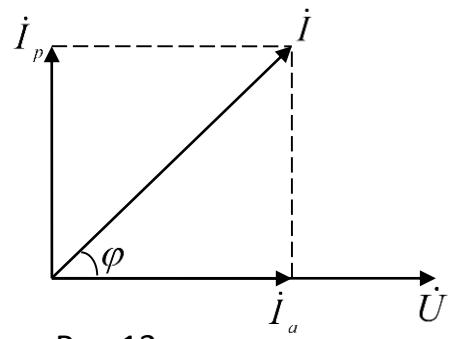


Рис.13

Так как добротность колебательных контуров больше единицы, то напряжение, как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение  $U$ , приложенное к цепи. Из выражения (16) следует, что добротность контура показывает, во сколько раз при резонансе напряжение на реактивных элементах больше по величине входного напряжения.

Явление резонанса напряжений используется в радиотехнике и электронике для усиления колебаний напряжения какой-либо определенной частоты. В электроэнергетике явление резонанса напряжений необходимо учитывать при выборе изоляции высоковольтного оборудования, так как иначе может произойти ее пробой.

### Вопросы и задания.

1. Переменный электрический ток.
2. Действующее значение переменного тока.
3. Электрическая цепь с резистором.

4. Электрическая цепь с катушкой индуктивности.
5. Электрическая цепь с конденсатором.
6. Закон Ома для цепи переменного тока.
7. Мгновенная мощность.
8. Резонанс в электрических цепях. Резонанс напряжений.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. В сеть переменного тока с действующим напряжением 220 В включено активное сопротивление 55 Ом. Определить действующее и амплитудное значение силы тока.
2. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока с эффективным напряжением  $V_{\text{Э}}=71$  В и периодом  $T=(1/50)\text{с}$ . Найти промежуток времени, в течение которого длится вспышка лампы, и частоту вспышек лампы  $n$ . Напряжение зажигания лампы  $V_3=86,7\text{В}$  считать равным напряжению гашения  $V_{\text{Г}}$ .
3. В цепь последовательно включены резистор с сопротивлением  $R$ , конденсатор с емкостью  $C$  и катушка с индуктивностью  $L$ . По цепи протекает переменный ток. Определите амплитуды напряжения на каждом из элементов цепи и во всей цепи. По какому закону изменяется приложенное к цепи напряжение?

## **Раздел 5. Оптика. Квантовая природа излучения**

### **Практическое занятие 14.**

#### **Тема занятия. Геометрическая оптика. Линзы**

**Цель занятия.** Изучить основные законы геометрической оптики.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Закон прямолинейного распространения света в однородной среде. Основные законы оптики. Полное тражение. Линзы. Формула линзы. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Основные законы геометрической оптики применяется при решении инженерных задач.

#### **Теоретическая часть.**

##### **Закон прямолинейного распространения света в однородной среде**

Прямолинейность световых лучей означает, что форма тени предмета при его освещении точечным источником соответствует геометрической *центральной проекции* контура предмета (с центром в источнике). Представление о прямолинейных световых лучах используется в инструментальной оптике для конструирования и расчета оптических приборов. В оптически неоднородных средах геометрическая оптика допускает и непрямолинейное распространение света.

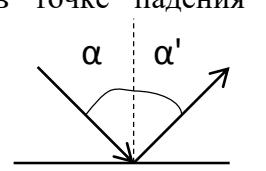
##### **Закон независимости световых лучей**

Опыт показывает, что световые пучки при пересечении, как правило, не возмущают друг друга. Производимое одним пучком действие не зависит от наличия других пучков. Математически это означает, что при наложении нескольких световых пучков результирующая интенсивность пучков равна сумме интенсивностей, каждого из пучков

$I = \sum_{i=1}^n I_i$ , то есть здесь мы пренебрегаем волновыми свойствами света (интерференцией и дифракцией). Кроме того, этот закон строго справедлив для вакуума. Для световых лучей в веществе закон независимости световых лучей справедлив для линейных сред, оптические свойства которых не зависят от интенсивности света. Это выполняется точно при небольшой и приближенно при умеренной интенсивности света. При распространении света высокой интенсивности в веществе этот закон нарушается.

### Закон отражения света

При падении луча света на границу раздела двух сред, в точке падения восстанавливают нормаль к границе раздела и отсчитывают угол падения  $\alpha$ , как угол между падающим лучом и нормалью, а угол отражения  $\alpha'$  - как угол между отраженным лучом и нормалью. Тогда закон отражения света гласит: луч падающий, луч отраженный и нормаль к отражающей поверхности лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения  $\alpha = \alpha'$ .

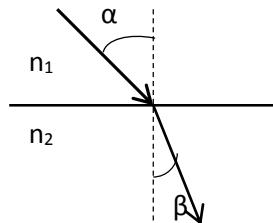


### Закон преломления света

Более сложный закон имеет место при переходе света из одной среды в другую. При падении света на границу раздела прозрачных сред с абсолютными показателями преломления

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \text{ и } n_2 = \frac{c}{v_2} \text{ часть света отражается, а часть проходит во}$$

вторую среду, изменяя направление распространения (преломляется). Здесь  $c$  – скорость света в вакууме,  $v$  – скорость света в соответствующей среде. Угол к нормали, под которым свет распространяется во второй среде, называют углом преломления  $\beta$ . Тогда закон преломления гласит: луч падающий, луч преломленный и нормаль к преломляющей поверхности лежат в одной



плоскости. Угол падения и угол преломления связаны соотношением:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21}$ , где  $n_{21}$

- относительный коэффициент преломления второй среды относительно первой.

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

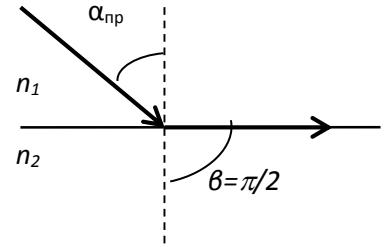
Здесь различают два случая:

1. Когда свет переходит из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду ( $n_2 > n_1$ ), угол преломления меньше угла падения ( $\beta < \alpha$ ). В этом случае доля отраженной энергии светового луча от границы раздела двух сред сильно возрастает по мере увеличения угла падения. Однако даже при очень больших углах падения, близких

к  $90^\circ$ , когда световой луч почти скользит вдоль поверхности раздела двух сред, все же часть световой энергии переходит во вторую среду.

2. Новое интересное явление возникает тогда, когда свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду ( $n_2 < n_1$ ). Тогда угол преломления больше угла падения ( $\beta > \alpha$ ). Здесь также доля отраженной энергии возрастает с увеличением угла падения, однако возрастание идет по иному закону: *начиная с некоторого угла падения, вся световая энергия отражается от границы раздела*. Это явление носит название *полного внутреннего отражения*.

Угол падения  $\alpha_{np}$ , начиная с которого вся световая энергия отражается от границы раздела, называется *пределым углом полного внутреннего отражения*. Значение этого угла определяется выражением:  $\sin \alpha_{np} = n_{21}$ . При падении луча с углом падения  $\alpha > \alpha_{np}$ , вся световая энергия отражается в первую среду и не проходит во вторую, преломленного луча во второй среде нет.



### Следствия из законов геометрической оптики

Фокусное расстояние сферического зеркала

$$F = R / 2,$$

где  $R$  – радиус кривизны зеркала.

Оптическая сила сферического зеркала

$$D = 1 / F.$$

Формула сферического зеркала

$$\pm \frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где  $d$  и  $f$  – расстояния от полюса зеркала соответственно до предмета и изображения. Знак плюс соответствует действительным величинам, знак минус – мнимым.

Оптическая сила тонкой линзы

$$D = \frac{1}{F} = \left( \frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $F$  – фокусное расстояние линзы;  $n_{\text{л}}$  – абсолютный показатель преломления вещества линзы;  $n_{\text{ср}}$  – абсолютный показатель преломления окружающей среды.

Радиусы выпуклых поверхностей ( $R_1$  и  $R_2$ ) берутся со знаком плюс, вогнутых – со знаком минус.

Оптическая сила двух тонких линз, сложенных вплотную

$$D = D_1 + D_2.$$

Формула тонкой линзы

$$\pm \frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где  $d$  и  $f$  – расстояния от оптического центра линзы соответственно до предмета и изображения. Знак плюс соответствует действительным величинам, а знак минус – мнимым.

Угловое изображение лупы

$$\Gamma = \frac{d_0}{F},$$

где  $d_0$  – расстояние наилучшего зрения ( $d_0 = 25$  см).

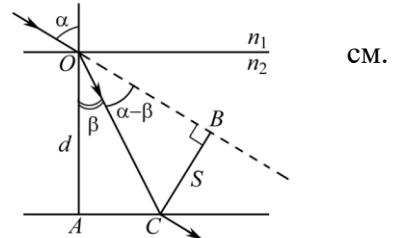
Угловое увеличение телескопа в случае, когда в телескоп наблюдают удаленные предметы

$$\Gamma = \frac{F_1}{F_2},$$

где  $F_1$  и  $F_2$  – фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Световой луч падает под углом  $\alpha = 60^\circ$  на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной  $d = 10$  см. Определите смещение  $S$  луча пластинкой, если пластинка погружена в воду. Показатели преломления стекла и воды соответственно равны  $n_2 = 1,5$ ,  $n_1 = 1,33$ .



**Дано:**

$$\alpha = 60^\circ$$

$$d = 10 \text{ см}$$

$$n_1 = 1,33$$

$$n_2 = 1,5$$

$$S - ?$$

**Решение.** Из прямоугольных треугольников  $AOB$  и  $BOC$  следует:

$$\frac{d}{\cos \beta} = \frac{S}{\sin(\alpha - \beta)} = CO.$$

Отсюда смещение луча пластинкой

$$S = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = d \left( \sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right). \quad (1)$$

По закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \sin \beta = \frac{n_1 \sin \alpha}{n_2}. \quad (2)$$

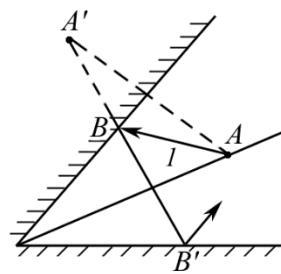
Следовательно,

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

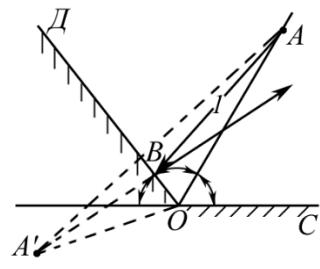
Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$\begin{aligned} S &= d \left( \sin \alpha - \frac{n_1 n_2 \cos \alpha \sin \alpha}{n_2 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} \right) = d \left( \sin \alpha - \frac{n_1 \sin 2\alpha}{2 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} \right) = \\ &= 10 \left( \sin 60^\circ - \frac{1,33 \sin 120^\circ}{2 \sqrt{1,5^2 - 1,33^2 \sin^2 60^\circ}} \right) \approx 2,67 \text{ см.} \end{aligned}$$

**Задача 2.** Внутренняя поверхность конуса покрыта отражающим слоем, образующим коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него натянута светящаяся нить. Определите минимальный угол раствора конуса  $\alpha_{\min}$ , при котором лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза.



a)



б)

**Решение.** Рассмотрим ход луча (1), испущенного точкой  $A$ , лежащей на нити. После первого отражения от конической поверхности в точке  $B$  луч 1 пойдет так, как если бы он вышел из точки  $A'$  – мнимого изображения точки  $A$ . Если угол раствора конуса мал, то точка  $A'$  – изображение точки  $A$  будет лежать выше прямой  $OC$  (рис. а). Тогда луч 1 может отразиться в точке  $D'$  второй раз от нижней поверхности конуса. При большом угле раствора конуса точка  $A'$  лежит ниже прямой  $OC$  (рис. б).

Тогда ни один луч, вышедший из точки  $A$  второй раз не попадет на зеркало. Это будет иметь место, если

$$\angle A'OD + \angle AOD + \angle AOC \geq 180^\circ. \quad (1)$$

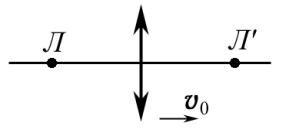
Но  $\angle AOC = \angle AOD = \angle A'OD = \alpha / 2$ . Подставим выражение для углов в (1):  $3(\alpha / 2) \geq 180^\circ$ .

Отсюда получим

$$\alpha_{\min} = \alpha \geq (2 / 3) \cdot 180^\circ.$$

$$\alpha_{\min} \geq 120^\circ.$$

**Задача 3.** На оптической скамье установлена лампочка  $L$  (ее можно считать точечным источником света). От лампочки отодвигают с постоянной скоростью  $v_0$  собирающую линзу, фокусное расстояние которой равно  $F$ . В какую сторону, и с какой скоростью будет двигаться изображение  $L'$  лампочки в тот момент, когда линза окажется от нее на расстоянии  $1,5F$ ? Лампочка все время остается на главной оптической оси линзы.



**Дано:**

$$d = 1,5F$$

$$v_0$$

$$v_x - ?$$

**Решение.** В системе отсчета, связанной с линзой, скорость лампочки

$$v' = -v_0.$$

Продифференцируем формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad (1)$$

где  $d$  – расстояние от предмета до линзы;  $f$  – расстояния от изображения до линзы;  $F$  – фокусное расстояние.

$$-\frac{dd}{d^2 dt} - \frac{1}{f^2} \frac{df}{dL} = 0.$$

Здесь  $\frac{dd}{dt} = v_0$  – положительная величина, так как расстояние до предмета увеличивается.

Скорость изменения  $f$  обозначим  $U$ :

$$U = \frac{df}{dt} = -\frac{f^2}{d^2} v_0.$$

Из выражения (1) находим  $f$ :

$$f = \frac{Fd}{d - F} = \frac{F \cdot 1,5F}{1,5F - F} = 3F.$$

Тогда

$$U = -\frac{9F^2 v_0}{(1,5F)^2} = -4v_0.$$

Знак «минус» говорит о том, что  $f$  уменьшается по величине, т.е. изображение лампочки движется по направлению к линзе.

Скорость изображения в неподвижной системе отсчета

$$v_x = U_x + v_{0x} = -4v_0 + v_0 = -3v_0.$$

Таким образом, изображение лампочки движется по направлению к линзе со скоростью  $3v_0$ .

**Задача 4.** Луч света падает под углом  $\alpha$  на поверхность среды с показателем преломления, изменяющемуся по закону  $n = n_0 + ky$ , где  $n_0$  и  $k$  – положительные постоянные;  $y$  – координата. Определите траекторию луча света в среде.

**Решение.** Для любой точки  $A$ , лежащей на траектории луча (см. рис.) можно записать:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \beta, \quad (1)$$

где  $\beta$  – угол преломления луча.

Из закона преломления света следует

$$\sin \beta / \sin \alpha = n.$$

Отсюда

$$\sin \beta = \sin \alpha / n, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}. \quad (2)$$

Подставим выражения (2) в (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Отсюда

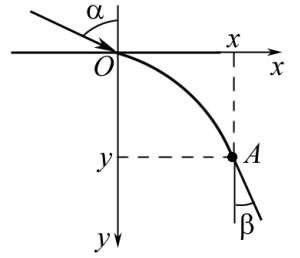
$$dx = dy \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем траекторию луча

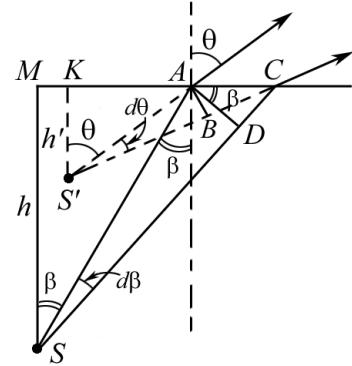
$$\begin{aligned} x &= \int_0^y \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} dy = \int_0^y \frac{\sin \alpha}{\sqrt{(n_0 + ky)^2 - \sin^2 \alpha}} dy = \\ &= \frac{\sin \alpha}{k} \ln \left[ \left( \frac{n_0 + ky}{\sin \alpha} \right) + \sqrt{\frac{n_0 + ky}{\sin \alpha} - 1} \right]_0^y. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим:

$$X = \frac{\sin \alpha}{k} \ln \left[ (n_0 + ky) + \sqrt{(n_0 + ky)^2 - \sin^2 \alpha} \right] + C,$$



$$\text{где } C = -\frac{\sin \alpha}{k} \ln \left( n_0 + \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \alpha} \right).$$



**Задача 5.** Две плосковыпуклые линзы, сложенные плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием  $F_1$ . Найти фокусное расстояние  $F_2$  линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла  $n_1=1,66$ , воды  $n_2=1,33$ .

Дано:

В первом случае мы имеем двояковыпуклую линзу, оптическая  $F_1=10\text{см}$  сила которой определяется по формуле  $n_1=1,66$

$$\Phi_1 = \frac{1}{F_1} = \left| \left( n_1 - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right|, \quad (1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз.

Во втором случае к двум плосковыпуклым линзам добавляется  $F_2 = ?$  третья линза (водяная) с вогнутыми поверхностями, с отрицатель-

ными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  и оптической силой

$$\Phi = \frac{1}{F} = (n_{21} - 1) \cdot \left( -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Здесь  $n_{21} = n_2 / n_1$  – относительный показатель преломления.

## Оптическая сила сложенных вплотную линз

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi \quad \text{или} \quad \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F} \quad (3)$$

Подставим в (3) выражение (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_2} &= \frac{1}{F_1} + (n_2 - 1) \cdot \left( -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{F_1} - (n_2 - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \\ &= \frac{1}{F_1} - (n_2 - 1) \cdot \frac{n_1 - 1}{n_1 - 1} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим в (4) левую часть (1):

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_1} - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_1} \cdot \left( 1 - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \right) = \frac{1}{F_1} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 - 1},$$

$$\text{откуда} \quad F_2 = \frac{n_1 - 1}{n_1 - n_2} \cdot F = \frac{1,66 - 1}{1,66 - 1,33} \cdot 10 = \frac{0,66}{0,33} \cdot 10 = 20 \text{ см}.$$

### **Вопросы и задания.**

1. Закон прямолинейного распространения света в однородной среде.
2. Основные законы оптики.
3. Полное трахение.
4. Линзы. Формула линзы.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $f = 1$  м лежит выпуклой стороной на стеклянной пластинке. Радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете  $r_5 = 1,1$  мм. Определить длину световой волны  $\lambda$ .
2. Оптическая сила  $\Phi$  объектива телескопа равна 0,5 дптр. Окуляр действует как лупа, дающая увеличение  $\Gamma_1 = 10$ . Какое увеличение  $\Gamma_2$  дает телескоп?
3. Лупа дает увеличение  $\Gamma = 2$ . Вплотную к ней приложили собирающую линзу с оптической силой  $\Phi_1 = 20$  дптр. Какое увеличение  $\Gamma_2$  будет давать составная лупа?
4. Пределы аккомодации глаза близорукого человека без очков лежат между  $a_1 = 16$  см и  $a_2 = 80$  см. В очках он хорошо видит удаленные предметы. На каком минимальном расстоянии  $d$  он может держать книгу при чтении в очках? Считать расстояние наилучшего зрения  $D = 25$  см.
5. Человек без очков читает книгу, располагая ее перед собой на расстоянии  $a = 12,5$  см. Какой оптической силы  $\Phi$  очки следует ему носить?
6. Главное фокусное расстояние  $f$  собирающей линзы в воздухе равно 10 см. Определить, чему оно равно: 1) в воде; 2) в коричном масле.
7. Каково возможное наименьшее расстояние  $l$  между предметом и его действительным изображением, создаваемым собирающей линзой с главным фокусным расстоянием  $f = 12$  см?
8. Луч света переходит из среды с показателем преломления  $n_1$  в среду с показателем преломления  $n_2$ . Показать, что если угол между отраженным и преломленным лучами равен  $\pi/2$ , то выполняется условие  $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{n_2}{n_1}$  ( $\varepsilon_1$  - угол падения).
9. Пучок параллельных лучей шириной  $a$  падает на толстую стеклянную пластину под углом  $\varepsilon = 60^\circ$  и, преломляясь, переходит в стекло. Ширина  $a$  пучка в воздухе равна 10 см. Определить ширину  $b$  пучка в стекле.

10. Луч падает под углом  $\varepsilon = 60^\circ$  на стеклянную пластинку толщиной  $d = 30$  мм. Определить боковое смещение  $\Delta x$  луча после выхода из пластиинки.

## Практическое занятие 15.

**Тема занятия. Волновая оптика. Интерференция и дифракция света. Дисперсия и поляризация света.**

**Цель занятия.** Изучить основы волновой оптики. Интерференцию и дифракцию света. Дисперсию и поляризацию света.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Электромагнитная природа света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Оптическая длина пути и оптическая разность хода лучей. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Интерференция в тонких пленках. Интерференция многих волн. Дифракционная решетка. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса — Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Дифракция от щели. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и преломлении. Двойное лучепреломление. Нормальная и аномальная дисперсии. Электронная теория дисперсии света. Рассеяние света. Поглощение света. Связь дисперсии с поглощением. Спектры поглощения и цвета тел. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Элементы волновой оптики применяется при решении инженерных задач.

## Теоретическая часть.

### Интерференция света

В волновой оптике рассматриваются оптические явления, в которых проявляется волновая природа света (например, явления интерференции, дифракции, поляризации и дисперсии света). Свет представляет собой электромагнитные волны, в которых совершают колебания векторы электрической напряженности  $E$  и магнитной напряженности  $H$ . Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие свойства света вызываются колебаниями электрического вектора.

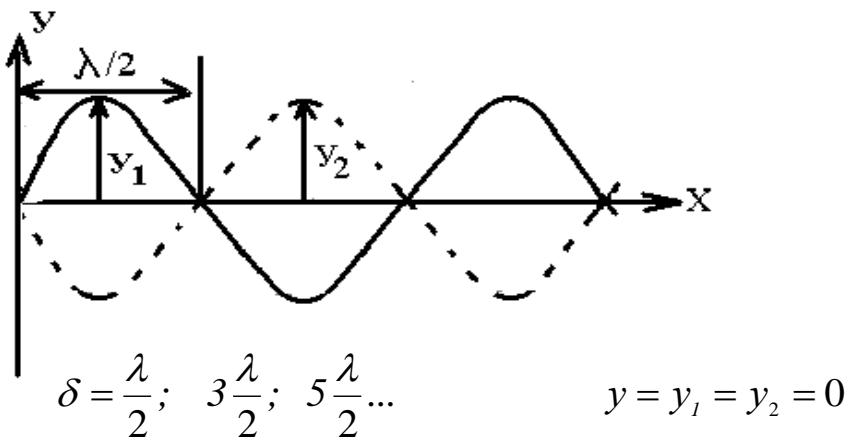
В соответствии с этим, в дальнейшем, говоря о световом векторе, будем подразумевать под ним вектор напряженности электрического поля  $E$ . *Явление интерференции света состоит в усилении или ослаблении колебаний, которое происходит в результате сложения двух или нескольких волн с одинаковыми периодами, распространяющихся в пространстве, и зависит от соотношения между фазами складывающихся колебаний.*

Необходимым условием интерференции волн является их когерентность, то есть *равенство их частот и постоянная во времени разность фаз*. Этому условию удовлетворяют только монохроматические световые волны, то есть волны одного цвета. Для световых волн, так же как и для любых других, справедлив принцип суперпозиции, то есть результирующий световой вектор двух волн, проходящих через одну точку, равен векторной сумме световых векторов каждой из волн в отдельности.

Амплитуда результирующего колебания находится путем геометрического сложения амплитуд исходных колебаний. Условия усиления или ослабления результирующего колебания обычно формулируются не через разность фаз  $\Delta\varphi$ , а через разность хода волн  $\delta$ . Известно, что фазе  $\varphi = \pi$ , соответствует пройденный волновой путь, равный половине длины волны  $\lambda/2$  (Рис.1). Тогда условие максимумов интерференции можно сформулировать следующим образом: максимальное усиление результирующего колебания наступает, если разность хода световых волн равна четному числу полуволн, или целому числу длин волн, то есть

$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad (1)$$

Аналогично формулируется условие минимумов: ослабление результирующего колебания будет, если разность хода слагаемых волн равна нечетному числу полуволн, то есть



$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

где  $k = 0, 1, 2 \dots$  называется порядком интерференционного максимума или минимума.

Решение задач на интерференцию света надо обязательно сопровождать

рисунком, указать в нем, какие лучи интерферируют. Следует различать путь геометрический и путь оптический. Если свет проходит в среде, показатель преломления

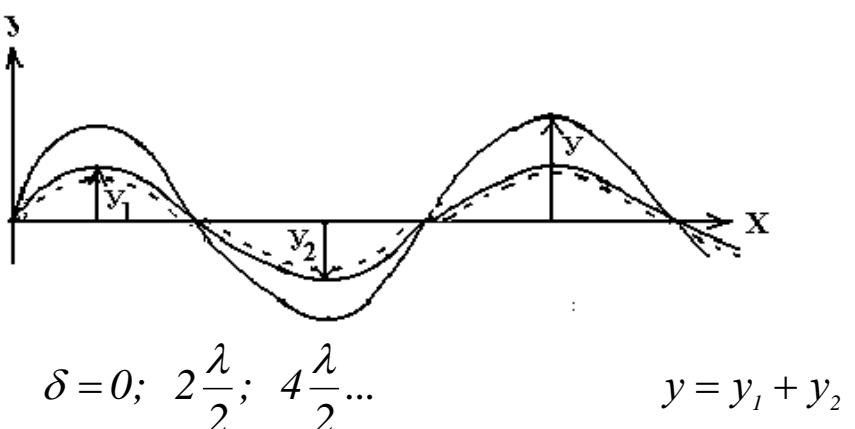


Рис. 1.

которой относительно вакуума равен  $n$ , то оптическая длина его пути  $S$  связана с геометрической  $\ell$  следующим соотношением

$$S = n\ell \quad (3)$$

При отражении луча от среды более плотной, чем та среда, в которой идет падающий луч, фаза колебаний изменяется на  $\pi$  радиан, то есть в данной точке, говорят, происходит «потеря» половины длины волны. Наиболее типичным и распространенным примером интерференции света в природе является интерференция в тонких пленках: мыльные пузыри, радужная пленка нефти на воде, оксиды пленки на металлах и т.д. Допустим, что тонкую пленку толщиной  $d$  окружает воздух (рис.2). На нее под углом  $\alpha$  к нормали падает параллельный пучок лучей, из которого можно выделить два луча 1 и 2 (рассматривается интерференция в отраженном и проходящем свете). Для разности хода этих лучей имеют место следующие выражения:

а) в отраженном свете: 2-ой луч, отражаясь в точке  $C$  от среды более плотной пленки «теряет»  $\lambda/2$ , поэтому разность хода

$$\delta = 2d n \cos d + \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}; \quad (4)$$

б) в проходящем же свете ни 1-ый, ни 2-ой лучи не имеют «потери»  $\lambda/2$  и поэтому

$$\delta = 2d n \cos \gamma = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Рассматривая интерференцию света в тонких пленках, различают полосы равной толщины. Первые наблюдаются в тех случаях, когда на плоскую параллельную, тонкую пленку падает под разными углами  $\alpha$  расходящийся (или сходящийся) пучок света. Интерференционную картину можно видеть на экране  $\mathcal{E}$ , установленном в фокальной плоскости собирающей линзы.

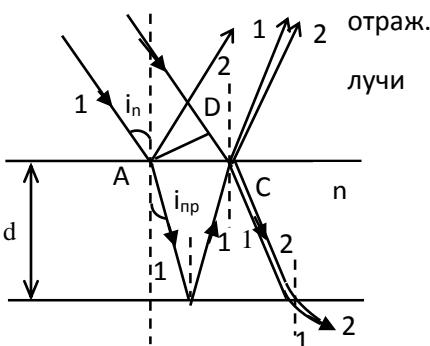


Рис. 2.

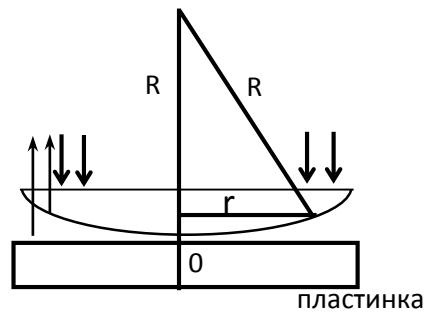


Рис. 3.

Результаты интерференции отраженного света в различных точках экрана зависят только от углов  $\alpha$  падения на пленку. Интерференционные полосы в этом случае называются полосами равного наклона, так как они получаются в результате интерференции лучей, падающих на пленку под одним и тем же углом. Для разных полос углы падения различны.

Полосы равной толщины наблюдаются при отражении параллельного пучка лучей света ( $d = \text{const}$ ) от тонкой прозрачной пленки, толщина  $d$  которой не одинакова в разных местах. Оптическая разность хода интерферирующих волн изменяется при переходе от одних точек на поверхности пленки к другим, в соответствии с изменением толщины  $d$ , так что условия интерференции одинаковы в точках, соответствующих одинаковым значениям  $d$ . При проектировании пленки на экран посредством линзы таким образом, чтобы на экране получилось изображение пленки, последняя оказывается покрытой полосами, проходящими по точкам, соответствующим равной толщине  $d$  пленки (рис.2). Эти полосы называются полосами равной толщины.

Частным случаем полос равной толщины являются кольца Ньютона (рис.3). Плосковыпуклая линза с большим радиусом  $R$  кривизны выпуклой поверхности обращена этой поверхностью к плоской пластинке и соприкасается с ней в точке  $O$ . Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного промежутка между линзой и пластинкой. При наложении отраженных волн возникают интерференционные кольца равной толщины. Радиус  $k$ -того светлого кольца в отраженном свете (или темного в проходящем) равен

$$r_k = \sqrt{(2k+1) \frac{\lambda}{2} R}. \quad (6)$$

Радиус  $k$ -того темного кольца в отраженном свете (или светлого в проходящем) равен

$$r_k = \sqrt{k \lambda R}, \quad (7)$$

где  $R$  – радиус кривизны линзы.

### **Дифракция света. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка. Дифракция рентгеновских лучей**

*Дифракцией называется отклонение света от прямолинейного распространения в однородной среде, когда свет, огибая препятствия, заходит в область геометрической тени. Дифракция света всегда сопровождается интерференцией дифрагированных лучей. Дифракция возникает в том случае, когда фронт волны не является безграничным, а частично скранирован. (Например, вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел, сквозь малые отверстия). Проникновение световых волн в область геометрической тени может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн. Огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент (рис.1). Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис.2).*

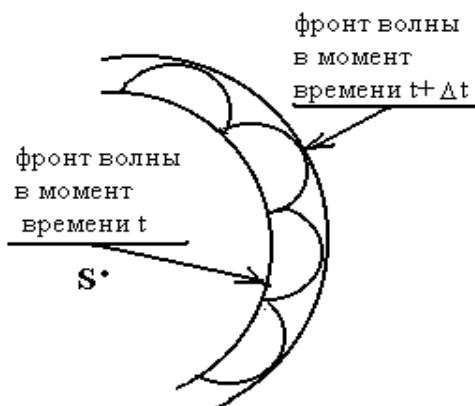


Рис. 1.

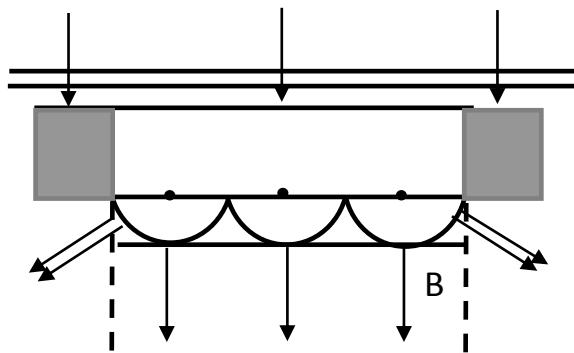


Рис. 2.

По Гюйгенсу каждая точка выделяемого отверстием участка открытого фронта волны служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн  $AB$ , можно убедиться в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени, огибая края преграды.

Принцип Гюйгенса не дает никаких сведений об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях. Этот недостаток был устранен Френелем. Последний впервые предположил, что все вторичные волны являются когерентными и поэтому могут интерферировать в любой точке пространства. Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет рассмотреть многие случаи дифракции света и дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытом. Чтобы понять суть метода, разработанного Френелем, определим амплитуду светового колебания, возбуждаемого в точке  $P$  сферической волной от источника  $S$  (рис.3).

Разобъем изображенную на рисунке волновую поверхность на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки  $P$  отличаются на  $\lambda/2$ . Это зоны Френеля. Колебания, приходящие в точку  $P$  от аналогичных точек двух соседних зон, находятся в противофазе, поэтому и результирующие колебания, создаваемые каждой из зон в целом, будут для соседних зон отличаться по фазе на  $\pi$ . При небольшом числе  $k$  зон Френеля площади их примерно одинаковы, а высота сегмента  $h_k \ll a$ , Поэтому можно легко вывести радиус  $k$ -той зоны Френеля;

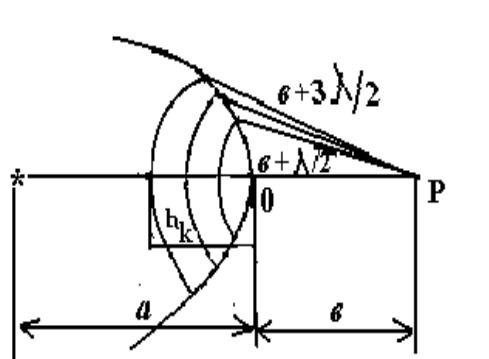


Рис.3

$$r_k = \sqrt{\frac{a \cdot b}{a + b} k \lambda} \quad (8)$$

Расстояние  $r_k$  от зоны до точки  $P$  медленно растет с ростом номера зоны  $k$ , значит амплитуда  $A_k$  колебания, возбуждаемого  $k$ -той зоной в точке  $P$  монотонно убывает. Вследствие этого можно приближенно считать, что

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2} \quad \text{and} \quad A = \frac{A_1}{2}.$$

То есть амплитуда в точке  $P$  равна половине амплитуды центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачной экран с отверстием, открывающим только центральную зону, то амплитуда в точке  $P$  будет равна  $A$ , а интенсивность света будет в четыре раза больше, чем при отсутствии преград между точками  $S$  и  $P$ .

Если же отверстие таково, что открывает две зоны Френеля, то амплитуды от этих зон (примерно одинаковые) придут в точку  $P$  в противофазе, и в ней будет наблюдаться минимум интенсивности света. Можно заключить, что, *если в открытый фронт волны входит четное число зон Френеля, то наблюдается минимум интенсивности света, если  $k$  – нечетное, то в точке  $P$  наблюдается максимум интенсивности света.*

Различают два случая дифракции света: дифракцию Френеля, или дифракцию в сходящихся лучах, и дифракцию Фраунгофера, или дифракцию в параллельных лучах. В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся за препятствием на конечном расстоянии от него. Во втором случае на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на щели. Пусть параллельный пучок монохроматического света падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана узкая щель шириной  $a$  (рис. 4). В соответствии с принципом Гюйгена-Френеля все точки щели являются когерентными источниками света, колеблющимися в одной фазе.

