МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Направление подготовки	**09.04.02 Информационные системы и технологии**
Направленность (профиль) подготовки	**«Технологии работы с данными и знаниями, анализ информации»**

Пятигорск, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью дисциплины является изучение основ аппарата вычислительной математики и приобретение навыков его использования в приложениях. Развитие логического мышления и математической интуиции. Умение применять численные методы при решении прикладных задач и изучении других дисциплин.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «**И**нформационные системы и технологии в научных исследованиях» относится к дисциплинам базовой части блока Б1. Ее освоение происходит в 1 семестре.

3. НАИМЕНОВАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа 1. Общие свойства алгебраических уравнений. Отделение корней.
Лабораторная работа 2.Графическое решение уравнений. Метод половинного деления.
Лабораторная работа 3.Метод хорд. Метод касательных.
Лабораторная работа 4. Комбинированный метод хорд и касательных.
Лабораторная работа 5. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений. Метод итерации.
Лабораторная работа 6.Интерполяционная формула Лагранжа.
Лабораторная работа 7. Приближенное интегрирование функций: формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона.
Лабораторная работа 8.Метод Эйлера. Метод Пикара.
Лабораторная работа 9.Графический способ. Метод наименьших квадратов.

4. СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа №1. Общие свойства алгебраических уравнений. Отделение корней.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Построить концептуальную модель и диаграмму потоков данных для информационной системы:

1. Отделение корней.

Пусть $f(x)=0$ - некоторое уравнение. Число *c* называют корнем или решением данного уравнения, если оно, будучи подставленным в это уравнение, обращает его в верное числовое равенство, то есть $f(c)=0$. Также число *c* называют нулём функции $y=f(x)$.

При решении некоторых нелинейных уравнений невозможно найти корни с помощью традиционных методов, применявшихся ранее. Заметим, что, как правило, эти методы решения относятся к каким-либо конкретным классам уравнений: алгебраических, тригонометрических, показательных и так далее. Но, например, даже такое, внешне несложное уравнение, как $x-\cos x+1=0$, невозможно решить привычными способами. Для алгебраических уравнений доказано, что не существует общих формул вычисления корней для уравнений степени выше четвёртой. Поэтому во многих случаях приходится прибегать к численным методам решения уравнений, которые позволяют найти действительные корни уравнения $f(x)=0$ с любой заранее заданной точностью.

Процесс нахождения действительных корней с определённой точностью можно разделить на два этапа:

1) отделение корней, то есть установление числовых промежутков, в каждом из которых содержится один корень уравнения;

2) вычисление корня, принадлежащего данному промежутку, с заданной точностью.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a;b]$ значения разных знаков, то внутри этого промежутка найдётся хотя бы один нуль функции. Условие, согласно которому функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, можно сформулировать в виде: $f(a)f(b)<0$.

Отделение корней уравнения $f(x)=0$ для непрерывной в области определения функции можно осуществить различными способами.

1) Составляют таблицу значений функции $y=f(x)$ на определённом промежутке изменения переменной *x,* и если окажется, что для соседних значений аргумента значения функции имеют разные знаки, то нуль функции (и корень уравнения) находится между ними.

2) Уравнение $f(x)=0$ заменяют равносильным ему $\phi(x)=\psi(x)$. Строят графики функций $y=\phi(x)$ и $y=\psi(x)$; искомые корни являются абсциссами точек пересечения этих графиков.

3) Строят график функции $y=f(x)$ на промежутке изменения *x*; тогда абсциссы точек пересечения графика с осью ОХ – нули функции (и корни данного уравнения).

Заметим, что перечисленные способы не только позволяют отделить корни, но и определить их количество.

<u>Пример 1.</u> Выяснить, сколько корней имеет уравнение $4-e^x-2x^2=0$, и найти промежутки, в которых эти корни находятся.

Решение.

Рассмотрим три функции:

$$f(x)=4-e^x-2x^2,\ \phi(x)=4-2x^2,\ \psi(x)=e^x.$$

Уравнение $4-e^x-2x^2=0$ эквивалентно уравнению $4-2x^2=e^x$. Отделим его корни первым из перечисленных способов. Из таблицы значений функции $f(x)$ на промежутке $[-3;1]$ с шагом изменения *x*, равным 1, видно, что существуют корни уравнения на отрезках $[-2;-1]$ и $[0;1]$, так как значения функции имеют на концах этих отрезков разные знаки.

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-14,05	-4,14	1,63	3,00	-0,72
φ(x)	-14,00	-4,00	2,00	4,00	2,00
ψ(x)	0,05	0,14	0,37	1,00	2,72

Заметим, что аналогичный результат получится, если использовать второй способ, построив графики указанных функций (необходимые данные содержатся в таблице).

<u>1.</u> Метод половинного деления для уравнения f(x)=0.

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0 \quad (*),$$

причём функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)f(b)<0$. Для вычисления корня уравнения (*), принадлежащего указанному промежутку, найдём середину этого отрезка: $x_1=\frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1)\neq 0$, то для продолжения вычисления выберем ту из частей данного отрезка $[a; x_1]$ или $[x_1; b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим $[a_1; b_1]$.

Новый суженный промежуток снова делим пополам и проводим вычисления по указанной схеме и так далее. В результате получаем либо точный корень на одном из этапов, либо последовательность вложенных отрезков $[a; b], [a_1; b_1], \ldots, [a_n; b_n], \ldots,$ таких, что

$$f(a_i)f(b_i)<0,\ i=1,2,\ldots,\ (2)$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a).\ (3)$$

Число c – общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - является корнем уравнения (*). Оценку ε погрешности решения на n-м шаге вычислений можно получить из соотношения (3) в виде

$$0\leq c-a_n\leq\frac{1}{2^n}(b-a)=b_n-a_n.\ (4)$$

Здесь $a_n\approx c$ с точностью ε, не превышающей $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

<u>Пример 2.</u> Методом половинного деления найти корень уравнения $4-e^x-2x^2=0$ с точностью ε=0,01.

Решение.

В предыдущем примере было при отделении корней уравнения установлено, что один из искомых корней принадлежит отрезку $[0; 1]$. На каждом шаге вычислений значение корня принимаем равным $x_n=\frac{a_n-b_n}{2}$ с погрешностью $d_n=a_n-b_n$. Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, используя условие (2). Имеем

$$[a; b]=[0; 1],\ x_1=\frac{a+b}{2}=0{,}5.$$

Так как $f(a)=3, f(x_1)=1{,}8513, f(b)=-0{,}72$ и $f(x_1)f(b)<0$, то принимаем: $a_1=x_1=0{,}5,\ b_1=b=1;\ d_1=b_1-a_1=0{,}5.$

Тогда $[a_1; b_1]=[0{,}5; 1],\ x_2=\frac{a_1+b_1}{2}=0{,}75.$

Здесь $f(a_1)=1{,}8513, f(x_2)=0{,}758, f(b_1)=0{,}72, f(x_2)f(b_1)<0.$

Следовательно, $a_2=x_2=0{,}75,\ b_2=b_1=1;\ d_2=b_2-a_2=0{,}25.$

Тогда $[a_2; b_2]=[0{,}75; 1],\ x_3=\frac{a_2+b_2}{2}=0{,}875;\ d_3=0{,}125.$

Производя вычисления далее (рекомендуется воспользоваться специальной компьютерной программой), можно убедиться, что требуемая точность достигается на 7-м шаге: $x_7=0{,}8828125$ с погрешностью $d_7=0{,}00785<\varepsilon=0{,}01.$

<u>Задание.</u>

Методом половинного деления найти корни уравнений (предварительно отделив их):

1. $x^3-4x+2=0;$ с точностью до 0,001;
2. $x^3-2x-5=0;$ с точностью до 0,01.
3. $x^4+5x-7=0;$
4. $x^4+2x^2-6x+2=0;$
5. $x^5-x-2=0;$
6. $e^x-x-2=0$.