Оптическая разность хода между крайними лучами  $MC$  и  $ND$ , идущими от щели в произвольном направлении  $\varphi$

$$\delta = a \sin \varphi. \quad (9)$$

Разобьем щель  $MN$  на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру  $MN$  щели. Все зоны в заданном направлении излучают свет совершенно одинаково. При интерференции света от каждой пары соседних зон амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как эти зоны вызывают колебания с одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами. Результат интерференции в точке  $B$  определяется тем, сколько зон попадают в зону Френеля. Если число зон четное, то есть

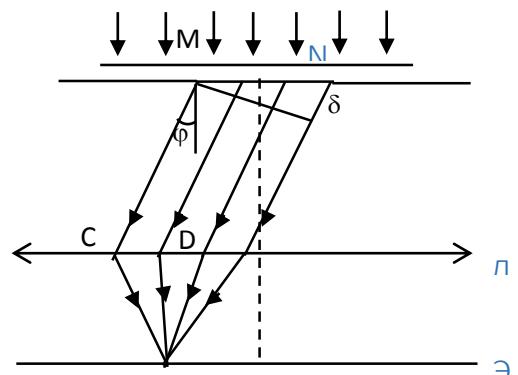


Рис. 4.

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (10)$$

то наблюдается дифракционный минимум.

Если число зон нечетное, то есть

$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} , \quad (11)$$

то наблюдается дифракционный максимум.

Величина  $k$  называется порядком дифракционного максимума (или минимума).

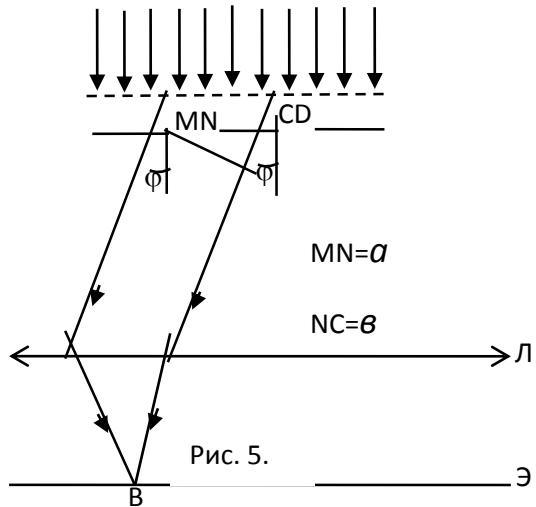


Рис. 5.

Широкое распространение в науке и технике получили дифракционные решетки, которые представляют собой множество щелей одинаковой ширины, разделенных одинаковой ширины непрозрачными промежутками. Общая ширина промежутка и щели называется постоянной (или периодом решетки), то есть  $d = a + b$ .

Дифракционная картина от решетки сложнее, чем от одной щели, потому, что свет от разных щелей также интерферирует. Если на решетку нормально к ее поверхности падает свет с длиной волны  $\lambda$ , то (рис.5) лучи, идущие под углом  $\varphi$  к первоначальному направлению от соответствующих точек каждой щели, обладают разностью хода

$$\delta = d \sin \varphi .$$

Если эта разность хода равна целому числу длин волн, то наблюдается максимум интерференции. Условия главных максимумов для решетки записываются в виде

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda (k = 0, 1, 2, \dots) . \quad (12)$$

Как следует из формулы, если на решетку падает белый свет, то для более коротких волн условие максимума выполняется при меньших углах.

Разрешающая способность  $R$  дифракционной решетки, то есть способность ее представить раздельно две спектральные линии, определяется по формуле

$$R = kN, \quad (13)$$

где  $N$  – общее число штрихов дифракционной решетки,  $k$  – порядок дифракционного максимума.

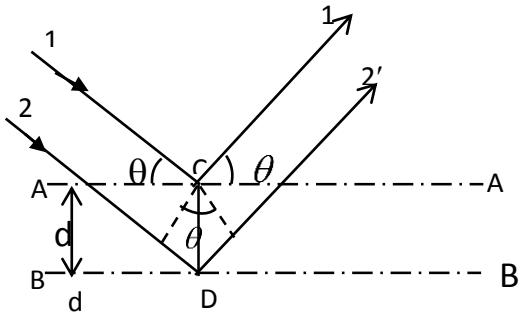


Рис.6.

Для наблюдения дифракционной картины необходимо, чтобы постоянная решетки была того же порядка, что и длина волны падающего света. Поэтому для рентгеновского излучения в качестве дифракционных решеток можно использовать кристаллы, поскольку расстояние между атомами в кристаллах одного порядка с  $\lambda_{\text{рент. изл.}}$  ( $\approx 10^{-12} - 10^{-8}$  м).

*Дифракцию рентгеновского излучения можно рассматривать как результат его отражения от системы параллельных сетчатых плоскостей кристалла, то есть плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решетки.* Это отражение, в отличие от обычного, осуществляется лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют интерференционным максимумам для лучей, отраженных от разных плоскостей.

Абсолютный показатель преломления всех сред для рентгеновского излучения близок к единице, поэтому оптическая разность хода между двумя лучами  $1'$  и  $2'$ , отражающимися от плоскостей  $AA$  и  $BB$  равна (рис.6)

$$2 d \sin \theta, \quad (14)$$

где  $d$  – межплоскостное расстояние,  $\theta$  – угол скольжения. Дифракционные максимумы наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют условию Вульфа-Брэггов

$$\delta = 2 d \sin \theta = m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (15)$$

### Поляризация света. Двойное лучепреломление.

#### Вращение плоскости поляризации

Обычные источники света испускают естественный свет, то есть свет, в котором имеются колебания светового вектора, совершающиеся в самых различных направлениях, перпендикулярных к лучу (рис.7).

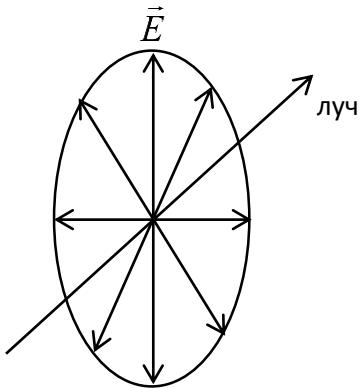


Рис. 7.

Излучение светящегося тела слагается из волн, испускаемых его атомами. Процесс излучения отдельного атома продолжается около  $10^{-8}$  с. За это время успевает образоваться последовательность горбов и впадин (или, как говорят, цуг волн), протяженностью примерно 3 м. «Погаснув», атом через некоторое время «вспыхивает» вновь. Одновременно вспыхивает множество атомов. Возбуждаемые ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. Плоскость колебаний для каждого цуга ориентирована случайно. Поэтому в результирующей волне колебания различных направлений равновероятны. В естественном свете колебания различных направлений быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

*Свет, в котором направления колебаний светового вектора  $E$  упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным.* Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, свет называется плоско- (или линейно) поляризованным. Упорядоченность может заключаться еще и в том, что вектор  $E$  поворачивается вокруг луча, одновременно пульсируя по величине. В результате, конец вектора  $E$  описывает или эллипс (эллиптически поляризованный свет) или окружность (поляризованный по кругу свет). *Плоскость, в которой колеблется световой вектор  $E$ , называется плоскостью колебаний, а перпендикулярная ей плоскость называется плоскостью поляризации.*

Плоскополяризованный свет можно получить с помощью различных устройств, называемых поляризаторами. Эти приборы пропускают свободно колебания, параллельные плоскости, которая называется плоскостью поляризатора, и полностью задерживают колебания, перпендикулярные этой плоскости. Поляризованный свет можно получить также при отражении от диэлектрика. Как показывает опыт, отраженный и преломленный лучи всегда частично поляризованы. Степень поляризации зависит от угла падения и показателя преломления.

Изучая это явление, Брюстер установил, что при определенном значении угла падения отраженный луч полностью линейно поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. При этом отражается только та компонента вектора напряженности электрического поля, которая параллельна поверхности диэлектрика (условно эту компоненту обозначаем точками, то есть колебания  $E$  происходят перпендикулярно плоскости чертежа). Преломленный луч поляризован лишь частично. Угол падения, при котором отраженный луч полностью поляризован, называется углом Брюстера (рис.8) и определяется соотношением

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (17)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – абсолютные показатели преломления

сред. При этом угол между отраженным и преломленным лучами равен  $90^\circ$ .

Действия различного типа поляризаторов основаны на законе Брюстера, либо на явлении двойного лучепреломления, которое состоит в

том, что в оптически анизотропных кристаллах

луч света, падающий на поверхность кристалла, раздваивается в нем на два преломленных луча

(рис. 9). Один из них лежит в плоскости падения, подчиняется законам преломления света и называется обыкновенным лучом ( $o$ ). Второй не удовлетворяет этим условиям и называется необыкновенным ( $e$ ). Двойное лучепреломление свидетельствует о том, что падающая на оптически анизотропный кристалл световая волна возбуждает

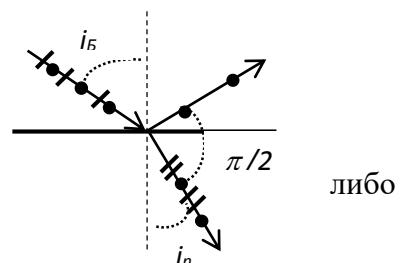


Рис. 8.

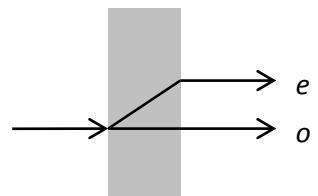


Рис. 9.

две волны, распространяющиеся в кристалле по различным направлениям. Обыкновенная и необыкновенная волны линейно поляризованы. Направления векторов  $E$  в этих волнах условно показывают точками на обыкновенном луче и черточками на необыкновенном. В одноосном кристалле скорость обыкновенного луча  $v_0$  численно одинакова по всем направлениям:  $v_0 = C / n_0$ , где  $n_0$  – показатель преломления кристалла для обыкновенного луча. Соответственно, для необыкновенного луча:  $v_e = C / n_e$ . Значения  $n_e$  и  $v_e$  зависят от направления необыкновенного луча по отношению к оптической оси кристалла (это направление в кристалле, вдоль которого не наблюдается двойное лучепреломление). Для луча, распространяющегося вдоль оптической оси,  $n_e = n_0$ ,  $v_e = v_0$ .

Примером поляризации может служить призма Николя (рис. 10). Она вырезается из кристалла исландского шпата, и в поперечном сечении имеет форму ромба. По плоскости СВ кристалл разрезан и склеен канадским бальзамом.

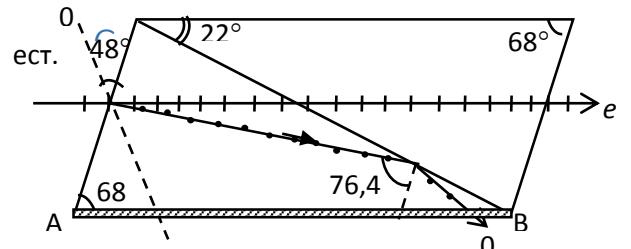


Рис. 10.

Обыкновенный луч 0 полностью отражается от него и поглощается зачерненной поверхностью АВ. Из призмы Николя выходит только необыкновенный луч  $e$ , который поляризован в плоскости, параллельной главной плоскости призмы. Устройства, служащие для анализа степени поляризации света, называются анализаторами.

Ими могут служить те же призмы Николя. Всякий анализатор можно условно изобразить в виде решетки, прутья которой параллельны направлению колебаний светового вектора  $\vec{E}_a$  в проходящем сквозь нее свете (рис.11). Если на такую решетку-анализатор падает естественный луч, то интенсивность  $I_a$  проходящего света не изменится при повороте анализатора. Это происходит вследствие

того, что в естественном свете ни одно из направлений плоскости колебаний не является преобладающим. Если на анализатор падает линейно поляризованный свет, полученный с помощью поляризатора и имеющий интенсивность  $I_p$ , то интенсивность света, прошедшего через анализатор будет зависеть от угла  $\alpha$  между главными плоскостями поляризации анализатора ( $a - a$ ) и поляризатора (P-P) (рис. 12).  $E_p$  - амплитуда колебаний света,

прошедшего через поляризатор. На входе в анализатор луч разложится на два луча, поляризованные в главной плоскости анализатора ( $a - a$ ) и перпендикулярной к ней плоскости

$$E_1 = E_p \sin \alpha; E_2 = E_p \cos \alpha$$

Первый луч поглотится в анализаторе, пройдет через него

Рис.11

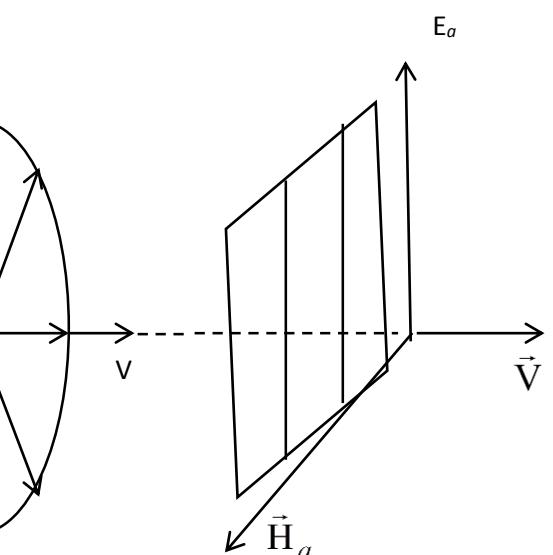
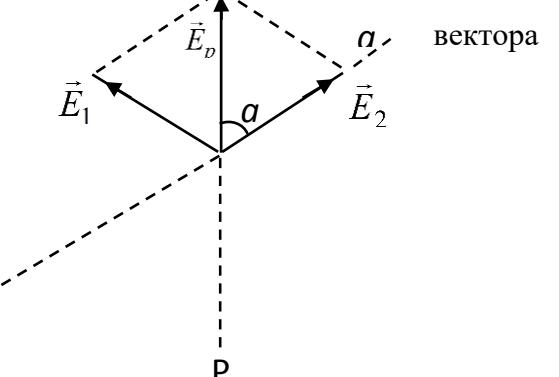


Рис. 12.

второй



$$E_a = E_p \cos \alpha.$$

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через анализатор и поляризатор, меняется в зависимости от угла  $\alpha$  по закону Малюса

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha \quad (18)$$

Если  $I_{ecm}$  - интенсивность естественного света, то из поляризатора выходит плоскополяризованный свет, интенсивность которого

$$I_p = \frac{1}{2} I_{ecm}.$$

Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора

$$I_a = \frac{1}{2} I_{ecm} \cos^2 \alpha$$

Откуда  $I_{\max} = \frac{1}{2} I_{ecm}$  (поляризаторы параллельны) и  $I_{\min} = 0$  (поляризаторы скрещены).

Формулы приведены без учета потерь интенсивности. Некоторые растворы (например, раствор сахара) и твердые вещества (в частности кварц) обладают свойством вращать плоскость поляризации поляризованного луча. Угол  $\varphi$  поворота плоскости поляризации зависит от пути луча в этих веществах  $\ell$  и концентрации раствора  $C$ .

Для твердых веществ

$$\varphi = [\alpha] \ell. \quad (19)$$

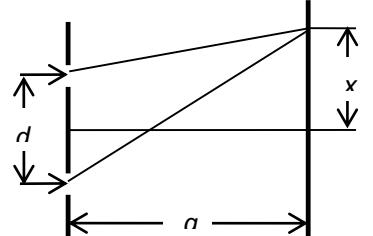
Для растворов

$$\varphi = [\alpha] \ell C, \quad (20)$$

где  $[\alpha]$  – удельный угол вращения (постоянная вращения), показывающий, на какой угол повернется плоскость поляризации, если  $\ell = 1$  и  $C = 1$  (для растворов). Размерность  $[\alpha]$  зависит от того, в каких единицах взяты  $\ell$  и  $C$  в СИ.  $[\alpha]$  – рад/м (для твердых веществ) для растворов  $[\alpha] = \text{рад/м} \cdot (\text{кг/м}^3)$ .

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Найти длину волны  $\lambda$  монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы  $x = 0,05$  см. Данные установки  $a = 5$  м,  $d = 0,5$  см.



Дано:

$$x = 0,05 \text{ см}$$

$$a = 5 \text{ м}$$

$$d = 0,5 \text{ см}$$

$$\lambda = ?$$

**Решение.** Разность хода лучей, прошедших в точку наблюдения равна

$$\delta = r_2 - r_1; \quad (1)$$

$$r_2^2 = a^2 + \left( x + \frac{d}{2} \right)^2; \quad (2)$$

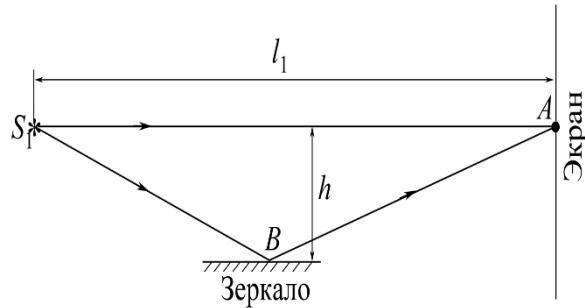
$$r_1^2 = \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 + a^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{a} = m\lambda. \quad (4)$$

По условию задачи  $m = 1$ , поэтому

$$\lambda = \frac{xd}{a} = 500 \text{ нм.}$$



**Задача 2.** В точку  $A$  экрана от источника  $S_1$  монохроматического света длиной волны  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$  приходит два луча: непосредственно от источника перпендикулярный экрану луч  $S_1A$  и луч  $S_1BA$ , отраженный в точке  $B$  от зеркала, параллельного лучу  $S_1A$ . Расстояние  $l_1$  равно 1 м, расстояние  $h$  равно 2 мм. Определите, что будет наблюдаться в точке  $A$  экрана – усиление или ослабление освещенности.

Дано:

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм}$$

$$l_1 = 1 \text{ м}$$

$$h = 2 \text{ мм}$$

min, max - ?

**Решение:** Источник  $S_1$  и мнимый  $S_2$  являются когерентными, поэтому на экране возникает интерференционная картина. Максимум или минимум возникает в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода  $\delta$  интерферирующих лучей

$$m = \frac{2\delta}{\lambda}. \quad (1)$$

Если  $m$  – целое четное число, то имеем максимум, если  $m$  – целое нечетное, то минимум.

Оптическая разность хода  $\delta_1$  будет складываться из геометрической разности  $l_2 - l_1$  (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности  $\lambda/2$ , обусловленной изменением фазы колебаний на  $\pi$  при отражении от среды, оптически более плотной. Таким образом

$$\delta_1 = l_2 - l_1 + \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

По теореме Пифагора  $l_2^2 = l_1^2 + (2h)^2$ ,  $(l_2 - l_1) = \frac{(2h)^2}{2l_1}$ , так как

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1), \text{ где } l_2 + l_1 \approx 2l_1, 2h \ll l.$$

Подставив это выражение  $l_2 - l_1$  в формулу (2), найдем:

$$\delta_1 = \frac{(2h)^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Зная  $\delta_1$ , можно по формуле (1) найти  $m_1$ :

$$m_1 = \frac{\frac{(2h)^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}}{\lambda/2} = \frac{(2h)^2}{l_1 \lambda} + 1.$$

Тогда окончательно получим

$$m_1 = 4 \frac{h^2}{l_1 \lambda} + 1.$$

Выразим  $h$ ,  $l_1$  и  $\lambda$  в микрометрах и вычислим:

$$m_1 = 4 \frac{(2 \cdot 10^3)^2}{1 \cdot 10^6 \cdot 0,5} + 1 = 32 + 1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволн, то в точке  $A$  наблюдается максимальное ослабление освещенности.

**Задача 3.** На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной  $l = 2$  см с плоскопараллельными стеклянными основаниями и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на  $m = 20$  полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения производятся со светом линии  $D$  натрия ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ). Принимая показатель преломления воздуха  $n = 1,000276$ , вычислите показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

Дано:

$$l = 2 \text{ см}$$

$$m = 20$$

$$\lambda = 5890 \text{ \AA}$$

$$n_1 = 1,000276$$

$$n_{Cl} - ?$$

**Решение.** Легко догадаться, что разность хода лучей при усилении света по определению равна  $m\lambda$ . В данном случае оптическая разность хода равна  $(n_{Cl} - n)l$ . Из полученного равенства находим

$$(n_{Cl} - n)l = m\lambda \quad (1)$$

$$n_{Cl} = n + \frac{m\lambda}{l}. \quad (2)$$

Вычисляя, получаем  $n_{Cl} = 1,000865$ .

**Задача 4.** На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, коэффициент преломления вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света ( $\lambda = 0,6$  мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определите толщину пленки.

Дано:

$\lambda = 0,6$  мкм

$n_2 = 1,4$

$d - ?$

**Решение.** В точках  $A$  и  $B$  падающий луч  $SA$  отражается и частично преломляется. Отраженные лучи  $AS_1$  и  $BCS_2$  падают на собирающую линзу  $L$ , пересекаются в ее

фокусе  $F$  и интерферируют между собой.

Показатель преломления воздуха ( $n_1 = 1,0029$ ) меньше показателя преломления вещества пленки ( $n_2 = 1,4$ ), который в свою очередь меньше показателя преломления стекла ( $n_3 = 1,5$ ). В обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной.

Следовательно, никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого луча не происходит.

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Как видно из рисунка, оптическая разность хода

$$\delta = (AB + BC) n_2 - AD n_1.$$

Следовательно,

$$(AB + BC) n_2 - AD n_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Если угол падения  $i_1$  будет уменьшаться, то в пределе при  $i_1 = 0$  будем иметь

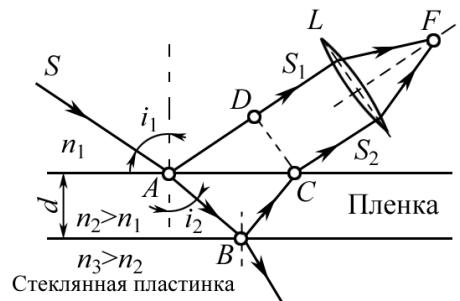
$$\delta = 2dn_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

откуда искомая толщина пленки

Полагая  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , получим возможные значения толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{0,6}{4 \cdot 1,4} = 0,11 \text{ мкм};$$

$$d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0,33 \text{ мкм}.$$



**Задача 5.** Почему центр колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, обычно темный, а в проходящем светлый?

**Решение.** В проходящем свете на границе стекло-воздух вектор напряженности электрического поля  $E$  не испытывает изменения фазы, а при отражении на границе воздух – стекло меняет фазу на  $180^\circ$ , что соответствует приобретению разности хода, равной половине длины волны.

**Задача 6.** На дифракционную решетку от разрядной трубки, наполненной гелием, нормально падает пучок света. На какую линию  $\lambda_1$  (в нанометрах) в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия длиной волны  $\lambda_2 = 706$  нм в спектре второго порядка?

Дано:

$$k_1 = 3$$

$$k_2 = 2$$

$$\lambda_2 = 706 \text{ нм}$$

$$\lambda_1 - ?$$

**Решение:** Условия главных максимумов освещенности для дифракционной решетки выглядят следующим образом:

$$d \sin\varphi_1 = k_1 \lambda_1; \quad d \sin\varphi_2 = k_2 \lambda_2$$

Спектральные линии накладываются одна на другую, поэтому углы дифракции будут равными, то есть  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Разделив первое уравнение на второе:

$$1 = \frac{k_1 \lambda_1}{k_2 \lambda_2},$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{k_2 \lambda_2}{k_1}$$

Подставим численные значения:

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 706 \cdot 10^{-9}}{3} = 471 \text{ нм.}$$

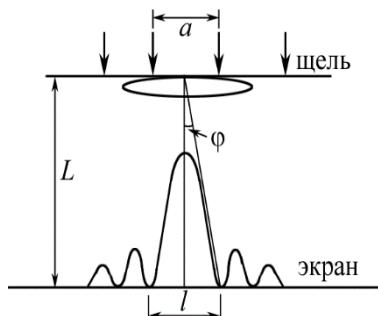
**Задача 7.** На щель (рис.) шириной  $a = 0,1$  мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ( $\lambda = 0,6\text{мкм}$ ). Определить ширину  $l$  центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии  $L = 1$  м.

Дано:

$$a = 0,1 \text{ мм}$$

$$\lambda = 0,6\text{мкм}$$

**Решение:** Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева максимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной



$L = 1$  м

расстоянию между двумя минимумами интенсивности (рис.).

$l = ?$

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами  $\varphi$ , определяемыми условием

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (1)$$

где  $k$  – порядок минимума. В нашем случае  $k = 1$ .

Расстояние между двумя минимумами на экране определим по рисунку:  $l = 2L \tan \varphi$ .  
При малых углах  $\tan \varphi \approx \sin \varphi$ , тогда

$$l = 2L \sin \varphi. \quad (2)$$

Выразим  $\sin \varphi$  из уравнения (1) и подставим в равенство (2):

$$l = \frac{2Lk\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{10^{-4}} \text{ м} = 1,2 \cdot 10^{-2} = 1,2 \text{ см.}$$

**Задача 8.** Дифракционная решетка содержит  $n = 200$  штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 0,6$  мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

**Дано:**

$$\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$n = 200 \text{ мм}^{-1}$$

$$k_{\max} - ?$$

**Решение:** Период дифракционной решетки найдем из формулы

$$n = 1 / d.$$

$$\text{Отсюда } d = 1 / n = 1 / 2 \cdot 10^5 = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение  $k_{\max}$ , исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать  $90^\circ$ . Постоянная решетки  $d$ , длина волны  $\lambda$  и угол отклонения  $\varphi$ , соответствующий  $k$ -му дифракционному максимуму, связаны соотношением:

$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

где  $\varphi = 90^\circ$  – максимальный угол отклонения лучей решеткой. Отсюда

$$k_{\max} = d \sin \varphi / \lambda = 0,5 \cdot 10^{-5} / 0,6 \cdot 10^{-6} = 8,3.$$

Число  $k$  обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 9, так как при этом значении  $\sin \varphi$  должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно,  $k_{\max} = 8$ .

**Задача 9.** На дифракционную решетку, содержащую  $n = 100$  штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум третьего порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол  $\Delta\varphi = 20^\circ$ . Определите длину волны света  $\lambda$ .

**Дано:**

$$n = 100 \text{ мм}^{-1}$$

$$\Delta\varphi = 20^\circ$$

$$k = 3$$

$$\lambda - ?$$

**Решение:** Период дифракционной решетки найдем из формулы

$$n = 1 / d.$$

Отсюда

$$d = 1 / n = 1 / 10^5 = 10^{-5} \text{ м.}$$

Максимумы интенсивности света одного порядка при дифракции на дифракционной решетке находятся на одинаковом расстоянии от центрального максимума и, следовательно, наблюдаются под одинаковыми углами дифракции  $\varphi$ :

$$d = \sin \varphi = k\lambda. \quad (1)$$

По условию задачи, чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол  $\Delta\varphi = 20^\circ$ . Следовательно, угол дифракции  $\varphi = \Delta\varphi / 2 = 10^\circ$ . Тогда из уравнения (1) длина волны света равна

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{k} = \frac{10^{-5} \cdot \sin 10}{3} = 0,0578 \cdot 10^{-5} \approx 580 \text{ нм.}$$

**Задача 10.** Свет с  $\lambda = 589$  нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,5$  мкм, содержащую  $N = 10000$  штрихов. Найдите угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

**Дано:**

$$\lambda = 589 \text{ нм}$$

$$d = 2,5 \text{ мкм}$$

$$N = 10000$$

$$k = 2$$

$$\Delta\theta - ?$$

**Решение:** Угловая дисперсия дифракционной решетки, состоящей из одной щели:

$$D = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos \theta}.$$

Тогда угловая ширина дифракционного

максимума, создаваемого решеткой, содержащей  $N$  штрихов:

$$\Delta\theta = \frac{k\lambda}{Nd \cos \theta} = [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] = \frac{k\lambda}{Nd \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}.$$

Свет падает на дифракционную решетку нормально. Условие главных максимумов:

$$d \sin \theta = k\lambda.$$

Отсюда  $\sin \theta = \frac{k\lambda}{d}$ . Тогда угловая ширина дифракционного максимума второго порядка будет равна:

$$\Delta\theta = \frac{k\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{k\lambda}{Nd \sqrt{1 - \left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2}}.$$

Подставим численные значения:

$$\Delta\theta = \frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 11''$$

**Задача 11.** С помощью дифракционной решетки с периодом  $d = 20$  мкм требуется разрешить дублет натрия ( $\lambda_1 = 589$  нм и  $\lambda_2 = 589,6$  нм) в спектре второго порядка. При какой наименьшей длине решетки это возможно?

**Дано:**

$$d = 20 \text{ мкм}$$

$$\lambda_1 = 589 \text{ нм}$$

$$\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$$

$$k = 2$$

$$l - ?$$

**Решение:** Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN, \text{ где } N - \text{число штрихов решетки.}$$

Число штрихов решетки можно найти, зная длину

$$\text{решетки } l \text{ и период решетки } d: \quad N = \frac{l}{d}.$$

Тогда

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = k \frac{l}{d}.$$

Отсюда наименьшая длина решетки, при которой возможно разрешить дублет натрия:

$$l = \frac{d\lambda}{k\delta\lambda},$$

$$\text{где } \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,6 \cdot 10^{-9} \text{ м, а } \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 589,3 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Тогда

$$l = \frac{d\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 589,3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}} \text{ м} = 982 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 10 \text{ мм.}$$

**Задача 12.** Показатели преломления кристаллического кварца для света с длиной волны 600 нм равны  $n_0 = 1,544$  и  $n_e = 1,553$  для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. В кристалле кварца, вырезанном параллельно оптической оси, можно получить максимальную разность скоростей обыкновенного и необыкновенного лучей, если они нормально падают на поверхность кристалла. Какова должна быть толщина кристалла, чтобы произошел сдвиг фаз этих лучей на  $90^\circ$ , если используется свет указанной длины волны?

Дано:

$$\lambda = 600 \text{ нм}$$

$$n_0 = 1,544$$

$$n_e = 1,553$$

$$\Delta\varphi = 90^\circ$$

---


$$d - ?$$

**Решение.** Сдвиг фаз вычисляется по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_0) d,$$

где  $d$  – расстояние, пройденное светом. Полагая  $\Delta\varphi = \pi/2$  и произведя вычисления, находим:

$$d = 16,7 \text{ мм.}$$

### **Вопросы и задания.**

1. Электромагнитная природа света.
2. Когерентность и монохроматичность световых волн.
3. Оптическая длина пути и оптическая разность хода лучей.
4. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Интерференция в тонких пленках.
5. Интерференция многих волн. Дифракционная решетка.
6. Дифракция световых волн. Принцип Гюйгенса — Френеля.
7. Метод зон Френеля.
8. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера.
9. Дифракция от щели.
10. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах.
11. Естественный и поляризованный свет.
12. Закон Малюса.
13. Поляризация света при отражении и преломлении.
14. Двойное лучепреломление.
15. Нормальная и аномальная дисперсии.
16. Электронная теория дисперсии света. Рассеяние света.
17. Поглощение света.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. На мыльную пленку ( $n=1,3$ ), находящуюся в воздухе, падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине  $d$  пленки отраженный свет с длиной волны  $\lambda=0,55 \text{ мкм}$  окажется максимально усиленным в результате интерференции.
2. Пучок монохроматических ( $\lambda=0,6 \text{ мкм}$ ) световых волн падает под углом  $\varepsilon_1=30^\circ$  на находящуюся в воздухе мыльную пленку ( $n=1,3$ ). При какой наименьшей толщине  $d$  пленки отраженные световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? Максимально усилены?

3. На тонкий стеклянный клин ( $n = 1,55$ ) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол  $\alpha$  между поверхностями клина равен  $2'$ . Определить длину световой волны  $\lambda$ , если расстояние  $b$  между соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм.
4. Двугранный угол стеклянного клина равен  $0,2'$ . На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монохроматического света с длиной волны  $\lambda=0,55$  мкм. Определить ширину  $b$  интерференционной полосы.
5. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ( $\lambda=600$  нм). Определить угол  $\theta$  между поверхностями клина, если расстояние  $b$  между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.
6. В опыте Юнга расстояние  $d$  между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии  $l$  от щелей следует расположить экран, чтобы ширина  $b$  интерференционной полосы оказалась равной 2 мм? ( $\lambda=640$  нм).
7. Расстояние  $d$  между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние  $l$  от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны  $\lambda$ , испускаемой источником монохроматического света, если ширина  $b$  полос интерференции на экране равна 1,5 мм.
8. Расстояние  $d$  между двумя когерентными источниками света ( $\lambda=500$  нм) равно 0,1 мм. Расстояние  $b$  между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние  $l$  от источников до экрана.
9. Найти все длины волн видимого света (от 0,76 до 0,38 мкм), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены при оптической разности хода  $\Delta$  интерферирующих волн, равной 1,8 мкм.
10. На тонкий стеклянный клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ( $\lambda=380$  нм). Определить угол  $\theta$  между поверхностями клина, если расстояние  $b$  между смежными интерференционными минимумами в отраженном свете равно 6 мм.
11. Какое наименьшее число  $N_{\min}$  штрихов должна содержать дифракционная решетка, чтобы в спектре 2-го порядка можно было видеть раздельно две желтые линии натрия с длинами волн  $\lambda_1=589$  нм и  $\lambda_2=589,6$ ? Какова длина  $l$  такой решетки, если постоянная решетки  $d=5$  мкм?
12. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол  $\varphi_1=14^\circ$ . На какой угол  $\varphi_2$  отклонен максимум третьего порядка?
13. Дифракционная решетка содержит  $n=200$  штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет ( $\lambda=0,6$  мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?
14. На дифракционную решетку, содержащую  $n=400$  штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ( $\lambda=0,6$  мкм). Найти общее число дифракционных максимумов, которое дает эта решетка. Определить угол  $\varphi$  дифракции, соответствующий последнему максимуму.

15. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков отчасти перекрывают друг друга. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается фиолетовая граница ( $\lambda = 0,4$  мкм) спектра третьего порядка.
16. На дифракционную решетку, содержащую  $n=600$  штрихов на миллиметр, падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить ширину  $b$  спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана  $L=1,2$  м. Границы видимого спектра  $\lambda_{\text{кр}} = 780\text{нм}$ ,  $\lambda_{\Phi} = 400$  нм.
17. Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете ( $\lambda=0,6$  мкм), максимум пятого порядка отклонен на угол  $\varphi=18^\circ$ ?
18. На щель шириной  $a=0,1$  мм падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 0,5$  мкм). За щелью помещена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол  $\varphi$  дифракции равен: 1)  $17'$ ; 2)  $43'$ .
19. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол  $\varphi$  отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен  $1^\circ$ . Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?
20. На щель шириной  $0,05$  мм падает нормально монохроматический свет ( $\lambda=0,6$  мкм). Определить угол  $\varphi$  между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.
21. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием. В результате дифракции в некоторых точках оси отверстия, находящихся на расстояниях  $b_i$  от его центра, наблюдаются максимумы интенсивности. 1) Получить вид функции  $b=f(r, \lambda, n)$ , где  $r$ -радиус отверстия;  $\lambda$  - длина волны;  $n$ -число зон Френеля, открываемых для данной точки оси отверстия. 2) Сделать то же самое для точек оси отверстия, в которых наблюдаются минимумы интенсивности.
22. Посредине между точечным источником монохроматического света  $\lambda=550$  нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определите радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным.
23. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом  $\varepsilon_1 = 54^\circ$ . Определить угол преломления  $\varepsilon_2$  пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.
24. На какой угловой высоте  $\varphi$  над горизонтом должно находиться Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был полностью поляризован?
25. Угол Брюстера  $\varepsilon_B$  при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен  $57^\circ$ . Определить скорость света в этом кристалле.

## Практическое занятие 16.

### Тема занятия. Квантовая природа излучения

**Цель занятия.** Изучить вопросы квантовой теории излучения.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Законы теплового излучения. Закон Стефана-Больцмана. Фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Давление света. Эффект Комптона. Владеет способностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Элементы квантовой теории применяется при решении научных задач.

### **Теоретическая часть.**

#### **Законы теплового излучения**

*Тепловым излучением называют электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойств этого тела. Тепловое излучение – единственное излучение, способное находиться в термодинамическом равновесии с веществом (равновесное).*

Количественной характеристикой теплового излучения служит энергетическая светимость (излучательность)  $R_T$  – мощность излучения абсолютно черного тела с единицы площади поверхности тела во всем интервале частот (длин волн) от 0 до  $\infty$ . Спектральной характеристикой теплового излучения тела является спектральная плотность энергетической светимости (спектральная плотность излучательности)  $r_{v,T}$  – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени с единицы площади поверхности тела в интервале частот от  $v$  до  $v + dv$ .

Распределение энергии излучения абсолютно черного тела в зависимости от частоты и температуры приведено на рис.1.

Величина излучательности может быть рассчитана по закону Стефана-Больцмана

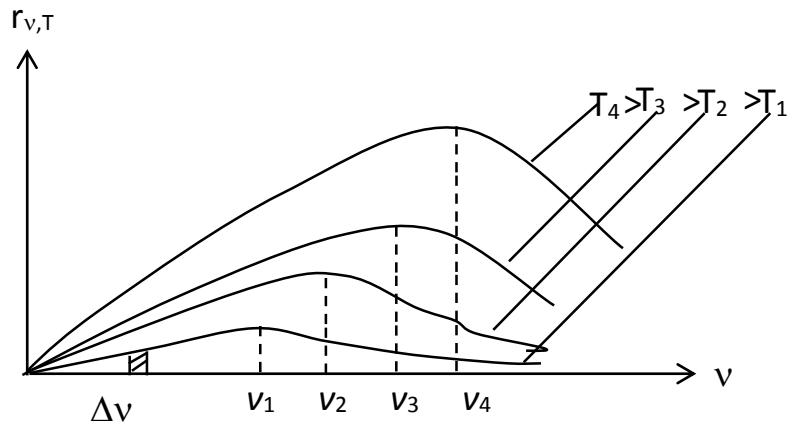


Рис. 1.

$$R_T = \sigma T^4, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $T$  – абсолютная температура. Если взять на графике единичный интервал частоты  $\Delta v$ , то площадь заштрихованного участка определит величину спектральной плотности излучательности.

Максимальное значение спектральной плотности излучательности определяется законом Вина

$$(r_{\nu,T})_{max} = cT^5, \quad (2)$$

где  $c$  – вторая постоянная Вина.

При увеличении температуры абсолютно черного тела частота, на которую приходится максимум спектральной плотности излучательности, смещается в сторону более высоких частот. Длина волны  $\lambda_{max}$ , соответствующая максимальному значению излучательности, обратно пропорциональна его температуре (закон смещения Вина)

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

где  $b$  – первая постоянная Вина.

### Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоны

Дать теоретическое обоснование спектральным закономерностям теплового излучения абсолютно черного тела удалось М. Планку. Для этого ему пришлось отказаться от установившегося положения классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, то есть, может принимать любые сколь угодные близкие значения. *М.Планк выдвинул квантовую гипотезу, заключающуюся в том, что энергия атомов-осцилляторов может изменяться дискретно, порциями, пропорциональными некоторой элементарной порции – кванту энергии*

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \quad (3)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

Используя статистические методы и представления о квантовом характере теплового излучения, М.Планк вывел формулу

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (4)$$

которая согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения абсолютно черного тела во всем интервале частот от 0 до  $\infty$  и при различных температурах. Кроме того, формула М.Планка содержит в себе законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в этих законах.

Эйнштейн, создавая квантовую теорию света, предположил, что не только излучение света, но и его распространение происходит в виде потока световых квантов-фотонов. Массу фотона можно найти из соотношения  $mc^2 = h\nu$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}, \quad (5)$$

а импульс фотона

$$p = m \cdot c = \frac{h}{c \cdot \lambda} \cdot c = \frac{h}{\lambda}. \quad (6)$$

### Внешний фотоэффект

*Явление вырываания электронов с поверхности металлов световым потоком называется внешним фотоэффектом.* При взаимодействии квантов света (фотонов) с металлами выполняется соотношение, которое называется уравнением Эйнштейна

$$h\nu = A_{вых} + \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad (7)$$

где  $A_{вых}$  – работа выхода электронов из металла,  $\frac{mv_{\max}^2}{2}$  – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вылетающих из металла.

Если энергия падающего фотона много меньше энергии покоя электрона  $E_0 = 0,51$  МэВ, то кинетическую энергию можно рассчитать по классической формуле, то есть

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (8)$$

Если же энергия кванта света, падающего на металл сравнима или больше  $E_0$ , то для вычисления кинетической энергии  $E_{\text{кин}}$  фотоэлектронов следует воспользоваться релятивистской формулой

$$K = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (9)$$

где  $m_0 c^2$  – энергия покоя электрона.

Если скорость вырванных из металла электронов  $v = 0$ , то энергия фотона  $\varepsilon = h\nu_{\kappa} = h \frac{c}{\lambda_{\kappa}}$ , а  $\nu_{\kappa}$  или  $\lambda_{\kappa}$  соответствует красной границе фотоэффекта для данного металла, то есть  $\lambda_{\kappa}$  – *также максимальная длина волны фотона, при которой начинается для данного металла фотоэффект.*

### Давление света

Современные квантовые представления о свойствах света существенно отличаются от ньютоновской корпускулярной теории света. С квантовой точки зрения давление света на поверхность какого-либо тела обусловлено тем, что при соударении с этой поверхностью каждый фотон передает ей свой импульс.

Отражение света от поверхности тела следует рассматривать как сложный процесс «переизлучения» фотонов – падающий фотон поглощается поверхностью, а затем вновь излучается ею с противоположным направлением импульсов. При этом давление света на отражающую поверхность должно быть таким же, каким оно было в том случае, если бы фотоны «зеркально отражались» от поверхности подобно абсолютно упругим шарикам.

Величина светового давления определяется формулой

$$P = \omega (1 + \rho), \quad (10)$$

где  $\omega = E_0/c$  – объемная плотность энергии излучения ( $E_0$  – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени,  $C$  – скорость света в вакууме);  $\rho$  – коэффициент отражения света от поверхности тела.

### Эффект Комптона

Квантовые свойства света проявляются в эффекте Комптона, который заключается в упругом рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и  $\gamma$ -излучения) на свободных или слабосвязанных электронах вещества, сопровождающемся увеличением длины волны  $\Delta\lambda$ . Величина  $\Delta\lambda$  определяется формулой Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (11)$$

где  $\lambda$  – длина волны падающего излучения,  $\lambda'$  – длина волны рассеянного излучения,  $\theta$  – угол рассеяния рентгеновского кванта,  $\lambda_c$  – комптоновская длина волны,  $\lambda_c = \frac{2h}{m_0 c}$ ,  $\lambda_c = 2,426$  пм ( $m_0$  – масса покоя электрона).

Объяснение эффекта Комптона может быть дано на основе квантовых представлений о природе света, как результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. В процессе столкновения фотон передает электрону часть своих энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела  $\lambda_{max} = 0,6$  мкм. Определите: 1) энергетическую светимость этого тела  $R_T$ ; 2) спектральную плотность энергетической светимости  $r_{\nu,T}$  или  $r_{\lambda,T}$ , рассчитанную на 1 нм вблизи  $\lambda_{max}$  в спектре излучения абсолютно черного тела.

Дано:

$$\lambda_{max} = 0,6 \text{ мкм}$$

$$\epsilon = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ К} \cdot \text{м}$$

**Решение.** Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обратно пропорциональна температуре

$$\begin{aligned}
 c &= 1,23 \cdot 10^{-5} \frac{Bm}{m^3 \cdot K^5} \\
 \sigma &= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Bm}{m^3 \cdot K^5} \\
 \Delta\lambda &= 1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}
 \end{aligned}$$


---


$$R_I = ? \quad r_{\lambda,T} = ?$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\max} &= \frac{\sigma}{T}, \\
 T &= \frac{\sigma}{\lambda_{\max}},
 \end{aligned}$$

отсюда

а энергетическая светимость  $R_T$  определяется законом Стефана-Больцмана, то есть, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры

$$R_T = \sigma T^4 = \sigma \left( \frac{\sigma}{\lambda_{\max}} \right)^4.$$

$$R_T = 5,67 \cdot 10^{-8} \left( \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \right)^4 = 33 MBT / m^2.$$

Максимум спектральной плотности энергетической светимости, согласно закону Вина, пропорционален пятой степени температуры

$$r_{\lambda,T} = c T^5 = c \left( \frac{\sigma}{\lambda_{\max}} \right)^5,$$

Но мы получили  $r_{\lambda,T}$  в интервале длин волн  $\Delta\lambda' = 1 \text{ м}$  (единичный интервал в СИ). Так как 1 нм в  $10^9$  раз меньше, то и  $(r_{\lambda,T})_{\max}$ , приходящаяся на  $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$  вблизи  $\lambda_{\max}$ , во столько же раз будет меньше. Таким образом, искомое значение определится выражением:

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = \frac{c \left( \frac{\sigma}{\lambda_{\max}} \right)^5}{10^9}$$

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = 1,23 \cdot 10^{-5} \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-9} = 3,8 \cdot 10^4 Bm / m^2 \cdot nm = 38 kBm / m^2 \cdot nm$$

Итак, спектральная плотность энергетической светимости, приходящаяся на интервал длин волн  $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$  вблизи  $\lambda_{\max}$  равна  $38 \text{ кВт/м}^2 \cdot \text{нм}$ .

**Задача 2.** Раскаленная металлическая поверхность  $S = 10 \text{ см}^2$  излучает в 1 мин энергию  $E = 4 \cdot 10^4 \text{ Дж}$ . Температура поверхности  $T = 2500 \text{ К}$ . Найдите отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Дано:

$$S = 10 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$$

$$E = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$

$$T = 2500 \text{ К}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Bm}{m^2 \cdot K^4}$$

$$n = ?$$

**Решение.** Искомая величина  $n = \frac{R_9}{R_{u.m.}}$ , где  $R_9$  и  $R_{u.m.}$  –

энергетическая светимость металлической поверхности и черного тела, соответственно, по закону Стефана-Больцмана

$$R_{u.m.} = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2500^4 = 2,21 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

Энергия, излучаемая раскаленной металлической поверхностью, равна  $E = R_9 \cdot t \cdot S$ . Отсюда

$$R_9 = \frac{E}{t \cdot S}$$

$$R_9 = \frac{4 \cdot 10^4}{60 \cdot 10^{-3}} = 0,67 \cdot 10^6 \frac{Bm}{m^2}.$$

$$\text{Найдем отношение } \frac{R_9}{R_{u.m.}} = n; \quad n = \frac{0,67 \cdot 10^6}{2,21 \cdot 10^6} = 0,3.$$

**Задача 3.** Во сколько раз увеличится мощность излучения черного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано:

$$\lambda_k = 0,76 \text{ мкм}$$

$$\lambda_\phi = 0,38 \text{ мкм}$$

$$N_k/N_\phi - ?$$

**Решение.** Согласно закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум энергетической светимости, обратно пропорциональна температуре

$$\lambda_{max} = \frac{\epsilon}{T}, \text{ отсюда } T_k = \frac{\epsilon}{\lambda_k}, \quad T_\phi = \frac{\epsilon}{\lambda_\phi}.$$

Мощность излучения равна  $N = RS$ .

В соответствии с законом Стефана – Больцмана  $R = \sigma T^4$ , для температур  $T_k$  и  $T_\phi$  имеем:  $N_k = \sigma T_k^4 S$  и  $N_\phi = \sigma T_\phi^4 S$ . Тогда их отношение равно

$$\frac{N_\phi}{N_k} = \left( \frac{T_\phi}{T_k} \right)^4 = \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_\phi} \right)^4 = \left( \frac{0,76}{0,38} \right)^4 = 16.$$

**Задача 4.** На платиновую пластинку падает ультрафиолетовое излучение. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающее напряжение  $U_1 = 3,7$  В. Если платиновую

пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающее напряжение нужно увеличить до  $U_2 = 6$  В. Определите работу выхода (в электронвольтах) из второго металла.

Дано:

$$U_1 = 3,7 \text{ В}$$

$$U_2 = 6 \text{ В}$$

$$A_1 = 6,3 \text{ эВ}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$A_2 = ?$$

**Решение.** Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта, имеем

$$h\nu = A_1 + \frac{mv_1^2}{2}$$

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить задерживающее напряжение  $U_1$ .

$$eU_1 = \frac{mv_1^2}{2},$$

где  $e$  и  $m$  – заряд (по модулю) и масса электрона.

Таким образом,

$$h\nu = A_1 + eU_1. \quad (1)$$

Аналогичное выражение запишем для пластиинки из второго металла

$$h\nu = A_2 + eU_2. \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2)

$$A_1 + eU_1 = A_2 + eU_2$$

$$A_2 = A_1 + eU_1 - eU_2 = A_1 - e(U_2 - U_1)$$

$$A_2 = 10,1 \cdot 10^{-19} - 1,6 \cdot 10^{-19} (6-3,7) = 6,42 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$A_2 = \frac{6,42 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4 \text{ эВ}.$$

**Задача 5.** Облучение литиевого фотокатода производится фиолетовыми лучами, длина волн которых равна 0,4 мкм. Определите скорость фотоэлектронов, если длина волны красной границы фотоэффекта для лития равна 0,52 мкм.

Дано:

$$\lambda = 0,4 \text{ мкм}$$

$$\lambda_k = 0,52 \text{ мкм}$$

$$v - ?$$

**Решение.** Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта энергия фотона  $E_\phi = hc/\lambda$  расходуется на работу выхода электрона  $A = hc/\lambda_k$  и сообщение электрону кинетической энергии  $K$ .

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_k} + K. \quad K = \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_k}.$$

Тогда  $v = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_\kappa}\right) \frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left(\frac{\lambda_\kappa - \lambda}{\lambda_\kappa \lambda}\right)}.$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 (5,2 - 4) \cdot 10^{-7}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,2 \cdot 4 \cdot 10^{-14}}} \cong 5 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

**Задача 6.** Определите максимальную скорость электрона, вырванного с поверхности металла  $\gamma$ -квантом с энергией 1,53 МэВ.

Дано:

$$E_\gamma = 1,53 \text{ МэВ}$$

$$v_{max} - ?$$

**Решение.** По формуле Эйнштейна для фотоэффекта

$E_\gamma = A + K$ . Работа выхода электрона из металла составляет величину порядка единиц электронвольт, что много меньше мегаэлектронвольт, следовательно меньшей

величиной можно пренебречь. Тогда  $E_\gamma = K$ . Так как энергия гамма-кванта превышает энергию покоя электрона  $E_0 = m_0 c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$ , то кинетическая энергия фотоэлектрона должна рассчитываться для релятивистского случая.

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - E_0.$$

Тогда

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{K + E_0}\right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{0,511}{1,53 + 0,511}\right)^2} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

**Задача 7.** Определите силу светового давления солнечных лучей перпендикулярных поверхности на площадь  $100 \text{ м}^2$ , если коэффициент отражения лучей равен 0,2 и солнечная постоянная  $1,4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$ . (Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца).

Дано:

$$S = 100 \text{ м}^2$$

$$\rho = 0,2$$

$$E = 1,4 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$F = ?$$

**Решение.** Сила светового давления  $F$  на поверхность равна произведению светового давления  $P$  на площадь  $S$  поверхности  $F = P \cdot S$ .

Световое давление может быть найдено по формуле  $P = \frac{E(1 + \rho)}{c}$ . Тогда искомая сила  $F = \frac{E \cdot S(1 + \rho)}{c}$ ,

$$F = \frac{1,4 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 1,2}{3 \cdot 10^8} = 5,6 \cdot 10^{-4} H.$$

**Задача 8.** На зачерненную поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм, производя давление  $5 \cdot 10^{-6}$  Па. Определите концентрацию фотонов вблизи поверхности и число фотонов, падающих на площадь 1 м<sup>2</sup> в 1 с.

Дано:

$$\lambda = 0,65 \text{ мкм}$$

$$P = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$$

$$S = 1 \text{ м}^2$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$n_0, n - ?$$

**Решение:** Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения  $\rho$  вычисляется по формуле  $P = \omega(1+\rho)$ , где  $\omega$  – объемная плотность энергии, которая связана с полной энергией (освещенностью)  $E_0$  падающих фотонов на единицу площади поверхности в единицу времени соотношением  $\omega = E_0/c$ .

С учетом того, что для зачерненной поверхности коэффициент отражения  $\rho$  равен нулю получим формулу для давления света в виде  $P = \omega = E_0/c$ . Объемная плотность энергии равна произведению концентрации фотонов  $n_0$  на энергию одного фотона  $E_1$ ,  $\omega = n_0 E_1 = n_0 h c / \lambda$ , откуда

$$n_0 = \frac{\omega \lambda}{h c} = \frac{P \lambda}{h c} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 6,5 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Число фотонов, падающих на единицу площади поверхности в единицу времени, равно отношению энергетической освещенности  $E_0$  к энергии одного фотона  $E_1$ :

$$n = \frac{E_0}{E_1} = \frac{P \lambda}{h} = n_0 c = 1,6 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^8 = 4,8 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

**Задача 9.** В явлении Комптона энергия падающего фотона  $E$  распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния  $\theta = \pi/2$ . Найдите энергию и импульс рассеянного фотона.

Дано:

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$\theta = \pi/2$$

$$E/E' = 2$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$E', P' = ?$$

**Решение.** Энергия падающего фотона определяется формулой  $E = h \frac{c}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина волны падающего фотона. Энергия рассеянного фотона  $E' = h \frac{c}{\lambda'}$ , где  $\lambda'$  – длина волны рассеянного на электроне фотона. По условию задачи  $E = E' = 2$ , тогда

$$\lambda'/\lambda = 2, \quad \lambda = \lambda'/2. \quad (1)$$

По формуле Комптона изменение длины волны фотона при рассеянии выражается формулой

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad (2)$$

учитывая (1), имеем

$$\lambda' - \frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

или

$$\frac{\lambda'}{2} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

откуда

$$\lambda' = \frac{2h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Подставляя выражение (3) в формулу для энергии рассеянного фотона, получаем окончательно

$$E' \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hcm_e c}{2h(1 - \cos \theta)} = \frac{m_e c^2}{2(1 - \cos \theta)}.$$

$$E' = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{2 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)} = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,26 \text{ МэВ}.$$

Для определения импульса рассеянного фотона воспользуемся следующими соображениями.

Энергия фотона  $E' = m_\phi \cdot c^2$ , а импульс фотона  $p' = m_\phi \cdot c$ , тогда

$$p' = \frac{E'}{c}.$$

Импульс рассеянного фотона равен

$$p' = \frac{4,1 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 1,18 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

**Задача 10.** Фотон с импульсом  $5,44 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$  был рассеян на свободном электроне на угол  $30^\circ$  в результате эффекта Комптона. Определите импульс рассеянного фотона.

Дано:

$$p_1 = 5,44 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$p_2 - ?$$

**Решение.** Импульс фотонов  $p_1 = h/\lambda_1$ ;  $p_2 = h/\lambda_2$ , откуда  $\lambda_1 = h/p_1$ ,  $\lambda_2 = h/p_2$ . Изменение длины волны  $\Delta\lambda$  при эффекте Комптона равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \text{ или } \frac{h}{p_2} - \frac{h}{p_1} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Отсюда

$$p_2 = \frac{p_1 m_0 c}{p_1(1 - \cos\theta) + m_0 c} = \frac{5,44 \cdot 10^{-22} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}{5,44 \cdot 10^{-22} \cdot 0,134 + 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 4,3 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

**Задача 11.** Фотон с энергией 0,51 МэВ в результате комптоновского рассеяния отклонился на угол 180°. Определите долю энергии в процентах, оставшуюся у рассеянного фотона.

Дано:

$$E_1 = 0,51 \text{ МэВ}$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$\frac{E_2/E_1 - ?}{}$$

**Решение.** По закону сохранения энергии  $E_1 = E_2 + E_e$ , где  $E_1$  – энергия налетающего фотона,  $E_2$  – энергия рассеянного фотона,  $E_e$  – энергия электрона. Энергия налетающего электрона равна  $E_e = hc/\lambda_1$ , отсюда  $\lambda_1 = hc/E_1$ , где  $\lambda_1$  – длина волны налетающего фотона. Аналогично

$\lambda_2 = hc/E_2$ . Изменение длины волны при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C(1 - \cos\theta),$$

где  $\lambda_C = h/m_0 c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$  – комптоновская длина волны электрона.

Тогда  $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot 2$ , отсюда  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + 2\lambda_C$  и, следовательно, энергия рассеянного фотона равна

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_1 + 2\lambda_C} = \frac{hc}{hc/E_1 + 2\lambda_C}.$$

А ее доля

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{hc}{hc + E_1 \cdot 2\lambda_C} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 + 0,51 \cdot 10^{-13} \cdot 2 \cdot 2,43 \cdot 10^{-12}} = 0,33 = 33\%$$

### Вопросы и задания.

1. Квантовая природа излучения. Законы теплового излучения.
2. Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоны.
3. Фотоэффект.
4. Масса, энергия и импульс фотона.
5. Давление света. Эффект Комптона.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Красная граница фотоэффекта для цинка  $\lambda_0 = 310$  нм. Определить максимальную кинетическую энергию  $T_{\max}$  фотоэлектронов в электрон–вольтах, если на цинк падает свет с длиной волны  $\lambda = 200$  нм.

2. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности  $(R_{\lambda,T})_{\max}$  сместился с  $\lambda_1 = 2,4$  мкм на  $\lambda_2 = 0,8$  мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость  $R$  тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?
3. При увеличении термодинамической температуры  $T$  черного тела в два раза длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости  $(R_{\lambda,T})_{\max}$ , уменьшилась на  $\Delta\lambda = 400$  нм. Определить начальную и конечную температуры  $T_1$  и  $T_2$ .
4. Эталон единицы силы света – кандела – представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадь  $S = 0,5305$  мм<sup>2</sup> имеет температуру  $t$  затвердевания платины, равную 1063 °С. Определить мощность  $P$  излучателя.
5. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости  $(R_{\lambda,T})_{\max}$  черного тела равна  $4,16 \cdot 10^{11}$  Вт/м<sup>2</sup>. На какую длину волны  $\lambda_m$  она проходится?
6. Температура черного тела равна 2 кК. Определить: 1) Спектральную плотность энергетической светимости  $(r_{\lambda,T})$  для длины волны  $\lambda = 600$  нм; 2) Энергетическую светимость  $R_{\lambda}$  в интервале длин волн от  $\lambda_1 = 590$  нм до  $\lambda_2 = 610$  нм. Принять, что средняя спектральная плотность энергетической светимости тела в этом интервале равна значению, найденному для волны  $\lambda = 600$  нм.
7. Определить максимальную скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его  $\gamma$ -фотонами с энергией  $\varepsilon = 1,82$  МэВ.
8. Максимальная скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его  $\gamma$ -фотонами, равна 291 Мм /с. Определить энергию  $\varepsilon$  фотонов.
9. Определить максимальную скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его  $\gamma$ -фотонами с энергией  $\varepsilon = 1,53$  МэВ.
10. Определить максимальную скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием  $\gamma$ -излучения с длиной волны  $\lambda = 0,3$  нм.
11. Определить длину волны  $\lambda$  ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10<sup>7</sup> м/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.
12. На цинковую пластину падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 220$  нм. Определить максимальную скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов.
13. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов  $U_1 = 3,7$  В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу  $A$  выхода электронов с поверхности этой пластиинки.
14. На поверхность лития падает монохроматический свет ( $\lambda = 310$  нм). Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов  $U$  не менее 1,7 В. Определить работу выхода  $A$ .

15. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырываания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта  $\lambda_0 = 307$  нм и максимальная кинетическая энергия  $T_{\max}$  фотоэлектрона равна 1 эВ?
16. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны  $\lambda = 300$  нм.
17. Определить энергию  $E$ , массу  $m$  и импульс  $p$  фотона, которому соответствует длина волны  $\lambda = 380$  нм (фиолетовая граница видимого спектра).
18. Определить длину волны  $\lambda$ , массу  $m$  и импульс  $p$  фотона с энергией  $\varepsilon = 1$  МэВ. Сравнить массу этого фотона с массой покоящегося электрона.
19. Определить длину волны  $\lambda$  фотона, импульс которого равен импульсу электрона, обладающего скоростью  $V = 10^7$  м/с.
20. Определить длину волны  $\lambda$  фотона, масса которого равна массе покоя: 1) электрона; 2) протона.
21. Давление  $p$  монохроматического света ( $\lambda = 600$  нм) на черную поверхность расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить число  $N$  фотонов, падающих за время  $t = 1$  с на поверхность площадью  $S = 1$  см<sup>2</sup>
22. Спутник в форме шара движется вокруг Земли на такой высоте, что поглощением солнечного света в атмосфере можно пренебречь. Диаметр спутника  $d = 40$  м. Зная солнечную постоянную  $C = 1,4$  кДж/м<sup>2</sup>·с и принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления  $F$  солнечного света на спутник.
23. Определить поверхностную плотность  $I$  потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление  $p$  при перпендикулярном падении лучей равно 10 мкПа.
24. Фотон с энергией  $\varepsilon = 0,4$  МэВ рассеялся под углом  $\theta = 90^\circ$  на свободном электроне. Определить энергию  $\varepsilon'$  рассеянного фотона и кинетическую энергию  $T$  электрона отдачи.
25. Определить импульс  $p$  электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол  $\theta = 180^\circ$ .
26. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол  $\theta = 180^\circ$ ? Энергия  $\varepsilon$  фотона до рассеяния равна 0,255 МэВ.
27. Фотон с энергией  $\varepsilon = 0,25$  МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия  $\varepsilon'$  рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния  $\theta$ .
28. Угол рассеяния  $\theta$  фотона равен  $90^\circ$ . Угол отдачи  $\varphi$  электрона равен  $30^\circ$ . Определить энергию  $\varepsilon$  падающего фотона.
29. Фотон ( $\lambda = 1$  пм) рассеялся на свободном электроне под углом  $\theta = 90^\circ$ . Какую долю своей энергии фотон передал электрону?
30. Длина волны  $\lambda$  фотона равна комптоновской длине волны  $\lambda_k$  электрона. Определить энергию  $\varepsilon$  и импульс  $p$  фотона.

## Раздел 6. Элементы квантовой механики и ядерной физики

### Практическое занятие 17.

**Тема занятия.** Теория атома водорода по Бору. Элементы квантовой механики.

**Цель занятия.** Изучить вопросы квантовой теории излучения.

**Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции.** Модели атома Томсона и Резерфорда. Линейчатый спектр атома водорода. Постулаты Бора. Спектр атома водорода по Бору. Гипотеза де Броиля. Корпускулярно-волновой дуализм. Соотношение неопределенностей Гейзенберга. Уравнение Шредингера. Владеет пособностью применять соответствующий физико-математический аппарат при решении профессиональных задач.

**Актуальность темы.** Элементы квантовомеханической теории применяется при решении научных задач.

#### Теоретическая часть.

На основании опытов по рассеянию  $\alpha$ -частиц тонкими металлическими фольгами Э. Резерфордом была предложена ядерная модель атома. Согласно этой модели, в ядре атома сосредоточен весь положительный заряд и практически вся масса атома. Линейные размеры ядра равны  $10^{-15}$ - $10^{-14}$  м, вокруг ядра в области с линейными размерами  $10^{-10}$  м движутся электроны, масса которых составляет лишь весьма малую долю массы ядра. Ядерная модель атома Резерфорда внешне очень напоминает солнечную систему: в центре системы находится «Солнце» – ядро, и вокруг него по орбитам движутся «планеты» – электроны. Поэтому данную модель часто называют планетарной.

Опыты показывают, что атому свойственна исключительная устойчивость, однако устойчивость атома не может быть согласована с классическим истолкованием ядерной модели. Электрон, движущийся ускоренно по орбите вокруг ядра, должен излучать электромагнитные волны. Это излучение (и связанная с ним потеря электроном его энергии) должно происходить непрерывно. Поэтому, на основании классических представлений, электрон не может удержаться на орбите, а должен по спирали приближаться к ядру. Отсюда следует, что атом за очень короткое время прекратит свое существование, кроме того, излучение атома должно иметь непрерывный спектр. Однако обширный экспериментальный материал указывает на стабильность и на дискретный (линейчатый) спектр атомов, что находится в прямом противоречии с классическим истолкованием модели атома Резерфорда.

Первая попытка построения неклассической теории атома, которая в настоящее время представляет только исторический интерес, была предпринята Н. Бором. В основе этой теории лежала идея связать в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер поглощения и излучения света. В теории Бора сохранялось описание поведения электронов в атоме при помощи законов классической физики. Однако классические законы ему пришлось дополнить некоторыми ограничениями, которые были сформулированы в виде постулатов, физический смысл которых не мог быть объяснен в рамках применяемой теории.

Теория Бора применима к атому водорода и так называемым водородоподобным атомам, состоящих из ядра с зарядом  $Ze$  и одного электрона, вращающегося вокруг ядра на внешней орбите.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний (орбит)) заключается в следующем: *существуют некоторые состояния электрона в атоме, находясь в которых он не излучает энергии.*

Второй постулат Бора (правило квантования орбит) утверждает, что *в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию*

$$L_n = mv_n r_n = n\hbar, \quad (1)$$

где  $n$  – ряд натуральных чисел ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $m$  – масса электрона,  $v$  – его скорость,  $r$  – радиус его орбиты.

Третий постулат Бора (правило частот) устанавливает, что *при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один квант энергии в виде фотона*

$$E_{n1} - E_{n2} = h\nu \quad (2)$$

где  $E_{n1}$  и  $E_{n2}$  – энергии электрона в двух стационарных состояниях,  $\nu$  – частота фотона. При  $E_{n2} < E_{n1}$  происходит излучение фотона, при  $E_{n2} > E_{n1}$  – его поглощение.

### **Боровская модель атома водорода**

Чтобы получить согласие с результатами наблюдений, Бор предположил, что электрон в атоме водорода движется только по тем круговым орбитам, для которых его момент импульса

$$M = m\nu r = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

где  $n$  — квантовые числа,  $m$  – масса электрона,  $\nu$  – его скорость,  $r$  – радиус орбиты. (Рассуждения, которые привели Бора к этому предположению мы опустим.)

С помощью этого *правила квантования* можно найти радиусы круговых стационарных орбит водорода и водородоподобных систем: ионов атомов с одним оставшимся электроном ( $H$ ,  $He^+$ ,  $Li^{++}$ , ...) и соответствующие им энергии. Пусть заряд ядра водородоподобной системы равен  $e$ . Масса ядра значительно больше массы электрона, поэтому ядро при движении электрона можно считать неподвижным. Следуя Бору, будем предполагать, что электрон движется вокруг ядра по окружности радиуса  $r$ .

Согласно 2-му закону Ньютона

$$m \frac{\nu^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (4)$$

Решая совместно (3) и (4), можно найти радиусы электронных орбит и их скорости на этих орbitах:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2; \nu_n = \frac{Ze^2}{\hbar} \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Таким образом, радиус первой (ближайшей к ядру) орбиты электрона в атоме водорода (его обозначают обычно  $r_0$  и называют *первым Боровским радиусом*)

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5,29 \text{ нм} \quad (6)$$

Внутренняя энергия атома складывается из кинетической энергии электрона (ядро полагают неподвижным) и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром. С учетом (5) получим:

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} + \left( -\frac{Ze^2}{r_n} \right) = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (7)$$

При переходе атома водорода ( $Z = 1$ ) из состояния  $n_1$  в состояние  $n_2$  излучается фотон

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (8)$$

Тогда частота испущенного света равна

$$\omega = \frac{me^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad (9)$$

Что соответствует обобщенной формуле Бальмера, если постоянная Ридберга определяется

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^3}. \quad (10)$$

Расчет по этой формуле хорошо согласуется с экспериментально определенным значением.

Схема энергетических уровней (разрешенных значений энергии) атома водорода приведена на рис.1. Там же показаны возможные переходы, сопровождающиеся излучением фотонов определенной частоты.

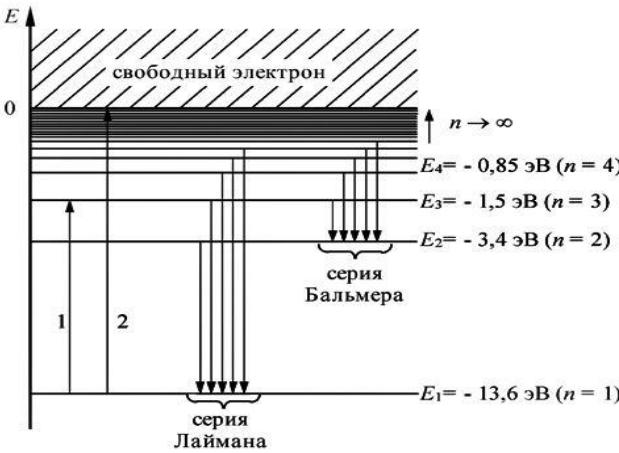


Рис.1.

### Спектральные закономерности

Изучение спектров излучения сыграло большую роль в познании строения атомов. В первую очередь это касается спектров, обусловленных излучением невзаимодействующих

друг с другом атомов. Эти спектры состоят из отдельных узких спектральных линий, и их называют линейчатыми.

Наличие многих спектральных линий указывает на сложность внутреннего строения атома. Изучение атомных спектров послужило ключом к познанию внутренней структуры атомов. Прежде всего, было замечено, что спектральные линии расположены не беспорядочно, а образуют серии линий. Изучая линейчатый спектр *атомарного водорода*, Бальмер (1885) установил некоторую закономерность. Для части линий соответствующие им частоты можно в современных обозначениях представить так:

$$\omega = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad (11)$$

где  $\omega$  — циклическая частота, соответствующая каждой спектральной линии ( $\omega = 2\pi c/\lambda$ ),  $R$  — постоянная, называемая *постоянной Ридберга*:

$$R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}. \quad (12)$$

Формулу (11) называют формулой *Бальмера*, а соответствующую серию спектральных линий — серией Бальмера (рис.2). Основные линии этой серии находятся в видимой части спектра.

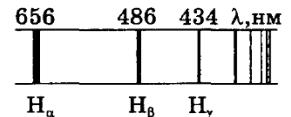


Рис.2.

Дальнейшие исследования спектра атомарного водорода показали, что имеется еще несколько серий.

В ультрафиолетовой части спектра — *серия Лаймана*:

$$\omega = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (13)$$

а в инфракрасной части спектра — *серия Пашена*:

$$\omega = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots, \quad (14)$$

и так далее.

Все эти серии можно представить в виде *обобщенной формулы Бальмера*:

$$\boxed{\omega = R \left( \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right)}, \quad (15)$$

где  $n_0$  — постоянное для каждой серии число:  $n_0 = 1$  для серии *Лаймана*,  $n_0 = 2$  для серии *Бальмера* и т. д. При заданном  $n_0$  число  $n$  принимает все целочисленные значения, начиная с  $n_0 + 1$ .