Вопросы для обсуждения:

Погрешности вычислений. Определение количества верных значащих цифр. Погрешности алгебраических операций. Правила округления. Методы решения нелинейных уравнений: графический, хорд, касательных, итераций. Оценка погрешностей. Требования к вычислительному алгоритму. Устойчивость и сложность алгоритма.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа №2. Графическое решение уравнений. Метод половинного деления.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Найти корни уравнения F(x) = 0 методом половинного деления с точностью ε = 0,01. <u>Указание по выполнению:</u> прежде, чем начать выполнение работы необходимо определить отрезок, на котором находится корень данного уравнения. Это можно сделать графически или построить таблицу значений функции на некотором, достаточно обширном, диапазоне значений аргумента. Описанные действия можно выполнить с применением компьютера и электронной таблицы Ms Excel или на листе бумаги с помощью калькулятора. Выполнить проверку знаков данной функции на концах найденного отрезка (функция, соответствующая данному уравнению, должна иметь разные знаки в точках, определяющих концы отрезка). Получить в качестве результата значение корня уравнения и значение полученной погрешности решения (она определяется по формуле: ε = $\frac{(b-a)}{2^n}$, где n - номер итерации).

<u>Вариант 1.</u> $x^4+3x-20=0$ x > 0

<u>Вариант 2.</u> $x^3-2x-5=0$ x > 0

<u>Вариант 3.</u> $\frac{x}{2+x}-\ln x=0$

<u>Вариант 4.</u> $x^4+5x-7=0$ x > 0

<u>Вариант 5.</u> $e^x - x - 2 = 0$

<u>Вариант 6</u>. $2 - \ln x - x = 0$

<u>Вариант 7.</u> $2e^x + x - 1 = 0$

Вариант 8. $$\frac{1}{2}e^x - x - 1 = 0$$

Вариант 9. $\ln x + 0{,}5\,x - 1 = 0$

Вариант 10. $$\frac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$$

Вопросы для обсуждения:

Что называется корнем уравнения? Что значить решить уравнение? Каковы этапы решения уравнения с одной переменной? Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной? Суть метода половинного деления. В чем заключается геометрический смысл метода половинного деления? Всегда ли позволяет метод половинного деления вычислить отделенный корень уравнения с заданной погрешностью? Как выбираются концы отрезка следующего интервала в методе половинного деления? Какими свойствами должна обладать функция f(x), чтобы методом половинного деления можно было гарантированно решить уравнение f(x)=0? Что необходимо для нахождения хотя бы одного действительного корня уравнения f(x)=0 методом половинного деления? Можно ли найти корень методом половинного деления, если он находится на границе интервала? Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода. Суть метода итерации. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения x=f(x) на отрезке [a, b], содержащего корень, методом простой итерации? Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения x=f(x) методом хорд, касательных, итераций? В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений?

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа №3. Метод хорд. Метод касательных.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Найти корни уравнения F(x) = 0 методом касательных (Ньютона) с точностью ε = 0,01. (Для выполнения данной лабораторной работы использовать варианты заданий предыдущей лабораторной работы.)

<u>Указание по выполнению:</u> Начальное приближение x_0 определяется из отрезка определённого в задаче по предыдущей лабораторной работы. Аналитически или численным методом вычисляется производная функции F(x) и используется для вычисления очередного значения корня уравнения F(x) = 0. Итерационная формула метода Ньютона (касательных):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Указанная точность вычислений считается достигнутой, если разность (взятая по модулю) между корнями уравнения, полученными в двух соседних итерациях $|x_{i+1} - x_i)| < \varepsilon$.

Вопросы для обсуждения:

Что называется корнем уравнения? Что значить решить уравнение? Каковы этапы решения уравнения с одной переменной? Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной? Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода. Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения x=f(x) методом хорд, касательных, итераций?

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа №4. Комбинированный метод хорд и касательных.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Решить предложенные уравнения комбинированным методом хорд и касательных. Провести сравнительный анализ результатов (предварительно отделив их, вариант задания выбирается из таблицы).

Вариант	Функция, интервал
1	(x-2)2*log(x+11)–7=0 [-1; 5]
2	(x-4)2 *log(x+1) –1=0 [0; 3]
3	(x-2)2*2x – 1=0 [0; 2]
4	(x-5)2*logx –1.2=0 [1; 4]
5	(x – 3)*cos(x) –1=0 [-5; 0]
6	x2*cos(2x) +1=0 [1; 3]
7	x2 – ln(6+x)=0 [-2; 2]
8	0.5x – 3+(x+1)2=0 [-2; 2]
9	0.2 *x – cos(x) –1=0 [2; 5]
10	2*ln(x)+cos(x)-|x|+1=0 [0.1;3]
11	0.3*x2+ cos(x) – |x| [0; 5]
12	x3 – 8*x2+3=0 [-2; 2]
13	x3-2x-5=0 [-5;3]
14	x4+5x-7=0 [-2;4]
15	x2+2x+2=0 [-1;5]
16	x2+-5x+6=0 [-4;3]
17	x5+3x2+x-5=0 [-2;6]
18	x4+x2+6=0 [0;4]
19	x2+5x-8=0 [-7;3]

20	x3+4x-7=0 [-3;5]

Вопросы для обсуждения:

Что называется корнем уравнения? Что значить решить уравнение? Каковы этапы решения уравнения с одной переменной? Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной? Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода. Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения x=f(x) методом хорд, касательных, итераций?

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа №5. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений. Метод итерации

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Решить предложенные уравнения методом итераций.

№ В	Система линейных уравнений	№ В	Система линейных уравнений
1	$\begin{cases} 100x_1 - 14x_2 + 13x_3 = -1232 \\ 0.5x_1 + 200x_2 + 9.5x_3 = 326 \\ -9x_1 + 9x_2 + 300x_3 = 4335 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 200x_1 - 13x_2 + 12x_3 = -2470 \\ x_1 + 400x_2 + 9x_3 = 904 \\ -8x_1 + 8x_2 + 600x_3 = 7920 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 300x_1 - 12x_2 + 11x_3 = -3504 \\ 1.5x_1 + 600x_2 + 8.5x_3 = 1884 \\ -7x_1 + 7x_2 + 900x_3 = 1091 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 400x_1 - 11x_2 + 10x_3 = -4334 \\ 2x_1 + 800x_2 + 8x_3 = 3226 \\ -6x_1 + 6x_2 + 1200x_3 = 13290 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 500x_1 - 10x_2 + 9x_3 = -4960 \\ 2.5x_1 + 1000x_2 + 7.5x_3 = 5050 \\ -5x_1 + 5x_2 + 1500x_3 = 15080 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 600x_1 - 9x_2 + 8x_3 = -5382 \\ 3x_1 + 1200x_2 + 7x_3 = 72360 \\ -4x_1 + 4x_2 + 1800x_3 = 16260 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 700x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -5600 \\ 3.5x_1 + 1400x_2 + 6.5x_3 = 9824 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2100x_3 = 16850 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 800x_1 - 7x_2 + 6x_3 = -5614 \\ 4x_1 + 1600x_2 + 6x_3 = 12810 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2400x_3 = 16830 \end{cases}$