Максимальной длине волны серии *Лаймана* (13) отвечает  $n = 2$ , это  $\lambda_{\text{макс}} = 2\pi c/\omega_{\text{мин}} = 8\pi c/3R = 121,6$  нм. Соответствующую спектральную линию называют *резонансной линией водорода*.

С ростом  $n$  частота линий в каждой серии стремится к предельному значению  $R/n_0^2$ , которое называют границей серии (рис.2). За границей серии спектр не обрывается, а становится сплошным. Это присуще не только всем сериям водорода, но и атомам других элементов.

Таким образом, интересующая нас серия Бальмера заключена в спектральном интервале от 365 нм до 656 нм, т. е. действительно, все основные линии ее расположены в видимой области спектра.

### Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм материи

Существование волновых и корпускулярных свойств у физических объектов было сначала обнаружено в световых явлениях. Оптические явления (например, интерференция и дифракция), которые объяснялись на основе волновой (электромагнитной) теории, были в основном явления распространения света и взаимодействия световой волны с макроскопическими телами: линзами, призмами, дифракционными решетками и т. д. Однако в некоторых явлениях (например, Комптон-эффект и фотоэффект), течение которых определяется взаимодействием света с микроскопическими объектами – отдельными заряженными частицами, атомами или молекулами, обнаруживается расхождение между предсказаниями волновой теории и результатами наблюдений и измерений.

В 1924 г., Луи де Бройль высказал гипотезу, что корпускулярно-волновой дуализм (двойственность, т.е. одновременное наличие корпускулярных и волновых свойств), должен быть распространен не только на световые частицы – фотоны, но и на частицы вещества: электроны, протоны, атомы и т.д.

Соотношение длины волны фотона  $\lambda_\phi$  с его импульсом  $P_\phi$

$$\lambda_\phi = \frac{h}{P_\phi} \quad (16)$$

де Бройль обобщил, предположив, что оно имеет универсальный характер для любых волновых процессов, связанных с частицами, обладающими импульсом  $P$ :

$$\lambda = \frac{h}{P} , \quad (17)$$

где  $\lambda$  – длина волны де Бройля для частицы,  $h$  – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия  $K$ . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя  $E_0$ ) и для релятивистского случая (когда  $K \geq E_0$ ).

В нерелятивистском случае  $P = \sqrt{2m_0K}$ , тогда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}}, \quad (18)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы.

В релятивистском случае  $P = \frac{1}{c} \sqrt{K(2E_0 + K)}$ , тогда

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(2E_0 + K)}} \quad , \quad (19)$$

где  $E_0 = m_0 c^2$  – энергия покоя частицы,  $c$  – скорость света.

Опыты показали, что двойственность присуща не только полевой форме материи (например, электромагнитная волна – фотон), но и вещественной форме, т.е. волновыми (наряду с корпускулярными) свойствами обладают также частицы вещества – электроны, протоны, нейтроны, атомы, молекулы и т.д. Поэтому в настоящее время говорят о корпускулярно-волновом дуализме материи.

### Уравнение Шредингера

При описании явлений, в которых участвуют микроскопические частицы вещества – электроны, протоны, нейтроны и др., на основе представлений и законов классической физики (механики, электродинамики, волновой оптики и т.д.) встретились затруднения, оказавшиеся непреодолимыми. Для объяснения новых явлений (фотоэффект, дифракция электронов и других частиц и т.д.) потребовались новые представления, которые не укладывались в рамки классической физики, явно противоречили ее основным положениям.

Со временем отдельные разрозненные предположения и гипотезы, возникшие в различных областях атомной физики, были связаны между собой и привели к формированию единой физической теории, получившей название квантовой физики.

Важнейшими свойствами квантовых объектов являются следующие:

- 1) существование у частиц корпускулярных и волновых свойств, неотделимых друг от друга и несводимых друг к другу;
- 2) существование у физических систем дискретного спектра устойчивых состояний, что следует, например, из дискретного спектра излучения атомов.

Корпускулярные свойства заключаются в том, что каждая частица имеет некоторую сосредоточенную в малом объеме энергию и импульс; при взаимодействии частиц между собой соблюдаются законы сохранения и импульса.

Волновые свойства заключаются в том, что траектория частицы определяется некоторой связанной с ней волной, распространение которой подчинено принципу Гюйгенса и для которой соблюдается принцип суперпозиции. Однако это утверждение требует расшифровки, какова природа этих волн, какая физическая величина характеризует эти волны и изменяется в соответствии с волновым уравнением, каким образом поведение частицы связано со значениями этой величины в различных точках пространства, т.е. как взаимодействуют между собой «волна» и «частица». Заметим, что для одной из частиц – фотона – частота колебаний связана с энергией, а длина волны – с импульсом частицы.

Однако для электронов, протонов, нейтронов и других частиц волны, которые были бы ответственны за дифракцию и в тоже время доступны непосредственному изучению при помощи соответствующей физической аппаратуры, не обнаружены. Отсюда следует, что волны де Бройля (волны частиц) имеют специфическую квантовую природу, не имеющую аналогии в классической физике.

Для описания волновых свойств квантовых частиц введем некоторую функцию  $\Psi(x,y,z,t)$ , называемую волновой функцией (или пси-функцией). Волны де Броиля получили своеобразное статистическое (вероятностное) истолкование. Физический смысл имеет не сама функция  $\Psi$ , а квадрат ее модуля. Величина  $|\Psi|^2$  имеет смысл плотности вероятности

$$\frac{d\omega}{dV} = |\Psi|^2. \quad (20)$$

Из (20) следует: вероятность  $d\omega$  того, что частица находится в элементе объема  $dV$ , пропорциональна  $|\Psi|^2$  и элементу объема  $dV$ .

Из вышесказанного следует, что в квантовой физике возникает важнейшая проблема – отыскание такого уравнения движения квантовых частиц, которое явилось бы тем же, чем является уравнение движения Ньютона для классической механики. При этом искомое уравнение должно быть уравнением относительно функции  $\Psi(x,y,z,t)$ . Это уравнение было найдено в 1926 г. Э. Шредингером и имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (21)$$

Здесь  $\hbar = h/2\pi$  – постоянная Дирака,  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная энергия частицы в силовом поле, где частица движется,  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,  $i$  – мнимая единица.

Из-за присутствия в уравнении (21) мнимой единицы волновые функции  $\Psi$ , удовлетворяющие этому уравнению, всегда комплексны. Поэтому сами эти функции не наблюдаются. Измеримы только квантовомеханические вероятности, всегда содержащие функции  $\Psi$  в произведениях совместно с комплексно сопряженными им величинами.

Уравнение (21) справедливо для любой частицы, движущейся со скоростью  $v \ll c$ . В релятивистской области движения при  $v \sim c$  уравнение Шредингера заменяется более сложным уравнением Дирака.

Уравнение (21) называют нестационарным (временным) уравнением Шредингера, ибо оно содержит производную от функции  $\Psi$  по времени. Однако для большого числа физических явлений, происходящих в микромире, например, для описания поведения электронов в атоме, в ряде случаев важно находить стационарные решения уравнения Шредингера, не содержащие времени. В этом уравнении должна быть исключена зависимость  $\Psi$  от времени.

Стационарное уравнение Шредингера обычно записывают в форме

$$\Delta \psi + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (22)$$

Здесь  $E$  – полная энергия частицы,  $\Psi = \Psi(x, y, z)$ .

Уравнение (22) является важнейшим соотношением нерелятивистской квантовой физики, играющим основную роль в атомной физике.

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно. Всегда есть некоторая ошибка измерений. Ошибка называется также неточностью или неопределенностью, причем последний термин используется преимущественно только в квантовой физике.

В классической физике не было принципиальных ограничений на точность измерений. Считалось, что при достаточно совершенной аппаратуре все величины, характеризующие физическую систему, могут быть измерены со сколь угодной точностью. Этот взгляд подтверждался всеми опытными фактами макроскопической физики. Но, как выяснилось, для микроскопических систем неограниченное повышение точности измерений имеет место не всегда. В ряде случаев существуют принципиальные ограничения на точность измерения физических величин. Эти ограничения не определяются совершенством измерительной техники. Каждое из них является фундаментальным свойством материи. Но проявление этих свойств существенны только в микроскопических системах. Принципиальные ограничения на точность измерения физических величин называются соотношениями неопределенностей. Впервые они были сформулированы в 1927 г. В. Гейзенбергом.

Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей.

Первое ограничивает точность одновременного измерения координат частицы и соответственных компонент ее импульса. Эти соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta P_x &\geq \hbar \\ \Delta y \Delta P_y &\geq \hbar \\ \Delta z \Delta P_z &\geq \hbar.\end{aligned}\tag{23}$$

Второе соотношение устанавливает предел точности измерения энергии за данный промежуток времени. Оно имеет вид

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar,\tag{24}$$

где  $\Delta t$  – длительность измерения энергии, а  $\Delta E$  – ее неопределенность.

Соотношения (23) означают, что если, например, местоположение частицы по координатной оси  $x$  известно с точностью  $\Delta x$ , то в тот же момент времени  $x$  компоненту импульса частицы можно измерить только с точностью  $\Delta P_x \approx \hbar/\Delta x$ . Согласно (24) для измерения энергии с точностью до  $\Delta E$  необходимо время, не меньшее чем  $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$ . Отличие  $\hbar$  от нуля исключает обращение в нуль неопределенностей в импульсе и энергии при заданных  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Только переход к классической физике, при котором  $\hbar \rightarrow 0$ , снимает ограничения на точность измерений.

Соотношения неопределенностей являются следствием объективно существующей двойственности частиц микромира – наличия у них корпускулярных и волновых свойств. Эти соотношения свидетельствуют об объективно существующих ограничениях в возможности описания поведения микрообъектов с помощью, например, классических понятий координат и импульсов. В частности, эти соотношения исключают движение квантовых частиц по траекториям, т.к. для существования траектории требуется, чтобы

одновременно можно было точно задать  $x$  и  $v_x$  (т.е.  $P_x$ ) . Но именно это и запрещается соотношением неопределенностей.

### Примеры решения задач

**Задача 1.** Получить формулу для радиусов орбит электрона в атоме водорода и вычислить радиус первой орбиты (первый боровский радиус), а также скорость электрона на этой орбите.

Решение.

Из первого постулата Бора имеем

$$mv r = n \frac{h}{2\pi},$$

где  $m$  – масса электрона,  $v$  – его скорость,  $r$  – радиус орбиты,  $h$  – постоянная Планка.

$$\text{Для первой орбиты } n=1, \text{ и поэтому } mv r = \frac{h}{2\pi}. \quad (1)$$

Сила кулоновского притяжения электрон-ядро является центростремительной силой, поэтому из второго закона Ньютона имеем

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{или} \quad mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (2)$$

где  $e$  – заряд электрона.

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

Из формулы (1) получим, что

$$v = \frac{h}{2\pi m r} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

**Задача 2.** Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов  $U$ . Найти длину волны де Броиля  $\lambda$  для двух случаев: 1)  $U_1 = 51$  В; 2)  $U_2 = 510$  кВ.

Дано:

$$U_1 = 51 \text{ В}$$

$$U_2 = 510 \text{ кВ}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 - ?$$

**Решение.** Работа сил электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона

$$A = \Delta K = K_2 - K_1. \text{ Здесь } A = eU, \text{ а } \Delta K = K_2 - K_1, \text{ так как } K_1 = 0,$$

то есть  $K = eU$ .

Теперь необходимо определить характер движения электрона, нерелятивистский или релятивистский

$$E_0 = m_0 c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,51 \text{ МэВ.}$$

В первом случае  $K_1 = eU_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 = 8,16 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 51 \text{ эВ.}$  Во втором случае  $K_2 = eU_2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,1 \cdot 10^5 = 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 51 \cdot 10^4 \text{ эВ} = 0,51 \text{ МэВ.}$

Следовательно: в первом случае  $K_1 \ll E_0$  – нерелятивистское движение электрона и его длину волны де Бройля  $\lambda_1$  необходимо рассчитывать по формуле (3), во втором случае  $K_2 \approx E_0$  – релятивистское движение и  $\lambda_2$  рассчитывается по формуле (4).

Принимая во внимание то, что  $K_1 = 0,51 \cdot 10^{-4} \text{ МэВ} = 10^{-4} E_0$ , а  $K_2 = E_0$ , рассчитаем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{h}{\sqrt{2m_0 K_1}} = \frac{h}{\sqrt{2 \frac{E_0}{c^2} 10^{-4} E_0}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{hc}{E_0} = \\ &= \frac{10^2 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{2} \cdot 8,19 \cdot 10^{-14}} = 1,71 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 171 \text{ нм.} \\ \lambda_2 &= \frac{hc}{\sqrt{K_2(2E_0 + K_2)}} = \frac{hc}{\sqrt{E_0(2E_0 + E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{3}E_0} = \\ &= \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{3} \cdot 8,19 \cdot 10^{-14}} = 1,40 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 1,40 \text{ нм.} \end{aligned}$$

**Задача 3.** Волновая функция  $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$  описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике

ширины  $l$ . Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале  $\Delta l = 0,01l$  в двух случаях: 1) вблизи стенки ( $0 \leq x \leq \Delta l$ ); в средней части ящика ( $\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}$ ).

Дано:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$\Delta l = 0,01l$$

$\omega$  - ?

**Решение.** Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале  $dx$ , согласно соотношению (5) запишется в виде:  $d\omega = |\Psi|^2 dV$ . В первом случае вероятность найдется интегрированием в пределах от

$$0 \text{ до } 0,01l: \omega_1 = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} x \right) dx.$$

Знак модуля опущен, т.к.  $\Psi$ - функция, в данном случае, не является комплексной. Так как  $x$  изменяется в интервале  $(0 \leq x \leq 0,01l)$  и,

следовательно,  $\pi x / l \ll 1$ , справедливо приближенное равенство  $\sin^2 \left( \frac{\pi}{l} x \right) \approx \left( \frac{\pi}{l} x \right)^2$ . С учетом этого искомая вероятность примет вид:

$$\omega_1 = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \left( \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0,01l} = \frac{2\pi^2}{3} 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале ( $\Delta l = 0,01l$ ) практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$\omega_2 = \left| \Psi \left( \frac{l}{2} \right) \right|^2 \Delta x = \frac{2}{l} \sin^2 \left( \frac{\pi}{l} \frac{l}{2} \right) \Delta l = \frac{2}{l} \cdot 1^2 \cdot 0,01l = 0,02.$$

Из сравнения видно, что  $\omega_1 \ll \omega_2$  и, следовательно, частица с наибольшей вероятностью находится в средней части ящика.

**Задача 4.** Кинетическая энергия  $K$  электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные размеры атома.

Дано:

$$K = 10 \text{ эВ}$$

$l - ?$

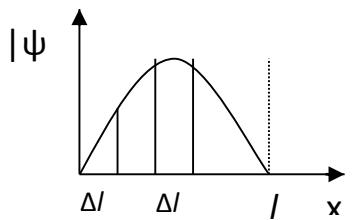
**Решение.** Для решения воспользуемся соотношением неопределенностей (8)  $\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar$ . Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется

положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а, следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры  $l$ , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью  $\Delta x = l/2$ . Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде:

$$\frac{l}{2} \cdot \Delta P_x \geq \hbar,$$

откуда

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta P_x}.$$



Физическая разумная неопределенность импульса  $\Delta P_x$ , во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса  $P_x$ , то есть  $\Delta P_x \leq P_x$ . Импульс  $P_x$  связан с кинетической энергией  $K$  соотношением

$$P_x = \sqrt{2m_0 K}.$$

Заменим  $\Delta P_x$  на  $P_x$  (такая замена не увеличит  $l$ ). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m_0 K}} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-18}}} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ нм.}$$

**Задача 5.** Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы длина волны де Броиля протона  $\lambda_B$  равнялась его комптоновской длине волны  $\lambda_C$ ?

Дано:	<b>Решение.</b> Длина волны де Броиля и комптоновская длина волны определяются по формулам: $\lambda_B = h/p$ , $\lambda_C = h/m_0 c$ .  Импульс движущегося протона
$\lambda_B = \lambda_C$	
$K - ?$	

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\text{Так как } \lambda_D = \lambda_C, \text{ то } p = m_0 c = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

Откуда  $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , следовательно  $\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}$ . Кинетическая энергия протона  $K = E - E_0$ ,

где  $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  - полная энергия протона,  $E_0 = m_0 c^2$  - его энергия покоя.

Окончательно

$$\begin{aligned} K &= E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = E_0 (\sqrt{2} - 1) = \\ &= 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0,41 = 6,23 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 389 \text{ МэВ.} \end{aligned}$$

**Задача 6.** Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислите минимальную неопределенность длины волны  $\lambda = 0,12$  мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

Дано:  
 $\Delta t = 12 \text{ нс}$   
 $\lambda = 0,12 \text{ мкм}$   
 $\Delta\lambda - ?$

**Решение.** Энергия излучаемого фотона  $E = hc/\lambda$ .  
Продифференцируем  $E$  по  $\lambda$ :

$$dE = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \text{ или } \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda.$$

Из соотношения неопределеностей Гейзенберга для энергии и времени  $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$  выразим  $\Delta E$ .  $\Delta E = \frac{h}{2\pi \Delta t}$ , здесь  $\Delta E$  и  $\Delta t$  - неопределенность энергии и времени.

Приравняем выражения для  $\Delta E$ :

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda = \frac{h}{2\pi \Delta t},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} = \frac{1,2^2 \cdot 10^{-14}}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-8}} = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ м.}$$

**Задача 7.** Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы  $l = 1 \text{ нм}$ . Определите наименьшую разность энергетических уровней электрона.

Дано:  
 $l = 1 \text{ нм}$

**Решение.** Энергия электрона  $E_n$ , находящегося в потенциальной яме шириной  $l$ , на  $n$ -м энергетическом уровне определяется по формуле

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2.$$

Разность  $\Delta E_{n,n+1}$  энергий электрона на соседних  $n$  и  $(n+1)$ -м уровнях равна

$$\Delta E_{n,n+1} = \frac{h^2}{8ml^2} (2n+1).$$

Очевидно, что  $\Delta E$  будет минимальна при  $n = 1$ .

$$\Delta E_{min} = \frac{3 \cdot 6,63^2 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-18}} = 1,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,1 \text{ эВ.}$$

### Вопросы и задания.

1. Модели атома Томсона и Резерфорда.
2. Линейчатый спектр атома водорода.
3. Постулаты Бора.

4. Спектр атома водорода по Бору.
5. Гипотеза де Броиля. Корпускулярно-волновой дуализм.
6. Соотношение неопределенностей Гейзенберга
7. Уравнение Шредингера.

### **Задачи для самостоятельного решения**

1. Вычислить радиусы  $r_2$  и  $r_3$  второй и третьей орбит в атоме водорода.
2. Определить скорость  $v$  электрона на второй орбите атома водорода.
3. Определить частоту обращения электрона на второй орбите атома водорода.
4. Определить потенциальную  $P$ , кинетическую  $T$  и полную  $E$  энергии электрона, находящегося на первой орбите атома водорода.
5. Определить длину волны  $\lambda$ , соответствующую третьей спектральной линии в серии Бальмера.
6. Найти наибольшую  $\lambda_{\max}$  и наименьшую  $\lambda_{\min}$  длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).
7. Вычислить энергию  $\varepsilon$  фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на первый.
8. Определить наименьшую  $\varepsilon_{\min}$  и наибольшую  $\varepsilon_{\max}$  энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).
9. Атомарный водород, возбужденный светом определенной длины волны, при переходе в основное состояние испускает только три спектральные линии. Определить длины волн этих линий и указать, каким сериям они принадлежат.
10. Фотон с энергией  $\varepsilon = 16,5$  эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость  $v$  будет иметь электрон вдали от ядра атома?

## **5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **5.1 Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **5.1.2 Перечень основной литературы:**

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3;-URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772>
2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732>
3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика: в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883>

### ***5.1.3 Перечень дополнительной литературы:***

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70731.html>
2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. — 2-е изд. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. — 452 с. : ил. — Режим доступа: по подписке. — URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287>.

### ***5.2 Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине***

1. Методические рекомендации для подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Физика».
2. Методические рекомендации для подготовки к лабораторным занятиям по дисциплине «Физика».
3. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Физика».

### ***5.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины***

1. <http://www.biblioclub.ru> -ЭБС "Университетская библиотека онлайн"
2. <http://www.iprbookshop.ru/> - Электронно- библиотечная система IPRbooks

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

## **Методические указания**

по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине «ФИЗИКА» для студентов направления подготовки  
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника электроснабжения

## Содержание

№ п/п	Стр.
Введение	
1. Цель и задачи изучения дисциплины	
2. Оборудование и материалы	
3. Наименование лабораторных работ	
4. Содержание лабораторных работ	
4.1 Лабораторная работа № 1. Обработка результатов физического эксперимента. Изучение движения тела брошенного под углом к горизонту	
4.2 Лабораторная работа № 2. Изучение законов динамики поступательного и вращательного движений с помощью машины Атвуда	
4.3. Лабораторная работа №3. Определение скорости полета пули с помощью физического маятника	
4.4 Лабораторная я работа №4. Определение периода колебаний физического маятника	
4.5 Лабораторная работа №5. Определение коэффициента внутреннего трения жидкости методом падающего шарика (метод Стокса).	
4.6 Лабораторная работа №6. Определение отношения удельных теплоемкостей воздуха методом адиабатического расширения	
4.7 Лабораторная работа №7. Изучение электростатического поля .	
4.8 Лабораторная работа №8. Измерение сопротивления с помощью моста Уитстона	
4.9 Лабораторная работа №9. Исследование электрической цепи постоянного тока	
4.10 Лабораторная работа №10. Изучение явления электромагнитной индукции.	
4.11 Лабораторная работа №11. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли	
4.12 Лабораторная работа №12. Исследование колебаний в простом колебательном контуре	
4.13 Лабораторная работа №13. Измерение длины световой волны с помощью дифракционной решётки.	
4.14 Лабораторная работа №14. Изучение внешнего фотоэффекта.	
4.15 Лабораторная работа №15. Изучение энергетического спектра электронов.	
4.16 Лабораторная работа №16. Изучение космического излучения.	
4.17 Лабораторная работа №17. Проверка закона Малюса.	
5 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	
5.1 Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины	
5.2 Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	

5.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

## Введение

Лабораторные занятия создают оптимальные дидактические условия для деятельностного освоения студентами содержания и методологии изучаемой дисциплины «Физика», использование специального лабораторного оборудования и технических средств. Лабораторные занятия занимают преимущественное место при изучении общепрофессиональных и профессиональных дисциплин. Лабораторные занятия проводятся с целью выработки практических умений и приобретения навыков в решении экспериментных задач, отработки упражнений, выполнении чертежей, производстве расчётов и т.п.

Целью лабораторных занятий является формирование практических умений – профессиональных (выполнять определённые действия, операции, необходимые в последующем в профессиональной деятельности) или учебных, необходимых в последующей учебной деятельности по общепрофессиональным и профессиональным дисциплинам.

Библиографический список содержит сведения о справочной литературе и дополнительных изданиях, необходимых для углубленного изучения отдельных вопросов.

## ***1. Цель и задачи изучения дисциплины***

Целью освоения дисциплины «Физика» является формирование у студентов компетенций позволяющий выработать навыки физических исследований в сферах академической, профессиональной и общенациональной деятельности.

Задачи освоения дисциплины:

- изучение законов окружающего мира в их взаимосвязи;
- овладение фундаментальными принципами и методами решения научно-технических задач;
- формирование навыков по применению положений фундаментальной физики к грамотному научному анализу ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться при создании новых технологий;
- освоение основных физических теорий, позволяющих описать явления в природе, и пределов применимости этих теорий для решения современных и перспективных технологических задач.

## ***2. Оборудование и материалы***

Лабораторный стенд «Скамья Жуковского». Лабораторный стенд «Машина Атвуда». Лабораторный стенд «Маятник Максвелла». Набор демонстрационный «Механические явления». Набор лабораторный «Механика» (расширенный).

Весы технические настольные с разновесами демонстрационный. Набор демонстрационный «Динамика вращательного движения». Трубка Ньютона. Набор демонстрационный «Газовые законы и свойства насыщенных паров». Набор демонстрационный «Молекулярная физика и тепловые явления». Набор демонстрационный «Звуковые колебания и волны». Набор демонстрационный «Динамика вращательного движения». Набор демонстрационный «Газовые законы и свойства насыщенных паров». Набор демонстрационный «Молекулярная физика и тепловые явления».

Комплект учебной мебели.

## ***3. Наименование лабораторных работ***

Для заочной формы обучения предусмотрены следующие лабораторные работы: лабораторная работа №1. Простейшие физические модели, положение материальной точки. – 2 часа, лабораторная работа №2. Скорость. Вычисление пройденного пути. Ускорение – 2 часа, лабораторная работа №9. Законы постоянного тока. – 2 часа, лабораторная работа №10. Магнитное поле тока – 2 часа.

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них практическая подготовка, часов
3 семестр			
9	<b>Лабораторная работа № 1. Законы постоянного тока статистической проверки гипотез Исследование электрической цепи постоянного тока.</b>	2	

	Изучение зависимости силы тока, напряжения, полной полезной мощности и к.п.д. источника от сопротивления нагрузки.		
10	<b>Лабораторная работа № 2. Магнитное поле тока</b> Изучение явления электромагнитной индукции. Изучение электрических токов возникающих при явлении электромагнитной индукции.	2	
11	<b>Лабораторная работа № 3. Переменный электрический ток. Электромагнитное поле</b> Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.	2	
12	<b>Лабораторная работа № 4. Электромагнитные колебания в колебательном контуре</b> Исследование колебаний в колебательном контуре. Изучение затухающих электрических колебаний колебательном контуре.	2	
13	<b>Лабораторная работа № 5. Магнитное поле тока</b> Определение удельного заряда электрона методом магнетрона. Изучение движений зарядов в электрических и магнитных полях, измерение удельного заряда электрона.	2	
14	<b>Лабораторная работа № 6 Волновая оптика. Интерференция и дифракция света</b> Измерение длины световой волны с помощью дифракционной решётки. Познакомится с явлением дифракции света в параллельных лучах дифракционной решётки.	2	
15	<b>Лабораторная работа № 7. Дисперсия и поляризация света</b> Проверка закона Малюса. Проверить выполнение закона Малюса.	2	
16	<b>Лабораторная работа № 8. Квантовая природа излучения</b> Изучение внешнего фотоэффекта.	2	
17	<b>Лабораторная работа № 9. Квантовомеханическая теория</b> Изучение энергетического спектра электронов. Определение длины пробега элементарных частиц в воздухе при атмосферном давлении и определение максимальной энергии бета-частиц при помощи метода поглощения.	2	
<b>Итого за 3 семестр</b>		<b>18</b>	
<b>Итого</b>		<b>18</b>	



#### 4. Содержание лабораторных работ

### Лабораторная работа № 1

#### Тема работы. Исследование электрической цепи постоянного тока.

**Цель работы.** Изучение зависимости силы тока, напряжения, полной полезной мощности и к.п.д. источника от сопротивления нагрузки.

#### Теоретическая часть.

Любая электрическая цепь состоит из источника и потребителя энергии, а также различных регулировочных устройств и измерительных приборов.

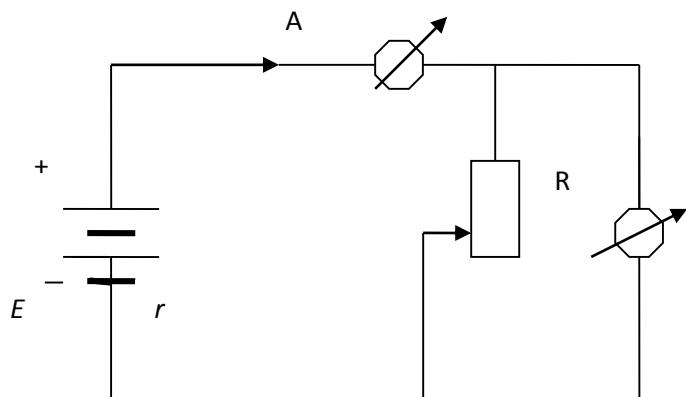


Рис.1.

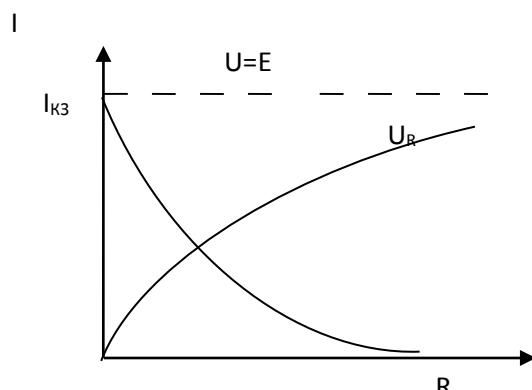


Рис.2.

На рис. 1 представлена простейшая цепь, состоящая из источника постоянного тока с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r$  и нагрузочного реостата  $R$ . Для измерения силы тока и напряжения на нагрузке в цепь включены амперметр  $A$  и вольтметр  $V$ . В такой цепи сила тока, напряжение на нагрузке, полная и полезная мощности оказываются зависимыми от величины нагрузки. Сила тока, например, убывает с ростом сопротивления нагрузки в соответствии с известным законом Ома.

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (1)$$

Очевидно, наибольший ток будет в случае короткого замыкания, т.е. при  $R=0$ . Его величина  $I_{k3} = \frac{E}{r}$  (рис. 2).

Из (1) легко получаем

$$E = IR + Ir = U_R + U_r, \quad (2)$$

где  $U_R = IR$  и  $U_r = Ir$  - падения напряжения (или просто напряжения) на внешнем и внутренним участках цепи соответственно.

Принимая во внимание закон Ома (1), получаем из (2) зависимость напряжения  $U_r$  от сопротивления нагрузки  $R$ :

$$U_R = \frac{E}{R+r} R = \frac{E}{1 + \frac{r}{R}}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что с ростом сопротивления нагрузки напряжение на ней возрастает, асимптотически приближаясь к величине ЭДС при  $R \rightarrow \infty$  (рис. 2).

При прохождении электрического тока в цепи происходит выделение полной мощности

$$P = IE, \quad (4)$$

при этом мощность, выделяемая на нагрузке

$$P_R = IU_R, \quad (5)$$

является полезной мощностью.

Из (4) видно, что полная мощность, развивающаяся источником, зависит от сопротивления нагрузки  $R$  так же как и сила тока  $I = I(R)$ . Она максимальная при коротком замыкании ( $R=0$ )

$$P_{k3} = I_{k3} E = \frac{E^2}{r}, \quad (6)$$

но в этом случае выделяется в самом источнике и оказывается бесполезной, а зачастую вредной, вызывая выход источника из строя. С ростом  $R$  полная мощность убывает, стремясь к нулю при  $R \rightarrow \infty$  (рис. 3).

Зависимость полезной мощности, выделяемой на нагрузке, от  $R$  определяется выражением

$$P_R = IU_R = I^2 R = \frac{E^2}{(R+r)^2} R \quad (7)$$

Анализ выражения (7) показывает, что зависимость  $P_R = P_R(R)$  должна иметь максимум, так как  $P_R = 0$  в предельных случаях: при коротком замыкании ( $R=0$ ) и при  $R \rightarrow \infty$ .

Найдем значение  $R_0$ , при котором полезная мощность, отбираемая от источника, будет наибольшая. Для этого продифференцируем формулу (7) и приравняем производную нулю

$$\frac{dP_R}{dR} = E^2 \frac{(R+r)[(R+r)-2R]}{(R+r)^4} = 0 \quad (8)$$

Отсюда находим, что  $P_R$  - максимальна при  $R_0 = r$ , т.е. когда сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника (рис.3). При этом напряжение на нагрузке

равно половине ЭДС, т.е.  $U_{R_0} = \frac{E}{2}$ , а сила тока – половине силы тока короткого замыкания

$$I_{R_0} = \frac{I_{kz}}{2}.$$

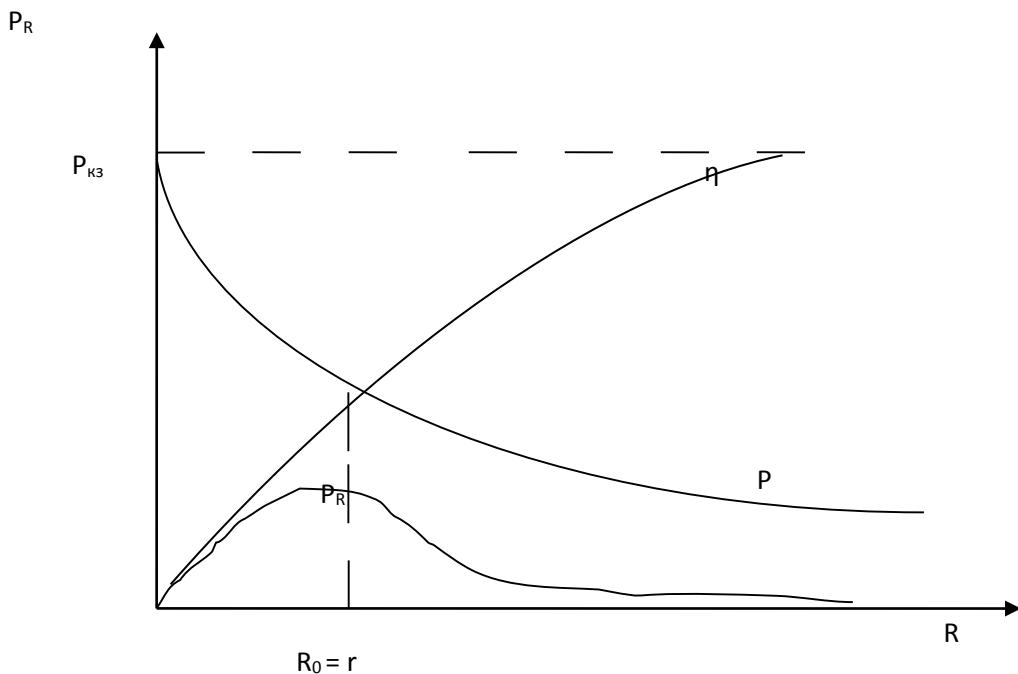


Рис.3.

Полезная мощность, в этом случае, составляет четверть мощности короткого замыкания.

Отношение полезной мощности ко всей мощности, развиваемой источником в цепи, определяет коэффициент полезного действия (к.п.д.)  $\eta$  источника.

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{IU_R}{IE} = \frac{U_R}{E} = \frac{R}{R+r} \quad (9)$$

Из этой формулы следует, что  $\eta$  будет тем больше, чем больше сопротивление нагрузки  $R$ . При  $R=0$   $\eta=0$  и асимптотически стремится к  $\eta=1$  при  $R \rightarrow \infty$ . При  $R=r$ , т.е. при максимальной полезной мощности к.п.д. источника  $\eta = \frac{1}{2}$ , т.е. составляет 50%.

Именно исследование этих закономерностей является целью работы. Необходимо получить экспериментальные зависимости силы тока  $I$ , напряжения  $U_R$ , полной  $P$  и полезной  $P_R$ , а так же к.п.д.  $\eta$  от величины сопротивления нагрузки.

#### **Оборудование и материалы.**

Источник постоянного тока, реостат для искусственного увеличения внутреннего сопротивления источника, нагрузочный реостат миллиамперметр, вольтметр.

#### **Указания по технике безопасности.**

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. При выполнении лабораторных работ студентам запрещается:

- включать схемы под напряжением без проверки преподавателя;
  - прикасаться к незащищённым изоляцией частям схемы, находящихся под напряжением;
  - определять наличие напряжения на элементах цепи при помощи пальцев; проверка наличия напряжения производится только с помощью вольтметра и в присутствии преподавателя;
  - включать рубильники, нажимать кнопки, прикасаться к электрическому оборудованию, не относящемуся к данной лабораторной работе без ведома преподавателя;
  - производить по ходу выполнения работы переключения в схеме, не обесточив её;
  - бросать соединительные провода на пол и на исследуемую установку;
  - класть на рабочий стол посторонние предметы;
  - входить в лабораторию в верхней одежде;
4. Перед включением схемы обязательно предупредить членов бригады: «Осторожно! Включаю!».
5. При наличии в схеме конденсаторных батарей, необходимо после отключения питания их разрядить под наблюдением преподавателя.
6. При обнаружении каких – либо неисправностей, исчезновения напряжения в сети, а также при несчастном случае, немедленно прекратить работу, отключить установку от электропитания и сообщить преподавателю.
7. Помнить, что при отключении цепей постоянного тока с индуктивностью возможно кратковременное резкое повышение напряжения.
8. Студенты, нарушившие правила техники безопасности, не допускаются к дальнейшей работе в лаборатории и привлекаются к ответственности.

### ***Задания.***

Рабочая схема изображена на рис. 4. В качестве источника могут использоваться аккумуляторы или выпрямитель, дающие напряжение величиной несколько вольт. Внутреннее сопротивление таких источников, как правило, мало - порядка десятых долей Ома. Поэтому, как следует из вышеизложенного, для построения графиков искомых зависимостей нагрузочный реостат  $R$  тоже должен иметь сопротивление порядка десятых долей Ома. Подобные реостаты являются уникальными. Поэтому внутреннее сопротивление источника в данной работе искусственно увеличивается путем последовательного включения дополнительного реостата  $r'$ , имеющего величину нескольких десятков Омов. При этом собственным внутренним сопротивлением  $r$  источника можно пренебречь.

Из схемы (рис.4) следует, что внутреннее сопротивление миллиамперметра и вольтметра составляют с сопротивлением нагрузочного реостата единое целое. Таким образом, левую часть схемы следует рассматривать как источник, а правую как нагрузку.

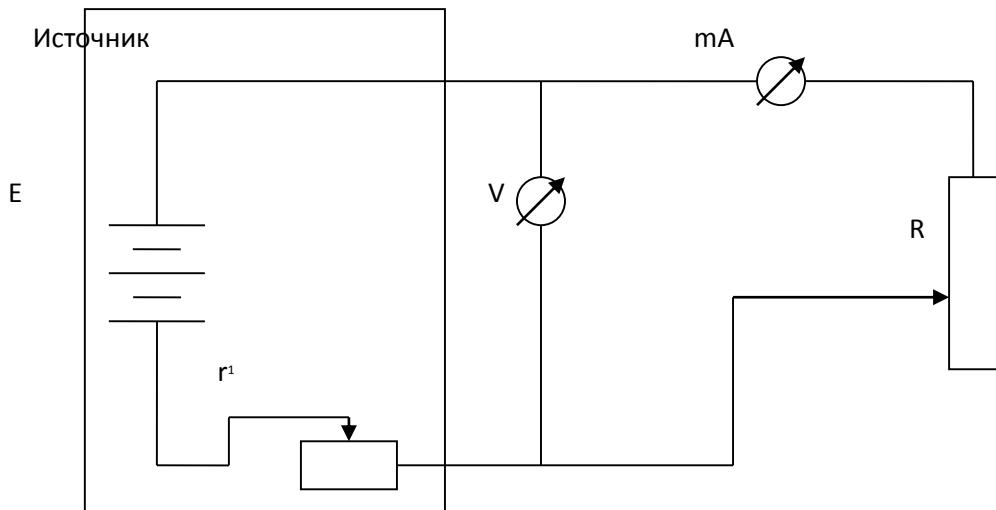


Рис. 4.

- Собрать рабочую схему (рис.4). Выяснить параметры приборов. Движки реостатов установить в положение наибольшего значения сопротивления.
- После проверки схемы преподавателем или лаборантом включить источник питания. Отсчитать показания приборов и занести в таблицу.
- Далее, уменьшая сопротивление нагрузки  $R$ , снять 8-10 значений тока в цепи  $I$  и напряжения  $U_R$ . Последняя точка должна соответствовать короткому замыканию. При этом ток должен равняться  $I_{kz}$ , а напряжение должно обратиться в нуль. Выключить схему.
- Определив цены делений на использованных пределах измерений амперметра и вольтметра вычислить и занести в таблицу значения тока в амперах и напряжения в вольтах.
- Разделив полученные значения напряжения на соответствующие значения тока рассчитать и занести в таблицу сопротивление нагрузки  $R$

Таблица 1.

N	I	$U_R$	$R = \frac{U_R}{I}$	$P = IE$	$P_R = I U_R$	$\eta = \frac{P_R}{P}$
	A	V	Ом	Вт	Вт	

- Величину ЭДС  $E$  следует считать известной, либо измерить значение  $E$  при отключенной нагрузке.
- По формулам (4,5,9) рассчитать значения полезной  $P_R$ , полной  $P$  мощности и к.п.д.  $\eta$ , соответствующие найденным величинам  $R$ .
- По полученным значениям построить кривые  $I = I(R)$ ,  $U_R = U_R(R)$  на одном графике и  $P = P(R)$ ,  $P_R = P_R(R)$  и  $\eta = \eta(R)$  на другом.
- Отметить на первом графике сопротивление  $R_0 = r$ , при котором ток и напряжение составляют, соответственно, половину тока короткого замыкания  $I_{kz}$  и половину  $E$ . На втором графике найти  $R_0 = r$  по максимуму зависимости  $P_R = P_R(R)$ . Сравнить между собой эти значения  $R_0$ . Примерное равенство между этими двумя значениями  $R_0$  является критерием правильности выполненных измерений. Если такого равенства нет, измерения следует проделать вновь.

### ***Содержание отчета.***

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

### ***Контрольные вопросы.***

1. Что такое ЭДС?
2. Запишите закон Ома в обобщенной форме и для замкнутой цепи.
3. Проведите математическое исследование функций  $U_R(R)$  и  $I(R)$ .
4. Дайте определение мощности электрического тока.
5. Проведите исследование зависимости  $P_R = P_R(R)$ .
6. Что такое к.п.д. источника?

## **Лабораторная работа № 2**

### ***Тема работы. Изучение явления электромагнитной индукции.***

**Цель работы.** Изучение электрических токов возникающих при явлении электромагнитной индукции.

### ***Теоретическая часть.***

**Магнитный поток** через плоскую поверхность — это скалярная физическая величина, численно равная произведению модуля магнитной индукции на площадь поверхности, ограниченной контуром, и на косинус угла между нормалью к поверхности и магнитной индукцией 17 октября 1831 года английский ученый Майкл Фарадей открыл явление **электромагнитной индукции**.

**Явлением электромагнитной индукции** называется явление возникновения тока в замкнутом контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур. А полученный таким способом ток, называется **индукционным**.

**Закон электромагнитной индукции:** среднее значение электродвижущей силы индукции в проводящем контуре пропорционально скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.

Величина и направление ЭДС индукции

Рассмотрим теперь, каковы будут величина и направление индуцированной в проводнике ЭДС.

Величина ЭДС индукции зависит от количества силовых линий поля, пересекающих проводник в единицу времени, т. е. от скорости движения проводника в поле.

Величина индуцированной ЭДС находится в прямой зависимости от скорости движения проводника в магнитном поле.

Величина индуцированной ЭДС зависит также и от длины той части проводника, которая пересекается силовыми линиями поля. Чем большая часть проводника пересекается силовыми линиями поля, тем большая ЭДС индуцируется в проводнике. И, наконец, чем сильнее магнитное поле, т. е. чем больше его индукция, тем большая ЭДС возникает в проводнике, пересекающем это поле.

Итак, величина ЭДС индукции, возникающей в проводнике при его движении в магнитном поле, прямо пропорциональна индукции магнитного поля, длине проводника и скорости его перемещения.

Зависимость эта выражается формулой  $E = Blv$ ,

где  $E$  — ЭДС индукции;  $B$  — магнитная индукция;  $l$  — длина проводника;  $v$  — скорость движения проводника.

Следует твердо помнить, что в проводнике, перемещающемся в магнитном поле, ЭДС индукции возникает только в том случае, если этот проводник пересекается магнитными силовыми линиями поля. Если же проводник перемещается вдоль силовых линий поля, т. е. не пересекает, а как бы скользит по ним, то никакой ЭДС в нем не индуцируется. Поэтому приведенная выше формула справедлива только в том случае, когда проводник перемещается перпендикулярно магнитным силовым линиям поля.

Направление индуцированной ЭДС (а также и тока в проводнике) зависит от того, в какую сторону движется проводник. Для определения направления индуцированной ЭДС существует правило правой руки.

Если держать ладонь правой руки так, чтобы в нее входили магнитные силовые линии поля, а отогнутый большой палец указывал бы направление движения проводника, то вытянутые четыре пальца укажут направление действия индуцированной ЭДС и направление тока в проводнике.

При движении внутри катушки постоянного магнита в ней индуцируется ЭДС за счет того, что магнитный поток магнита пересекает витки катушки, т. е. точно так же, как это было при движении прямолинейного проводника в поле магнита.

Если магнит опускать в катушку медленно, то возникающая в ней ЭДС будет настолько мала, что стрелка прибора может даже не отклониться. Если же, наоборот, магнит быстро ввести в катушку, то отклонение стрелки будет большим. Значит, величина индуцируемой ЭДС, а следовательно, и сила тока в катушке зависят от скорости движения магнита, т. е. от того, насколько быстро силовые линии поля пересекают витки катушки. Если теперь поочередно вводить в катушку с одинаковой скоростью сначала сильный магнит, а затем слабый, то можно заметить, что при сильном магните стрелка прибора будет отклоняться на больший угол. Значит, величина индуцируемой ЭДС, а следовательно, и сила тока в катушке зависят от величины магнитного потока магнита.

И, наконец, если вводить с одинаковой скоростью один и тот же магнит сначала в катушку с большим числом витков, а затем со значительно меньшим, то в первом случае стрелка прибора отклонится на больший угол, чем во втором. Значит, величина индуцируемой ЭДС, а следовательно, и сила тока в катушке зависят от числа ее витков. Те же результаты можно получить, если вместо постоянного магнита применять электромагнит.

Направление ЭДС индукции в катушке зависит от направления перемещения магнита. О том, как определять направление ЭДС индукции, говорит закон, установленный Э. Х. Ленцем.

Закон Ленца для электромагнитной индукции: Всякое изменение магнитного потока внутри катушки сопровождается возникновением в ней ЭДС индукции, причем чем быстрее изменяется магнитный поток, пронизывающий катушку, тем большая ЭДС в ней индуцируется.

Если катушка, в которой создана ЭДС индукции, замкнута на внешнюю цепь, то по виткам ее идет индукционный ток, создающий вокруг проводника магнитное поле, в силу чего катушка превращается в соленоид. Получается таким образом, что изменяющееся внешнее магнитное поле вызывает в катушке индукционный ток, который, в свою очередь, создает вокруг катушки свое магнитное поле — поле тока.

Изучая это явление, Э. Х. Ленц установил закон, определяющий направление индукционного тока в катушке, а следовательно, и направление ЭДС индукции. ЭДС индукции, возникающая в катушке при изменении в ней магнитного потока, создает в

катушке ток такого направления, при котором магнитный поток катушки, созданный этим током, препятствует изменению постороннего магнитного потока.

Закон Ленца справедлив для всех случаев индуктирования тока в проводниках, независимо от формы проводников и от того, каким способом достигается изменение внешнего магнитного поля.

Величина э.д.с. индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  определяется законом электромагнитной индукции Фарадея: э.д.с. электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , в замкнутом проводящем контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi$  сквозь поверхность, ограниченную этим контуром

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

Знак минус в формуле соответствует *правилу Ленца*: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего индукционный ток.

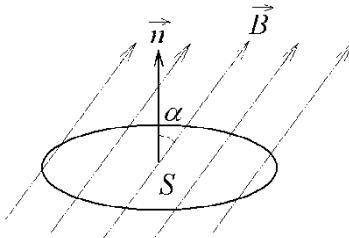


Рис. 1.

Причина возникновения индукционного тока в неподвижном контуре согласно теории электромагнетизма Максвелла состоит в том, что при изменении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле, т.е. электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями. Под действием этого поля свободные заряды контура перемещаются, т.е. в контуре возникает электрический ток, называемый индукционным током.

Пусть плоский замкнутый проводящий контур  $L$  находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  (рис. 1). Тогда магнитный поток  $\Phi$  (поток вектора магнитной индукции) через поверхность, ограниченную контуром  $L$ , определяется выражением

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (2)$$

где  $S$  – площадь поверхности, ограниченной контуром  $L$ ,  $\alpha$  – угол между направлением силовых линий (направлением вектора и нормалью  $\vec{n}$  к поверхности, ограниченной контуром).

Пусть магнитное поле создается цилиндрической катушкой (соленоидом), по которой протекает переменный электрический ток

$$I = I_0 \cos \omega t \quad (3)$$

где  $I_0$  – амплитудное значение тока;  $\omega$  – циклическая частота тока  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $\nu$  – частота тока.

Тогда магнитная индукция  $B$  поля внутри катушки и вблизи ее торцов равна

$$B = \mu \mu_0 n I$$

или с учетом (3)

$$B = \mu \mu_0 n I_0 \cos \omega t \quad (4)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость сердечника катушки;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $n$  – число витков катушки на единице длины. Подставив выражение (4) в формулу (2), находим магнитный поток через контур, расположенный вблизи торца катушки

$$\Phi = \mu \mu_0 n I_0 S \cos \alpha \cos \omega t$$

Отсюда скорость изменения магнитного потока равна,

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\mu\mu_0 n I_0 S \omega \cos \alpha \sin \omega t \quad (5)$$

Таким образом, скорость изменения магнитного потока пропорциональна амплитудному значению тока в катушке  $I_0$  и косинусу угла  $\alpha$ . Подставив выражение (5) в формулу (1), получаем

$$\mathcal{E}_{\text{ущд}} = C I_0 \cos \alpha \quad (6)$$

где  $C = -\mu\mu_0 n S \omega \sin \omega t$ .

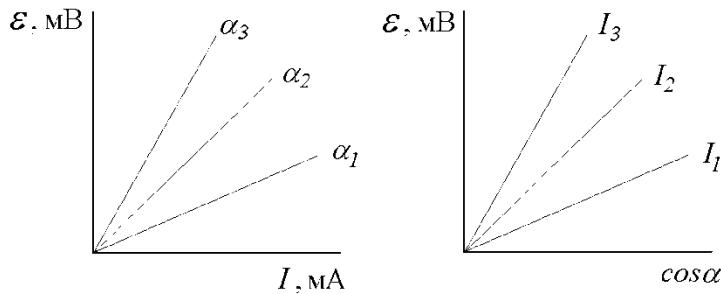


Рис.2.

Зависимость э.д.с. электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_{\text{ущд}}$  от  $I$  и  $\cos \alpha$  (примерный вид изображен на рис.2.

#### **Оборудование и материалы.**

1. Миллиамперметр.
2. Магнит.
3. Катушка-моток.
4. Источник тока.
5. Реостат.
6. Ключ.
7. Катушка от электромагнита.
8. Соединительные провода.

#### **Указания по технике безопасности.**

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. При выполнении лабораторных работ студентам запрещается:
  - включать схемы под напряжением без проверки преподавателя;
  - прикасаться к незащищенным изоляцией частям схемы, находящихся под напряжением;
  - определять наличие напряжения на элементах цепи при помощи пальцев; проверка наличия напряжения производится только с помощью вольтметра и в присутствии преподавателя;
  - при работе на лабораторной установке прикасаться одновременно стен, радиаторов системы отопления и других металлических предметов;
  - включать рубильники, нажимать кнопки, прикасаться к электрическому оборудованию, не относящемуся к данной лабораторной работе без ведома преподавателя;
  - производить по ходу выполнения работы переключения в схеме, не обесточив её;
  - бросать соединительные провода на пол и на исследуемую установку;

- заменять сгоревшие предохранители на рабочих щитах при включённых рубильниках;
- класть на рабочий стол посторонние предметы;
- входить в лабораторию в верхней одежде;
- курение и зажигание огня.

4. Перед включением схемы обязательно предупредить членов бригады: «Осторожно! Включаю!».

5. При наличии в схеме конденсаторных батарей, необходимо после отключения питания их разрядить под наблюдением преподавателя.

6. При обнаружении каких – либо неисправностей, исчезновения напряжения в сети, а также при несчастном случае, немедленно прекратить работу, отключить установку от электропитания и сообщить преподавателю.

7. Помнить, что при отключении цепей постоянного тока с индуктивностью возможно кратковременное резкое повышение напряжения.

8. Студенты, нарушившие правила техники безопасности, не допускаются к дальнейшей работе в лаборатории и привлекаются к ответственности.

### **Задания.**

#### **Эксперимент 1**

Начнем лабораторную работу со сбора установки. Чтобы собрать схему, которую мы будем использовать в лабораторной работе, присоединим моток-катушку к миллиамперметру и используем магнит, который будем приближать или удалять от катушки. Одновременно с этим мы должны вспомнить, что будет происходить, когда будет появляться индукционный ток.

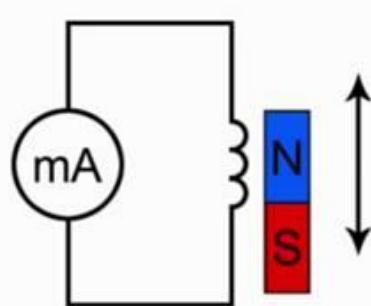


Рис. 1. Эксперимент 1

Подумайте над тем, как объяснить наблюдаемое нами явление. Каким образом влияет магнитный поток на то, что мы видим, в частности происхождение электрического тока. Для этого посмотрите на вспомогательный рисунок.

Обратите внимание, что линии магнитной индукции выходят из северного полюса, входят в южный полюс. При этом количество этих линий, их густота различна на разных участках магнита. Обратите внимание, что направление индукции магнитного поля тоже изменяется от точки к точке. Поэтому можно сказать, что **изменение магнитного потока приводит к тому, что в замкнутом проводнике возникает электрический ток, но только при движении магнита, следовательно, изменяется магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную витками этой катушки.**

#### **Эксперимент 2**

Следующий этап нашего исследования электромагнитной индукции связан с определением **направления индукционного тока**. О направлении индукционного тока мы можем судить по тому, в какую сторону отклоняется стрелка миллиамперметра.

Воспользуемся дугообразным магнитом и увидим, что при приближении магнита стрелка отклонится в одну сторону. Если теперь магнит двигать в другую сторону, стрелка отклонится в другую сторону. В результате проведенного эксперимента мы можем сказать, что от направления движения магнита зависит и направление индукционного тока. Отметим и то, что от полюса магнита тоже зависит направление индукционного тока.

Обратите внимание, что величина индукционного тока зависит от скорости перемещения магнита, а вместе с тем и от скорости изменения магнитного потока.

Вторая часть нашей лабораторной работы связана будет с другим экспериментом. Посмотрим на схему этого эксперимента и обсудим, что мы будем теперь делать.

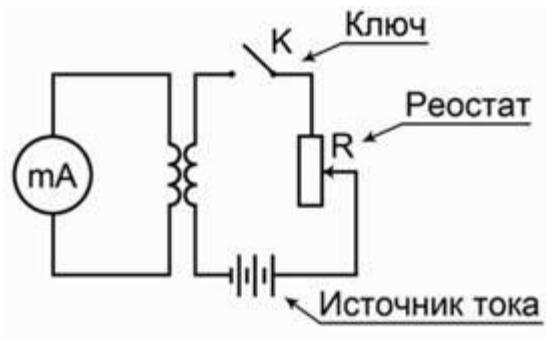


Рис. 2. Эксперимент 2

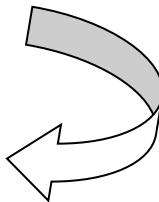
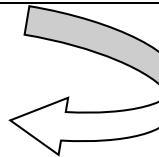
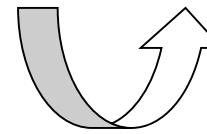
Во второй схеме в принципе ничего не изменилось относительно измерения индукционного тока. Тот же самый миллиамперметр, присоединенный к мотку катушки. Остается все, как было в первом случае. Но теперь изменение магнитного потока мы будем получать не за счет движения постоянного магнита, а за счет изменения силы тока во второй катушке.

В первой части будем исследовать наличие индукционного тока при замыкании и размыкании цепи. Итак, первая часть эксперимента: мы замыкаем ключ. Обратите внимание, ток нарастает в цепи, стрелка отклонилась в одну сторону, но обратите внимание, сейчас ключ замкнут, а электрического тока миллиамперметр не показывает. Дело в том, что нет изменения магнитного потока, мы уже об этом говорили. Если теперь ключ размыкать, то миллиамперметр покажет, что направление тока изменилось.

Во втором эксперименте мы проследим, как возникает индукционный ток, когда меняется электрический ток во второй цепи.

Следующая часть опыта будет заключаться в том, чтобы проследить, как будет изменяться индукционный ток, если менять величину тока в цепи за счет реостата. Вы знаете, что если мы изменяем электрическое сопротивление в цепи, то, следуя закону Ома, у нас будет меняться и электрический ток. Раз изменяется электрический ток, будет изменяться магнитное поле. В момент перемещения скользящего контакта реостата изменяется магнитное поле, что приводит к появлению индукционного тока.

№ опыта	Способ получения индукционного тока	I	B	B <sub>м</sub>	ΔФ <sub>м</sub>
1	Внесение в катушку северного		→	←	+

	полюса магнита				
2	Удаление из катушки северного полюса магнита		←	←	-
3	Внесение в катушку южного полюса магнита		←	→	+
4	Удаление из катушки южного полюса магнита		→	→	-

### ***Содержание отчета.***

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

### ***Контрольные вопросы.***

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Какой ток называют индукционным?
3. Сформулируйте закон электромагнитной индукции. Какой формулой он описывается?
4. Как формулируется правило Ленца?
5. Какова связь правила Ленца с законом сохранения энергии?

### ***Лабораторная работа № 3***

***Тема работы. Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.***

***Цель работы.*** Определение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.

### ***Теоретическая часть.***

Земля в целом представляет собой огромный шаровой магнит. Поэтому в любой точке пространства, окружающего Землю, и на ее поверхности существует магнитное поле, силовые линии которого изображены на рисунке 1. При этом северный магнитный полюс

Н находится вблизи южного географического Ю и наоборот. На экваторе магнитные силовые линии направлены горизонтально, а на полюсах - вертикально.

В остальных точках земной поверхности индукция магнитного поля направлена под некоторым углом к плоскости Земли, т.е. имеет и горизонтальную  $B_3$  и вертикальную  $B_0$  составляющие.

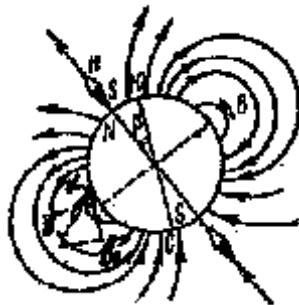


Рис.1.

Направление горизонтальной составляющей принимается за направление магнитного меридиана, т.к. в этом направлении устанавливается стрелка компаса, вращающаяся в горизонтальной плоскости. Целью настоящей работы является измерение величины горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли с помощью тангенс-гальванометра. Тангенс-гальванометр представляет собой вертикально расположенные  $n$  круговых витков радиуса  $R$ , по которым пропускается постоянный ток силой  $I$ . В центре этой совокупности витков (короткой катушки) помещается компас. При отсутствии тока в витках магнитная стрелка компаса установится по

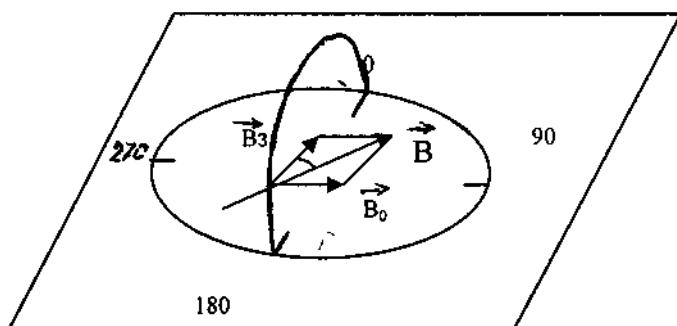


Рис. 2.

магнитному меридиану. При пропускании тока по виткам стрелка повернется на некоторый угол  $\alpha$ , т.к. теперь на нее помимо горизонтальной составляющей магнитного поля Земли будет действовать еще магнитное поле, создаваемое током  $I$  в  $n$  витках. Если витки сориентировать так чтобы их плоскости совпадали с плоскостью магнитного меридиана, то на стрелку будут действовать два взаимно перпендикулярных поля: поле Земли  $B_3$  и поле тока  $B_0$  (рис.2).

Стрелка компаса установится в направлении равнодействующей этих полей, вдоль  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_3$ , т.е. по диагонали параллелограмма, сторонами которого будут  $B_0$  и  $B_3$ . См. рис.2, на котором изображено сечение витков с током, ориентированных вдоль магнитного меридиана, горизонтальной плоскостью. Из рис. 2 следует, что  $\tan \alpha = \frac{B_0}{B_3}$ , откуда

$$B_3 = \frac{B_0}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (1)$$

Так как индукция магнитного поля в центре кругового тока  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$ , то в центре  $n$  витков очевидно

$$B_0 = \frac{\mu_0 In}{2R} \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) получим

$$B_3 = \frac{\mu_0 In}{2R \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (3)$$

Эта формула используется в настоящей работе для опытного определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли. Формула (3) записана в системе СИ, поэтому  $B_3$  получится в теслах.

Электрическая схема установки для измерения  $B_3$  состоит из тангенс-гальванометра  $G$ , источника тока  $E$ , реостата  $R$  и амперметра  $A$  для регулировки и измерения тока (рис.3).

В схеме используется переключатель  $\Pi$  для изменения направления тока, проходящего через тангенс-гальванометр.

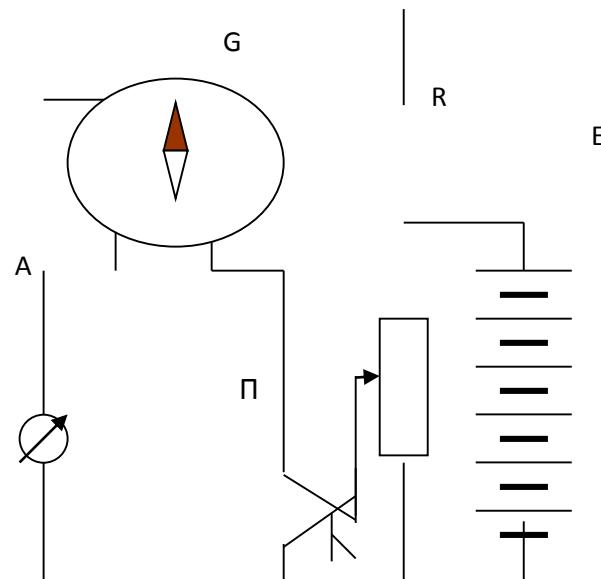


Рис. 3

#### *Оборудование и материалы.*

Тангенс-гальванометр, амперметр, реостат, источник тока.

#### *Указания по технике безопасности.*

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. При выполнении лабораторных работ студентам запрещается:
  - включать схемы под напряжением без проверки преподавателя;
  - прикасаться к незащищенным изоляцией частям схемы, находящихся под напряжением;
  - определять наличие напряжения на элементах цепи при помощи пальцев; проверка наличия напряжения производится только с помощью вольтметра и в присутствии преподавателя;
  - при работе на лабораторной установке прикасаться одновременно к стене, радиаторам системы отопления и других металлических предметов;

- включать рубильники, нажимать кнопки, прикасаться к электрическому оборудованию, не относящемуся к данной лабораторной работе без ведома преподавателя;
- производить по ходу выполнения работы переключения в схеме, не обесточив её;
- бросать соединительные провода на пол и на исследуемую установку;
- заменять сгоревшие предохранители на рабочих щитах при включённых рубильниках;
- класть на рабочий стол посторонние предметы;
- входить в лабораторию в верхней одежде;
- курение и зажигание огня.

4. Перед включением схемы обязательно предупредить членов бригады: «Осторожно! Включаю!».

5. При наличии в схеме конденсаторных батарей, необходимо после отключения питания их разрядить под наблюдением преподавателя.

6. При обнаружении каких – либо неисправностей, исчезновения напряжения в сети, а также при несчастном случае, немедленно прекратить работу, отключить установку от электропитания и сообщить преподавателю.

7. Помнить, что при отключении цепей постоянного тока с индуктивностью возможно кратковременное резкое повышение напряжения.

8. Студенты, нарушившие правила техники безопасности, не допускаются к дальнейшей работе в лаборатории и привлекаются к ответственности.

### **Задания.**

- Собирают электрическую цепь по схеме рис.3
- Поворачивая тангенс- гальванометр, устанавливают его плоскость в плоскости магнитного меридиана, так чтобы магнитная стрелка установилась в направлении  $0^\circ$ - $180^\circ$ .
- Устанавливая движком реостата заданную величину тока (задается преподавателем) измерить угол отклонения магнитной стрелки  $\alpha_1$ .
- Не изменяя величину тока поменять переключателем П направление тока на противоположное. Отсчитать новый угол отклонения стрелки  $\alpha_2$ . Вычислить  $\alpha_{cp} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ .
- Повторить измерения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при нескольких других заданных значениях тока.
- Подставляя последовательно измеренные соответствующие значения тока  $I_i$  и усредненные значения угла  $\alpha_i$  в формулу (3) найти значения  $B_3$ . ( Величины  $n$  и  $R$  указаны на тангенс-гальванометре).
- Все результаты измерений и вычислений занести в табл.1

Табл.1

I(A)	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_{cp}$	$\operatorname{tg} \alpha_{cp}$	$B_3$	$\Delta B$	$\delta B$
(cp)							

8. Оценить погрешность проведенного измерения  $B_3$  и результаты занести в табл.1

9. Записать результат в виде

$$B_3 = B_{3cp} \pm \Delta B_{3cp}$$

### **Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

#### **Контрольные вопросы.**

1. Какой вид имеет магнитное поле Земли?
2. В чем заключается идея измерения горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли?
3. Как устроен тангенс-гальванометр?
4. Выведите формулу индукции  $B_0$ , в центре кругового витка с током.
5. Почему плоскость тангенс-гальванометра следует ориентировать в направлении магнитного меридиана?

### **Лабораторная работа № 4**

#### **Тема работы. Исследование колебаний в колебательном контуре**

**Цель работы.** Изучение затухающих электрических колебаний колебательном контуре.

#### **Теоретическая часть.**

Простой колебательный контур состоит из последовательно соединенных элементов: емкости  $C$ , индуктивности  $L$  и активного сопротивления  $R$

Среди различных электрических явлений большой интерес представляют электрические колебания, при которых некоторые электрические величины, такие как потенциал сила тока, или заряд изменяются во времени. Одним из простейших источников получения электрических колебаний является электрический колебательный контур.

Рассмотрим простой колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора  $C$ , индуктивности  $L$ , резистора  $R$  и ключа  $K$  (рис.1, а). Если конденсатор зарядить, а затем замкнуть ключ (рис.1, б), то конденсатор начинает разряжаться. В цепи появляется возрастающий ток  $i$ , в катушке индуктивности – соответствующее магнитное поле.

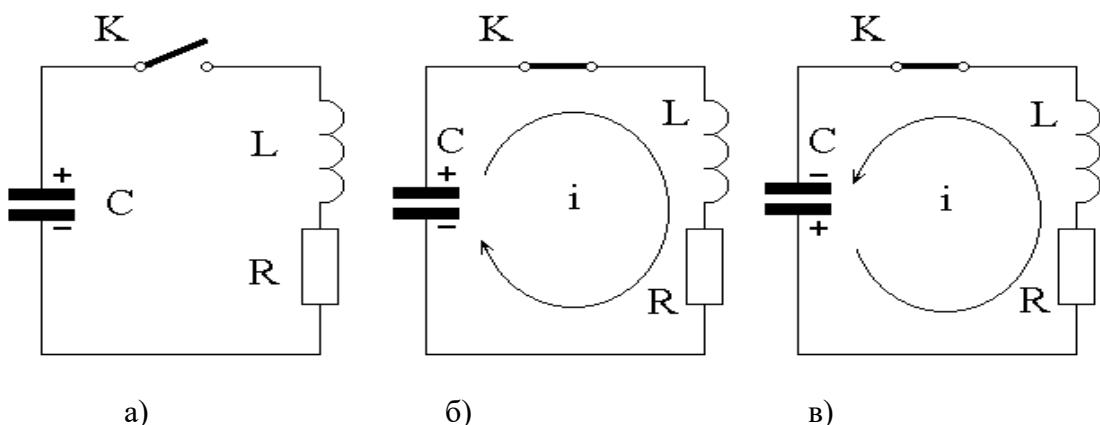


Рис.1.

Ток разряда конденсатора  $i$ , протекая через катушку, порождает в ней ЭДС самоиндукции. Возникающая ЭДС самоиндукции замедляет разряд конденсатора, а после того, как конденсатор полностью разрядится ЭДС самоиндукции, наоборот, начинает поддерживать ток в прежнем направлении.

В результате этого конденсатор перезарядится, после чего процесс повторится, но движение зарядов будет происходить в противоположном направлении (рис.2,в).

Первоначальная энергия электрического поля заряженного конденсатора во время его разряда переходит в энергию магнитного поля катушки. При перезаряде конденсатора происходит обратный переход энергии магнитного поля катушки в энергию электрического поля конденсатора. В идеальном колебательном контуре сопротивление  $R$  равно нулю и возникшие электрические колебания будут **незатухающими** (рис. 2,а).

В реальном колебательном контуре  $R$  отлично от нуля, поэтому при протекании тока через него происходит выделение тепла. Вследствие этого общий запас энергии в контуре уменьшается, и колебания **затухают** (рис.2,б).

С увеличением сопротивления  $R$  скорость затухания колебаний увеличивается (рис. 2,в), а при достаточно большом значении  $R$  колебания вообще не возникают - наблюдается **апериодический** разряд конденсатора (рис. 2,г).

Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется критическим ( $R_{kp}$ ).