5	$\begin{cases} 900x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -5424 \\ 4.5x_1 + 1800x_2 + 5.5x_3 = 16210 \\ -x_1 + x_2 + 2700x_3 = 16220 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 1000x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -5030 \\ 5x_1 + 2000x_2 + 5x_3 = 20000 \\ 3000x_3 = 15000 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 1100x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -4432 \\ 5.5x_1 + 2200x_2 + 4.5x_3 = 24200 \\ x_1 - x_2 + 3300x_3 = 13190 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 1200x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3630 \\ 6x_1 + 2400x_2 + 4x_3 = 2879 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3600x_3 = 1077 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 1300x_1 - 2x_2 + x_3 = -2624 \\ 6.5x_1 + 2600x_2 + 3.5x_3 = 3379 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3900x_3 = 7755 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 1400x_1 - x_2 = -1414 \\ 7x_1 + 2800x_2 + 3x_3 = 39200 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4200x_3 = 4140 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1500x_1 - x_3 = 0 \\ 7.5x_1 + 3000x_2 + 2.5x_3 = 45000 \\ 5x_1 - 5x_2 + 4500x_3 = -75 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1600x_1 + x_2 - 2x_3 = 1618 \\ 8x_1 + 3200x_2 + 2x_3 = 5121 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4800x_3 = -4890 \end{cases}$

Вопросы для обсуждения:

Что называется корнем уравнения? Что значить решить уравнение? Каковы этапы решения уравнения с одной переменной? Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной? Суть метода итерации. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения x=f(x) на отрезке [a, b], содержащего корень, методом простой итерации? Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения x=f(x) методом итераций? В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений?

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа № 6. Интерполяционная формула Лагранжа.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Провести интерполирование предложенных функций, используя формулу Лагранжа. Реализовать в системах Excel и MathCAD.

Одним из наиболее распространённых и удобных практически способов построения многочлена, интерполирующего неизвестную функцию $y=f(x)$, является применение интерполяционной формулы Лагранжа.

Пусть функция $y=f(x)$ определена таблицей

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	…	y_n

Значения аргументов $x_i \ (i=0, 1, \ldots, n)$ будем называть узлами интерполяции. Поставим задачу построить многочлен $L(x)$, значения которого в узлах интерполяции равны соответствующим значениям данной функции, то есть $L(x_i)=y_i \ \ (i=0, 1, \ldots, n)$.

Для многочлена (1) из пункта 1-го определим значения коэффициентов $C_k \ (k=0, 1, \ldots, n)$ следующим образом. Должно выполняться условие:

$$L(x_0)=y_0, \ L(x_1)=y_1, \ \ldots, L(x_n)=y_n \quad (2)$$.

Положив в формуле (1) $x=x_0$, тогда, учитывая равенства (2), получим:

$$y_0=C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)$$, откуда $$C_0=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$.

Аналогично, положив $x=x_1$, получим

$$C_1=\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$,

…

$$C_n=\frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$.

Подставив полученные выражения для коэффициентов в формулу (1), получим многочлен

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n \quad (3)$$

Многочлен $L(x)$ называется многочленом (полиномом) Лагранжа, а формула (3) – интерполяционной формулой Лагранжа.

Если известно аналитическое выражение, задающее функцию, то погрешность интерполяционной формулы (3) (в случае непрерывности на отрезке $[x_0; x_n]$ самой функции $y=f(x)$ и её производной до $n+1$ - го порядка включительно) оценивается неравенством:

$$|f(x)-L(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)| \quad (4)$$,

где $$M_{n+1}=\max_{[x_0;x_n]}|f^{(n+1)}(x)|, \ \Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$.

<u>Пример 1.</u> Представить приближённо функцию $y=f(x)$ многочленом 2-й степени, если из эксперимента получены следующие её значения:

x_i	1	2	-4
y_i	3	-5	4

Решение.

По формуле (3) при $n=2$ имеем:

$$L(x)=\frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}\cdot 3+\frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}\cdot(-5)+\frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}\cdot 4=-\frac{39}{30}x^2-\frac{123}{30}x+\frac{252}{30}.$$

<u>Пример 2.</u> Построить многочлен Лагранжа второй степени, интерполирующий функцию $y=\sin x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, если заданы значения функции в трёх узлах интерполяции.

x	0	$\frac{\pi}{6}\approx 0,5235988$	$\frac{\pi}{4}\approx 0,7853982$
$\sin x$	0	0,5	0,7071068

С помощью интерполяционной формулы вычислить приближённое значение $\sin\frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность результата вычислений.

Решение.

Многочлен Лагранжа для трёх узлов интерполяции запишется так:

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

или

$$L(x)=\frac{x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot 0,5+\frac{x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot 0,707=-2,064\cdot\frac{x^2}{\pi^2}+3,344\frac{x}{\pi}.$$

При $x=\frac{\pi}{12}\approx 0,2617994$ получим $L\left(\frac{\pi}{12}\right)=0,264298$.

С помощью неравенства (4) находим оценку погрешности. Имеем

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)-L\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|\le\frac{M_3}{3!}\left|\Pi_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|,$$

где

$$\Pi_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Pi_3\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\pi}{12}\right)^3,$$

Так как $f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x$, то

$$M_3=\max_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}|f'''(x)|=\max_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]}|-\cos x|=1,$$

и, следовательно, $\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)-L\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|\le\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3\approx 0,006$. Итак, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\approx 0,264\pm 0,006$.

Заметим, что значение $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ с шестью верными цифрами есть 0,258819.

Задание: По заданной таблице узлов интерполяции построить полином Лагранжа. Пусть заданы узлы интерполяции (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Для этих узлов полином Лагранжа имеет вид:

$$L_2(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Вычислить с помощью построенного полинома значения функции в точках, расположенных между узлами интерполяции. Для этого значения x_{01} и x_{02} подставляются вместо *x* в построенный полином. В указанных точках (x_{01} и x_{02}) рассчитать погрешность вычисления значений функции F(x) с помощью аналитического выражения функции и полинома Лагранжа по формуле: $\varepsilon_i = |F(x_{0i}) - L_n(x_{0i})|$ i=1,2 где $L_n(x_{0i})$ - значение полинома Лагранжа.

Вариант 1. $F(x) = ln\ x^2$

x_i	-11,2	-0,5	18,3	43,7	69,2	110,8
$F(x_i)$	4,83	-1,39	5,81	7,55	8,47	9,41

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 23,4 и x_{02} = 50,2.

Вариант 2. $F(x) = 5e^{18x}$

x_i	-0,2	0,03	0,1	0,22	0,32
$F(x_i)$	0,03	1,72	6,05	52,46	317,35

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 0,05 и x_{02} = 0,15.

Вариант 3. $F(x) = x^3 + 7x^2 + 5x$

x_i	-5,2	-2,5	0,8	2,4	4,1
$F(x_i)$	22,67	15,63	8,99	66,14	207,09

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 0,2 и x_{02} = 1,8.

Вариант 4. $F(x)=e^{x^2-5x}$

x_i	-0,95	-0,5	-0,2	0,6	1,02
$F(x_i)$	284,29	15,64	2,83	0,07	0,02

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= -0,41 и x_{02} = 0,32.

Вариант 5. $F(x) = e^x$

x_i	1,01	1,04	1,11	1,16	1,20
$F(x_i)$	2,75	2,83	3,03	3,19	3,32

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,031 и x_{02} = 1,152.

<u>Вариант 6.</u> F(x) = *cos x*

x_i	1,01	1,04	1,07	1,13	1,18
$F(x_i)$	0,53	0,51	0,48	0,43	0,38

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,022 и x_{02} = 1,145.

<u>Вариант 7.</u> F(x) = *sh x*

x_i	1,01	1,03	1,08	1,14	1,19
$F(x_i)$	1,19	1,22	1,30	1,40	1,49

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,053 и x_{02} = 1,172.