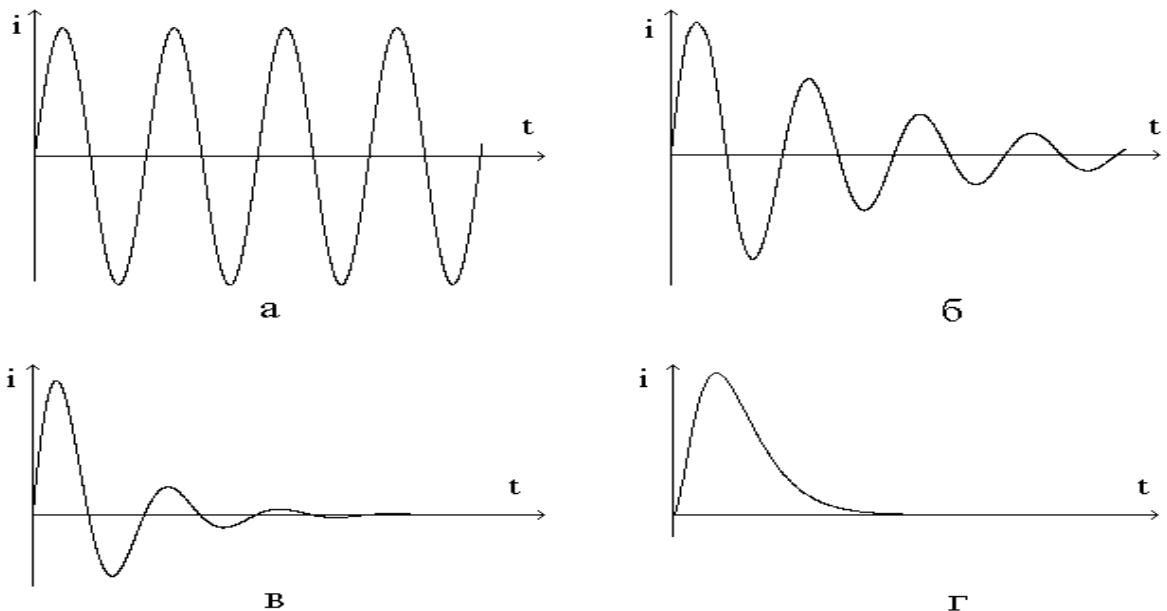


Рис. 2.

Найдем уравнение, описывающее затухающие электрические колебания в контуре. В соответствии с законом сохранения энергии убыль энергии конденсатора при его разряде  $-dW_C$  расходуется на увеличение энергии магнитного поля катушки  $dW_L$  и выделение тепла  $dQ$  в сопротивлении  $R$ :

$$-dW_C = dW_L + dQ, \quad (1)$$

где  $W_C$  – энергия конденсатора,  $W_C = q^2 / 2C$ ,

$W_L$  – энергия магнитного поля катушки,  $W_L = Li^2/2$ .

Здесь  $q$  – заряд конденсатора в данный момент времени,  $i$  – сила тока в контуре в этот же момент.

Количество тепла, выделяющееся в проводнике за время  $dt$ :

$$dQ = i^2 R dt.$$

Используя эти соотношения, преобразуем уравнение (1):

$$\begin{aligned} -d\left(\frac{q^2}{2C}\right) &= d\left(L \frac{i^2}{2}\right) + i^2 \cdot R \cdot dt = 0, \\ \frac{1}{2C} 2q \cdot dq + \frac{L}{2} \cdot 2i \cdot di + i^2 R \cdot dt &= 0, \\ \frac{q}{C} dq + L \cdot i \cdot di + i^2 R \cdot dt &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как  $i = dq/dt$  и  $dq = i dt$ ,

то выражение (2) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{C} dq + L \frac{dq}{dt} di + i R \cdot dq = 0.$$

Сократив на  $dq$  и используя соотношение

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (3)$$

В этом уравнении сделаем следующие замены:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad (4)$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad (5)$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – собственная частота контура.

Тогда

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение (6) имеет (при  $\beta < \omega_0$ ) следующее решение:

$$q = q_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (8)$$

$q_0$  и  $\alpha$  – некоторые постоянные, соответствующие начальной амплитуде и начальной фазе колебания.

Выражение (11.7) есть уравнение затухающих электрических колебаний, циклическая частота которых равна  $\omega$ , а амплитуда экспоненциально убывает с течением времени (рис. 3).

Период этих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (9)$$

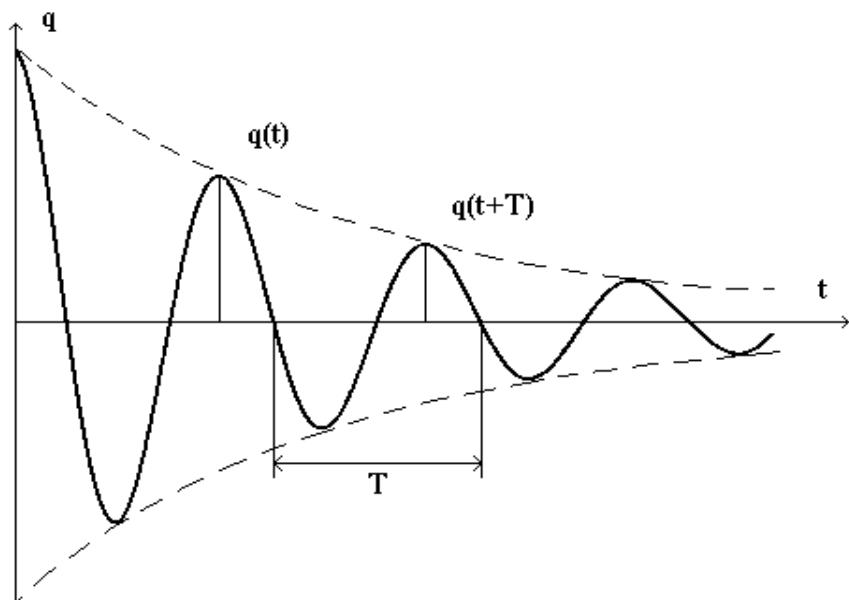


Рис. 3.

Для малых значений  $R$  получим

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (10)$$

В соответствии с уравнением (9) при увеличении сопротивления контура  $R$ , период колебаний будет, стремясь к бесконечности при

$$\beta = \omega_0. \quad (11)$$

Это означает, что колебательный процесс переходит в апериодический. Используя уравнения (4) и (5) из выражения (11) можно получить значение критического сопротивления:

$$R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (12)$$

Для характеристики затухания колебаний часто пользуются **логарифмическим декрементом затухания  $\delta$  и добротностью  $Q$** .

Логарифмический декремент затухания равен натуральному логарифму отношения амплитуд колебаний, соответствующих двум моментам времени, отличающимся на период:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}. \quad (13)$$

Здесь  $A$  – амплитуда колебаний величины заряда, тока или напряжения (рис. 3). Используя уравнение (7), получим

$$\delta = \ln \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T.$$

Для небольших значений  $R$ , с учетом уравнений (4) и (10), логарифмический декремент затухания можно определить через параметры контура:

$$\delta = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (14)$$

Пусть  $\tau$  – время релаксации, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2.7$  раз,  $N_e$  – число колебаний совершенных за время релаксации. Тогда можно легко доказать, что

$$\delta = \frac{1}{N_e} \quad (15)$$

Добротность  $Q$  представляет собой умноженное на  $2\pi$  отношение энергии  $W(t)$  в данный момент времени  $t$ , к энергии, теряемой за период колебания  $T$ :

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}, \quad (16)$$

Если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) энергия контура состоит из энергии заряженного конденсатора, то

$$W(t) = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (17)$$

Энергия контура через время, равное периоду, уменьшится в соответствии с уменьшившимся зарядом:

$$W(t+T) = \frac{(q_0 e^{-\beta T})^2}{2C}. \quad (18)$$

Подставив выражения (17) и (18) в уравнение (16), получим

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}. \quad (19)$$

Известно соотношение  $e^x \approx 1+x$ , выполняющееся для малых значений  $x$ : ( $x \ll 1$ ).

С учетом этого выражение (19) упростится:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}. \quad (20)$$

Добротность можно выразить и через параметры контура, применив формулу (14):

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (21)$$

Из уравнений (20) и (15) следует также, что добротность пропорциональна числу колебаний в контуре, совершившихся за время релаксации, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз:

$$Q = \pi N_e.$$

В ряде случаев колебательный процесс можно исследовать, изучая взаимозависимость между напряжением и током в контуре.

График, изображающий эту зависимость, называется фазовой кривой. Состояние колебательной системы для любого момента времени изобразится точкой на этой кривой (рис. 4).

Уравнение фазовой кривой можно получить, используя зависимости тока и напряжения от времени.

Из выражения (7) и соотношения  $u = q/C$  следует, что

$$u = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Сделаем замену  $U_0 = q_0/C$ , и получим зависимость напряжения на конденсаторе от времени:

$$u = U_0 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (22)$$

где  $U_0$  – начальная разность потенциалов.

Из уравнения (7) можно определить и зависимость тока в контуре от времени

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)] = \\ &= q_0 e^{-\beta t} [-\omega \cdot \sin(\omega t + \alpha) - \beta \cdot \cos(\omega t + \alpha)] \end{aligned}$$

Для малых затуханий  $\beta \ll \omega$ , тогда

$$i = -q_0 \cdot \omega \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Обозначим  $I_0 = q_0 \cdot \omega$ , тогда  $i = -I_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)$ , то есть

$$i = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (23)$$

Сравнив выражения (22) и (23), можно увидеть, что колебания силы тока опережают по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  колебания напряжения на конденсаторе.

Преобразуем выражения (22) и (23) следующим образом:

$$\frac{u}{U_0} = e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{i}{I_0} = -e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha).$$

Если возвести эти уравнения в квадрат и сложить, то получим уравнение фазовой кривой:

$$\left(\frac{i}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{u}{U_0}\right)^2 = e^{-2\beta t}. \quad (24)$$

В случае незатухающих колебаний ( $R = 0, \beta = 0$ ) фазовая кривая имеет форму эллипса (рис. 4,а). Для реального контура ( $R \neq 0, R < R_{kp}$ ) фазовая кривая представляет собой скручивающуюся спираль, причем большему сопротивлению контура соответствует большее затухание (рис. 4,б и рис.4,в).

При апериодическом колебании, когда сопротивление контура больше критического ( $R > R_{kp}$ ), фазовая кривая вырождается в линию, изображенную на рис. 4,г.

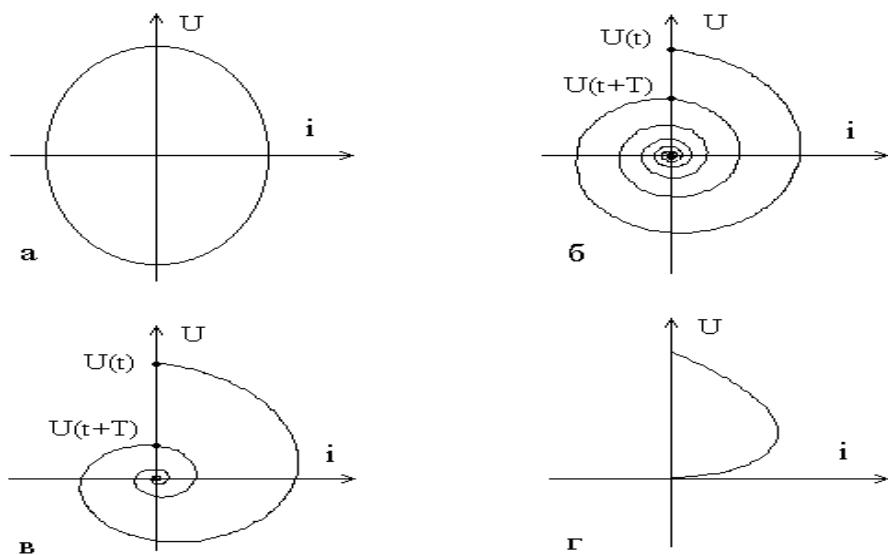


Рис.4.

#### *Оборудование и материалы.*

Лабораторная установка состоит из осциллографа и стенда, содержащего две катушки индуктивности, два конденсатора, магазин сопротивлений и генератор импульсов.

Генератор вырабатывает короткие положительные импульсы, в результате этого конденсатор колебательного контура периодически получает некоторый электрический заряд. В промежутках времени между импульсами в контуре будут совершаться затухающие колебания. Графики этих колебаний можно будет наблюдать на экране осциллографа и, далее, по ним определять период, логарифмический декремент затухания, добротность, критическое сопротивление.

Необходимые для расчетов параметры элементов контура указаны на стенде.

#### *Указания по технике безопасности.*

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. При выполнении лабораторных работ студентам запрещается:
  - включать схемы под напряжением без проверки преподавателя;
  - прикасаться к незащищенным изоляцией частям схемы, находящихся под напряжением;
  - определять наличие напряжения на элементах цепи при помощи пальцев; проверка наличия напряжения производится только с помощью вольтметра и в присутствии преподавателя;
  - при работе на лабораторной установке прикасаться одновременно к стенам, радиаторам системы отопления и других металлических предметов;
  - включать рубильники, нажимать кнопки, прикасаться к электрическому оборудованию, не относящемуся к данной лабораторной работе без ведома преподавателя;
  - производить по ходу выполнения работы переключения в схеме, не обесточив её;
  - бросать соединительные провода на пол и на исследуемую установку;
  - заменять сгоревшие предохранители на рабочих щитах при включённых рубильниках;
  - класть на рабочий стол посторонние предметы;
  - входить в лабораторию в верхней одежде;
  - курить и зажигать огонь.
4. Перед включением схемы обязательно предупредить членов бригады: «Осторожно! Включаю!».
5. При работе на установках, в которых может наблюдаться резонанс, соблюдать особую осторожность.
6. При наличии в схеме конденсаторных батарей, необходимо после отключения питания их разрядить под наблюдением преподавателя.
7. При обнаружении каких-либо неисправностей, исчезновения напряжения в сети, а также при несчастном случае, немедленно прекратить работу, отключить установку от электропитания и сообщить преподавателю.
8. Помнить, что при отключении цепей постоянного тока с индуктивностью возможно кратковременное резкое повышение напряжения.
9. Студенты, нарушившие правила техники безопасности, не допускаются к дальнейшей работе в лаборатории и привлекаются к ответственности.

### **Задания.**

1. Собрать схему согласно рис. 5. Сопротивление магазина  $R_m$  сделать равным нулю. Индуктивность и емкость контура выбрать произвольно, внести их параметры в табл. 11.1.

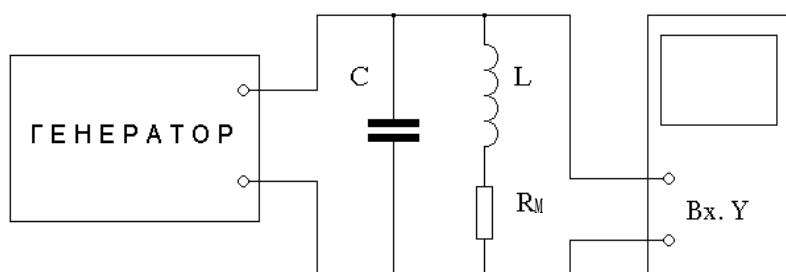


Рис. 5.

2. Включить осциллограф, прогреть его в течение 1-2 минут. Ручкой “Фокус” хорошо сфокусировать луч, чтобы уменьшить ошибку измерений.

3. Включить генератор. С помощью ручек управления разверткой осциллографа добиться неподвижной картины колебаний так, чтобы обеспечить достаточно точное измерение временных интервалов и амплитуд колебаний.

4. С помощью полученной осциллограммы, аналогичной рис. 3, измерить период колебаний  $T_0$  при минимальном сопротивлении контура, т.е. при  $R_M = 0$ , результат внести в табл. 1 в миллисекундах.

Для повышения точности можно измерить промежуток времени, соответствующий нескольким периодам колебаний, разделить его на число периодов и, таким образом, определить длительность одного периода.

5. Увеличивая сопротивление магазина  $R_M$ , проследить за возрастанием скорости затухания колебаний и определить критическое сопротивление контура, соответствующее переходу от периодических колебаний к апериодическим (т.е. переходу осциллограммы от рис. 2,в к рис. 2,г):

$$R_{kp} = R_L + R_M,$$

где  $R_L$  – собственное сопротивление катушки индуктивности. Полученное значение  $R_{kp}$  внести в табл. 1.

6. Уменьшить сопротивление  $R_M$ , например, вдвое от  $R_{kp}$ . В контуре вновь возникнут затухающие периодические колебания. Определить период этих колебаний  $T$  и вместе с полученным значением сопротивления контура ( $R = R_L + R_M$ ) занести в табл. 1. Убедиться в различии периодов колебаний  $T_0$  и  $T$ , соответствующих различным значениям сопротивления контура.

Таблица 1.

№	$C, \mu\Phi$	$L, \text{мГн}$	$R_L, \text{Ом}$	$T_0, \text{мс}$	$R_{kp}, \text{Ом}$	$R_M, \text{Ом}$	$R, \text{Ом}$	$T, \text{мс}$
1								
2								
3								
...								
...								

7. Повторить измерения по пунктам 4 – 6 три раза для различных комбинаций  $L$  и  $C$ .

8. Для выбранных значений емкости  $C$ , индуктивности  $L$ , сопротивления  $R_L$  и полного сопротивления контура  $R$ , внесенных в табл. 1, вычислить и занести в табл. 2 теоретические значения:

$T_0$  – по формуле (10);  $T$  – по формуле (9);

$R_{kp}$  – по формуле (12);  $\delta$  – по формуле (14),

$Q$  – по формуле (20).

Таблица 2.

№	$T_0, \text{мс}$	$T, \text{мс}$	$R_{kp}, \text{Ом}$	$\delta$	$Q$
1					
2					

3					
...					
...					

9. Для произвольных значений  $L$  и  $C$  исследовать зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура. Увеличивая сопротивление контура с помощью магазина сопротивлений  $R$ , измерить амплитуды  $A_1$  и  $A_2$ , которые соответствуют моментам времени, отличающимся на период (рис. 3).

Результаты измерений внести в табл. 3. Подсчитать экспериментальные значения логарифмического декремента затухания  $\delta_3$  по формуле (13), по формуле (14) – его теоретические значения  $\delta_t$ .

Таблица 3

№	$R$ , Ом	$A_1$ , мм	$A_2$ , мм	$\delta_3$	$\delta_t$
1					
2					
3					
4					
5					

10. Для наблюдения фазовых кривых собрать схему по рис. 6.

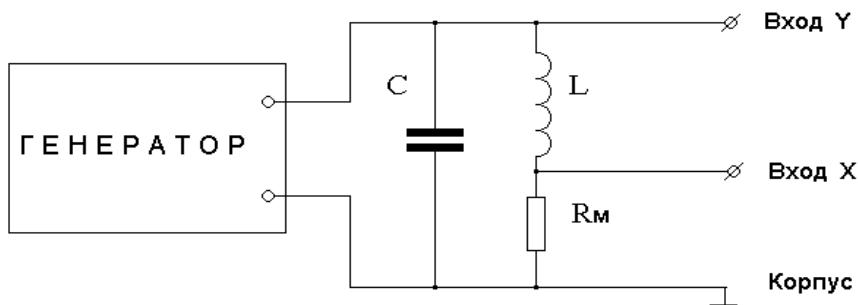


Рис. 6.

При этом на вход  $X$  подается сигнал с сопротивления  $R_m$ , который находится в фазе с током в контуре. На вход  $Y$  подается сигнал, находящийся в фазе с напряжением. Наблюдая фазовые кривые для различных сопротивлений контура, можно исследовать влияние затухания на форму фазовой кривой и уточнить значение критического сопротивления для данных значений емкости и индуктивности (рис. 4,г).

С помощью фазовых кривых можно провести также измерения по п.9 (рис. 4,б).

11. Для одновременного наблюдения осциллограмм колебаний тока и напряжения и определения сдвига фаз между ними собрать схему в соответствии с рис. 7.

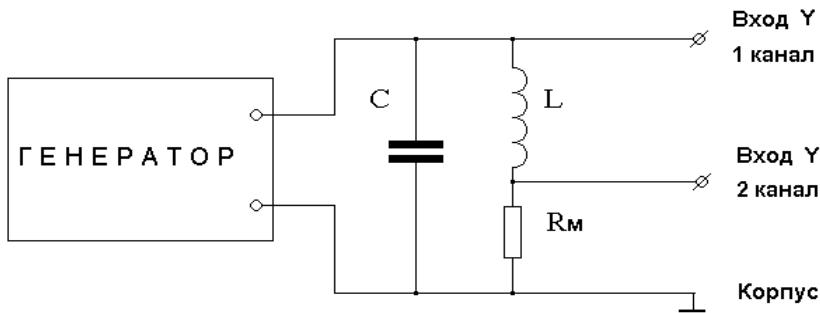


Рис. 7.

На входы  $Y$  первого и второго каналов осциллографа подаются сигналы, пропорциональные напряжению и току в контуре. Убедиться в наличии сдвига фаз этих колебаний, оценить величину этого сдвига.

**Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

**Контрольные вопросы.**

1. Рассказать об электрических колебаниях в контуре.
2. Дать определение амплитуды, частоты, фазы, периода колебаний.
3. Какой процесс называется апериодическим? Что такое критическое сопротивление? Вывести уравнение (12).
4. Какие превращения энергии имеют место при периодическом и апериодическом процессах?
5. Какие формулы описывают энергию электрического поля конденсатора и энергию магнитного поля катушки.
6. Вывести уравнение затухающих электрических колебаний.
7. Что такое логарифмический декремент затухания? Объяснить его физический смысл, вывести уравнение (15).
8. Пояснить физический смысл добротности контура. Вывести уравнение (20).
9. Что называется фазовой кривой? Получить уравнение этой кривой.
10. Вывести уравнение (7), применив закон Ома для неоднородной замкнутой цепи.
11. Какова величина сдвига фаз между колебаниями тока и напряжения в идеальном колебательном контуре? Как можно измерить ее в реальных условиях?
12. Рассказать о практическом применении колебательного контура в технике.

**Лабораторная работа № 5**

**Тема работы. Определение удельного заряда электрона методом магнетрона**

**Цель работы.** изучение движений зарядов в электрических и магнитных полях, измерение удельного заряда электрона.

## Теоретическая часть.

Удельным зарядом частицы называют отношение ее заряда  $Q$  к массе  $m$ . Именно удельным зарядом  $Q/m$  описывается главным образом поведение частицы в электрических и магнитных полях.

В настоящей работе определяется удельный заряд наиболее часто встречающейся в практике частицы-электрона методом магнетрона. Магнетрон- электронный прибор, в котором поток электронов одновременно управляет взаимно - перпендикулярными электрическим и магнитным полями. В современной технике магнетрон используется для генерирования сверхкоротких электромагнитных волн например в радиолокации, СВЧ-технике.

В лабораторной работе в качестве магнетрона используется двухэлектродная лампа с цилиндрическим анодом  $A$  и прямолинейным катодом  $K$ , расположенным на оси анода, помещенная в аксиальное (направленное вдоль оси анода) магнитное поле с индукцией  $B$ ,

созданное достаточно длинным соленоидом  $C$  рис.1 Электроны испускаемые раскаленным катодом под действием электрического поля разностью потенциалов между катодом и анодом при отсутствии магнитного поля движутся по радиальным траекториям (рис.2a).

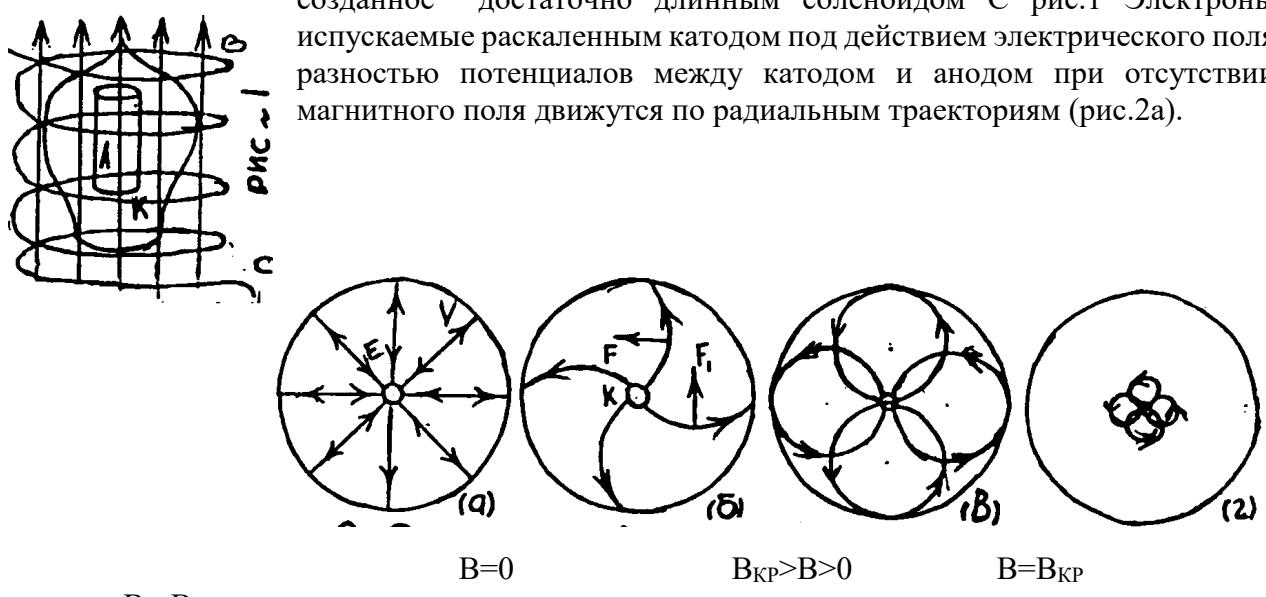


Рис.2

Как известно разность потенциалов численно равна работе по переносу единичного заряда из одной точки поля в другую. В данном случае разность потенциалов, равная анодному напряжению  $U_A$ , совершают перенос от катода к аноду электрона зарядом  $Q=e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. И выполняемая электрическим полем работа  $A=eU_A$  идет на сообщение электрону кинетической энергии, равной  $mv^2/2$ .

Следовательно

$$eU_A = \frac{mv^2}{2}$$

Отсюда скорость  $V$  электрона достигшего анода будет равной

$$V = \sqrt{2 \frac{e}{m} U_A} \quad (1)$$

Следует заметить, что электрическое поле между анодом и катодом резко неоднородно. Густота силовых линий, а следовательно, и напряженность поля  $E$ , вблизи катода много больше чем в средней и прианодной области (рис.2а). Поскольку напряженность есть градиент потенциала, то есть равна изменению потенциала на единице расстояния вдоль силовой линии, анодное напряжение  $U_A$  распределено в пространстве между анодом и катодом неравномерно. Основная часть его падает на прикатодном участке силовых линий. Идеализируя, можно считать, что все анодное напряжение падает на очень малом участке вблизи катода, на котором и происходит разгон электронов, а дальше, т.е. практически на всем своем пути от анода к катоду, электроны движутся с практически постоянной по величине скоростью. Эта скорость и определяется по формуле (1).

Если по длинному соленоиду пропустить ток силой  $I_c$ , то внутри его создастся однородное магнитное поле с индукцией

$$B = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I_c \quad (2)$$

где  $\mu$  -магнитная проницаемость среды (в данном случае  $\mu = 1$ );  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $N$ - число витков соленоида ( $N=2000$ );  $l$  - длина соленоида.

Как известно, на электрон, движущийся в магнитном поле действует сила Лоренца

$$F = e[\bar{V} \cdot \bar{B}] \quad (3)$$

Так как в силу конструкции магнетрона векторы  $\bar{V}$  и  $\bar{B}$  ортогональные, то величина силы Лоренца будет равна

$$F = eVB, \quad (4)$$

а ее направление  $F$  определяется из векторного произведения (3) или по правилу левой руки с учетом отрицательного знака заряда электрона (рис.2б). Из формулы Лоренца (3) следует, что магнитное поле в отличие от электрического действует только на движущуюся частицу: при  $V=0$ ,  $F=0$ . Кроме того это действие не приводит к изменению величины скорости частицы. Действительно элементарная работа силы Лоренца  $dA_L$  равна  $dA_L = Fdr \cos\alpha$ , где  $\alpha$ - угол между перемещением частицы  $dr$  и силы  $F$ . Из векторного произведения (3) следует, что  $F \perp V$ , следовательно  $F \perp dr$  (т.к.  $\bar{V} = \left( \frac{\bar{dr}}{dt} \right)$ ) и  $\cos\alpha=0$ . Значит, работа силы

Лоренца  $dA_L$  равна нулю, т.е. в магнитном поле кинетическая энергия частицы  $\frac{mV^2}{2}$  остается неизменной и ее скорость по величине постоянной ( $V=\text{const}$ ) таким образом магнитное поле не ускоряет частицы (не изменяет величины их скорости), а только искривляет их траекторию. Сила Лоренца является силой центростремительной, и по второму закону Ньютона имеем

$$F = eVB = m\bar{V}^2 / r \quad (5)$$

где  $r$ - радиус кривизны траектории частицы (электрона).

$$\text{Из (5) для } r \text{ получим} \quad r = \frac{V}{\frac{e}{m} \cdot B} \quad (6)$$

Как видно из формулы (6) в однородном ортогональном магнитном поле ( $B=\text{const}$ ) траектория частицы- окружность ( $r=\text{const}$ ). При этом учтено, что  $V=\text{const}$ , т.к. магнитное поле электроны не ускоряет, а геометрия электрического поля в данном магнетроне позволяет считать их скорости практически неизменными на большей части пути от анода к катоду, о чем писалось выше.

С ростом индукции магнитного поля  $B$  радиусы траектории электронов уменьшаются и при некотором значении  $B=B_{kp}$  (критическое) они станут равными половиными расстояния между анодом и катодом (рис. 2 в)

$$r = (R_A - R_k)/2 \quad (7)$$

В этом случае электроны перестанут достигать анода и будут по окружности возвращаться к катоду. При этом анодный ток  $I_A$  лампы, пропорциональный количеству

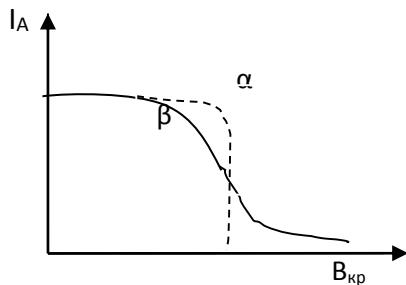


Рис. 3

электронов, достигающих анод в единицу времени, резко уменьшается теоретически до нуля (кривая (a) на рис.3). При дальнейшем увеличении индукции магнитного поля ( $B > B_{kp}$ ) электроны будут круче заворачивать к катоду, а анодный ток останется равным нулю (рис.2). Наблюдение скачкообразного уменьшения анодного тока магнетрона в зависимости от величины магнитного поля лежит в основе используемого метода определения удельного заряда электрона. Расчетная формула для  $e/m$  легко получается из выражения для радиуса кривизны (6), если учесть его критическое значение (7) и выразить скорость электронов из формулы (1)

$$\frac{R_A - R_K}{2} = \frac{V}{\frac{e}{m} B_{kp}} = \frac{\sqrt{2 \frac{e}{m} U_A}}{\frac{e}{m} B_{kp}} \quad \text{Откуда получим: } \frac{e}{m} = \frac{8 U_A}{B_{kp}^2 (R_A - R_K)^2}$$

Выражая  $B_{kp}$  из формулы (2) окончательно найдем, что

$$\frac{e}{m} = K \frac{U_A}{I_{kp}^2}, \quad \text{где } K = 2 \left( \frac{2l}{\mu \mu_0 N (R_A - R_K)} \right)^2 \quad (8)$$

Через  $I_{kp}$  обозначено значение тока соленоида  $I_c$  соответствующее индукции  $B=B_{kp}$ . Коэффициент  $K$  зависит только от конструкционных данных магнетрона.

Таким образом, для определения удельного заряда электрона методом магнетрона, достаточно снять зависимость анодного тока лампы  $I_A$  от тока в соленоиде  $I_c$ , так называемую сбросовую характеристику. Очевидно, форма графика этой зависимости должна быть аналогичной кривой  $I_A = f(B)$ , представленной на рис.3. Используя полученную кривую, на ней можно найти значение  $I_{kp}$ , а затем по формуле (8) вычислить  $e/m$ .

На рис.3 представлена идеализированная (a) и практическая(б) сбросовые характеристики. На последней, спадающий участок более размытый. Это объясняется как различного рода несовершенствами конструкции магнетрона. Сюда относятся не точная коаксиальность анода и катода, не строгая однородность магнитного поля внутри соленоида и др. Особо нужно отметить тепловой разброс начальных скоростей электронов, вылетающих с поверхности катода, приводящий к размытию кривой. В связи с этим затрудняется отсчет сбросового, т.е. критического значения намагничивающего тока  $I_{kp}$ . По-видимому, наиболее удовлетворяющему теории, следует считать то значение  $I_c$ , при котором наблюдается наибольшее изменение  $I_A$ .

### Схема экспериментальной установки

Рабочая схема показана на рис.4. Основу ее составляет электронная лампа  $L$ , помещенная в соленоид  $C$ .

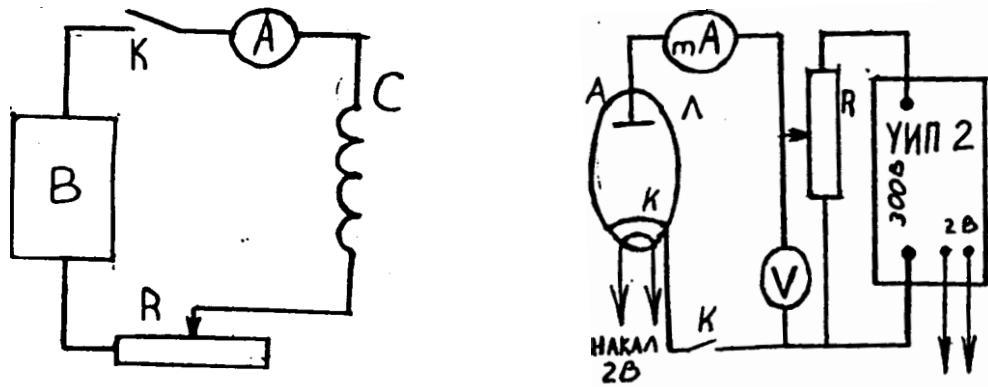


рис.4

Постоянное анодное напряжение  $U_A$  снимается с универсального источника питания (УИП-2), регулируется потенциометром  $R$ , рукоятка которого располагается на панели УИП-2 и измеряется вольтметром  $V$ . Анодный ток измеряется миллиамперметром  $mA$ . На панели УИП имеются также клеммы, с которых снимается напряжение 2 В, предназначенная для питания накала нити катода.

Намагничивающийся соленоид  $C$  питается от выпрямителя  $B$  Б5-7. Ток соленоида регулируется ручками на панели выпрямителя и более плавно реостатом  $R$ .

Измеряется ИС амперметром  $A$ .

#### **Оборудование и материалы.**

Магнетрон - электрическая лампа 2Ц2С (диод), расположенная внутри соленоида. Универсальный источник питания (УИП-2), выпрямитель Б5-7 с регулируемым напряжением, вольтметр, амперметр, миллиамперметр, реостат.

#### **Указания по технике безопасности.**

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
5. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

#### **Задания.**

1. Собрать схему (рис.4). При этом регуляторы выходного анодного напряжения УИП-2 и выпрямителя Б5-7 установить на нулевое значение. Схему не включать до проверки ее преподавателем или лаборантом.
2. После включения схемы подождать 2-3 минуты, пока прогреется катод магнетрона.
3. По заданию преподавателя установить величину анодного напряжения  $U_A$  и записать ее в отчет по работе.
4. Поддерживая все время  $U_A$  строго постоянным (особенно в критический момент) последовательно увеличивая намагничивающий ток соленоида  $I_c$  снять сбросовую характеристику  $I_A = I_A(I_c)$ . Результаты измерения записать в таблицу.

$I_c(A)$				
----------	--	--	--	--

I <sub>A</sub> (mA)				
---------------------	--	--	--	--

Интервалы изменения  $I_c$  и число измерений подобрать самостоятельно, более тщательно измеряя критический участок.