<u>Вариант 8.</u> F(x) = *ln x*

x_i	1,01	1,06	1,10	1,14	1,19
$F(x_i)$	0,01	0,06	0,09	0,13	0,17

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,032 и x_{02} = 1,171.

<u>Вариант 9.</u> F(x) = e^{-x}

x_i	1,01	1,05	1,10	1,14	1,20
$F(x_i)$	0,36	0,35	0,33	0,32	0,30

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,028 и x_{02} = 1,172.

<u>Вариант 10.</u> F(x) = *sin x*

x_i	1,00	1,04	1,08	1,10	1,17
$F(x_i)$	0,84	0,86	0,88	0,89	0,92

По построенному интерполянту вычислить значения функции F(x) в точках x_{01}= 1,058 и x_{02} = 1,124.

Вопросы для обсуждения:

Понятие интерполяции. Интерполяционный полином Лагранжа. Вычисление значения функции по интерполяционному полиному Лагранжа.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа № 7. Приближенное интегрирование функций: формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Проинтегрировать предложенные функции, используя формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Реализовать в системе MathCAD.

Формулы прямоугольников.

Заменим кривую $y=f(x)$ ломаной, расположенной выше её (рисунок). Тогда определённый интеграл будет приблизительно равен площади ступенчатой фигуры, состоящей из n прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx y_1 h + y_2 h + \ldots + y_n h = h\sum_{i=1}^{n} y_i \quad (1).$$

Здесь $y_i=f(x_i)$ - значения подынтегральной функции в правых концах отрезков разбиения.

Если же кривую $y=f(x)$ заменить ломаной, расположенной ниже её, то получится формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx y_0 h + y_1 h + \ldots + y_{n-1} h = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad (2).$$

Здесь $y_i=f(x_i)$ - значения подынтегральной функции в левых концах отрезков разбиения. Формулы (1) и (2) называют *формулами прямоугольников*.

Оценка погрешности данного метода приближённого вычисления определённого интеграла находится по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{2} M_1 h \qquad (3),$$

где $M_1=\max\limits_{[a;b]} f'(x)$ - наибольшее значение первой производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример 1. Вычислить по одной (на выбор) из формул прямоугольников интеграл $\int_0^1 e^x dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить ошибку вычислений и сравнить полученное значение с точным значением, вычисленным с помощью микрокалькулятора (1,718281).

Решение.

Вычислим значения подынтегральной функции e^x в точках деления и соответствующие значения занесём в таблицу:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45960	2,71828

Воспользуемся формулой (1):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{10} \sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1 \cdot 16{,}12534 = 1{,}612534.$$

Оценим ошибку вычисления. Имеем: $\left(e^x\right)' = e^x;\ \max\limits_{[0;1]} e^x = e^1 \approx 2{,}71828$. Подставляя в формулу (3), получаем $\varepsilon \le \frac{1-0}{2} \cdot 2{,}71828 \cdot 0{,}1 = 0{,}135914$. Действительно, сравнивая полученное значение с точным значением, получаем $d = \left|1{,}718281 - 1{,}612534\right| = 0{,}105747 \le \varepsilon$. Это весьма значительная ошибка.

Замечание. Во многих случаях формулы (1) и (2) дают приближённые значения определённого интеграла одна – с избытком, а вторая – с недостатком. Поэтому более точное значение можно получить, найдя среднее арифметическое результатов применения обеих формул.

Формула трапеций.

Соединив отрезками каждые две соседние точки $A_{i-1},\ A_i,\ (i = 0, 1, \ldots, n)$, полученные способом, указанном в конце предыдущего пункта, заменим кривую $y = f(x)$ ломаной $A_0 A_1 \ldots A_{i-1} A_i \ldots A_{n-1} A_n$. Она сверху ограничивает фигуру, составленную из прямоугольных трапеций, каждая из которых опирается на один из частичных отрезков разбиения. Площадь элементарной криволинейной трапеции с основанием $\left[x_{i-1}; x_i\right]$ заменим площадью прямоугольной трапеции, ограниченной сверху отрезком $A_{i-1}A_i$. Тогда искомая площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, будет приближённо равна сумме площадей данных прямоугольных трапеций. Площадь каждой такой трапеции легко подсчитать, используя хорошо известную из школьного курса геометрии формулу: $S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Сумма таких площадей равна:

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \ldots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h + \ldots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} h + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

После очевидных преобразований получим: $S_n = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i\right)$. Таким образом, имеем следующую приближённую формулу вычисления определённого интеграла:

$$\int_b^a f(x)\, dx \approx S_n = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \quad (4).$$

Формула (4) носит название *формулы трапеций*. Ошибку для метода трапеций можно оценить по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \quad (5),$$

где $M_2=\max\limits_{[a;b]} f''(x)$ - наибольшее значение второй производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример 2. В условиях примера 1 использовать формулу трапеций. Оценить ошибку вычисления; сравнить полученное приближённое значение $\int_0^1 e^x dx$ с точным.

Решение.

Воспользуемся таблицей значений, которую мы применяли в предыдущем примере.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45960	2,71828

Сразу по формуле (4) получаем:

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{10}\left(\frac{1,0+2,71828}{2}+15,33798\right)=\frac{1}{10}\cdot 17,19712=1,71971 .$$

Оценим ошибку вычисления. Имеем $\left(e^x\right)''=e^x;\ \max\limits_{[0;1]} e^x=e\approx 2,71828$. Подставляя в формулу (5), получаем: $\varepsilon\le\frac{1-0}{10}\cdot 2,71828\cdot 0,01=0,00271$. Действительно, сравнивая полученное значение с точным, получаем $d=|1,71828-1,71971|=0,00143\le\varepsilon$.

Заметим, что данный способ дал нам гораздо более точное приближение, чем используемый в предыдущем примере.

Формула Симпсона.

Для случаев, когда количество точек разбиения x_i чётно, то есть $n=2m,\ m\in N$, удобно использовать так называемую *формулу Симпсона* (параболических трапеций).

Примем её без вывода:

$$\int_a f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}+4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1}\right)\quad(6) .$$

Напомним, что здесь $m=\frac{n}{2}$.

Оценка ошибки при вычислении определённого интеграла методом Симпсона:

$$\varepsilon\le\frac{b-a}{180}M_4 h^4\quad(7) ,$$

где $M_4=\max\limits_{[a;b]} f^{(4)}(x)$ - наибольшее значение производной четвёртого порядка подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример 3. В условиях примеров 1 и 2 найти приближённое значение $\int_0^1 e^x dx$ методом Симпсона. Оценить ошибку; сравнить полученное значение с точным.

Решение.

Воспользуемся таблицей значений, которую мы применяли в предыдущих примерах.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45960	2,71828

Подставим соответствующие значения в формулу (7):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 5}(1{,}0+2{,}71828+2\cdot(1{,}22140+1{,}49182+1{,}82212+2{,}22554+4\cdot(1{,}10517+1{,}34986+$$

$$+1{,}64872+2{,}01375+2{,}45960)=\frac{1}{30}(3{,}71828+13{,}52176+34{,}30840)=\frac{51{,}54844}{30}=1{,}71828.$$

(здесь $m=n/2=5$)

При расчёте по данной формуле получили все 5 верных цифр после запятой. Таким образом, в одинаковых начальных условиях метод Симпсона даёт наибольшую точность приближённых вычислений определённого интеграла.

Задание.

Найти приближённые значения следующих определённых интегралов. Оценить ошибку вычисления и сравнить с точным значением. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

Вариант 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad \left(I=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785\right)$$

Вариант 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \qquad (I=\ln 2\approx 0{,}693)$$

Вариант 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx \qquad (I=0{,}5)$$

Вариант 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \left(I=\ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}881\right)$$

Вариант 5.

$$\int_0^e \ln x dx \qquad (I=1)$$

Вариант 6.

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx \qquad (I=2\ln 2-1\approx 0,386)$$

Вариант 7.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \qquad \left(I=\frac{\pi}{2}-1\approx 0,571\right)$$

Вариант 8.

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \qquad \left(I=arctg-\frac{\pi}{4}\approx 0,433\right)$$

Вариант 9.

$$\int_0^x \cos^3 x dx \qquad (I=0)$$

Вариант 10.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \qquad \left(I=\ln(1+\sqrt{2}\approx 0,881\right)$$

Вопросы для обсуждения:
Численное интегрирование. Метод прямоугольников, трапеции и Симпсона. Сравнительный анализ результатов расчета по этим методам.
Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа № 8. Метод Эйлера. Метод Пикара.
Форма проведения: практикум
Ход лабораторной работы:

Метод Эйлера.

Простейшим численным методом решения задачи Коши в виде (1)-(2) является *метод Эйлера*, иногда называемый также *методом ломаных Эйлера*.

Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке $P_0(x_0, y_0)$ есть $y_0' = f(x_0, y_0)$. Найдём ординату y_1 касательной, соответствующей абсциссе $x_1 = x_0 + h$. Так как уравнение касательной к кривой в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, то $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Угловой коэффициент в точке $P_1(x_1, y_1)$ также находится из данного дифференциального уравнения $y_1' = f(x_1, y_1)$. На следующем шаге получаем новую точку $P_2(x_2, y_2)$, причём $x_2 = x_1 + h,\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$.

Продолжая вычисления в соответствии с намеченной схемой, получим *формулы Эйлера* для *n* приближённых значений решения задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) на сетке отрезка $[a, b]$ с шагом *h*:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\ \ i = 1, 2, \ldots, n \quad (4).$$

Графической иллюстрацией приближённого решения является ломаная, соединяющая последовательно точки $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, которую называют *ломаной Эйлера* (см. рисунок).

Оценим погрешность данного метода на одном шаге. Примем без вывода следующее утверждение: погрешность на одном шаге имеет порядок h^2 и после *n* шагов погрешность вычисления значения y_n возрастает не более чем в *n* раз. Погрешность метода Эйлера можно оценить неравенством

$$d \le \frac{1}{2} \max_{[a,b]} |\phi''(x)| \cdot h^2 n = \frac{1}{2} \max_{[a,b]} |\phi''(x)| \cdot (b-a) h$$

или представить в виде $d = Ch$, где $C \in \left[0;\ \frac{1}{2} \max_{[a,b]} |\phi''(x)| \cdot (b-a)\right]$.

Это означает, что метод Эйлера имеет первый порядок точности. В частности, при уменьшении шага *h* в 10 раз, погрешность тоже уменьшится примерно в 10 раз.

Практическую оценку погрешности решения, найденного на сетке отрезка $[a, b]$ с шагом $\frac{h}{2}$, в точке $x_i \in [a, b]$ производят с помощью приближённого равенства – *правила Рунге*:

$$|\phi(x_i) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)| \approx \frac{|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)|}{2^p}$$

, где *p* – порядок точности численного метода. (5)

Таким образом, оценка полученного результата по формуле (5) вынуждает проводить вычисления дважды: один раз с шагом *h*, другой – с шагом *h*/2.

Метод Пикара

Данный метод является представителем класса приближенных методов решения.

Идея метода чрезвычайно проста и сводится к процедуре последовательных приближений для решения интегрального уравнения, к которому приводится исходное дифференциальное уравнение.

Пусть поставлена задача Коши

$$v'(x) = j(x, v(x)), \qquad (6)$$

$$x_0 \le x \le x_l,$$

$$v(x_0) = v_0.$$

Проинтегрируем выписанное уравнение

$$v(x) = v_0 + \int_{x_0}^{x} j(t, v(t))\,dt. \qquad (7)$$

Процедура последовательных приближений метода Пикара реализуется согласно следующей схеме

$$y_s(x) = v_0 + \int_{x_0}^{x} j(t, y_{s-1}(t))\,dt, \qquad (8)$$

причем $y_0(t) = v_0$.

Пример. *Решить методом Пикара уравнение*

$$v'(x) = x^3 + v^3,$$

$$v(0) = 0.$$

Решение этого уравнения не выражается через элементарные функции.

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x t^3\,dt = \frac{x^4}{4},$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left[t^3 + \left(\frac{t^4}{4}\right)^3\right] dt = \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13} x^9\right),$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x \left\{t^3 + ¿\left[\frac{t^4}{4}\left(1 + \frac{1}{4^2 \cdot 13} t^9\right)\right]^3\right\} dt = ¿$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^{13}}{4^3 \cdot 13}\left(1 + \frac{3}{4^2 \cdot 22} x^9 + \frac{3}{4^4 \cdot 13 \cdot 31} x^{18} + \frac{1}{4^6 \cdot 13^2 \cdot 40} x^{27}\right)$$

и т.д.

Видно, что при $x \le 1$ ряд быстро сходится. Метод удобен, если интегралы можно взять аналитически.

Докажем сходимость метода Пикара. Пусть в некоторой ограниченной области $g(x, v)$ правая часть $j(x, v)$ непрерывна и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица по переменной v т.е.

$$|j(x, v_1) - j(x, v_2)| \le L|v_1 - v_2|,$$

где L - некоторая константа.

В силу ограниченности области $g(x,v)$ имеют место неравенства

$$|x-x_0|\le l_1\ ,\qquad |v-v_0|\le V\ .$$

Вычтем из (5.3) формулу (5.2), получим для модулей правой и левой частей:

$$|y_s(x)-v(x)|=|\int\limits_{x_0}^{x} j(t,y_{s-1}(t))dt-\int\limits_{x_0}^{x} j(t,v(t))dt|\ ,$$

или

$$|y_s(x)-v(x)|\le\int\limits_{x_0}^{x} |j(t,y_{s-1}(t))-j(t,v(t))|dt\ .$$

Окончательно, используя условие непрерывности Липшица, получим

$$|z_s(x)|\le L\int\limits_{x_0}^{x} |z_{s-1}(t)|dt\ , \qquad (9)$$

где $z_s(x)=y_s(x)-v(x)$ - погрешность приближенного решения.

Последовательное применение формулы 9) при $s=1,2,\ldots$ дает следующую цепочку соотношений при учете того, что

$$|z_0(x)|=|v_0-v(x)|\le V\ ,$$

$$|z_1(x)|\le LV|x-x_0|\ ,$$

$$|z_2(x)|\le\frac{1}{2}L^2\cdot V|(x-x_0)^2|\ ,$$

$$\ldots\ldots$$

$$|z_s(x)|\le\frac{1}{s!}L^s\cdot V|(x-x_0)^s|\ .$$

Т.к. $|x-x_0|\le l_1$, то имеем

$$|z_s(x)|\le\frac{1}{s!}L^s\cdot V\cdot l_1^s=\frac{1}{s!}V\cdot(L\cdot l_1)^s\ .$$

Заменяя $s!$ по формуле Стирлинга, окончательно получим оценку погрешности приближенного решения

$$|z_s(x)|\le\frac{V}{\sqrt{2ps}}\left(\frac{el_1L}{s}\right)^s\ . \qquad (10)$$

Из (9) следует, что при $s\to ¥$ модуль погрешности $|z_s(x)|\to 0$, т.е. приближенное решение равномерно сходится к точному.

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка [a,b] один раз с шагом h = 0,2, другой – с шагом 0,1 методами Эйлера, Эйлера-Коши и классическим методом Рунге – Кутта. Оценить погрешность численного решения по принципу Рунге. Сравнить численное решение с точным.

Указание по выполнению: для выполнения задания использовать следующие итерационные формулы:

1) **метод Эйлера:** p=1 – порядок метода, x_i – узлы сетки отрезка [a,b], h – шаг разбиения; $x_i = x_{i-1} + h,\quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\quad i=1, 2, \ldots, m.$
2) **метод Эйлера-Коши:** p=2 – порядок метода, x_i – узлы сетки отрезка [a,b], h – шаг разбиения; $x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1};\ \Delta y_{i-1} = \frac{1}{2}[k_1^{[i-1]} + k_2^{[i-1]}]$; $i = 1,2,\ldots,m$
$$k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\qquad k_2^{[i-1]} = hf(x_{i-1}+h, y_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$
3) **метод Рунге-Кутта:** p=4 – порядок метода, x_i – узлы сетки отрезка [a,b], h – шаг разбиения; $x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1};\ \Delta y_{i-1} = \frac{1}{6}[k_1^{[i-1]} + 2k_2^{[i-1]} + 2k_3^{[i-1]} + k_4^{[i-1]}]$;

$i = 1,2,\ldots,m;$
$$k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\qquad k_2^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}, y_{i-1}+\frac{1}{2}k_1^{[i-1]}\right),$$
$$k_3^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}, y_{i-1}+\frac{1}{2}k_2^{[i-1]}\right),\qquad k_4^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1}+h, y_{i-1}+k_3^{[i-1]}\right).$$

Для оценки погрешности найденного решения задачи Коши используют принцип Рунге (правило Рунге): ε_i ¿ $\dfrac{|y_i(h) - y_i(\frac{h}{2})|}{2^p - 1}$

Вариант 1.

$y' = \dfrac{1+xy}{x^2},\quad y\Big|_{x=1},\quad 1 \le x \le 2,\quad \phi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

Вариант 2.

$y' = y - \dfrac{2x}{y},\quad \Big|_{x=0},\quad 0 \le x \le 1,\quad \phi(x) = \sqrt{2x+1}$

Вариант 3.

$y' = x + \dfrac{3y}{x},\quad \Big|_{x=1},\quad 1 \le x \le 2,\quad \phi(x) = x^2(x-1)$

Вариант 4.

$y' = xy,\quad y\Big|_{x=0} = 1.\quad 0 \le x \le 1,\quad \phi(x) = e^{x^2/2}$

Вариант 5.

$y' = \dfrac{y^2+xy}{x^2},\quad y\Big|_{x=1},\quad 1 \le x \le 2,\quad \phi(x) = x/(1-\ln x)$

Вариант 6.

$y' = \dfrac{1-y+\ln x}{x},\quad \Big|_{x=1},\quad 1 \le x \le 2,\quad \phi(x) = \ln x$

Вариант 7.

$$y'=\frac{x+y}{x},\qquad y\Big|_{x=1}\qquad 1\le x\le 2,\qquad \phi(x)=x\ln x$$

Вариант 8.

$$y'+2xy=xe^{-x^2}\qquad y\Big|_{x=0}=0\qquad 0\le x\le 1,\qquad \phi(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$$

Вариант 9.

$$y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\qquad y\Big|_{x=0}\qquad 0\le x\le 1,\qquad \phi(x)=\sin x+e^{-\sin x}-1$$

Вариант 10.

$$y'+ytgx=\sin 2x\qquad y\Big|_{x=0}=-1,\qquad 0\le x\le 1,\qquad \phi(x)=(1-2\cos x)\cos x$$

Вопросы для обсуждения:

Понятие о численном решении задачи Коши. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутта.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

Лабораторная работа № 9. Графический способ. Метод наименьших квадратов.

Форма проведения: практикум

Ход лабораторной работы:

Аппроксимировать предложенные функции методом наименьших квадратов. Реализовать в системе MathCAD.

Пусть данные некоторого эксперимента представлены в виде таблицы значений переменных *x* и *y*.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

Можно поставить задачу об отыскании аналитической зависимости между переменными, то есть некоторой формулы $y=f(x)$, явным образом выражающей зависимость *y* от *x*. Естественно требовать, чтобы график искомой функции $y=f(x)$ изменялся плавно и не слишком уклонялся от экспериментальных точек $(x_i,\, y_i)$. Поиск такой функциональной зависимости называют “сглаживанием” экспериментальных данных.

Задачу о сглаживании экспериментальных данных можно решать методом наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов, указывается формула

$$y=Q(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) \quad (4)$$,

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - числовые параметры.

Наилучшими значениями параметров $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (которые обозначим $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$) считаются те, для которых сумма квадратов уклонений функции $Q(x, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ от экспериментальных точек (x_i, y_i) является минимальной, то есть функция

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_n)=\sum_{i=1}^{m}(Q(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_n)-y_i)^2 \quad (5)$$

в точке ($\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$) достигает минимума. Отсюда, используя необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем систему уравнений для определения параметров $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=0, \frac{\partial S}{\partial a_1}=0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial a_n}=0. \quad (6)$$.

Если система (6) имеет единственное решение $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$, то оно является искомым и аналитическая зависимость между экспериментальными данными определяется формулой $y=f(x)=Q(x, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$. Заметим, что в общем случае эта система нелинейна.

Рассмотрим подробнее аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами: $y=Q(x, \alpha, \beta)$. Используя соотношения (6) и опуская несложные выкладки, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными α и β :

¿ m ¿ ¿ ¿

.

В частном случае аппроксимации экспериментальных данных с помощью линейной функции имеем:

$$y=Q(k, x, b)=kx+b, \frac{\partial Q}{\partial k}=x, \frac{\partial Q}{\partial b}=1$$.

Система (7) для этого случая является линейной относительно неизвестных k и b :

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}(kx_i+b)-y_i)=0, ¿¿¿¿ \quad \Leftrightarrow ¿ \left\{bn+k\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}y_i, ¿¿¿\right.\right.$$.

Если для переменных x и y соответствующие значения экспериментальных данных (x_i, y_i) не располагаются вблизи прямой, то выбирают новые переменные

$$X=\phi(x, y), Y=\psi(x, y) \quad (9)$$

так, чтобы преобразованные экспериментальные данные $X_i=\phi(x_i, y_i), Y_i=\psi(x_i, y_i)$ в новой системе координат (X, Y) давали бы точки (X_i, Y_i) менее уклоняющиеся от прямой. Для аппроксимирующей прямой $Y=kX+B$ коэффициенты можно определить из уравнений (8), где вместо x_i и y_i подставляют соответствующие значения X_i и Y_i. Нахождение зависимостей (9) называют, выравниваем экспериментальных данных. Функциональная зависимость $y=f(x)$ определена неявно уравнением $\psi(x; y)=k\phi(x; y)+b$ разрешимым относительно *y* в частных случаях.

Пример 1. Установить вид эмпирической формулы $y=f(x)$, используя аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами α и β, и определить наилучшие значения параметров, если опытные данные представлены таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161

Решение.

Легко заметить, что экспериментальные точки (x_i, y_i) лежат приблизительно на одной прямой. Положим $X=\ln x; Y=\ln y$ и составим таблицу для экспериментальных данных в новых переменных:

X_i	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609
Y_i	1,960	3,325	4,129	4,700	5,081

Точки (X_i, Y_i) лежат приблизительно на одной прямой, в чём легко убедиться, построив их в системе координат (X, Y). Наилучшие значения параметров k и b находятся из системы уравнений (8):

$$\left\{ bn+k\sum_{i=1}^{m} X_i=\sum_{i=1}^{m} Y_i, ¿¿¿¿ \right.$$

.