5. Пострить график сбросовой характеристики магнетрона.

6. Определить по нему критическое значение  $I_{kp}$  и записать его в отчет.

7. Записать в отчет конструктивные данные магнетрона:

число витков соленоида  $N=2000$ , радиус катода  $R_k = 0,1\text{см}$  и анода  $R_A=0,95\text{см}$ .

Измерить и записать длину соленоида  $l$ .

8. Расчитать по формуле (8) величину коэффициента  $K$  и определить значение  $\epsilon_m$  для электрона.

9. Сравнить полученное значение  $\epsilon_m$  с табличным и выразить разницу в процентах.

### **Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

### **Контрольные вопросы.**

1. Что называется удельным зарядом частиц?

2. Как действует электрическое поле на заряженную частицу?

3. Как действует магнитное поле на находящуюся в нем частицу?

4. Каково устройство используемого в работе магнетрона?

5. Как движутся электроны в магнетроне?

6. Расскажите о критическом режиме работы магнетрона?

7. Какие идеализации вводятся при рассмотрении движения электронов в магнетроне?

8. Вывести рабочую формулу (8).

## **Лабораторная работа № 6**

### **Тема работы. Измерение длины световой волны с помощью дифракционной решётки**

**Цель работы.** 1. Познакомится с явлением дифракции света в параллельных лучах дифракционной решётки.

2. Определить длину световой волны с помощью дифракционной решётки.

Приборы и принадлежности: установка с источником света, щелью и дифракционной решёткой.

### **Теоретическая часть.**

1. Дифракция света.

Дифракцией света называется огибание световыми волнами встречных препятствий.

В более широком смысле дифракцией света называется совокупность явлений, обусловленных волновыми свойствами света и наблюдаемых при его распространении в

среде с резко выраженными неоднородностями (отверстия в непрозрачных экранах, границы непрозрачных тел и т.д.). Явление дифракции указывает на нарушение законов геометрической оптики. Явление дифракции наблюдается на расстоянии  $\ell$  от препятствия  $\ell \approx D^2 / 4\lambda$ , где  $D$  - линейные размеры препятствия,  $\lambda$  - длина волны (условие наблюдения дифракции).

Для решения дифракционных задач - отыскание распределения на экране интенсивности световой волны, распространяющейся в среде с препятствиями, - применяются приближенные методы, основанные на принципах Гюйгенса и Гюйгенса - Френеля.

Принцип Гюйгенса', каждая точка  $S_1, S_2, \dots, S_n$  фронта волны  $AB$  является источником новых, вторичных волн. Новое положение фронта волны  $A_1 B_1$  через время  $\Delta t$  представляет собой огибающую поверхность вторичных волн (рис.1).

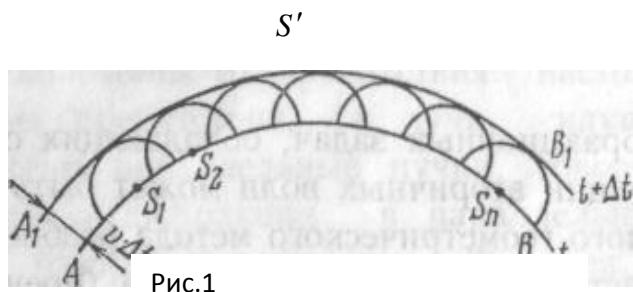


Рис.1

Принцип Гюйгенса является чисто геометрическим. Он позволяет, например, объяснить равенство углов падения  $i$  и отражения  $i'$  на поверхности  $MN$  среды при отражении света (рис.2). Разность хода СВ лучей  $AA_2$  и  $BB_2$  создает такой фронт  $DB$  отраженной волны, что из прямоугольных треугольников  $ADB$  и  $ACB$  ( $AD=CB$ ) следует равенство:  $i=i'$  (рис.2). Также можно объяснить закон преломления.

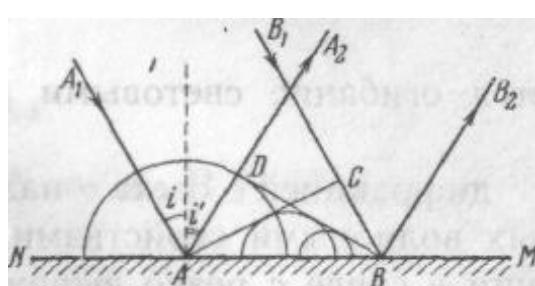


Рис.2

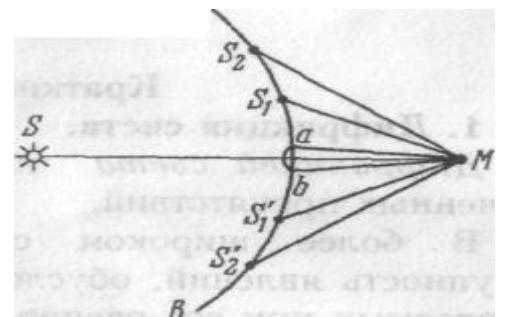


Рис.3

Принцип Гюйгенса-Френеля: все вторичные источники  $S_1, S_2 \dots S_n$ , расположенные на поверхности фронта волн, когерентны между собой. Амплитуда и фаза волны в любой точке  $M$  пространства - это результат интерференции волн, излучаемых вторичными источниками (рис. 3).

Прямолинейное распространение луча  $SM$ , испущенного источником  $S$  в однородной среде, объясняется принципом Гюйгенса-Френеля. Все вторичные полны, излучаемые вторичными источниками, находящимися на поверхности фронта волны  $AB$ , гасятся в результате интерференции, кроме волн от источников, расположенных на малом участке сферического сегмента  $ab$ ,

перпендикулярного к SM (рис.3). Свет распространяется вдоль узкого конуса с очень малым основанием, т.е. практически прямолинейно.

В ряде дифракционных задач, обладающих осевой симметрией, расчет интерференции вторичных волн может быть сильно упрощен с помощью наглядного геометрического метода разбиения фронта волны на кольцевые участки, называемые зонами Френеля. Разбиение на зоны производится так, чтобы оптическая разность хода от сходственных границ (внутренних или внешних) каждой пары соседних зон до рассматриваемой точки M равнялась  $\frac{\lambda}{2}$ . Вторичные волны от сходственных точек двух соседних зон приходят в точку M в противоположных фазах и взаимно ослабляют друг друга при наложении.

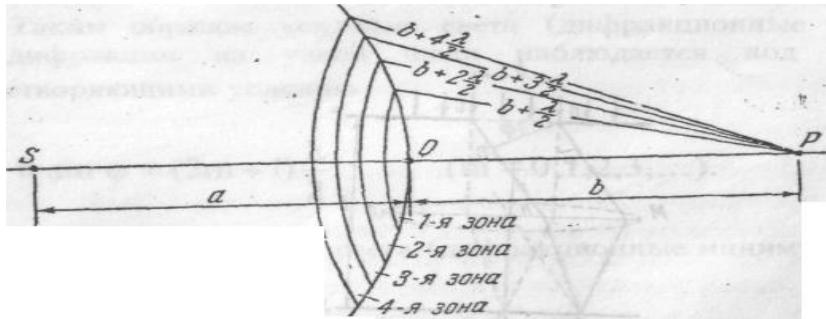


Рис. 4

На рис. 4 показано построение зон Френеля в случае сферической волны возбуждаемой источником S.

Так как  $a$  и  $b \gg \lambda$ , то при не слишком большом  $k$  площади первых  $k$  зон Френеля одинаковы:

$$S_1 = S_2 = \dots S_k = \frac{\pi \cdot ab\lambda}{a+b}$$

В случае плоского волнового фронта

$$S_1 = S_2 = \dots S_k = \pi \cdot b\lambda$$

Различают два случая дифракции. Если источник света и точка наблюдения P расположены от препятствия настолько далеко, что лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку P образуют практически параллельные пучки, говорят о дифракции Фраунгофера или о дифракции в параллельных лучах. В противном случае говорят о дифракции Френеля, т.е. дифракцией Френеля называют такие дифракционные задачи, в которых нельзя пренебречь кривизной волновых поверхностей падающей и дифрагировавшей волн.

## 2. Дифракция света на щели. Дифракционная решетка.

Пусть на непрозрачный экран E, в котором прорезана узкая щель BC, имеющая постоянную ширину  $b=BC$  и длину  $L \gg b$ , падает перпендикулярно к экрану пучок параллельных лучей монохроматического света (рис 5).

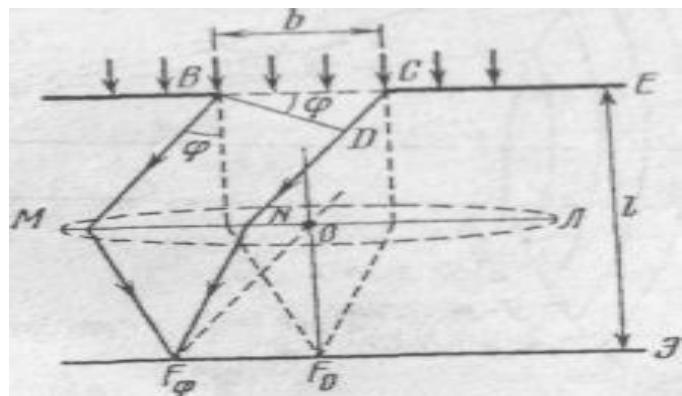


Рис. 5

На экране Э, удаленном от щели на расстоянии  $l$ , будет наблюдаться явление дифракции. Если бы этого явления не было, то на экране Э, установленном в фокальной плоскости собирающей линзы МЛ, в точке  $F_0$  главного фокуса линзы получилось бы изображение источника света. При дифракции на узкой щели на экране наблюдается интерференционная картина: последовательность размытых изображений источника света, разделенных темными промежутками. В точке  $F_\phi$  на экране собираются все параллельные лучи, падающие на линзу под углом  $\phi$  (угол дифракции) к оптической оси  $OF_0$  линзы, перпендикулярной к фронту волны.

Так как вторичные фиктивные источники фронта волн ВС точечные, то фронты волн, излучаемых ими сферические, а следовательно, дифрагированные лучи идут во всех направлениях. Выберем те, которые идут под углом  $\phi$  к направлению падающих лучей. Падая на линзу эти лучи собираются в одной точке  $F\phi$  фокальной плоскости.

Мысленно разобьем щель на участки, крайние точки которых посылают лучи с разностью хода  $\frac{\lambda}{2}$ . В этом случае все лучи, посланные первым участком будут погашены лучами второго участка, лучи третьего - лучами четвертого и т.д. Следовательно, если число участков разбиения четное, т.е. если  $\delta = 2m \frac{\lambda}{2}$ , то в точке  $F\phi$  будет темно (минимум освещенности). Если же число участков разбиения нечетное, то точка  $F\phi$  будет освещена (максимум освещенности).

Таким образом, усиление света (дифракционные максимумы) при дифракции на узкой щели наблюдается под углами  $\phi$ , удовлетворяющими условию

$$b \sin \varphi = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

## Условие ослабления света (дифракционные минимумы).

$$b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}, (m = 0, 2, \dots).$$

Число  $m$  называется порядком дифракционного максимума или минимума. Величина  $\delta = CD = b \sin \phi$  представляет собой оптическую разность хода между крайними лучами CN и BM, идущими от щели под углом  $\phi$  (рис.5). В направлении  $\phi=0$  наблюдается самый интенсивный центральный максимум нулевого порядка. В точке  $F_0$  всегда наблюдается усиление света, независимо от значения длины волны  $\lambda$ .

При наблюдении дифракции на щели в белом свете интерференционная картина на экране оказывается окрашенной. В

дифракционном максимуме каждого порядка ( $m=\text{const}$ ) ближе к центральному, неокрашенному максимуму оказываются дифракционные максимумы с меньшими длинами волн.

Дифракционной решеткой в оптике называется совокупность большого числа препятствий и отверстий, сосредоточенных в ограниченном пространстве, на которых происходит дифракция света.

Простейшей дифракционной решеткой является система из  $N$  одинаковых параллельных щелей в плоском непрозрачном экране шириной  $b$  каждая, расположенных на равных непрозрачных промежутках  $a$  друг от друга (рис. 6).

Величина  $d=b+a$  называется постоянной дифракционной решетки.

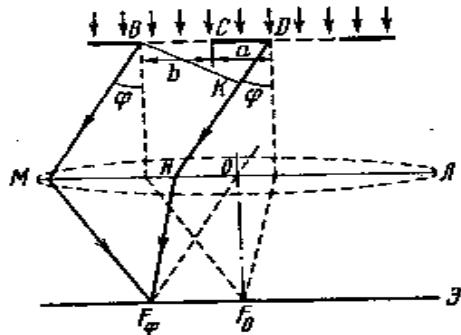


Рис.6

По принципу Гюйгенса-Френеля каждая щель является источником когерентных волн, способных интерферировать друг с другом. Если на дифракционную решетку перпендикулярно к ней падает пучок параллельных лучей света, то под углом дифракции  $\varphi$  на экране  $\mathcal{E}$ , расположенным в фокальной плоскости линзы, будет наблюдаться система дифракционных максимумов минимумов, полученная в результате интерференции света от различных щелей.

Пусть при падении плоской монохроматической волны на дифракционную решетку лучи, дифрагированные на одной щели дают в точке  $F\varphi$  максимум освещенности. Это еще не значит, что в точке  $F\varphi$  будет максимум освещенности, так как лучи посланные этой щелью могут быть погашены лучом от соседней, или наоборот усилены. Если усилены, то в точке  $F\varphi$  будет большая освещенность, чем от одной щели. Тогда, учитывая условие усиления волн при интерференции, главные максимумы при дифракции на решетке наблюдаются под углами  $\varphi$  удовлетворяющими условию

$$d \sin \varphi = k\lambda,$$

где  $k=0,1,2,3$  называется порядком главного максимума. Величина  $\delta = DK = d \sin \varphi$  является оптической разностью хода между сходственными лучами  $BM$  и  $DN$ , идущими от соседних щелей (рис.6).

Главные минимумы на дифракционной решетке наблюдаются под такими углами  $\varphi$  дифракции, для которых свет от разных частей каждой щели полностью гасится в на одной щели

$$b \sin \varphi = m\lambda, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Так как если ни одна из щелей не посылает лучей в этом направлении то в соответствующей точке на экране будет темнота.

При наблюдении дифракции в немонохроматическом свете все главные максимумы, кроме центрального нулевого максимума, окрашены. С увеличением длины волны главные максимумы внутри данного порядка располагаются под большими углами от центрального. Радужная полоска, содержащая семь цветов от фиолетового до красного (считается от центрального максимума), называется дифракционным спектром. Дифракционная решетка является одним из простейших достаточно точных устройств для измерения длин волн.

## Теория метода и описание установки.

Рассмотрим один из методов определения длины светлой волны при помощи дифракционной решетки. На оптической скамье (или специальной рейке) укрепляется дифракционная решетка Р и перпендикулярно оси подвижная миллиметровая линейка АВ с щелью Щ. Деления линейки, щель и штрихи решетки располагают параллельно друг друга. Щель освещается источником S и рассматривается через решетку глазом (рис. 7). На линейке проецируются изображения главных максимумов и измеряется расстояние  $l_k$  между максимумом 1-го порядка и максимумом нулевого порядка (т.е. от щели)

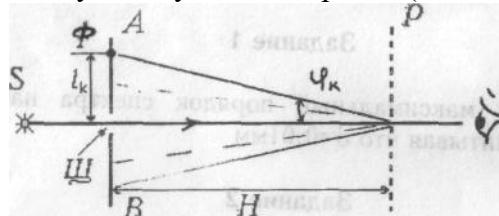


Рис. 7

Ход лучей после дифракционной решетки соответствует ходу лучей на рис. 6. От источника света S через широкую щель в линейке АВ проходит пучок белого света и попадает сначала на дифракционную решетку, а затем в глаз наблюдателя. Лучи, идущие параллельно главной оптической оси хрусталика дают в фокусе центральный (нулевой) максимум  $F_0$  освещенности белым светом.

Лучи, создающие в некоторой точке сетчатки  $F\phi$  максимум освещенности каким-либо цветом (например, фиолетовым) падают на хрусталик под углом  $\phi$ . Следовательно, они видны как бы выходящими из точки  $\Phi$ , положение которой определяется по шкале линейки АВ.

Таким образом роль линзы Л (см. рис. 6) выполняет хрусталик глаза, который фокусирует параллельные лучи, полученные в результате дифракции (например, лучи М и N) на сетчатой оболочке глаза (играющей роль экрана).

Условие максимума освещенности имеет вид.

$$ds \sin \phi = k\lambda \quad (1)$$

Из рисунка видно, что

$$\sin \phi = \frac{\ell}{\sqrt{H^2 + \ell^2}} \quad (2)$$

Следовательно

$$\lambda = \frac{d\ell}{k\sqrt{H^2 + \ell^2}} \quad (3)$$

Так, как  $H \gg \ell$ , то

$$\lambda = \frac{d\ell}{kH} \quad (4)$$

### Оборудование и материалы.

Установка с источником света, щелью и дифракционной решеткой.

### Указания по технике безопасности.

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.

2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
5. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

**Задания.**

Определить максимальные порядок спектра наблюдаемого в данной работе, учитывая что  $d=0.01$  мм.

1. Установить линейку АВ на заданном расстоянии  $H$  от дифракционной решетки ( $H > 300$  мм). Включить источник света  $S$  и, глядя через дифракционную решетку не щель, провести наблюдение дифракционного спектра.

2. Определение положение  $l_k$  для синей, зеленой и красной линии слева и справа для 1-го и 2-го порядков спектров.

Результаты занести в таблицу.

3. По формуле (4) вычислить длины волн указанных линий.

4. Указать и оценить основные погрешности данного метода измерения, а также погрешность, допускаемую при использовании формулы (4), а не (3)

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ.**

$d=0,01$  мм  $H=$  (мм)

Порядок спектра $k$	lk(мм)					
	Фиолетовый		Зеленый		Красный	
	левый	правый	левый	правый	левый	правый
I						
II						

**Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

**Контрольные вопросы.**

1. Что называется дифракционного света? Каковы условия наблюдения этого явления.
2. Сформулировать принцип Гюйгенса.

3. Сформулировать принцип Гюйгенса-Френеля.
4. Объяснить с использованием принципа Гюйгенса-Френеля закон прямолинейного распространения света.
5. Что такое «зоны Френеля». Как определяются площади первых к зон?
6. Что такое дифракционная решетка? Определить условия дифракции на решетке.
7. Вывести формулу (4).

## Лабораторная работа № 7

### Тема работы. Проверка закона Малюса

**Цель работы.** Проверить выполнение закона Малюса.

#### Теоретическая часть.

Как известно, плоская электромагнитная световая волна является поперечной и представляет распространение взаимно перпендикулярных колебаний: вектора напряженности электрического поля  $E$  и вектора напряженности магнитного поля  $H$  (рис. 1а). Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются в основном колебаниями электрического вектора. Вектор  $E$  называется световым вектором, и все рассуждения мы ограничим рассмотрением этого вектора. Наличие вектора  $H$  подразумевается.

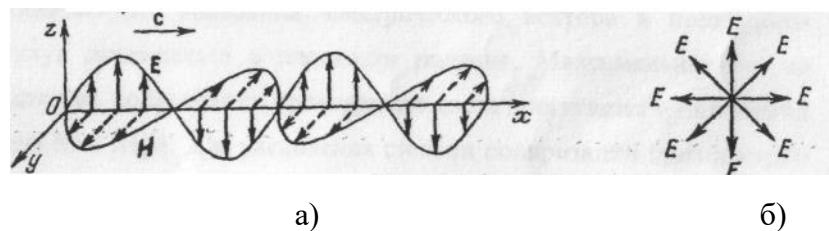


рис1.

Световой пучок, в котором различные направления вектора  $E$  в поперечной к направлению распространения волны плоскости равновероятны, называется естественным (рис. 1б)

Свет, в котором направления колебаний вектора упорядочены каким-либо образом и подчиняются некоторой закономерности, называется поляризованным. Если колебания вектора могут совершаться лишь в одном определенном направлении, то свет называется линейно или плоскополяризованным (рис. 2а).

Если же колебания вектора  $E$  совершаются так, что его конец описывает круг или эллипс, то свет называется соответственно поляризованным по кругу (рис. 2б) или эллиптически поляризованным (рис. 2в). При линейной поляризации плоскость, содержащая вектор  $E$ , называется плоскостью колебаний, или плоскостью поляризации волны.

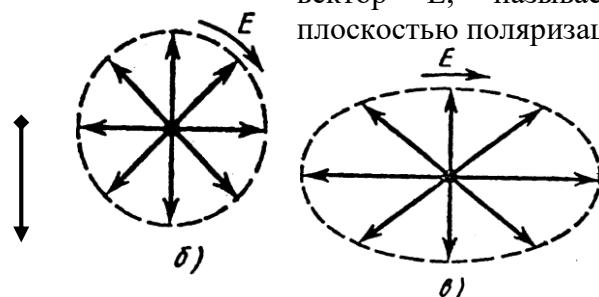


Рис 2.

Для получения линейно поляризованного света применяются специальные оптические приспособления- поляризаторы. Плоскость колебаний электрического вектора в волне, прошедшей через поляризатор, называется плоскостью поляризатора. Для получения плоскополяризованного света используют несколько способов.

а) Отражение света от поверхности диэлектриков.

Отраженный от диэлектрика свет всегда частично поляризован. На рисунке черные точки соответствуют колебаниям вектора  $E$  перпендикулярным плоскости падения, а стрелочки - колебаниям в плоскости падения (Рис.3). Степень поляризации отраженного луча зависит от относительного показателя преломления  $n_{12}$  и от угла падения  $\alpha$ . При падении луча  $E$  на плоскость  $MN$  под углом Брюстера  $\alpha_B$  отраженный луч  $E_\perp$  полностью поляризован. Преломленный луч  $E_1$  поляризован частично. Соотношение  $\tan \alpha_B = n_{21}$  называется законом Брюстера. Плоскость колебаний электрического вектора в отраженном свете перпендикулярна плоскости падения.

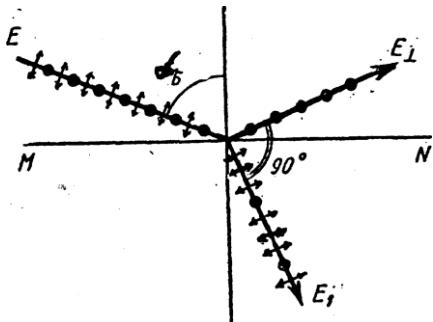


Рис.3

б) Преломление света в стопе стеклянных пластин (стопа Столетова).

Поскольку отраженный от диэлектрической пластины свет частично (или даже полностью) поляризован, проходящий свет также частично поляризуется и становится смешанным светом. Преимущественные колебания электрического вектора в прошедшем свете будут совершаться в плоскости падения. Максимальная, но не полная степень поляризации проходящего света достигается при падении под углом Брюстера. Для увеличения степени поляризации проходящего света используют стопу стеклянных пластинок (стопу Столетова), расположенных под углом Брюстера к падающему свету. В этом случае можно получить практически полностью поляризованный проходящий свет, так как каждое отражение ослабляет пропущенные колебания, перпендикулярные плоскости падения в определенном отношении.

в) Преломление света в двоякпреломляющих кристаллах.

Некоторые кристаллы (исландский шпат, кварц, слюда и др.), а также некоторые изотропные вещества (под действием механических нагрузок или электрических полей) обладают свойством двойного лучепреломления. Преломляясь в таком кристалле, световой луч разделяется на два линейно поляризованных луча со взаимно перпендикулярными направлениями колебаний. Один из лучей называется обычным и обозначается буквой о. а второй -необыкновенным и обозначается буквой е. Обыкновенный луч удовлетворяет обычному закону преломления и лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью. Для необыкновенного луча отношение синусов угла падения и угла преломления не остается постоянным при изменении угла падения.

Кроме того, необыкновенный луч, как правило, не лежит в плоскости падения и отклоняется от луча О даже при нормальном падении света. Отклоняя один из лучей в сторону, можно получить плоскополяризованный луч. Так устроена, например призма

Николя (рис.4). Две естественные грани кристалла исландского шпата срезаются так, чтобы уменьшить угол между поверхностями до  $68^\circ$ .

Затем кристалл распиливается на две части по плоскости BD под углом  $90^\circ$  к новым граням. После полировки поверхности распила склеиваются канадским бальзамом, имеющим показатель преломления  $n$ , удовлетворяющий условию  $n_e < n < n_0$ , где  $n_0$  и  $n_e$  - показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного луча.

Падая под углом, больше предельного, на плоскость BD, обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение на границе шпат - бальзам. Необыкновенный луч, для которого, выходит из призмы линейно поляризованным.

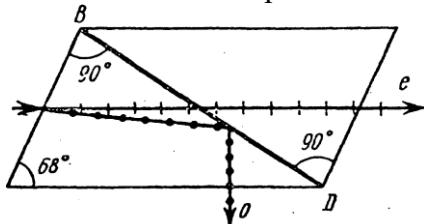


Рис.4

#### г) Поглощение света в дихроических пластинах.

У некоторых двоякпреломляющих кристаллов (например, турмалина) коэффициенты поглощения света для двух взаимно перпендикулярных поляризованных лучей отличаются настолько сильно, что уже при небольшой толщине кристалла один из лучей гасится практически полностью и из кристалла выходит линейно поляризованный пучок света. Это явление называется дихроизмом. В настоящее время дихроические пластиинки изготавливают в виде тонких пленок - поляроидов, имеющих широкое применение. В большинстве случаев они состоят из множества маленьких (толщиной до 0,3 мм) параллельно ориентированных кристаллов сернокислого йодистого хинина-герапатита, находящихся внутри связующей среды - прозрачной пленки.

Для исследования характера и степени поляризации света применяют устройства, называемые анализаторами. В качестве анализаторов используют тоже устройства, которые служат для получения линейно-поляризованного света (поляризаторы).

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет амплитуды  $A_0$  и интенсивностью  $I_0$  (Рис. 5). Сквозь поляризатор пройдет составляющая колебания с амплитудой  $A = A_0 \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью поляризатора. А так как интенсивность света пропорциональна квадрату его амплитуды, то интенсивность прошедшего света определяется выражением  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ .

Это соотношение носит название закона Малюса.

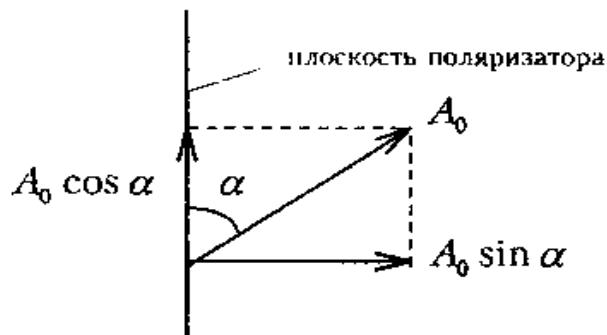


Рис. 5

Поставим на пути естественного луча поляризатор Р и анализатор А (рис.6). Из поляризатора выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого составит половину интенсивности естественного света, т.е.  $I_1 = I_0 / 2$ . Согласно закону Малюса из

анализатора выйдет свет интенсивностью:  $I_2 = I_1 \cos 2\alpha$  (где  $\alpha$  угол между плоскостями поляризатора и анализатора). Таким образом, интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор равна  $I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$ .



Рис.6

### Описание установки.

В настоящей работе для получения и исследования линейного поляризованного света применяют поляроиды. Они изготавливаются из очень мелких кристаллов турмалина или герапатита, нанесенных на целлULOидную пленку. Оптические оси кристаллов специальным образом ориентируют в одном направлении. Кристаллы турмалина пропускают свет только с определенной ориентацией светового вектора и почти полностью поглощают все перпендикулярные составляющие светового вектора к направлению оси кристалла. Схема установки приведена на Рис 7.

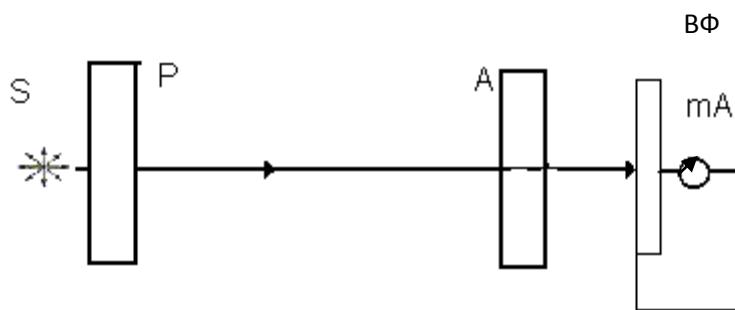


Рис. 7

Свет от источника света S проходит через неподвижный поляризатор P. Анализатор A закреплен во вращающемся диске. Угол поворота анализатора измеряется по шкале диска, разделенной на 360 делений. Пройдя поляризатор и анализатор, свет падает на вентильный фотоэлемент BФ (солнечный элемент). При не очень больших освещенностях сила фототока пропорциональна световому потоку. Величина фототока измеряется микроамперметром. Между поляризатором и анализатором имеется камера, в которую можно помещать образцы для наблюдения явления фотоупругости и интерференции поляризованных лучей.

### Оборудование и материалы.

1. Установка для проверки закона Малюса. 2. Источник света. 3. Микроамперметр.

### Указания по технике безопасности.

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.

3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
5. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

**Задания.**

1. Включить источник света.
2. Вращая анализатор, добиться максимального отбраса стрелки микроамперметра (A может быть следует добиваться минимального? Почему? Чему равен угол в этом случае?).
3. Записывают показания микроамперметра и в дальнейшем, поворачивая анализатор, через 10 градусов записывают соответствующие значение тока.
4. Каким образом по полученным данным можно убедиться в правильности закона Малюса? Какие графики из ниже перечисленных следует построить для проверки закона? (выбор аргументировать)

$$\frac{I}{I_0} = f(\varphi), \quad \frac{I}{I_0} = f(\cos\varphi), \quad \frac{I}{I_0} = f(\cos^2 \varphi)$$

5. Построить график зависимости.

6. Сделать вывод.

**Результаты измерений.**

$\alpha$	I	$\cos\alpha$	$\cos 2\alpha$

**Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

**Контрольные вопросы.**

1. Что представляет из себя световая волна?
2. Какие действия оказывает свет? Благодаря чему это возможно?
3. Что такое поляризация? Какой свет называют естественным? Поляризованным?
4. Опишите виды поляризации.
5. Перечислите способы получения поляризованного света.
6. Сформулируйте закон Малюса.
7. Какие данные в работе позволяют убедится в справедливости закона Малюса ? (ответ сформулируйте).

**Лабораторная работа № 8**

**Тема работы. Изучение внешнего фотоэффекта**

**Цель работы.** Определение скорости полета пули с помощью физического маятника.

## Теоретическая часть.

Различают три вида фотоэффекта:

- *Внешним фотоэффектом* называется вырывание электронов из вещества под действием электромагнитного излучения. Внешний фотоэффект наблюдается преимущественно в проводниках.
- При *внутреннем фотоэффекте* электроны под действием света теряют связь со своими атомами и молекулами, но остаются внутри вещества. Такой вид фотоэффекта возможен только в полупроводниках.
- *Вентильный фотоэффект* заключается в возникновении фото-э.д.с. при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла без наличия внешнего электрического поля.

В данной работе для изучения закономерностей *внешнего фотоэффекта* используют вакуумный фотоэлемент. Он представляет собой стеклянный откачанный сферический баллон, в центре которого расположен анод **A** в виде кольца или пластинки (рис.1). Часть внутренней поверхности баллона покрыта тонким слоем металла, который служит *фотокатодом*. На рис.1 изображена принципиальная схема, с помощью которой исследуется внешний фотоэффект. Между **анодом** и **катодом** источник тока создает электрическое поле. Так как электрическая цепь разомкнута, то при отсутствии света электрический ток через фотоэлемент не идет. При освещении катода свет вырывает из него электроны, которые под действием сил электрического поля движутся к аноду. В цепи появляется электрический ток, называемый *фототоком*. Сила фототока измеряется гальванометром **G**, напряжение между анодом **A** и фотокатодом **K** — вольтметром **V**. Изменяя напряжение с помощью потенциометра **P**, находят зависимость силы фототока

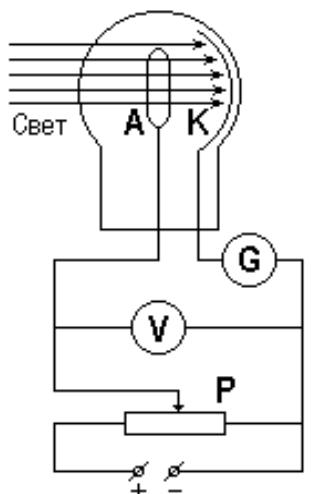


Рис. 1

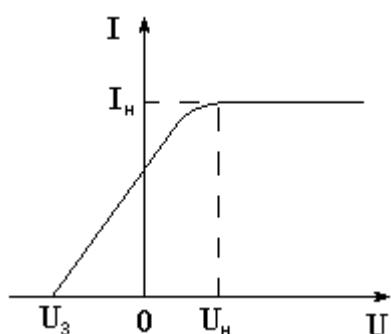


Рис. 2

от напряжения — вольтамперную характеристику.

На рис. 2 изображена вольтамперная характеристика вакуумного фотоэлемента. При  $U = 0$  (между катодом и анодом электрического поля нет) сила фототока все равно не равна нулю. Это обусловлено тем, что электроны, вырванные светом из катода, имеют некоторую начальную скорость  $V$  (а значит, и кинетическую энергию) и часть из них может достигать анода и при отсутствии электрического поля.

Если увеличивать напряжение между катодом и анодом (подавая отрицательный потенциал на катод, а на анод — положительный), будет увеличиваться сила тока.

Это объясняется тем, что теперь электроны, которые при

$U = 0$  не достигали анода, под действием сил электрического поля притягиваются к аноду.

Из графика видно, что при некотором значении  $U = U_n$  сила фототока достигает наибольшего значения, получившего название тока насыщения  $I_n$ . Дальнейшее увеличение напряжения уже не вызывает роста силы тока. Это значит, что все электроны, вырванные светом из катода, достигают анода. Если за единицу времени свет вырывает из фотокатода  $n$  электронов, то ток насыщения будет равен

$$I_n = e \cdot n, \quad (1)$$

где  $e$  — заряд электрона.

Если поменять полярность электронов, то есть подать на **катод** положительный потенциал, а на **анод** — отрицательный, то электрическое поле будет тормозить движение

электронов от катода к аноду. За счет работы сил электрического поля ( $A_E = eU$ ) кинетическая энергия движущихся электронов будет уменьшаться. Если первоначальная кинетическая энергия электрона  $W_k$  будет больше работы электрического поля ( $W_k > A_E$ ), электроны будут достигать анода, в цепи будет идти ток. При  $W_k \leq eU$  электроны анода не достигнут и ток прекратится. Наименьшее напряжение, при котором прекращается фототок, называется задерживающим.

При  $U = U_3$  даже самые быстрые электроны, имеющие максимальную скорость, не достигают анода. В этих условиях

$$eU_3 = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (2)$$

Таким образом, измеряя на опыте  $U_3$ , можно вычислить максимальную кинетическую энергию электронов, вылетающих из катода.

### ***Оборудование и материалы.***

При изучении закономерностей фотоэффекта в работе используется вакуумный фотоэлемент, принципиальная схема включения которого в электрическую цепь приведена на рис. 4.