Решив эту систему, получим: $b=1,97; k=1,95$. Неявное уравнение, выражающее связь между переменными x и y имеет вид $\ln y=1,95\ln x+1,97$. Отсюда легко получить прямую зависимость между переменными в виде степенной функции:

$$y=e^{1,97}x^{1,95}.$$

Для сравнения можно привести таблицу экспериментальных данных, и данных, полученных с помощью найденной формулы:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161

$y=e^{1,97}x^{1,95}$.	7,16	27,703	61,081	107,04	165,39

Формула, полученная в результате решения приведённого примера, является частным случаем аппроксимирующей зависимости с двумя параметрами, имеющей вид $Q(x,\alpha,\beta)=\alpha x^{\beta}$. Параметры этой зависимости можно было бы найти из системы нелинейных уравнений (7) непосредственно, однако применение способа выравнивания существенно упрощает вычисление параметров. В данном случае $\alpha=e^{b},\ \beta=k$.

Рекомендации по переведению экспериментальных данных в аппроксимирующие зависимости с двумя переменными приведены в следующей таблице.

№	Выравнивание данных (преобразование переменных)	Эмпирическая формула
1	$X=x;\ Y=xy$	$y=\alpha x+\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha=k,\ \beta=b$
2	$X=x;\ Y=\frac{1}{y}$	$y=\frac{1}{\alpha x+\beta},\ \alpha=k,\ \beta=b$
3	$X=x;\ Y=\frac{x}{y}$	$y=\frac{x}{\alpha x+\beta},\ \alpha=k,\ \beta=b$
4	$X=x;\ Y=\ln y$	$y=\alpha\beta^{x},\ \alpha=e^{b},\ \beta=e^{k}$
5	$X=\ln x;\ Y=y$	$y=\alpha\ln x+\beta,\ \alpha=k,\ \beta=b$
6	$X=\ln x;\ Y=\ln y$	$y=\alpha x^{\beta},\ \alpha=e^{b},\ \beta=k$

Одну из шести предложенных формул преобразования следует выбирать одновременно с проверкой линейной зависимости к исходным данным. Условием выбора наилучшей эмпирической формулы является наименьшее уклонение исходных или преобразованных экспериментальных данных от прямой. Его можно определить по формуле:

$$d=\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i-kX_i-b)^2}{\sum_{i=1}^{m}Y_i^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для наилучшей эмпирической формулы значение d будет наименьшим.

<u>Задание.</u>

Экспериментальные данные содержатся в таблицах. Для каждой из них выполнить следующие операции:

1. Нанести экспериментальные точки $(x_i;\ y_i)$ на координатную сетку $(x;\ y)$.
2. Выбрать одну из шести предложенных формул преобразования к новым переменным $(X;\ Y)$ так, чтобы преобразованные экспериментальные данные $(X_i;\ Y_i)$ наименее уклонялись от прямой.
3. Методом наименьших квадратов найти наилучшие значения параметров k и b в уравнении прямой $Y=kX+b$.
1. Найти явный вид эмпирической формулы $y=Q(x,\alpha,\beta)$ и построить график эмпирической функции.

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,4	1,6	1,7	1,9

б)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,05	1,55	1,7	1,75	1,8

в)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,5	6,2	5,5	3,5	3,0

г)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,4	0,55	0,13	0,09	0,07

Вопросы для обсуждения:
Графический метод решения. Метод наименьших квадратов определения коэффициентов уравнения.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-2	1-3

Оценочные средства: отчет к лабораторной работе.

5. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он продемонстрировал глубокие, исчерпывающие знания и творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала; логически последовательные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все поставленные вопросы и дополнительные вопросы преподавателя; свободное владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал твердые и достаточно полные знания всего программного материала, правильное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений; последовательные, правильные, конкретные ответы на поставленные вопросы при свободном устранении замечаний по отдельным вопросам; достаточное владение литературой, рекомендованной учебной программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал твердые знания и понимание основного программного материала; правильные, без грубых ошибок ответы на поставленные вопросы при устранении неточностей и несущественных ошибок в освещении отдельных положений при наводящих вопросах преподавателя; недостаточное владение литературой, рекомендованной учебной программой.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал неправильные ответы на основные вопросы, допущены грубые ошибки в ответах, непонимание сущности излагаемых вопросов; неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы.

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими лабораторные занятия по дисциплине, в следующих формах: отчет письменный по заданию преподавателя, собеседование.

Допуск к лабораторным работам происходит при наличии у студентов печатного варианта отчета. Защита отчета проходит в форме доклада студента по выполненной работе и ответов на вопросы преподавателя.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление отчета соответсвует установленным требованиям, а отчет полностью раскрывает суть работы. Основанием для снижением оценки являются:

- частично не соовествует установленным требованиям;
- в отчете непольностью раскрывает суть работы.

Отчет может быть отправлен на доработку в следующих случаях:

- польностью не соовествует установленным требованиям;
- не раскрыта суть работы.

Критерии оценивания отчетов по лабораторным и практичсеким работам, собеседования приведены в Фонде оценочных средств по дисциплине «Инструментальные средства информационных систем» на кафедре «Информационной безопасности, систем и технологий ».

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература:

1. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: Логос, 2012.
2. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Лань, 2012.

7.1.2. Дополнительная литература:

1. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы. – М.: Academia, 2005.
2. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. – М.: Academia, 2007.
3. Рыжиков Ю.И. Вычислительные методы. – М.: BHV, 2007.

7.1.3. Методическая литература:

1. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Численные методы в научных расчетах».
2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы по дисциплине «Численные методы в научных расчетах».

7.1.4. Интернет-ресурсы:

1. http://www.intuit.ru – сайт дистанционного образования в области информационных технологий
2. http://window.edu.ru – образовательные ресурсы ведущих вузов
3. http://ncfu.ru – сайт СКФУ

7.1.5. Программное обеспечение

1. Microsoft Office – Word, Excel.
2. Пакет автоматизации математических вычислений – MathCAD.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Направление подготовки	**09.04.02 Информационные системы и технологии**
Направленность (профиль) подготовки	**«Технологии работы с данными и знаниями, анализ информации»**

Пятигорск, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Целью дисциплины является изучение основ аппарата вычислительной математики и приобретение навыков его использования в приложениях. Развитие логического мышления и математической интуиции. Умение применять численные методы при решении прикладных задач и изучении других дисциплин.

2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «**И**нформационные системы и технологии в научных исследованиях» относится к дисциплинам базовой части блока Б1. Ее освоение происходит в 1 семестре.

3. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Для студентов очной формы обучения:

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-2 (ИД-1, ИД-2), ОПК-3 (ИД-1, ИД-2), ОПК-4 (ИД-1, ИД-2)	Подготовка к лекциям	Коллоквиум	1,62	0,18	1,8
ОПК-2 (ИД-1, ИД-2), ОПК-3 (ИД-1, ИД-2), ОПК-4 (ИД-1, ИД-2)	Самостоятельное изучение литературы	Коллоквиум	74,52	8,28	82,8
ОПК-2 (ИД-1, ИД-2), ОПК-3 (ИД-1, ИД-2), ОПК-4 (ИД-1, ИД-2)	Подготовка и выполнение лабораторных работ	Отчет письменный	4,86	0,54	5,4
Итого за 1 семестр			**81**	**9**	**90**
Итого			**81**	**9**	**90**

Для студентов заочной формы обучения:

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-2 (ИД-1, ИД-2), ОПК-3 (ИД-1, ИД-2), ОПК-4 (ИД-1, ИД-2)	Подготовка к лекциям	Коллоквиум	0,36	0,04	0,4
ОПК-2 (ИД-1, ИД-2), ОПК-3 (ИД-1, ИД-2), ОПК-4 (ИД-1, ИД-2)	Самостоятельное изучение литературы	Коллоквиум	140,58	15,62	156,2
ОПК-2 (ИД-1, ИД-2), ОПК-3 (ИД-1, ИД-2), ОПК-4 (ИД-1, ИД-2)	Подготовка и выполнение лабораторных работ	Отчет письменный	2,16	0,24	2,4
Итого за 1 семестр			**143,1**	**15,9**	**159**
Итого			**143,1**	**15,9**	**159**

№ п/п	Темы для самостоятельного изучения	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1.	Тема 2. Абсолютная и относительная погрешности. Число верных знаков. Правило округления.	1-3	1-3	1-3	1-3
2.	Тема 7. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений. Метод итерации.	1-3	1-3	1-3	1-3
3.	Тема 11. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.	1-3	1-3	1-3	1-3

4.	Тема 14. Метод Рунге-Кутта.	1-3	1-3	1-3	1-3
5.	Тема 16. Приближения функций сплайнами. Преобразование Фурье.	1-3	1-3	1-3	1-3

4. СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема самостоятельного изучения № 1. Абсолютная и относительная погрешности. Число верных знаков. Правило округления.
Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение учебно-методической литературы
Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект
Средства и технологии оценки: собеседование
План конспекта:

Приближенное значение величины. Абсолютная погрешность, относительная погрешность. Верные, сомнительные, значащие цифры. Способы хранения цифр в памяти ЭВМ. Погрешности арифметических действий.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-3	1-2

Тема самостоятельного изучения № 2. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений. Метод итерации.

Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение учебно-методической литературы
Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект
Средства и технологии оценки: собеседование
План конспекта:

Устойчивость, корректность, сходимость. Что значит решить систему уравнений. Какие вы знаете группы методов решения систем линейных уравнений. Какие методы относятся к прямым методам решения систем линейных уравнений. Какие методы относятся к приближенным методам решения систем линейных уравнений. В чем основное отличие точных и приближенных методов решения систем линейных уравнений. В чем заключается суть метода Гаусса для решения систем линейных уравнений. В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений.

Как привести систему к виду с преобладающими диагональными коэффициентами. В чем заключается суть метода Зейделя для решения систем уравнений. Каким методом лучше всего решать систему уравнений невысокого порядка, например третьего. В каких случаях предпочтительны итерационные методы решения систем линейных уравнений. Условия сходимости итерационного процесса. От чего зависит скорость сходимости метода итераций.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-3	1-2

Тема самостоятельного изучения № 3. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.

Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение учебно-методической литературы
Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект
Средства и технологии оценки: собеседование
План конспекта:

Что такое интерполяция?

Что такое узлы интерполяции. В чем заключается задача отыскания интерполирующего многочлена. Как построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Как определить погрешность метода интерполяции с помощью формулы Лагранжа. Полиномом какой степени, является интерполяционный полином Лагранжа при n+1 узлах. Может ли метод Лагранжа применяться для экстраполяции. Что влияет на точность интерполяции в методе Лагранжа. Можно ли добавлять новые узлы интерполяции при использовании метода Лагранжа. К какому классу функций относится функция, задаваемая интерполяционной формулой Лагранжа. Как образуются разделенные разности.

Как связаны разделенные разности и производная. Как происходит процесс интерполирования сплайнами. Что такое конечная разность первого порядка. Что такое конечная разность второго порядка. Как она находится? Что такое конечная разность n-го порядка. Как она находится?

Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов. Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов. Как находится погрешность метода интерполирования с помощью формул Ньютона.
Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-3	1-2

Тема самостоятельного изучения № 4. Метод Рунге-Кутта.

Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение учебно-методической литературы
Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект
Средства и технологии оценки: собеседование
План конспекта:

Что значит – решить задачу Коши для дифференциальных уравнений первого порядка. Что является решением дифференциального уравнения. Графическая интерпретация численного решения дифференциального уравнения. Какие существуют методы решения дифференциального уравнения в зависимости от формы представления решения. В чем заключается суть метода ломанных Эйлера. Графическая интерпретация метода Эйлера и усовершенствованного метода Эйлера. В чем отличие. Необходим ли поиск начальных условий в методе Эйлера. К какой группе относится модифицированный метод Эйлера.

Метод Рунге — Кутта. Как определить количество верных цифр в числе, являющемся решением дифференциального уравнения методам Эйлера, усовершенствованного метода Эйлера, Рунге-Кутты. Как можно оценить погрешность решения дифференциального уравнения при использовании метода Рунге — Кутта.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-3	1-2

Тема самостоятельного изучения № 5. Приближения функций сплайнами. Преобразование Фурье.

Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение учебно-методической литературы

Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект

Средства и технологии оценки: собеседование

План конспекта:

Что такое сплайн. Как происходит процесс интерполирования сплайнами. Что такое конечная разность первого порядка. Как она находится. Что такое конечная разность второго порядка. Как она находится. Что такое конечная разность n-го порядка. Преобразования Фурье.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1-3	1-3	1-2

5. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он продемонстрировал глубокие, исчерпывающие знания и творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала; логически последовательные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все поставленные вопросы и дополнительные вопросы преподавателя; свободное владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он продемонстрировал твердые и достаточно полные знания всего программного материала, правильное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений; последовательные, правильные, конкретные ответы на поставленные вопросы при свободном устранении замечаний по отдельным вопросам; достаточное владение литературой, рекомендованной учебной программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал твердые знания и понимание основного программного материала; правильные, без грубых ошибок ответы на поставленные вопросы при устранении неточностей и несущественных ошибок в освещении отдельных положений при наводящих вопросах преподавателя; недостаточное владение литературой, рекомендованной учебной программой.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он продемонстрировал неправильные ответы на основные вопросы, допущены грубые ошибки в ответах, непонимание сущности излагаемых вопросов; неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими лабораторные занятия по дисциплине, в следующих формах: отчет письменный по заданию преподавателя, собеседование.

Максимальное количество баллов студент получает, если оформление конспекта соответсвует установленным требованиям и полностью раскрывает суть работы. Основанием для снижением оценки являются:

- частично не соовествует установленным требованиям;
- в отчете непольностью раскрывает суть работы.

Отчет может быть отправлен на доработку в следующих случаях:

- польностью не соовествует установленным требованиям;
- не раскрыта суть работы.

Критерии оценивания отчетов по лабораторным работам, собеседования приведены в Фонде оценочных средств по дисциплине «Численные методы в научных расчетах» на кафедре «Информационной безопасности, систем и технологий ».

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

10.1. Рекомендуемая литература

10.1.1. Основная литература:

1. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.: Логос, 2012.
2. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Лань, 2012.

10.1.2. Дополнительная литература:

1. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы. – М.: Academia, 2005.
2. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. – М.: Academia, 2007.
3. Рыжиков Ю.И. Вычислительные методы. – М.: BHV, 2007.

10.1.3. Методическая литература:

3. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Численные методы в научных расчетах».
4. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы по дисциплине «Численные методы в научных расчетах».

10.1.4. Интернет-ресурсы:

4. http://www.intuit.ru – сайт дистанционного образования в области информационных технологий

5. http://window.edu.ru – образовательные ресурсы ведущих вузов
6. http://ncfu.ru – сайт СКФУ

10.1.5. Программное обеспечение

1. Microsoft Office – Word, Excel.
2. Пакет автоматизации математических вычислений – MathCAD.