1. Фотоэлемент **Ф**, светофильтр **СФ** и источник света (спектральная ртутная лампа) **Л** помещены в закрытый контейнер. Свет от лампы, проходя через светофильтр **СФ**, становится монохроматическим и, падая на катод фотоэлемента, вызывает фотоэффект. Микроамперметр **μA** измеряет силу фототока, а вольтметр **V** — напряжение на фотоэлементе.

2. Установка состоит из объекта исследования и устройства измерительного, выполненных в виде конструктивно законченных изделий, устанавливаемых на лабораторном столе и соединяемых между собой кабелем.

3. Объект исследования конструктивно выполнен в виде сборного корпуса, в котором установлены осветитель (спектральная ртутная лампа) с источником питания, блок интерференционных светофильтров №1 ( $\lambda=407$  мкм), №2 ( $\lambda=435$  мкм), №3 ( $\lambda=546$  мкм), №4 ( $\lambda=578$  мкм) и устройство регулировки освещенности. Положение "0" блока светофильтров соответствует прохождению света без светофильтров и может применяться для снятия интегральных вольтамперных и люксамперных характеристик, а положение "5" — перекрывает лампу и используется для установки ноля. К корпусу с помощью кронштейна прикреплен усилитель фототока, на верхнюю крышку которого устанавливаются сменные фотоприемники с фотоэлементами Ф-8 и Ф-13. При установке фотоприемников их приемное окно совмещается с выходным окном осветителя и закрывают при помощи бленды.

На передней панели объекта исследования находятся сетевой выключатель с индикатором включения сети. На задней панели объекта исследования расположены клемма заземления, держатели предохранителей и сетевой шнур с вилкой. На боковой стенке расположено выходное окно осветителя и устройства для смены интерференционных светофильтров и регулировки освещенности. На боковых поверхностях усилителя фототока расположены соединительный шнур с разъемом для подключения объекта исследования к устройству измерительному и регуляторы баланса усилителя ГРУБО и ТОЧНО.

Объект исследования с помощью сетевого шнура подключается к сети 220 В, 50 Гц.

4. Устройство измерительное выполнено в виде конструктивно законченного изделия. В нем применена однокристальная микро - ЭВМ с соответствующими дополнительными устройствами, позволяющими производить измерение тока фотоэлемента, установленного в объекте исследования, устанавливать и измерять питающие напряжения на фотоэлементе, а также осуществлять функции управления установкой (установка режимов прямого или

обратного измерения и т.п.). В состав устройства измерительного входят также источники его питания.

На передней панели устройства измерительного размещены следующие органы управления и индикации: кнопка ПРЯМАЯ - ОБРАТНАЯ с соответствующими индикаторами - предназначена для включения прямого или обратного режимов измерения; кнопки "+" , "-" и СБРОС - предназначены для регулировки напряжения на фотоэлементе и его сброса в ноль; индикаторы В и мкА - предназначены для индикации значений величин напряжения на фотоэлементе и фототока в процессе работы. На задней панели устройства измерительного расположены выключатель СЕТЬ, клемма заземления, держатели предохранителей (закрыты предохранительной скобой), сетевой шнур с вилкой и разъем для подключения объекта исследования .

Устройство измерительное с помощью сетевого шнура подключается к сети 220 В, 50 Гц.

5. Принцип действия установки основан на измерении тока через фотоэлемент при изменении полярности и величины приложенного к нему напряжения и изменения спектрального состава и величины освещенности катода фотоэлемента.

6. В процессе выполнения лабораторных работ снимаются зависимости тока через фотоэлемент от приложенного к нему напряжения. При этом меняется полярность напряжения (т.е. раздельно снимаются прямая и обратная ветви вольтамперной характеристики фотоэлемента). Характеристики снимаются при различных значениях освещенности и при изменении длины волны освещения фотоэлемента. По результатам измерений строятся семейства вольтамперных характеристик и, используя соответствующие методы расчета, численно оценивается значение постоянной Планка.

#### **Указания по технике безопасности.**

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
5. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

#### **Задания.**

##### **Построение вольтамперной характеристики фотоэлемента.**

1. Установите на объект исследования фотоприемник с исследуемым фотоэлементом и задвиньте бленду осветителя в окно фотоэлемента.
2. Подключите сетевые шнуры устройства измерительного и объекта исследования к сети и включите устройство измерительное выключателем СЕТЬ на его задней панели. При этом должен загореться индикаторы ОБРАТНАЯ, В и мкА устройства измерительного. На индикаторе В должны установиться нули (допускается индикация до значения 2 младшего разряда). После 5 минутного прогрева ручками УСТАНОВКА НУЛЯ на объекте исследования установить нулевое значение на индикаторе мкА устройства измерительного.
3. Включите объект исследования выключателем СЕТЬ на его передней панели. При этом должен загореться индикатор СЕТЬ объекта исследования.
4. Дать лампе осветителя прогреться в течение 15 мин.
5. С помощью кнопки ПРЯМАЯ - ОБРАТНАЯ выбрать необходимый режим измерения.
6. Установить светофильтр №1 поворотом диска блока СФ.
7. Изменяя значения напряжения через 0,5 В с помощью кнопок "+" и "-" и считывая показания фототока с индикатора "мкА" получите данные для построения вольтамперной характеристики.

8. Устанавливая диск со светофильтрами в положение "5" и проверяя установку нуля тока при нулевом значении напряжения, повторите действия по пп. 5...7 настоящего раздела для других светофильтров (СФ2-СФ4).

Примечание 1: При необходимости с помощью поворота кольца, расположенного на выходном окне объекта исследования можно изменять освещенность фотоэлемента.

Примечание 2: При определении запирающего напряжения фотоэлемента необходимо нулевое значение тока считывать при уменьшении напряжения от нулевого значения до значения запирающего напряжения, а не наоборот. Не рекомендуется также устанавливать значение напряжения ниже запирающего.

9. По окончании работы необходимо отключить питание установки выключателями СЕТЬ (на задней панели устройства измерительного и передней панели объекта исследования) и отключить сетевые вилки устройства измерительного и объекта исследования от питающей сети.

10. Режим работы установки прерывистый - через каждые 45 минут работы перерыв на 15-20 мин.

По данным таблицы 1 построить вольтамперную характеристику, то есть график зависимости силы фототока  $I$  (абсцисса) от напряжения на фотоэлементе  $U$  (ордината).

Таблица 1

*Определение работы выхода электрона, красной границы фотоэффекта и постоянной Планка*

СФ №1	$U, В$																
СФ №2	$U, В$																
СФ №3	$U, В$																
СФ №4	$U, В$																
	$I, мкА$																
	$I, мкА$																
	$I, мкА$																
	$I, мкА$																

1. С помощью кнопки ПРЯМАЯ - ОБРАТНАЯ выбрать режим измерения ОБРАТНАЯ (не делаем установку нуля как в первой части работы!).
2. Изменяя значения напряжения с помощью кнопок "+" и "-" установить показания индикатора фототока "мкА" равным 0. Занести полученное значение задерживающего напряжения  $U_3$  в таблицу 2.
3. Повторить пункты 1 и 2 для других светофильтров.
4. По полученным экспериментальным значениям  $U_3$  рассчитать:

a) кинетическую энергию фотоэлектронов:

$$W_K = e \cdot U_3$$

b) работу выхода электронов:

$$A_{вых} = \frac{h \cdot c}{\lambda} - e \cdot U_3$$

c) красную границу фотоэффекта:

$$\lambda_{\max} = \frac{h \cdot c}{A_{вых}}$$

Таблица 2

№ п/п	$\square$ , мкм	$U_3$ , В	$W_K$ $10^{-19}$ Дж	$A_{вых}$ , $10^{-19}$ Дж	$\square_{max}$ , мкм

- По полученным данным построить график зависимости  $U_3$  от  $v$ , где  $V = \frac{c}{\lambda}$ .
- Используя полученный график, вычислить по формуле  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta U_3}{\Delta v} = \frac{h}{e}$  и оценить погрешность измерений.

#### **Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

#### **Контрольные вопросы.**

- Что называется фотоэффектом? Какие бывают виды фотоэффекта?
- В чем заключаются законы фотоэффекта?
- Как связаны длина волны и частота фотона?
- Какая именно особенность фотоэффекта не может быть объяснена с точки зрения волновой теории света?
- Запишите и объясните уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.
- Что называется красной границей фотоэффекта и от чего она зависит?
- От чего зависит максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов?
- Нарисуйте и объясните вольтамперную характеристику фотоэффекта.
- На чем основан способ определения красной границы фотоэффекта в данной работе?

## **Лабораторная работа № 9**

### **Тема работы. Изучение энергетического спектра электронов**

**Цель работы.** Определение длины пробега элементарных частиц в воздухе при атмосферном давлении и определение максимальной энергии бета-частиц при помощи метода поглощения.

#### **Теоретическая часть.**

Явление радиоактивности было обнаружено Беккерелем (1890 г.). Он заметил, что некоторые вещества, содержащие уран, обладают замечательной особенностью самопроизвольно, без всякого внешнего воздействия, излучать лучи, способные проходить сквозь непрозрачные для видимого света вещества.

Радиоактивное излучение бывает трех видов:  $\alpha$ -лучи,  $\beta$ -лучи и  $\gamma$ -лучи.

$\alpha$ -лучи представляют поток ядер гелиевых атомов, или, иными словами, поток гелиевых ионов с зарядом  $+2e$ .

Тождественность  $\alpha$ -лучей с потоком гелиевых ядер была установлена с помощью следующего опыта, произведенного Содди.

Сосуд А (рис. 1) с помощью тонкой стеклянной перегородки G разделялся на две части В и С. В части В помещалось радиоактивное вещество F, излучающее  $\alpha$ -лучи. Перегородка G подбиралась такой толщины, чтобы  $\alpha$ -лучи могли проходить сквозь нее. Другая часть этого сосуда С соединялась через кран К с вакуумным насосом, и в этой части создавалось достаточно сильное разрежение.

В трубке Н, соединенной с сосудом С, помещались два электрода D, E, с помощью которых можно было вызвать разряд в трубке Н. Вакуум в сосуде С создавался столь высокий, что при приложении к D и E разности потенциалов в несколько сотен вольт электрический разряд не возникал. После откачки сосуд А отсоединялся от насоса. Спустя несколько дней, однако, после приложения разности потенциалов между D и E возникал электрический разряд, интенсивность которого с течением времени возрастала.

Свет, исходящий при разряде из трубки Н, был проанализирован с помощью спектрографа. Оказалось, что спектр этого излучения в точности совпадает со спектром излучения, возникающим при электрическом разряде в газообразном гелии.

В трубке Н гелия не было, но сюда из В проникали  $\alpha$ -частицы, излучаемые радиоактивным препаратом. Поскольку в результате такого проникновения в трубке С появились атомы гелия, то, следовательно,  $\alpha$ -частицы и являются гелием, правда, не атомами, а ядрами гелия. Ядра гелия ( $\alpha$ -частицы) захватывают из окружающей среды 2 электрона и превращаются в «нормальные» атомы гелия. Итак,  $\alpha$ -частицы являются ядрами атомов гелия.

Характерной величиной их является энергия. Энергия  $\alpha$ -частиц велика — порядка нескольких миллионов электронвольт. Различные радиоактивные вещества излучают  $\alpha$ -частицы различной энергии, но все  $\alpha$ -частицы, излученные данным радиоактивным веществом, имеют вполне определенную энергию.

$\beta$ -лучи являются потоком отрицательно заряженных частиц. Знак - (минус) при букве  $\beta$  подчеркивает, что эти частицы несут отрицательный заряд. Отношение  $\frac{e}{m}$  для них оказалось в точности таким же, как и для электронов.  $\beta$ -лучи являются в действительности потоком электронов. Отличие  $\beta$ -лучей от обычных катодных лучей не качественное, а количественное. Энергия электронов  $\beta$ -лучей значительно превосходит энергию катодных лучей и имеет величину порядка миллиона электронвольт.

$\gamma$ -лучи, не отклоняемые ни магнитным, ни электрическим полем, не несут электрического заряда. По своей природе  $\gamma$ -лучи аналогичны рентгеновым лучам, но отличаются от них большей величиной квантов.

Как уже указывалось, радиоактивное излучение производит сильное ионизирующее и фотохимическое действие и по этому действию может быть регистрируемо. Так как отдельные частицы, входящие в состав радиоактивного излучения ( $\alpha$ -частицы,  $\beta$ -частицы,  $\gamma$ -кванты), обладают большой энергией, порядка миллиона электронвольт, то представляется возможность наблюдать и регистрировать не только радиоактивное излучение в целом, но и отдельные частицы, входящие в состав этого излучения.

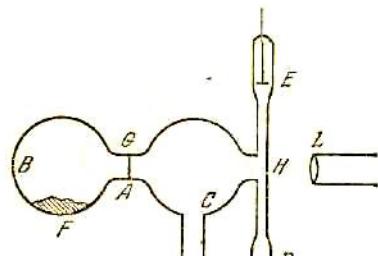


Рис.1 Опыт Содди

1 Гц

Наиболее часто для регистрации и наблюдения отдельных быстрых частиц применяют три метода:

а) Камера Вильсона. В главе VI был указан принцип действия камеры Вильсона и показаны фотографии путей  $\alpha$ -частиц. Камера Вильсона пригодна и для наблюдения путей  $\beta$ -частиц. Значительное усовершенствование в метод камеры Вильсона было внесено Д. В. Скобельцыным.

Скобельцын поместил камеру Вильсона в магнитное поле. Магнитное поле искривляет траекторию  $\beta$ -частиц. В случае, когда  $\beta$ -частица движется перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля, ее траекторией является окружность радиуса

$$R = \frac{mcu}{eH}$$

где  $u$  - скорость частицы,  $H$  - напряженность магнитного поля,  $e$  - заряд электрона,  $c$  - скорость света. В камере Вильсона, помещенной в магнитном поле, треки электронов представляют части окружностей. По величине радиуса этой окружности можно определить скорость электрона.

б) Счетчик Гейгера-Мюллера. Существуют два варианта счетчиков: счетчик с острием (счетчик Гейгера) и счетчик с нитью (счетчик Гейгера-Мюллера).

Счетчик с нитью (рис.2) представляет цилиндр С, по оси которого натянута нить АВ - тонкая металлическая проволока. Нить в электрическом отношении изолируется от корпуса счетчика С. Счетчик наполняют газом при небольшом давлении.

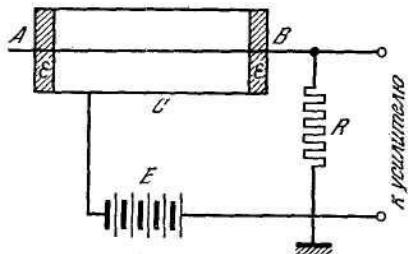


Рис.2 Схема устройства счетчика Гейгера-Мюллера

Между нитью и цилиндрическим корпусом счетчика с помощью батареи Е или специального выпрямительного устройства создают электрическое поле

Такого напряжения, при котором в счетчике может развиваться коронный разряд. Коронный разряд начнет развиваться, если в пространстве между нитью и корпусом окажутся заряженные частицы. Поэтому коронный разряд возникает в счетчике всякий раз, когда в него проникнет ионизирующая частица-электрон или  $\alpha$ -частица. Такая частица, двигаясь внутри счетчика, производит ионизацию газа, вследствие чего и возникает коронный разряд. Последовательно с нитью счетчика подключается сопротивление R, величину которого подбирают так, чтобы при развитии коронного разряда на этом сопротивлении возникало достаточное падение потенциала. Если это падение потенциала окажется достаточным (около сотни вольт), то возникший в счетчике коронный разряд прервется.

По возникшему в счетчике Гейгера импульсу тока и судят о том, что через счетчик прошла ионизирующая частица. Наша промышленность выпускает так называемые установки типа «Б», содержащие аппаратуру, необходимую для питания счетчиков, усилитель, с помощью которого импульс тока в счетчике усиливается до такой величины, что приводит в действие реле нумератора, предназначенного для отсчета числа возникших в счетчике Гейгера импульсов. Для того чтобы счетчик Гейгера «сработал», ионизирующая

частица должна проникнуть внутрь его - пройти через стенки. Если излучение поглощается стенками счетчика, то применяют для регистрации таких частиц либо очень тонкие стенки, либо специальные тонкие окошки.

В торцевых счетчиках нить заменяется иглой А. В передней стенке счетчика делается отверстие В, закрываемое фольгой нужной толщины (рис. 3).

Счетчики Гейгера применяются и для счета  $\gamma$ -квантов,  $\gamma$ -кванты вызывают в стенках счетчика фотоэлектрический эффект или комптон-эффект. Вырванные из стенок счетчика фото- и комптон-электроны и возбуждают разряд в счетчике.

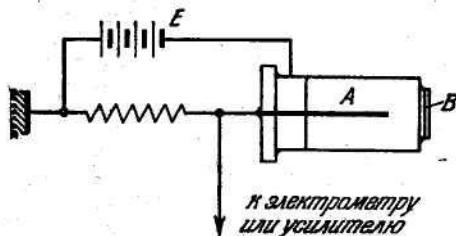


Рис.3 Схема торцевого счетчика.

в) Метод толстослойной фотопластиинки. Метод толстослойных фотопластиинок был разработан Мысовским и Ждановым. Ими изготавливались специальные фотопластиинки с утолщенным слоем фотоэмulsionии (50—300 мк).  $\alpha$ -частицы при движении в таком слое вызывают разложение бромистого серебра только в тех зернах, через которые они прошли. После проявления такой пластиинки в ней возникают «дорожки» из осадившегося серебра, хорошо видимые в микроскопе. Каждая такая дорожка представляет собой след двигавшейся частицы. По величине пробега  $\alpha$ -частицы можно определить ее энергию.

Толстослойные фотопластиинки пригодны для регистрации не только  $\alpha$ -лучей, но и других сильно ионизирующих частиц - протонов, дейтронов. В настоящее время изготавливаются и такие фотопластиинки, в которых можно обнаруживать следы частиц не столь сильно ионизирующих, в частности, электронов большой энергии.

#### **Оборудование и материалы.**

В работе используется торцевый счетчик Гейгера-Мюллера. Исследуемый радиоактивный источник в герметической капсуле размещен на держателе, свободно перемещающемся по скамье относительно счетчика. Для измерения расстояния между счетчиком и образцом на скамье установлена измерительная линейка, а на держателе образца нанесена риска. Поглотителем бета-частиц является набор тонких алюминиевых пластин, помещенных на специальном держателе. Толщина каждой пластины указана на кольце держателя.

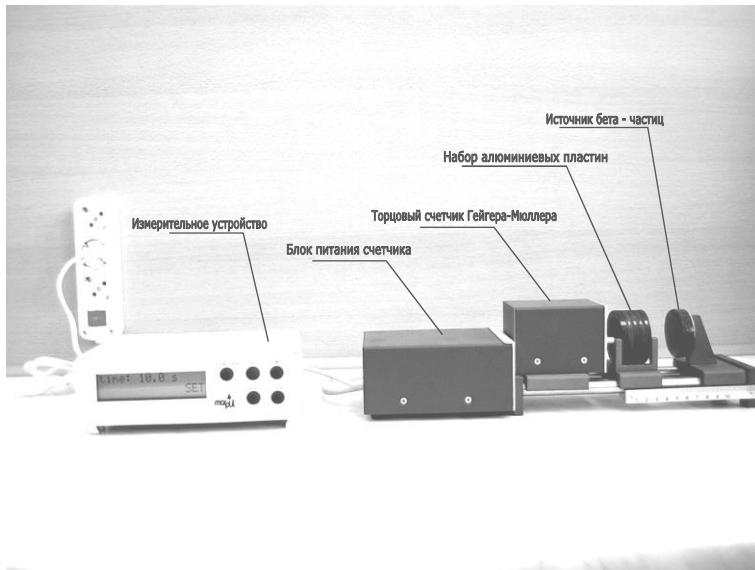
#### **Указания по технике безопасности.**

1. К выполнению лабораторных работ допускаются студенты, изучившие правила техники безопасности.
2. Лабораторные работы могут проводиться только под руководством и наблюдением преподавателя.
3. Располагайте приборы, материалы, оборудование на рабочем месте в порядке, указанном преподавателем.
4. Не держите на рабочем столе предметы, не требующиеся для выполнения задания.
5. Перед тем, как приступить к работе тщательно изучите её описание, уясните ход выполнения работы.

#### **Задания.**

1. Включить приборы установки и дать им прогреться в течение 10 мин.
2. Установить на счетчике рабочее напряжение и определить «фон» счетчика.

3. Поместить в «домик» исследуемый источник бета-излучения и определить начальную интенсивность бета-излучения при отсутствии поглотителя.



4. Используя набор алюминиевых пластин, снять зависимость интенсивности бета-излучения от толщины  $d$  поглотителя. Построить по полученным данным кривую поглощения.

5. В целях более точного определения максимального пробега  $R_{\max}$  экстраполяцию необходимо произвести по графику кривой поглощения (по оси ординат откладывают значения  $\ln I$ , а по оси абсцисс –  $d$ ).

6. Используя формулу (8) и найденное путем экстраполяции значение  $R_{\max}$ , определить величину максимальной энергии бета-частиц.

7. Оценить погрешность результатов.

#### **Снятие зависимости интенсивности элементарных частиц от расстояния до источника излучения**

1. Включить установку в сеть установить время регистрации 10 секунд.

3. Установить начальное расстояние  $R$  между сцинтилляционным экраном и препаратом, соответствующее нулевой точке шкалы.

4. Используя установку, определить интенсивность  $I$  элементарных частиц для начального расстояния  $R$ .

5. Увеличить расстояние между экраном и препаратом на 0,5 см и повторить измерения интенсивности.

6. Продолжая увеличивать расстояния  $R$  через 0,5 см, повторять измерения интенсивности элементарных частиц по всей длине линейки прибора.

7. По полученным данным построить график зависимости  $I = f(R)$  и определить средний пробег  $R_0$ , экстраполированный  $R_0$ , и параметр разброса  $s$ .

8. Продифференцировав графически полученную кривую  $I = f(R)$  определить средний пробег  $R_0$  как абсциссу максимума кривой:  $\frac{dI}{dR} = \psi(R)$

9. Оценить погрешность результатов.

#### **Содержание отчета.**

Отчет по лабораторным работам должны содержать:

- титульный лист;

- цель работы;
- конспект основных законов, определений, понятий, формул;
- основное оборудование, схема установки;
- описание по пунктам выполненной работы;
- результаты измерений и расчетов (таблицы, графики);
- оценка погрешностей;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по результатам выполненной работы, дата, подпись.

***Контрольные вопросы.***

1. Что такое радиоактивность? Виды радиоактивного излучения.
2. Физическая природа  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучений.
3. Методы регистрации радиоактивных излучений.
4. Описать работу счетчика Гейгера-Мюллера.
5. Сформулировать правила радиоактивного излучения.
6. Записать формулу радиоактивного распада. Почему классический метод не объясняет природу  $\alpha$ -распада?
7. Описать  $\alpha$ -распад с позиций квантовой механики.
8. Описать  $\beta$ -распад с позиций квантовой механики.
9. В чем заключается метод определения длины свободного пробега элементарной частицы в данной работе?
10. Записать формулу Гейгера.
11. В чем заключается метод определения энергии элементарных частиц (метод поглощения)?

***5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины***

***5.1 Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины***

***5.1.2 Перечень основной литературы:***

1. Физика для вузов: механика и молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Никеров. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - ISBN 978-5-394-00691-3; - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450772>
2. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика : в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 304 с. : ил., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=235732>
3. Ташлыкова-Бушкевич, И.И. Физика : в 2 ч. / И.И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 2. Оптика. Квантовая физика. Строение и физические свойства вещества. – 232 с. : ил., схем., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=460883>

***5.1.3 Перечень дополнительной литературы:***

1. Лекции по учебной дисциплине «Основы теоретической физики». Электродинамика. [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.И. Кухарь. — Электрон. текстовые данные. — Волгоград: Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2017. — 57 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70731.html>

2. Никеров, В.А. Физика: современный курс / В.А. Никеров. – 2-е изд. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. – 452 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287>.

**5.2 Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

1. Методические рекомендации для подготовки к практическим занятиям по дисциплине «Физика».
2. Методические рекомендации для подготовки к лабораторным занятиям по дисциплине «Физика».
3. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Физика».

**5.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

1. <http://www.biblioclub.ru> -ЭБС "Университетская библиотека онлайн"
2. <http://www.iprbookshop.ru/> - Электронно- библиотечная система IPRbooks

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

## **Методические указания**

по организации и проведению самостоятельной работы обучающихся  
по дисциплине «ФИЗИКА»  
для студентов направления подготовки  
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

## Содержание

### Введение

- 1   Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины «ФИЗИКА»
- 2   План-график выполнения самостоятельной работы
- 3   Контрольные точки и виды отчетности по ним
- 4   Методические рекомендации по изучению теоретического материала
- 5   Список рекомендуемой литературы.

## **Введение**

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента.

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становится формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

## **Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины «Физика»**

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становится формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. В соответствии с рабочей программой дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы студента:

- самостоятельное изучение литературы;
- самостоятельное решение задач.

***Цель самостоятельного изучения литературы*** – самостоятельное овладение знаниями, опытом исследовательской деятельности.

**Задачами** самостоятельного изучения литературы являются:

- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов.

**Цель самостоятельного решения задач** - овладение профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю будущей деятельности.

**Задачами** самостоятельного решения задач являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений.

**Целью самостоятельного выполнения контрольной работы** по дисциплине является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

**Задачами** данного вида самостоятельной работы студента являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании контрольной работы.

В результате освоения дисциплины формируются следующий перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-3 Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач	ИД-5 Демонстрирует понимание физических явлений и умеет применять физические законы механики, молекулярной физики, термодинамики, электричества и магнетизма для решения типовых задач;	Знает основные физические явления и законы механики, электротехники, теплотехники, оптики и ядерной физики и их математическое описание; методы анализа физических явлений в технических устройствах и системах; Методы решения практических задач исследования и моделирования физических и химических явлений и процессов в своей предметной области. Умеет применять физические законы механики, молекулярной физики, термодинамики, электричества и магнетизма для решения типовых задач.
	ИД-6 Демонстрирует знание элементарных основ оптики, квантовой механики и атомной физики.	ОПК-3 знание основ оптики, квантовой атомной физики. Владеет знаниями физических явлений, элементарных основ оптики, квантовой механики и атомной физики.

**План-график выполнения самостоятельной работы**

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
<b>2 семестр</b>					
ОПК-3 ИД-5опк-3 ИД-6опк-3	Самостоятельное изучение литературы по темам №1-8	Конспект	23,58	2,62	26,2
	Подготовка к лекциям	Конспект	1,44	0,16	1,6
	Подготовка к практическим занятиям	Решенная задача	2,88	0,32	3,2
<b>Итого за 2 семестр:</b>			<b>27,9</b>	<b>3,1</b>	<b>31</b>
<b>3 семестр</b>					
ОПК-3 ИД-5опк-3 ИД-6опк-3	Самостоятельное изучение литературы по темам №9-17	Конспект	6,48	0,72	7,2
	Подготовка к лекциям	Конспект	1,62	0,18	1,8
	Подготовка к практическим занятиям	Решенная задача	3,24	0,36	3,6
	Подготовка к лабораторным занятиям	отчет	4,86	0,54	5,4
<b>Итого за 3 семестр:</b>			<b>16,2</b>	<b>1,8</b>	<b>18</b>
<b>Итого:</b>			<b>44,58</b>	<b>4,9</b>	<b>49</b>
<b>Заочная форма 2 семестр</b>					
ОПК-3 ИД-5опк-3 ИД-6опк-3	Самостоятельное изучение литературы по темам №1-8	Конспект	72	8	80
	Подготовка к лекциям	Конспект	0,54	0,06	0,6
	Подготовка к практическим занятиям	Решенная задача	1,08	0,12	1,2
	Подготовка к лабораторным занятиям	отчет	1,08	0,12	1,2
<b>Итого за 2 семестр:</b>			<b>74,7</b>	<b>8,3</b>	<b>83</b>
<b>3 семестр</b>					
ОПК-3 ИД-5опк-3 ИД-6опк-3	Самостоятельное изучение литературы по темам №9-17	Конспект	69,84	7,76	77,6
	Подготовка к лекциям	Конспект	0,54	0,06	0,6
	Подготовка к практическим занятиям	Решенная задача	1,44	0,16	1,6

	Подготовка к лабораторным занятиям	отчет	1,08	0,12	1,2
	<b>Итого за 3 семестр:</b>		<b>72,9</b>	<b>8,1</b>	<b>81</b>
	<b>Итого:</b>				<b>164</b>

## **Контрольные точки и виды отчетности по ним**

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
<b>2 семестр</b>			
1.	Практическое занятие № 2	6 неделя	25
2.	Практическое занятие № 5	10 неделя	15
3.	Практическое занятие № 7	16 неделя	15
	<b>Итого за 2 семестр</b>		<b>55</b>
	<b>Итого</b>		<b>55</b>
<b>3 семестр</b>			
4.	Практическое занятие № 11	6 неделя	25
5.	Практическое занятие № 13	10 неделя	15
6.	Практическое занятие № 17	16 неделя	15
	<b>Итого за 3 семестр</b>		<b>55</b>
	<b>Итого</b>		<b>55</b>

Максимально возможный балл за весь текущий контроль Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	<b>100</b>
Хороший	<b>80</b>
Удовлетворительный	<b>60</b>
Неудовлетворительный	<b>0</b>

## **Методические рекомендации по изучению теоретического материала**

Самостоятельная работа студента начинается с внимательного ознакомления с содержанием учебного курса.

Изучение каждой темы следует начинать с внимательного ознакомления с набором вопросов. Они ориентируют студента, показывают, что он должен знать по данной теме. Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие вопросы темы учебного курса и с какой глубиной раскрыты в конкретном учебном материале, а какие вообще опущены. Требуется творческое отношение и к самому содержанию дисциплины.

Вопросы, составляющие ее содержание, обладают разной степенью важности. Есть вопросы, выполняющие функцию логической связки содержания темы и всего курса, имеются вопросы описательного или разъяснительного характера, а также исторического экскурса в область изучаемой дисциплины. Все эти вопросы не составляют сути понятийного, концептуального содержания темы, но необходимы для целостного восприятия изучаемых проблем.

Изучаемая дисциплина имеет свой категориально-понятийный аппарат. Научные понятия — это та база, на которой строится каждая наука. Понятия — узловые, опорные пункты как научного, так и учебного познания, логические ступени движения в учебе от простого к сложному, от явления к сущности. Без ясного понимания понятий учеба крайне затрудняется, а содержание приобретенных знаний становится тусклым, расплывчатым.

Студент должен понимать, что самостоятельное овладение знаниями является главным, определяющим. Высшая школа создает для этого необходимые условия, помогает будущему высококвалифицированному специалисту овладеть технологией самостоятельного производства знаний.

В самостоятельной работе студентам приходится использовать литературу различных видов: первоисточники, монографии, научные сборники, хрестоматии, учебники, учебные пособия, журналы и др. Изучение курса предполагает знакомство студентов с большим объемом научной и учебной литературы, что, в свою очередь, порождает необходимость выработки у них рационально-критического подхода к изучаемым источникам.

Чтобы не «утонуть» в огромном объеме рекомендованных ему для изучения источников, студент, прежде всего, должен научиться правильно их читать. Правильное чтение рекомендованных источников предполагает следование нескольким несложным, но весьма полезным правилам.

Предварительный просмотр книги включает ознакомление с титульным листом книги, аннотацией, предисловием, оглавлением. При ознакомлении с оглавлением необходимо выделить разделы, главы, параграфы, представляющие для вас интерес, бегло их просмотреть, найти места, относящиеся к теме (абзацы, страницы, параграфы), и познакомиться с ними в общих чертах.

Научные издания сопровождаются различными вспомогательными материалами — научным аппаратом, поэтому важно знать, из каких основных элементов он состоит, каковы его функции.

Знакомство с книгой лучше всего начинать с изучения аннотации — краткой характеристики книги, раскрывающей ее содержание, идейную, тематическую и жанровую направленность, сведения об авторе, назначение и другие особенности. Аннотация помогает составить предварительное мнение о книге.

Глубже понять содержание книги позволяют вступительная статья, в которой дается оценка содержания книги, затрагиваемой в ней проблематики, содержится информация о жизненной и творческой биографии автора, высказываются полемические замечания, разъясняются отдельные положения книги, даются комментарии и т.д. Вот почему знакомство с вступительной статьей представляется очень важным: оно помогает студенту сориентироваться в тексте работы, обратить внимание на ее наиболее ценные и важные разделы.

Той же цели содействует знакомство с оглавлением, предисловием, послесловием. Весьма полезными элементами научного аппарата являются сноски, комментарии, таблицы, графики, списки литературы. Они не только иллюстрируют отдельные положения книги или статьи, но и сами по себе являются дополнительным источником информации для читателя.

Если читателя заинтересовала какая-то высказанная автором мысль, не нашедшая подробного освещения в данном источнике, он может обратиться к тексту источника, упоминаемого в сноске, либо к источнику, который он может найти в списке литературы, рекомендованной автором для самостоятельного изучения.

Существует несколько форм ведения записей:

— план (простой и развернутый) — наиболее краткая форма записи прочитанного, представляющая собой перечень вопросов, рассматриваемых в книге или статье. Развернутый план представляет собой более подробную запись прочитанного, с детализацией отдельных положений и выводов, с выпиской цитат, статистических данных и т.д. Развернутый план — неоценимый помощник при выступлении с докладом на конкретную тему на семинаре, конференции;

— тезисы — кратко сформулированные положения, основные положения книги, статьи. Как правило, тезисы составляются после предварительного знакомства с текстом источника, при его повторном прочтении. Они помогают запомнить и систематизировать информацию.

#### Составление конспектов

Большую роль в усвоении и повторении пройденного материала играет хороший конспект, содержащий основные идеи прочитанного в учебнике и услышанного в лекции. Конспект — это, по существу, набросок, развернутый план связного рассказа по основным вопросам темы.

В какой-то мере конспект рассчитан (в зависимости от индивидуальных особенностей студента) не только на интеллектуальную и эмоциональную, но и на зрительную память, причем текст конспекта нередко ассоциируется еще и с текстом учебника или записью лекции. Поэтому легче запоминается содержание конспектов, написанных разборчиво, с подчеркиванием или выделением разрядкой ключевых слов и фраз.

Самостоятельно изученные темы представляются преподавателю в форме конспекта, по которому происходит собеседование. Теоретические темы курса (отдельные вопросы), выносимые на самостоятельное изучение, представлены ниже.

## **Список рекомендуемой литературы**

### ***Перечень основной литературы:***

1. Дмитриева Е.И. Физика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Е.И. Дмитриева. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 143 с. — 978-5-4486-0445-4. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/79822.html>
2. Никеров, В.А. Физика: современный курс : учебник / В.А. Никеров. - 2-е изд. - Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. - 452 с. : ил. - ISBN 978-5-394-02349-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=453287>

### ***Перечень дополнительной литературы:***

1. Романова, В.В. Физика: примеры решения задач : учебное пособие / В.В. Романова. - Минск : РИПО, 2017. - 348 с. : схем., табл. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-985-503-737-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=487974>

### ***Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»***

1. <http://www.biblioclub.ru> -ЭБС "Университетская библиотека онлайн"
2. <http://www.iprbookshop.ru/> - Электронно- библиотечная система IPRbooks
3. <http://elibrary.ru/> - eLIBRARY.RU - НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА