

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна

Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского

федерального университета

Дата подписания: 21.05.2025 11:56:27

Уникальный программный ключ:

d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ

по дисциплине

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ»

для направления подготовки **10.03.01 Информационная безопасность**
направленность (профиль) **Безопасность компьютерных систем**

Пятигорск
2025

ВВЕДЕНИЕ

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Освоить соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач; освоить способность понимать значение информации в развитии современного общества, применять информационные технологии для поиска и обработки информации; освоить способность проводить анализ исходных данных для проектирования подсистем и средств обеспечения информационной безопасности и участвовать в проведении технико-экономического обоснования соответствующих проектных решений; освоить способность проводить эксперименты по заданной методике, обработку, оценку погрешности и достоверности их результатов, а также приобрести набор общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 10.03.01 «Информационная безопасность»

2. Наименование лабораторных работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Объем часов	Из них Лабораторная подготовка, часов
3 семестр			
1	Лабораторная работа 1. Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к сдвигу линейные систем.	4	
2	Лабораторная работа 2. Способы представления дискретных сигналов.	4	
3	Лабораторная работа 3. Дискретные сигналы, их представление в частотной и импульсной области.	4	
4	Лабораторная работа 4. Сигналы и линейные системы.	4	
5	Лабораторная работа 5. Дискретизация методом прямого z- преобразования.	4	
6	Лабораторная работа 6. Дискретизация методом обратного z-преобразования.	4	
7	Лабораторная работа 7. Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье. Дискретное преобразование Фурье для свертки дискретных последовательностей.	4	
8	Лабораторная работа 8. Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье.	4	
9	Лабораторная работа 9. Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки.	4	
	Итого за 3 семестр	36	
	Итого	36	

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Операции над дискретными последовательностями и схемы инвариантных к сдвигу линейные систем

1. Цель занятия

изучить дискретные сигналы: последовательности, операции над ними и свойства.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о дискретных последовательностях 35 мин
 2. Рассмотрение примеров 35 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
- Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Математически дискретные сигналы представляются последовательностями чисел. Числовая последовательность x , n -й член в которой обозначают через $x[n]$, формально записывается как

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (1)$$

где n — целое число. На практике такие последовательности возникают, например, при преобразовании аналогового сигнала в дискретную форму. В этом случае численное значение n -го члена последовательности равно величине аналогового сигнала $x_a(t)$ в момент времени nT , т.е.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2)$$

Число T называют шагом дискретизации, а обратное к нему — частотой дискретизации. Хотя последовательность может возникать не только при преобразовании сигналов, ее член $x[n]$ удобно называть n -м отсчетом. Кроме того, обозначение последовательности (1) довольно

громоздко, и мы будем говорить о «последовательности $x[n]$ », подобно выражению «аналоговый сигнал $x_a(t)$ », хотя запись $x[n]$, строго говоря, относится к отдельному члену последовательности.

Дискретные сигналы (т. е. последовательности) обычно изображают, как показано на рис. 1.1. Абсцисса графика показана в виде непрерывной прямой, но важно отдавать себе отчет, что величина $x[n]$ определена только при целых значениях аргумента n . Неверно думать, что $x[n]$ равно нулю, если n не является целым числом, просто при таких аргументах $x[n]$ не определено.

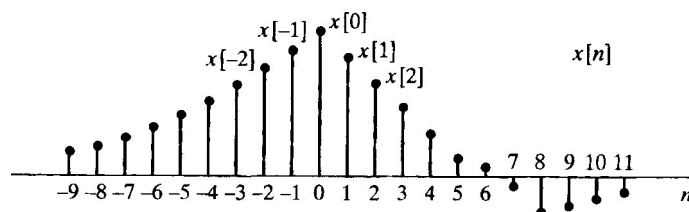


Рисунок 1.1

В качестве примера на рис. 1.2, а) показан фрагмент речевого сигнала, соответствующего вариациям акустического давления, в виде функции от времени, а на рис. 1.2, б) приведена последовательность отсчетов этого сигнала. В то время как исходный речевой сигнал определен в любой момент времени t , последовательность несет информацию об этом сигнале только в определенные моменты времени. Из теоремы о дискретном представлении (Котельникова-Найквиста), следует, что исходный сигнал можно восстановить из последовательности отсчетов с любой желаемой степенью точности, если отсчеты были произведены с достаточной частотой.

Стандартные последовательности и операции над ними

При анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов над последовательностями совершается ряд основных преобразований. Произведение и сумма двух последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ определяются почленно, т.е. $z[n] = x[n] \cdot y[n]$ — произведение, а $w[n] = x[n] + y[n]$ — сумма этих последовательностей. Произведением последовательности $x[n]$ на число a считается последовательность, получающаяся из $x[n]$ в результате умножения каждого его члена a . Последовательность $y[n]$ называют задержанной, или сдвинутой версией последовательности $x[n]$, если

$$y[n] = x[n - n_0], \quad (3)$$

где n_0 — целое число

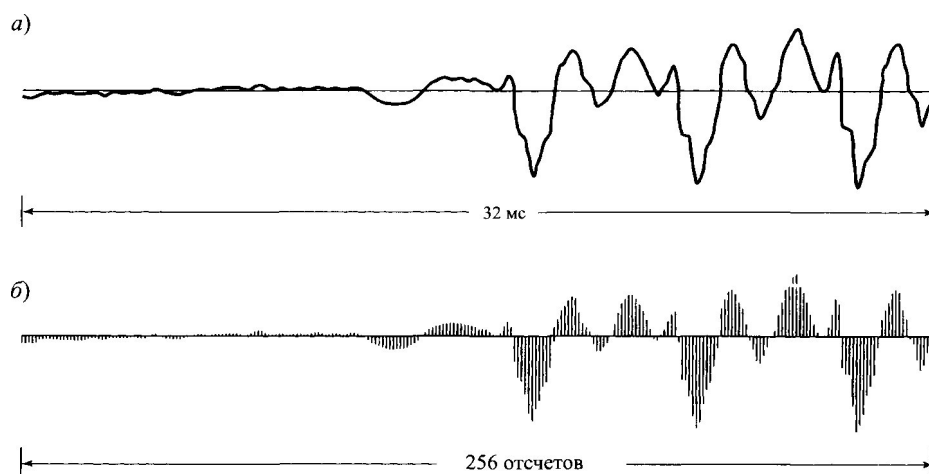


Рисунок 1.2

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем. Они представлены на рис. 1.3 и описываются ниже.

Единичный импульс (рис. 1.3, а)) определяется как

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Как мы убедимся, единичный импульс играет ту же роль в теории дискретных сигналов, что и дельта-функция Дирака в теории непрерывных сигналов. Последовательность с единственным ненулевым отсчетом удобно называть дискретным импульсом, или просто импульсом. Стоит отметить, что дискретный импульс — понятие существенно более простое и понятное, чем дельта-функция.

К одному из важных свойств единичного импульса относится тот факт, что любая последовательность может быть выражена в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов. Например, последовательность $p[n]$ из рис. 1.4 представляется в виде:

$$p[n] = a_{-3}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7], \quad (5)$$

а для произвольной последовательности справедливо соотношение:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (6)$$

Формула (6) будет использована для представления дискретных линейных систем.

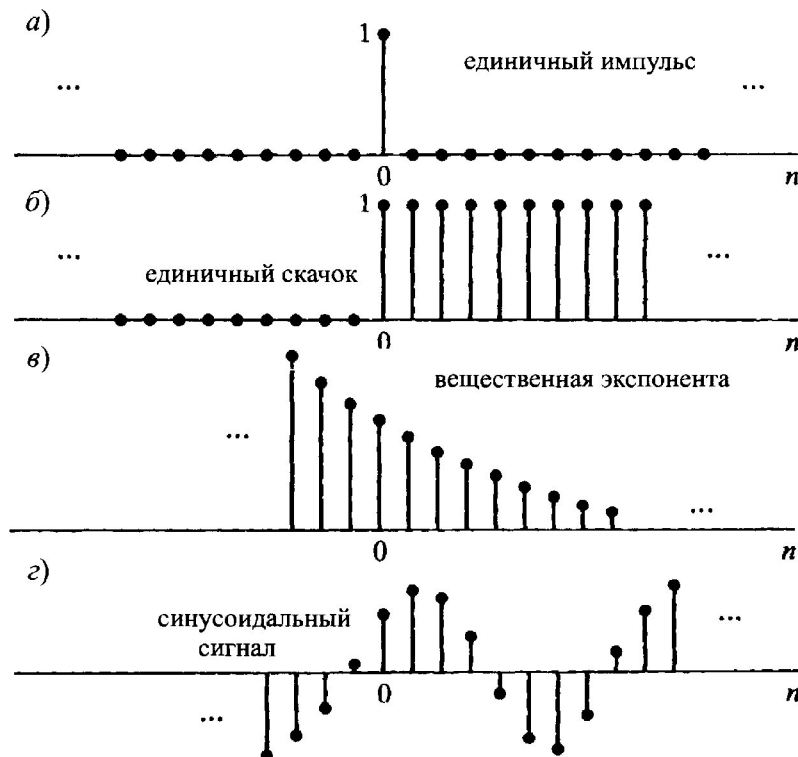


Рисунок 1.3. Некоторые стандартные последовательности

Единичный скачок (рис.1.3,б)) определяется формулой:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Единичный скачок выражается через импульс как:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (8)$$

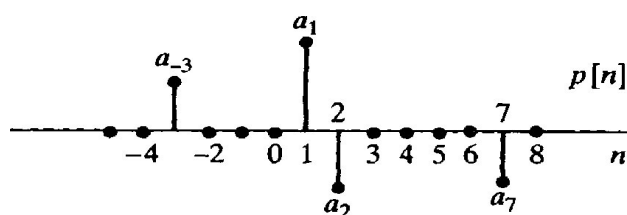


Рисунок 1.4. Пример последовательности, представляющей в виде конечной линейной комбинации сдвинутых импульсов

т.е. n -й отсчет единичного скачка равен сумме всех членов импульсной последовательности вплоть до n -го. Альтернативное представление единичного скачка в терминах импульса получается в результате суммы сдвинутых импульсов, как в уравнении (6). Все ненулевые члены единичного скачка равны 1, поэтому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (9)$$

С другой стороны, импульсная последовательность может быть выражена через единичный скачок как разность:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (10)$$

Экспоненциальная последовательность наиболее важна при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем. В общем виде такие последовательности записываются как

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (11)$$

Если A и a — вещественные числа, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < a < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают при росте n , как на рис. (1.3, в).

Когда $-1 < a < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают. Наконец, при $|a| > 1$ последовательность возрастает по абсолютной величине с ростом n .

Пример 1. Комбинирование стандартных последовательностей.

Довольно часто стандартные последовательности комбинируются для получения новых. Экспоненциальную последовательность, члены которой равны нулю при $n < 0$, можно определить как

$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (12)$$

что имеет довольно неуклюжий вид. Более просто такая последовательность задается как выражение $x[n] = A\alpha^n u[n]$.

Синусоидальная последовательность тоже играет не последнюю роль. В общей форме она имеет вид

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

где A и $(\varphi$ — вещественные константы (рис. 1.3, г)).

Экспоненциальная последовательность $A\alpha^n$ с комплексным α имеет вещественную и мнимую части, являющиеся взвешенными синусоидами.

Более точно, если $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ и $A = |A|e^{j\varphi}$, то последовательность $A\alpha^n$ может быть записана одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\varphi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|\alpha| > 1$, или с экспоненциально уменьшающейся огибающей при $|\alpha| < 1$. (В качестве простейшего примера разберите случай $\omega_0 = \pi$.) Когда $|\alpha| = 1$, последовательность называется комплексной экспоненциальной последовательностью:

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad (15)$$

т.е. как вещественная, так и мнимая часть последовательности меняется синусоидально в зависимости от n . По аналогии со случаем непрерывного времени величину ω_0 называют (круговой) частотой комплексной синусоиды или комплексной экспоненты, а φ — ее фазой. Заметим, однако, что n — безразмерное целое число. Поэтому ω_0 должна измеряться в радианах. Если мы хотим проследивать тесную аналогию со случаем непрерывного времени, нам необходимо уточнить единицу частоты как радианы на отсчет, а n измерять в отсчетах.

Тот факт, что переменная n в формуле (15) всегда принимает только целые значения, подводит нас к некоторым важным отличиям в свойствах дискретных и непрерывных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей. Разница между непрерывной и дискретной комплексной экспонентой особенно заметна при частоте $(\omega_0 + 2\pi)$. В этом случае

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}. \quad (16)$$

Более общий факт: можно легко убедиться, что комплексные экспоненциальные последовательности с частотами $(\omega_0 + 2\pi r)$ при $r \in \mathbb{Z}$ неотличимы одна от другой. Аналогичное утверждение справедливо для синусоидальных последовательностей:

$$x[n] = A \cos((\omega_0 + 2\pi r)n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \varphi). \quad (17)$$

На данный момент мы просто отметим, что при рассмотрении комплексных экспоненциальных сигналов вида

$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ или вещественных синусоидальных сигналов типа $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ мы должны ограничиться частотами, лежащими в интервале длины 2π , например $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ или $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

Следующее важное отличие дискретных комплексных экспонент и синусоид от непрерывных касается их периодичности. В непрерывном

случае как синусоидальный, так и комплексный экспоненциальный сигнал является периодической функцией, период которой равен 2π , деленному на частоту. В дискретном случае последовательность считают периодической, если

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n, \quad (18)$$

где период N — обязательно целое число. Проверяя это условие для дискретных синусоид, получим

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi), \quad (19)$$

откуда

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Пример 2. Периодичные и не периодичные дискретные синусоиды

Рассмотрим сигнал $x_1[n] = \cos(\pi n/4)$. Его период равен $N = 8$. Для доказательства заметим, что равенства $x[n + 8] = \cos(\pi(n + 8)/4) = \cos(\pi n/4 + 2\pi) = \cos(\pi n/4) = x[n]$ справедливы для всех целых n , что и требуется в определении периодичности дискретных сигналов.

Вопреки нашему интуитивному представлению, связанному с непрерывными синусоидальными сигналами, увеличение частоты дискретной синусоиды не обязательно влечет уменьшение ее периода. Рассмотрим последовательность $x_2[n] = \cos(3\pi n/8)$, имеющую большую частоту, чем $x_1[n]$, и заметим, что период $x_2[n]$ отличен от 8. Действительно, $x_2[n + 8] = \cos(3\pi(n + 8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -x_2[n]$. Так же как и в случае последовательности $x_1[n]$, можно показать, что период сигнала $x_2[n]$ равен 16. Итак, увеличение частоты от $\omega_0 = 2\pi/8$ до $\omega_0 = 3\pi/8$ ведет к увеличению периода сигнала. Это происходит из-за того, что дискретный сигнал определен лишь при целых значениях n .

Требование целостности переменной n приводит к тому, что некоторые синусоидальные сигналы вообще не имеют периода. Например, какое бы целое число $N \neq 0$ мы ни взяли, равенство $\cos(n + N) = \cos(n)$ будет нарушаться при каких-то целых значениях переменной n . Эти и другие свойства дискретных синусоид, противоречащие их непрерывным двойникам, возникают вследствие ограничения «времени» n на множество целых чисел.

Комбинируя условие (20) с предыдущим наблюдением о неразличимости частот ω_0 и $(\omega_0 + 2\pi r)$, получим, что существует ровно N

различных значений частоты, при которых соответствующая последовательность имеет период N , а именно $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Это свойство комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей носит основополагающий характер как для теории, так и для разработки численных алгоритмов в дискретном анализе Фурье. Возвращаясь к различиям между непрерывными и дискретными синусоидами, необходимо отметить, что верхние и нижние частоты также по-разному проявляются в непрерывном и дискретном случаях. При росте частоты Ω_0 непрерывный сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi)$ осциллирует все более и более быстро. Дискретный синусоидальный сигнал $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ тоже увеличивает скорость осциллирования при возрастании ω_0 от 0 до π .

Фактически, ввиду периодичности синусоидального и комплексного экспоненциального сигналов относительно частоты ω_0 и $(\omega_0 + 2\pi r)$, не отличаются друг от друга. Таким образом, частоты, близкие к 0, ничем не отличаются от частот, близких к 2π . Как следствие, для синусоидальных и комплексных экспоненциальных сигналов значения ω в окрестности $2\pi k$ при любом целом k принято называть нижними (соответственно, медленно осциллирующими), в то время как ее значения в окрестности $(\pi + 2\pi k)$ называют верхними (соответственно быстро осциллирующими).

Дискретные системы

С точки зрения математики система с дискретным временем определяется как преобразование, или оператор, переводящий входную последовательность (сигнал) $x[n]$ в выходную последовательность $y[n]$ (отклик, или реакцию системы), что можно обозначить как

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (22)$$

и изображать графически, как показано на рис. 1.6. Соотношение (22) — это правило, или формула, по которому вычисляются значения реакции системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет реакции системы с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x[n]$. Следующие примеры знакомят с некоторыми простыми, но полезными системами.

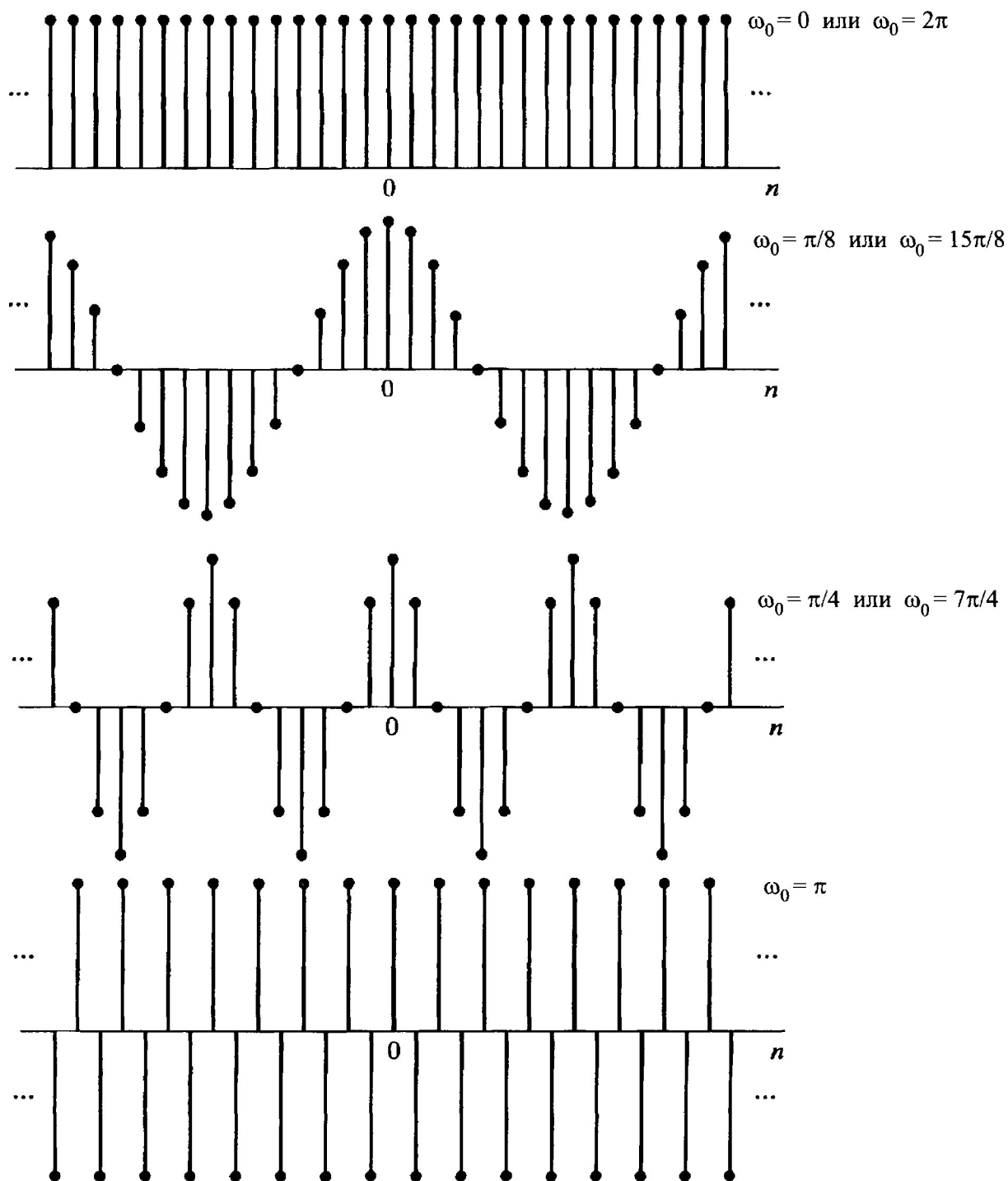


Рисунок 1.5.

Пример 3. Идеальная система задержки.

Идеальная система задержки (ИСЗ) определяется по формуле

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty,$$

где n_d — фиксированное натуральное число, называемое задержкой системы. Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов. Если в формуле (23) взять в качестве n_d фиксированное

отрицательное целое число, то система будет сдвигать входную последовательность влево на $|n_d|$ отсчетов, что соответствует опережению времени.

В примере 3 для вычисления отсчета отклика системы используется единственный отсчет входной последовательности. В следующем примере это не так.

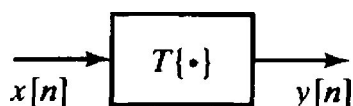


Рисунок 1.6. Графическое представление дискретной системы

Пример 4. Скользящее среднее

Общая система скользящего среднего имеет вид:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \\ \times (x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + \dots + x[n - M_2]). \quad (24)$$

Она вычисляет n -й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_1 + 1)$ отсчетов входной, расположенных вокруг n -го. На рис. 1.7 изображена входная последовательность как функция от переменной k и ее отсчеты, участвующие в вычислении выходного отсчета $y[n]$ при $n = 7$, $M_1 = 0$ и $M_2 = 5$. Получающийся отсчет $y[7]$ равен $1/6$ суммы всех отсчетов, лежащих между вертикальными пунктирными линиями. Для вычисления $y[8]$ обе пунктирные линии надо сдвинуть вправо на одну позицию.

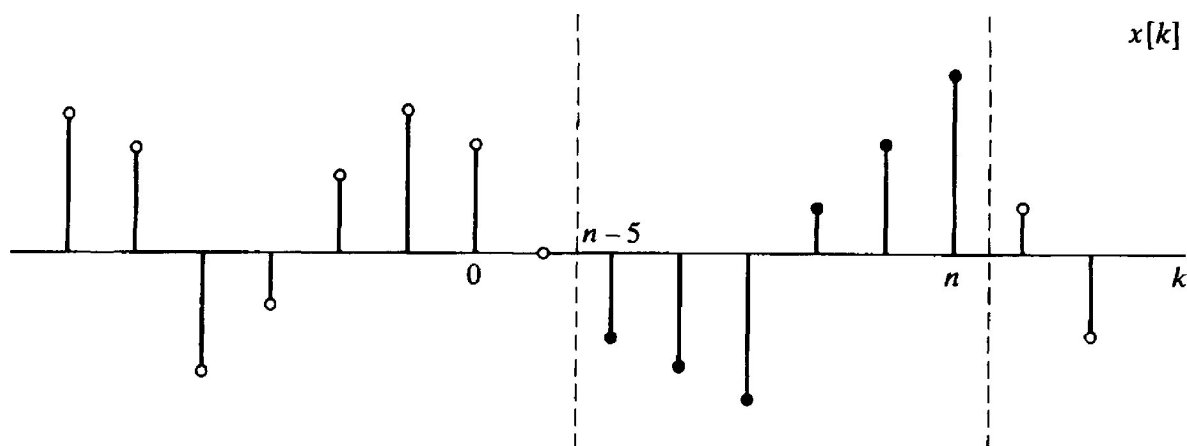


Рисунок 1.7. Члены последовательности. Участвующие в вычислении скользящего среднего

Классы систем определяют наложением определенных ограничений на свойства преобразования T . Этот процесс, как мы сможем убедиться далее,

часто ведет к самым общим математическим представлениям.

Задания для самостоятельного решения.

1.

Опираясь на определение линейности, покажите, что ИСЗ и скользящее среднее являются линейными системами.

2.

Дискретный сигнал $x[n]$ показан на рис. 1.8. Изобразите каждый из следующих сигналов:

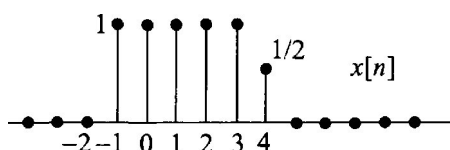


Рисунок 1.8.

- а) $x[n] = e^{j(2\pi n/5)}$; б) $x[n - 2]$; в) $x[4 - n]$; г) $x[2n]$; д) $x[n]u[2 - n]$;
е) $x[n - 1]\delta[n - 3]$.

3.

а) Известно, что импульсная характеристика $h[n]$ линейной стационарной системы (ЛС-системы) равна нулю всюду вне отрезка $N_0 \leq n \leq N_1$. Кроме того, ненулевые отсчеты поданного на вход сигнала $x[n]$ расположены в промежутке $N_2 \leq n \leq N_3$. Как следствие, реакция системы равна нулю всюду, кроме некоторого сегмента $N_4 \leq n \leq N_5$. Выразите N_4 и N_5 через N_0 , N_1 , N_2 и N_3 .

б) Пусть $x[n]$ имеет нулевые значения, кроме N последовательных отсчетов, а $h[n] = 0$, кроме M последовательных членов. Что можно сказать о максимальном числе последовательных ненулевых отсчетов $y[n]$?

4.

Рассмотрим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами $y[n] - 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = 2x[n - 1]$.

Вычислите $y[n]$ при $n \geq 0$, если $x[n] = \delta[n]$ и $y[n] = 0$ при $n < 0$.

5. Используемая литература

1. Айфичер, Джервис. Проектирование систем цифровой смешанной обработки сигналов. 2004 год. 989 стр.
2. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 2005. - 312 с.

3. А.Оппенгейм, Р.Шафер Цифровая обработка сигналов. – Техносфера, Москва 2006.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Моделирование дискретных сигналов, их представление в частотной и импульсной области

1. Цель занятия

Научиться представлять линейные стационарные системы в импульсной и частотной форме. Изучить соотношение между импульсной и частотной характеристиками, как пару, связанную с преобразованием Фурье и ознакомится с основными свойствами преобразований.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о функциях стационарных систем 15 мин
 2. Рассмотрение частотных характеристик 20 мин.
 3. Рассмотрение примеров 35 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Дискретные сигналы можно представлять различными способами. Например, синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что комплексные экспоненциальные последовательности являются собственными функциями линейных стационарных систем, а реакция этой системы на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью с той же частотой, фаза и амплитуда которой полностью определяется системой. Фундаментальное свойство линейных стационарных систем, позволяющее представлять сигналы в терминах синусоидальных или комплексных экспоненциальных последовательностей (т.е. представление Фурье), активно используется в теории линейных систем.

Собственные функции линейных стационарных систем

Чтобы почувствовать главное свойство комплексных экспонент в теории дискретных систем, рассмотрим входную последовательность $x[n] = e^{j\omega n}$ $-\infty < n < \infty$, т.е. комплексную экспоненту с частотой ω , измеряемой в радианах.

Из формулы

Мы видим, что соответствующая реакция линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n]$ имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right). \quad (1)$$

Положив

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}, \quad (2)$$

получим

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}. \quad (3)$$

Следовательно, $e^{j\omega n}$ - собственная функция системы с собственным числом $H(e^{j\omega})$. Из формулы (3) вытекает, что $H(e^{j\omega})$ описывает функциональную зависимость изменения комплексной амплитуды входного сигнала от частоты ω . Собственное число $H(e^{j\omega})$ называют комплексной

частотной характеристикой (КЧХ) системы (или просто частотной характеристикой), поскольку в общей ситуации величина $H(e^{j\omega})$ комплексная и может быть выписана в алгебраической форме через свою вещественную и мнимую части:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}). \quad (4)$$

или в показательном виде в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}. \quad (5)$$

Пример 1. Частотная характеристика ИСЗ

Найдем КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (6)$$

где, n_d - фиксированное целое число. Если $x[n] = e^{j\omega n}$ - сигнал, поданный на вход системы, то по формуле (6) получаем

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$

Итак, мы видим, что при любом значении n и выходной сигнал пропорционален входному. Причем комплексный коэффициент пропорциональности зависит от частоты ω и величины задержки n_d . Следовательно, КЧХ ИСЗ равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}. \quad (7)$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h[n] = \delta[n - n_d]$ —

импульсная характеристика ИСЗ. Учитывая (2), имеем

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d), \quad (8)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d). \quad (9)$$

Ее модуль и фаза равны

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad (10)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d. \quad (11)$$

сигнал из обширного класса последовательностей может быть выражен в виде линейной комбинации экспоненциальных:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}. \quad (12)$$

По принципу суперпозиции соответствующий отклик линейной

стационарной системы равен

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \quad (13)$$

Итак, если нам удалось представить $x[p]$ в виде линейной комбинации экспоненциальных последовательностей, как в (12), то выходная последовательность определяется суммой (13) с помощью КЧХ системы. Следующий простой пример иллюстрирует это фундаментальное свойство линейных стационарных систем.

Пример 2. Синусоидальное представление ЛС – систем

Поскольку синусоидальную последовательность легко записать как линейную комбинацию показательных, рассмотрим синусоидальный вход

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (14)$$

Согласно (3) реакцией системы на сигнал $x_1[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}, \quad (15)$$

а на сигнал $x_2[n] = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (16)$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y[n] = \frac{A}{2} \left(H(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} \right). \quad (17)$$

Если отсчеты последовательности $h[n]$ вещественны, то можно доказать, что $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$. Следовательно,

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta), \quad (18)$$

где $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ – фаза КЧХ системы при частоте ω_0 , или значение фазо-частотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, как мы убедились в примере 1. Следовательно,

$$y[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi - \omega_0 n_d) = A \cos(\omega_0 (n - n_d) + \varphi), \quad (19)$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ.

По существу, понятие КЧХ для непрерывных и дискретных линейных стационарных систем одно и то же. Однако имеет место и яркое отличие, которое заключается в том, что КЧХ дискретных линейных стационарных систем — всегда 2π – периодичная функция от частоты ω . Чтобы осознать этот факт, подставим $\omega + 2\pi$ в уравнение (2).

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}. \quad (20)$$

Учитывая, что $e^{\pm j2\pi n} = 1$ при целом n , получаем

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n} e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Следовательно,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \quad (21)$$

и в более общем виде

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π - периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, нам достаточно выяснить значения $H(e^{j\omega})$ на полуинтервале длины 2π , например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi < \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного полуинтервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$. При таком выборе периода нижними частотами называются частоты, близкие к нулю, а верхними — частоты, лежащие около $\pm \pi$. Вспоминая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π , неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: нижние частоты близки четным кратным 2π , в то время как верхние — к нечетным кратным π .

Пример 3. Идеальные частото-избирательные фильтры

Важный класс линейных стационарных систем включает в себя системы, для которых импульсная характеристика равна единице над определенными промежутками частот и нулю в остальной области. Такую характеристику имеют идеальные частотно-избирательные фильтры. КЧХ идеального фильтра нижних частот показана на рис. 1.1, а).

Ввиду естественной периодичности она имеет вид характеристики многополосного

фильтра, поскольку частоты, близкие к нулю, невозможно отличить от тех, которые близки к 2π . В действительности, фильтр пропускает только нижние частоты и задерживает верхние. Поскольку КЧХ полностью определяется своим поведением на полуинтервале $-\pi < \omega \leq \pi$, характеристику идеального фильтра нижних частот более

правильно показывать только на этом полуинтервале, как на рис. 1.1, б). Ясно, что вне этого интервала КЧХ повторяется периодически с периодом 2π . КЧХ идеальных фильтров (задержки, пропускающего и верхних частот) представлены на рис. 1.2.

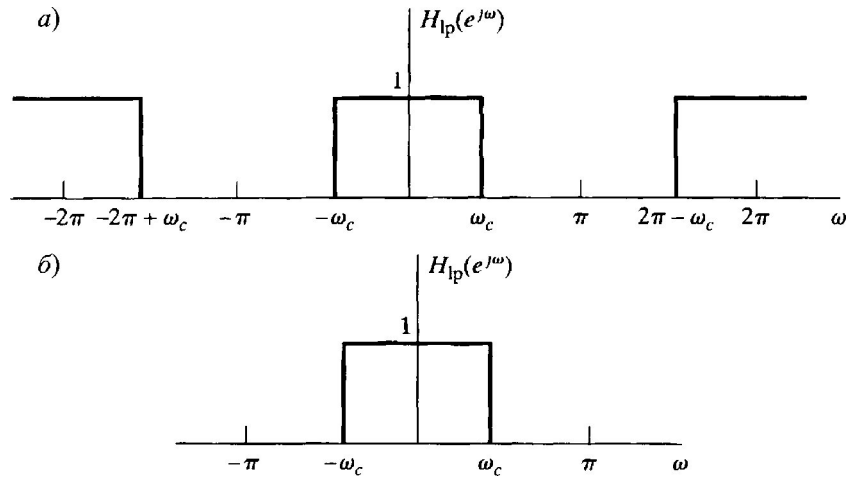


Рис. 1.1 Идеальный фильтр нижних частот.

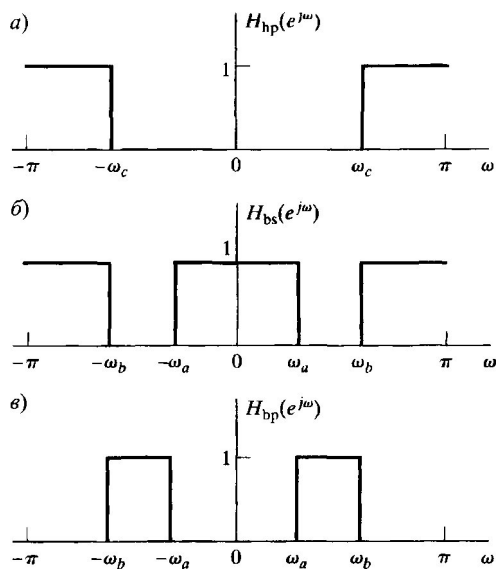


Рис. 1.2. Идеальные частотно-избирательные фильтры.

Пример 4. Определение импульсной характеристики по КЧХ

С учетом 2π -периодичности КЧХ фильтра верхних частот с задержкой равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c. \end{cases} \quad (23)$$

Перепишем ее как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} (1 - H_{lp}(e^{j\omega})) = e^{-j\omega n_d} - e^{-j\omega n_d} H_{lp}(e^{j\omega}),$$

где $H_{lp}(e^{j\omega})$ - 2π -периодическая функция, равная

$$\begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

$$h[n] = \delta[n - n_d] - h_{lp}[n - n_d] = \delta[n - n_d] - \frac{\sin \omega_c (n - n_d)}{\pi (n - n_d)}.$$

Свойства преобразований Фурье

Последовательность $x[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\operatorname{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}))$
4. $j \operatorname{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}))$
5. $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$X_R(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$jX_I(e^{j\omega}) = j \operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
Следующие свойства справедливы лишь для вещественных последовательностей	
7. $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8. $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9. $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10. $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11. $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
12. $x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega})$

Таблица 1 Свойства симметрии преобразования Фурье

Последовательности $x[n]$ и $y[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d], n_d \in \mathbb{Z}$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$, если $x[n]$ — вещественная
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Теоремы Парсеваля	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

Таблица 2. Теоремы о преобразовании Фурье

Последовательность	Фурье-образ
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n+1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \varphi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k))$

Таблица 3. пары, связанные преобразованием Фурье

Пример 5. Определение импульсной характеристики разностного уравнения

Здесь мы найдем импульсную характеристику устойчивой линейной стационарной системы, сигнал которой, поданный на вход, связан с соответствующей реакцией линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]. \quad (24)$$

Однако в этом примере демонстрируется единый подход различных преобразований к анализу линейных систем. Для определения импульсной характеристики положим $x[n] = \delta[n]$, а через $h[n]$ обозначим импульсную характеристику, после чего уравнение (24) перепишется в виде

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]. \quad (25)$$

Применяя преобразования Фурье к обеим частям этого уравнения, получим

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}, \quad (26)$$

Что равносильно соотношению

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (27)$$

Теперь для определения $h[n]$ нам достаточно найти обратное преобразование Фурье для $H(e^{j\omega})$. Представим соотношение (27) в более удобной для этой

цели форме

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (28)$$

Из строки 4 таблицы 3 следует, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Комбинируя это соответствие со свойством 3 таблицы 2, находим:

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (29)$$

И наконец, по линейности приходим к окончательному ответу:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \quad (30)$$

Задания для самостоятельного решения.

- Определите, какие из сигналов являются периодическими, и установите их период.
 - $(x[n]) = e^{j(\pi n/6)}$;
 - $(x[n]) = e^{j(3\pi n/4)}$;
 - $(x[n]) = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$;
 - $(x[n]) = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.
- Рассмотрите разностное уравнение

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1].$$
 - Что можно сказать о частотной и импульсной характеристике, реакции на единичный скачок ЛС-системы, описываемой этим разностным уравнением?
 - Что можно сказать об общем виде однородного решения этого разностного уравнения?
 - Рассмотрите другую систему, удовлетворяющую этому же уравнению, но не относящуюся ни к детерминированным, ни к ЛС-системам. Найдите ее реакцию на сигнал $x[p] = 6[p]$, если известно, что $y[0] = y[1] = 1$.
- Определите отклик ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n]$ на сигнал $x[n]$, если
 - $x[n] = u[n]$, $h[n] = a^n u[-n-1]$, $a > 1$;
 - $x[n] = u[n-4]$, $h[n] = 2^n u[-n-1]$;
 - $x[n] = u[n]$, $h[n] = 2^{n-1} u[-n]$;
 - $x[n] = u[n] - u[n-10]$, $h[n] = 2^n u[-n-1]$.
- Импульсная характеристика ЛС-системы равна $h[n] = u[n]$. Определите ее реакцию на сигнал, изображенный на рис. 1, который описывается формулой:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & 0 \leq n \leq N_1, \\ 0, & N_1 < n < N_2, \\ a^{n-N_2}, & N_2 \leq n \leq N_2 + N_1, \\ 0, & N_2 + N_1 < n, \end{cases}$$

где $0 < a < 1$.

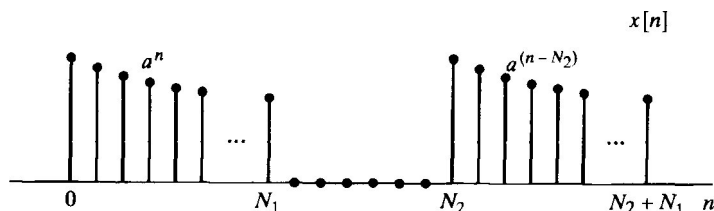


Рисунок 1.

5. КЧХ ЛС-системы равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega 3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16} \cdot \frac{3}{2}, \\ 0, & \frac{2\pi}{16} \cdot \frac{3}{2} \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Найдите отклик системы на периодическую цепочку единичных

импульсов $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 16k]$ с периодом $N=16$.

5. Используемая литература

1. Сергиенко А. В. Цифровая обработка сигналов. - СПб.: Питер, 2002. - 608 с.
2. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. - М.: Техносфера, 2004. - 368 с.
3. А.Оппенгейм, Р.Шафер Цифровая обработка сигналов. – Техносфера, Москва 2006.
4. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 2005. - 312 с.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Исследование метода дискретизации прямого z-преобразования

1. Цель занятия

Ознакомится с основными понятиями z-преобразования, изучить свойства области его определения.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Изучение методов нахождения z -преобразования 15 мин
 2. Рассмотрение примеров 25 мин
 3. Выполнение практического задания 30 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
- Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Z-преобразование

Дискретизованное по времени преобразование Фурье последовательности $x[n]$ была определена как

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Z-преобразование той же последовательности вводится соотношением

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (2)$$

Правая часть этой формулы — бесконечный степенной ряд от

комплексной переменной z . Иногда сумму (2) полезно рассматривать как оператор, переводящий последовательность в функцию, обозначаемый обычно через $\mathcal{Z}\{.\}$:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \quad (3)$$

С этой точки зрения оператор z -преобразования выглядит как правило, сопоставляющее последовательности $x[n]$ функцию $X(z)$ от непрерывной комплексной переменной z . Соответствие между последовательностью и ее z -преобразованием обозначается как

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z). \quad (4)$$

z -преобразование (2) часто называют двусторонним z -преобразованием, чтобы отличать его от одностороннего z -преобразования:

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \quad (5)$$

Ясно, что одностороннее z -преобразование совпадает с двусторонним только на множестве последовательностей $x[n]$ с $x[n] = 0$ при $n < 0$.

При сравнении формул (1) и (2) становится очевидным, что между преобразованием Фурье и z -преобразованием существует тесная связь. В частности, заменяя комплексную переменную z в формуле (2) на $e^{j\omega}$ мы сводим z -преобразование к преобразованию Фурье. Это свойство мотивирует обозначение $X(e^{j\omega})$ для Фурье образа, поскольку оно совпадает с $X(z)$ при $z = e^{j\omega}$. Такая подстановка означает ограничение переменной z в z -преобразовании на единичную окружность, т.е. при $|z| = 1$ z -преобразование равно Фурье-образу. Сформулируем более общее замечание. Можно представить переменную z в показательном виде

$$z = re^{j\omega}.$$

Тогда формула (2) перепишется как

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

Или

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}. \quad (6)$$

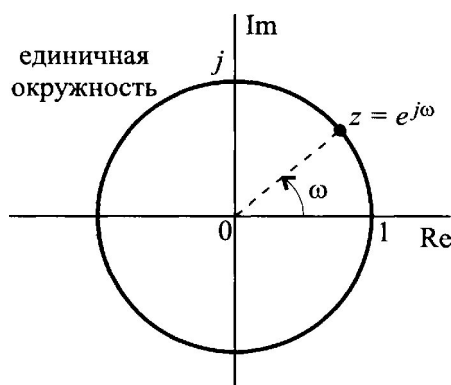


Рисунок 1. Единичная окружность на комплексной плоскости.

Последнее равенство можно интерпретировать как преобразование Фурье произведения исходной последовательности на экспоненциальную r^n . Очевидно, при $r=1$ правая часть формулы (6) дает Фурье-образ последовательности $x[n]$. z –преобразование, как функцию комплексной переменной, удобно описывать с помощью комплексной плоскости. Геометрическое место точек z на ней, удовлетворяющих условию $|z|=1$, Представляет собой окружность единичного радиуса с центром в нуле (рис.1). Эту окружность принято называть единичной окружностью. z – преобразование, вычисляемое только на единичной окружности, совпадает с преобразованием Фурье. Заметим, что ω - это величина угла между радиус-вектором точки z на единичной окружности и вещественной осью, отсчитываемого против часовой стрелки. При вычислении $X(z)$ в точках единичной окружности, начиная с $z = 1$ (т.е. $\omega = 0$) и далее в направлении к $z = -1$ (т.е. $\omega = \pi$) через $z = j$ (т.е. $\omega = \pi/2$), мы получим Фурье-образ на промежутке $0 \leq \omega \leq \pi$. Продолжая процесс вычисления вдоль единичной окружности, мы найдем значение Фурье-образа на всем периоде. Интерпретация преобразования Фурье как ограничения z -преобразования на единичную окружность концептуально соответствует обертыванию частотной оси вокруг единичной окружности с $\omega = 0$ в точке $z = 1$ и $\omega = \pi$ в $z = -1$. При этом периодичность преобразования Фурье относительно частоты получается естественным образом, так как изменение угла на 2π радиан соответствует повороту точки единичной окружности на полный оборот, при котором любая точка переходит в себя.

Степенной ряд, представляющий Фурье-образ, сходится далеко не для всех последовательностей, т.е. значение бесконечной суммы может не быть конечным. По той же причине z -преобразование существует тоже не для всех последовательностей, или оно может оказаться определенным не при всех значениях переменной z . Множество тех значений z , при которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости¹ (ОС). Ряд,

вычисляющий Фурье-образ абсолютно суммируемых последовательностей, сходится к непрерывной функции переменной z . Применяя это свойство к формуле (6), находим, что неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (7)$$

Сходимость степенного ряда (2) зависит только от величины $|z|$, поскольку $|X(z)| < \infty$, как только

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} < \infty \quad (8)$$

Т.е. ОС ряда (2) состоит из всех тех точек z , для которых выполнено неравенство (8). Таким образом, вместе с каждым числом z_1 , попавшим в ОС ряда, туда же попадут все комплексные числа z с $|z| = |z_1|$.

Степенной ряд в виде (2) называется рядом Лорана, очень подробно изучается в теории функций комплексного переменного. Ряд Лорана, а значит, и z -преобразование представляют аналитическую функцию в каждой точке ОС.

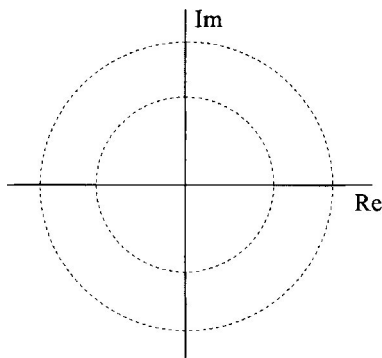


Рисунок 2. ОС представляет собой кольцо, в частных случаях внутренняя или внешняя граница ОС может вообще отсутствовать.

Как явствует из неравенства (7), равномерная сходимость z -преобразования обеспечивается абсолютной суммируемостью произведения исходной последовательности на экспоненциальную. Ни одна из последовательностей:

$$x_1[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad x_2[n] = \cos \omega_0 n, \quad -\infty < n < \infty$$

не принадлежит классу абсолютно суммируемых. Более того, даже после умножения этих последовательностей на γ^{-n} мы не получим абсолютной суммируемости при всех значениях γ . Таким образом, z -преобразование этих последовательностей сходится не при всех значениях z . Аналогично, последовательность $x_2[n]$ не суммируется ни абсолютно, ни с квадратом, но, тем не менее, используя импульсы, ее Фурье-образ можно определить.

Фурье-образы обеих последовательностей не являются непрерывными, бесконечно дифференцируемыми функциями. Следовательно, их нельзя получить как ограничение z -преобразования на единичную окружность, хотя мы и употребляем обозначение $X(e^{j\omega})$ подразумевая, что функция определена на единичной окружности.

Z -преобразование наиболее полезно, когда бесконечная сумма может быть выражена в компактном виде, т. е. когда ее можно «вычислить» и записать простой математической формулой. К наиболее важным и полезным z -преобразованиям относятся те, для которых $X(z)$ на ОС ряда записывается как рациональная функция, т.е.

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (9)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены переменной z .

Пример 1. Правосторонняя экспоненциальная последовательность

Рассмотрим сигнал $x[n] = a^n u[n]$. Так как его ненулевые отсчеты могут быть только при $n \geq 0$ - это пример правосторонней последовательности. Из формулы (2) получаем

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Для сходимости ряда нам достаточно неравенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

Таким образом, в ОС входят те значения z , для которых $|az^{-1}| < 1$ или, что тоже самое, $|z| > |a|$. Внутри ОС ряд сходится к функции

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (10)$$

Здесь мы воспользовались знакомой формулой для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. ОС z -преобразования не пуста для любого конечного значения $|a|$. С другой стороны, Фурье-образ этой последовательности определен лишь для a с $|a| < 1$. Если $a=1$, наша последовательность превращается в единичный скачок с z -преобразованием

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1. \quad (11)$$

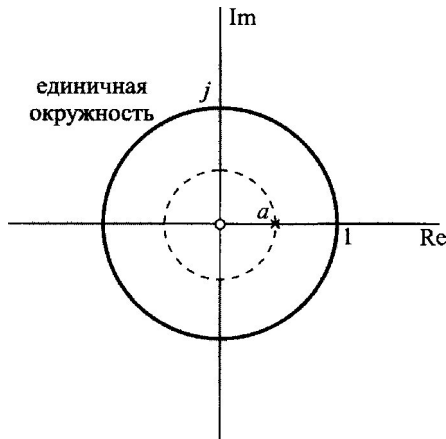


Рисунок 3. Схема нулей и полюсов в ОС.

Пример 2. Левосторонняя экспоненциальная последовательность

Пусть теперь $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Поскольку члены последовательности отличны от нуля только при $n \leq -1$, ее называют левосторонней. В этом случае

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \quad (12)$$

Если $|a^{-1} z| < 1$, или $|z| < |a|$ ряд (12) сходится к функции

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = - \frac{a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a| \quad (13)$$

Схема нулей и полюсов и ОС этого примера изображены на рис.4. Заметим, что при $|a| < 1$ последовательность — $a^n u[-n-1]$, и ее преобразование Фурье неопределено.

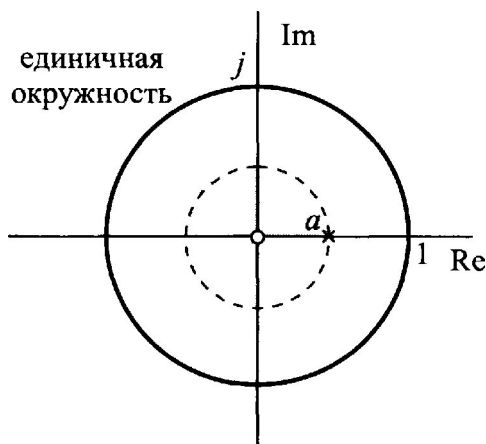


Рисунок 4. Схема нулей и полюсов в ОС.

Сравнивая между собой формулы (10), (13) и рис.3,4, мы видим, что

последовательности примеров 1 и 2, а значит, и бесконечные суммы отличаются друг от друга, в то время как алгебраические формулы для $X(z)$ и схемы нулей и полюсов совпадают. Z-преобразование этих последовательностей отличается лишь ОС. Это наблюдение подчеркивает тот факт, что для описания z-преобразования данной последовательности необходимы как алгебраическое выражение для $X(z)$, так и ОС. Кроме того, последовательности обоих примеров экспоненциальны, а их z-преобразования рациональны.

Пример 3. Сумма двух экспонент

Пусть $x[n]$ вновь определяется соотношением (14). Тогда, используя общий результат примера 1 с $a=1/2$ и $a=-1/3$, получаем z-преобразование слагаемых данной последовательности

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (17)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (18)$$

Что согласуется с результатом примера 3.

Область сходимости z-преобразования

Свойство 1: ОС – это кольцо или диск комплексной плоскости с центром в нуле, т.е. $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

Свойство 2: преобразование Фурье последовательности $x[n]$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ОС z-преобразования содержит единичную окружность.

Свойство 3: ОС не может содержать ни одного полюса.

Свойство 4: ОС z-преобразование сигнала ограниченной длительности, т.е. сигнала с ненулевыми отсчетами, расположенными в конечном интервале $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$ – вся комплексная плоскость, за исключением, быть

может, $z = 0$ и $z = \infty$.

Свойство 5: ОС z-преобразование правосторонней последовательности, т.е. последовательности с нулевыми отсчетами при $n < N_1 < \infty$, представляет собой «внешность» круга с центром в нуле (включая даже иногда $z = \infty$), на границе которого расположен полюс функции $X(z)$ с максимальным модулем.

Свойство 6: ОС z-преобразование левосторонней последовательности, т.е. последовательности с нулевыми отсчетами при $n > N_2 > -\infty$, - «внутренность» круга с центром в нуле (возможно вместе с центром), на границе которого расположен полюс функции $X(z)$ с минимальным модулем.

Последовательность	Z-преобразование	ОС
1. $\delta[n]$	1	все z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m], m > 0$	z^{-m}	все $z \neq 0$
$\delta[n - m], m < 0$	z^{-m}	все $z \neq \infty$
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $u[n] \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $u[n] \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $u[n] r^n \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} r \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $u[n] r^n \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} r \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Таблица 1. z-преобразование стандартных последовательностей

Свойство 7: ОС z-преобразования двусторонней последовательности, т.е. той, которая не является ни право-, ни левосторонней, представляет собой кольцо с центром в нуле, на границах которого расположены полюсы функции $X(z)$, а внутри кольца (согласно свойству 3) их нет.

Свойство 8: ОС должна быть связной.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найдите z-преобразование, включая ОС, для каждой из следующих последовательностей:

а) $\frac{u[n]}{2^n}$; б) $\frac{-u[-n-1]}{2^n}$; в) $\frac{u[-n]}{2^n}$ г) $\delta[n]$;
д) $\delta[n-1]$; е) $\delta[n+1]$; ж) $\frac{u[n] - u[n-10]}{2^n}$.

2. Определите z-преобразование каждой из выписанных ниже последовательностей. Запишите свои ответы в максимально компактной форме и изобразите схемы нулей и полюсов и ОС на комплексной плоскости.

а) $x_a[n] = \alpha^{|n|}$, $0 < |\alpha| < 1$; б) $x_b = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

в) $x_c = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N, \\ 2N - n, & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

3. Импульсная характеристика детерминированной ЛС-системы равна $h[n]$, а ее z-преобразование имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

а) Что можно сказать об ОС $H(z)$?

б) Является ли данная система устойчивой и почему?

в) Вычислите z-преобразование $X(z)$ входящего сигнала $x[n]$, реакция системы на который равна

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1]$$

Используемая литература

1. Гадзиковский В. И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. - М.: Радио и связь, 2004. - 344 с.
2. Чуй К. Введение в вейвлеты. - М.: Наука, 2001.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Исследование метода дискретизации обратного z -преобразования

1. Цель занятия

Ознакомится с такими методами вычисления z –преобразование как табличный метод и метод простых дробей. Рассмотреть основные свойства z -преобразования и научиться решать задачи.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Изучение методов нахождения z -преобразования 15 мин
 2. Рассмотрение примеров 25 мин
 3. Выполнение практического задания 30 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
- Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Одно из важнейших приложений z -преобразования лежит в области анализа линейных систем. Часто этот анализ заключается в вычислении z -преобразования последовательности, некоторых преобразованиях

соответствующего алгебраического выражения и поиске обратного z -преобразования. Есть ряд формальных и неформальных методов восстановления последовательности по алгебраическому выражению ее z -преобразования и ОС. Формальный подход к обратному z -преобразованию основывается на интегральной теореме Коши. Однако для типичных последовательностей и их z -преобразований, встречающихся при анализе дискретных линейных систем, предпочтительны менее формальные процедуры.

Табличный метод

Табличный метод состоит в использовании известных последовательностей и функций, связанных z -преобразованием. Последовательности такого типа возникают довольно часто, и поэтому полезно помнить z -преобразование

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (1)$$

Если нам нужно найти обратное z -преобразование от функции

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \quad (2)$$

и мы помним о связи (1), то задача сильно упрощается $x[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$. Если ОС в формуле (2) задана как $|z| < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться парой 6 из таблицы 1 и получить $x[n] = -\frac{1}{2^n} u[-n - 1]$.

Таблицы результатов z -преобразования, аналогичные табл. 1, — главный инструмент табличного метода. Если таблица достаточно велика, то, представив данную функцию как сумму, каждое слагаемое которой содержится в таблице, можно восстановить исходную последовательность почленно.

Метод простейших дробей

Как уже было сказано, обратное z -преобразование можно вычислять, пользуясь таблицами. Иногда имеющаяся у вас таблица не содержит данную функцию $X(z)$ в явном виде. Однако не исключена возможность получить эквивалентное алгебраическое выражение, части которого в таблице присутствуют. Таким свойством обладают рациональные функции, т.е. отношения двух многочленов от переменной z^{-1} , которые довольно часто возникают при исследовании ЛС-систем.

Способ получения удобного выражения рациональной функции

называется методом простейших дробей. Расскажем о нем подробно. Любую рациональную функцию от z^{-1} можно записать в виде

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (3)$$

При этом принято считать, что $b_M \neq 0$ и $a_N \neq 0$. Предположим дополнительно, что $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$ и перепишем функцию как

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (4)$$

Теперь видно, что у функции $X(z)$ есть M нулей и N полюсов, расположенных

в конечной части комплексной плоскости, не содержащей $z = 0$. Кроме того, у этой функции в точке $z = 0$ есть либо $(M - N)$ -кратный полюс, если $M > N$, либо $(N - M)$ -кратный нуль, если $N > M$. Другими словами, число нулей в конечной части комплексной плоскости функции вида С.36) совпадает с числом полюсов, причем у этой функции в точке $z = \infty$ ни нулей, ни полюсов нет.

Для разложения $X(z)$ в сумму простейших дробей необходимо заметить, что ее можно переписать как

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (5)$$

где $c_k \neq 0$ - нули функции $X(z)$, а $d_k \neq 0$ - ее полюса. Если $N > M$ и кратность всех полюсов равна 1, то $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (6)$$

Очевидно, общий знаменатель дробей из суммы (6) совпадает со знаменателем дроби (5). Умножая обе части равенства (6) на $(1 - d_k z^{-1})$ и вычисляя значение произведения в точке $z = d_k$, можно найти коэффициент A_k :

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z) \Big|_{z=d_k}. \quad (7)$$

Свойства z –преобразования

Многие из свойств z -преобразования оказывают реальную практическую помощь при исследовании дискретных сигналов и систем. Например, их

применяют совместно с техникой, для вычисления обратного z -преобразования от довольно сложных алгебраических выражений.

Здесь мы рассматриваем наиболее часто используемые свойства. Далее $X(z)$ будет обозначать z -преобразование последовательности $x[n]$, а символом R_x мы обозначим ОС этого z -преобразования, т. е.

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \quad z \in R_x.$$

1. Линейность

Свойство линейности говорит, что

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad R_{ax_1+bx_2} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2}.$$

Оно непосредственно следует из определения z -преобразования. Как отмечено выше, ОС линейной комбинации z -преобразований состоит по крайней мере из пересечения ОС, участвующих в комбинации z -преобразований. Предположим, что $X_i(z)$ — рациональные функции, а множество полюсов $aX_i(z) + bX_i(z)$ совпадает с объединением множеств полюсов слагаемых (т. е. ни одна из пар нуль-полюс не сократилась). Тогда ОС линейной комбинации в точности совпадает с пересечением ОС. Если же линейная комбинация такова, что у нее появляются нули, сокращающиеся с какими-то полюсами слагаемых, то ОС линейной комбинации может оказаться больше. Простейший пример такой ситуации возникает, когда последовательности $X_i[n]$ бесконечны, а их линейная комбинация конечна. Тогда ОС линейной комбинации — вся комплексная плоскость, исключая, возможно, точки $z = 0$ и $z = \infty$.

$$x[n] = a^n u[n] - a^n u[n - N].$$

Как $a^n u[n]$, так и $a^n u[n - N]$ бесконечные правосторонние последовательности, а их z -преобразования обладают простым полюсом в точке $z = a$. Следовательно, ОС z -преобразований этих последовательностей описываются одним неравенством: $|z| > |a|$.

2. Задержка

Согласно свойству задержки,

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z), \quad x \in R'_x,$$

где R'_x совпадает с R_x за исключением добавления или удаления точек $z = 0$ или $z = \infty$. Число n_0 здесь, конечно, целое. Если оно положительно, исходная последовательность $x[n]$ сдвигается вправо, а если отрицательно — то влево. Как и в свойстве линейности, ОС при задержке может измениться, поскольку множитель z^{-n_0} может аннулировать полюс в одной из точек: $z = 0$ или $z = \infty$.

Действительно, если $y[n] = x[n - n_0]$, соответствующее z -преобразование имеет вид

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n}.$$

Меняя параметр суммирования на $m = n - n_0$ получаем

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} = z^{-n_0} X(z).$$

Свойство задержки часто оказывается полезным в сочетании с другими свойствами и процедурами при вычислении обратного z-преобразования.

3. Умножение на экспоненциальную последовательность

При умножении последовательности на экспоненциальную z-преобразование меняется по правилу

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad R_{z_0 x} = |z_0| R_x$$

4. Дифференцирование

Свойство производной утверждает, что

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{nx} = R_x$$

Доказательство получается с помощью дифференцирования равенства

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n) x[n] z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}$$

Пример 1. Рациональная функция второй степени

Рассмотрим последовательность $x[n]$ с z-преобразованием

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}. \quad (8)$$

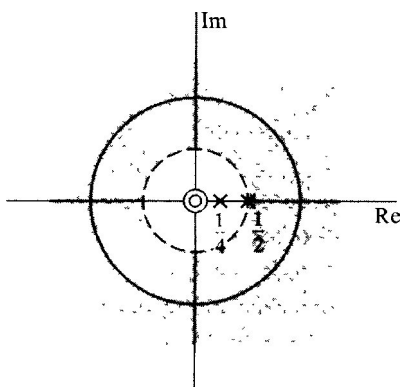


Рисунок 1. Схема нулей и полюсов ОС функции.

Схема нулей и полюсов функции $X(z)$ показана на рис. 1. Учитывая данную в условии ОС, мы видим, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность. Поскольку оба полюса имеют кратность один, $X(z)$

можно записать в виде суммы (6):

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Из (7) получаем

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1})X(z) \Big|_{z=1/4} = -1,$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \Big|_{z=1/2} = 2.$$

Следовательно,

$$X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

Ввиду того, что $x[n]$ — правосторонняя последовательность, ОС каждого из ее слагаемых — внешность круга с полюсом на границе. Из табл.1 и линейности z -преобразования находим, что

$$x[n] = \frac{2}{2^n}u[n] - \frac{1}{4^n}u[n].$$

Очевидно, что степень числителя (относительно переменной z^{-1}), получающегося при сложении дробей в равенстве (6) не превосходит ($N - 1$). Если $M \geq N$, то к правой части равенства (6) необходимо добавить многочлен степени ($M - N$). Поэтому при $M \geq N$ формула разложения дроби в сумму простейших выглядит как

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (9)$$

Если дана рациональная функция вида (3) с $M \geq N$, коэффициенты B_r можно найти делением в столбик числителя на знаменатель. Степень получающегося остатка будет уже меньше степени знаменателя. После этого коэффициенты A_k можно вычислить по формуле (7).

Если $X(z)$ обладает кратным полюсом и $M \geq N$, формулу (9) необходимо модифицировать дальше. В частности, если $X(z)$ имеет полюс кратности s в точке $z = d_i$, а кратность остальных полюсов — единица, то формула (9) переписется как

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}. \quad (10)$$

Коэффициенты A_k и B_r вычисляются как и ранее, а коэффициенты C_m можно отыскать по формуле:

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left(\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} ((1 - d_i w)^s X(w^{-1})) \right) \Big|_{w=d_i^{-1}}. \quad (11)$$

Формула (10) дает наиболее полный вид разложения рациональной

функции от переменной z^{-1} с кратным полюсом в точке d_i в сумму многочлена и простейших дробей для случая $M \geq N$. Если существует не один, а несколько кратных полюсов, в этой формуле появятся дополнительные члены, аналогичные третьей сумме в формуле, для каждого кратного полюса. Если же кратных полюсов у функции вообще нет, формула (10) упрощается до формулы (8). Если степень знаменателя больше степени числителя ($N > M$), то полиномиальная часть формул (8) и (9) становится равной нулю.

Мы могли достичь того же результата, предполагая, что z - преобразование — рациональная функция переменной z , а не z^{-1} . Иными словами, вместо множителей $(1 - az^{-1})$ мы могли бы рассматривать множители $(z - a)$. Такая замена переменной приводит к ряду формул, аналогичных равенствам (5)-(11), которые удобнее использовать при работе с таблицами z -преобразования, выраженного как функция от z . Поскольку табл.1 заполнена функциями от переменной z^{-1} , приведенные выше формулы представляют для нас большую ценность.

В качестве примера предположим, что $X(z)$ имеет полюса только первого порядка, и можно воспользоваться равенством (9) для разложения функции $X(z)$ в сумму многочлена и простейших дробей. Напомним, что операция z -преобразования линейна, поэтому достаточно найти обратное z -преобразование каждого слагаемого, а затем сложить результаты и получить $x[n]$.

Члены $B_r z^{-r}$ соответствуют сдвигам единичного импульса, умноженного на константу, т.е. последовательностям $B_r \delta[n-r]$. Дробные члены $\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$ отвечают за одну из последовательностей: $(d_k)^n u[n]$ или $-(d_k)^n u[-n-1]$. Чтобы выбрать одну из них, нужно вспомнить свойства ОС. Из них следует, что если $X(z)$ имеет простые полюса (кратности 1) и ОС описывается неравенством $r_R < |z| < r_L$, то данный полюс d_k соответствует правосторонней последовательности $(d_k)^n u[n]$, если $|d_k| < r_R$ этот же полюс соответствует левосторонней последовательности, если $|d_k| > r_L$. Таким образом, можно использовать ОС для сортировки полюсов. Кратные полюсы разбиваются на две группы аналогично.

Пример 2. Метод простейших дробей в обратном z -преобразовании

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье z -преобразование имеет вид

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1. \quad (12)$$

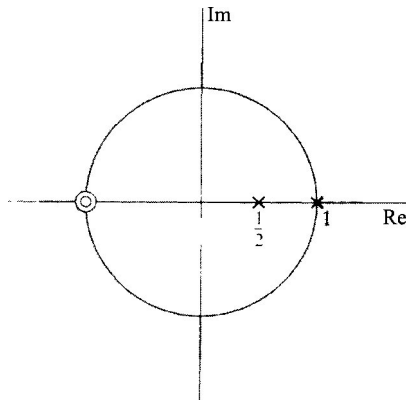


Рисунок 2. Схема нулей и полюсов z -преобразования из примера 2

Рассматривая ОС приведенную на рисунке, убеждаемся, что $x[n]$ – правосторонняя последовательность. Так как $M=N=2$, а кратность полюсов равна 1, то $X(z)$ можно переписать в виде

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}$$

Константу B_0 ищем делением в столбик

$$\begin{array}{r|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1}{2} \\ z^{-2} - 3z^{-1} + 2 & \\ \hline 5z^{-1} - 1 & \end{array}$$

Поскольку степень числителя и знаменателя в нашем примере совпадают, потребовалось лишь один шаг деления для вычисления остатка. Итак, $X(z)$ можно переписать как

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}. \quad (13)$$

Теперь находим коэффициенты A_1 и A_2 по формулам (7-12). Учитывая (13) получаем

$$A_1 = \left(\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \right) \Big|_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = \left(\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \right) (1 - z^{-1}) \right) \Big|_{z=1} = 8.$$

Следовательно,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}. \quad (14)$$

Поскольку ОС описывается неравенством $|z| > 1$ из табл.1. находим

$$2 \xleftrightarrow{z} 2\delta[n], \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2^n} u[n], \quad \frac{1}{1 - z^{-1}} \xleftrightarrow{z} u[n].$$

Наконец, благодаря линейности z -преобразования получаем

$$x[n] = 2\delta[n] - \frac{9}{2^n}u[n] + 8u[n].$$

Разложение в степенные ряды

Z – преобразование определяется как ряд Лорана, коэффициентами которого служат отсчеты последовательности $x[n]$. Таким образом, если z -преобразование задано степенным рядом

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \quad (15)$$

мы можем найти любой конкретный отсчет последовательности $x[n]$, глядя на коэффициент при подходящей степени z^{-1} . Мы уже применяли этот подход при поиске обратного преобразования полиномиальной части рациональной функции при $M > N$. Такой способ очень полезен при работе с последовательностями конечной длины, z -преобразование которых может и не иметь более простой формы записи, чем в виде многочлена от z^{-1} .

Пример 3. Вычисление обратного преобразования с помощью степенных рядов

Рассмотрим z –преобразование

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|. \quad (16)$$

Используя известное разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд, который сходится при $|x| < 1$, получим

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}.$$

Следовательно,

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

Пример 4. Разложение в ряд методом деления в столбик

Рассмотрим z –преобразование

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|. \quad (17)$$

Поскольку ОС — внешность круга, соответствующая последовательность будет правосторонней. Более того, так как $X(z)$ стремится к константе при стремлении z к бесконечности, последовательность является

детерминированной. Поэтому, проводя деление, мы получим ряд по степеням

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 - az^{-1} \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 1 - az^{-1} \\ 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} az^{-1} \\ az^{-1} - a^2 z^{-2} \\ a^2 z^{-2} + \dots \end{array}$$

z^{-1} :

Значит, $\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$, откуда $x[n] = a^n u[n]$.

Задания для самостоятельного решения

1. Z-преобразование детерминированной последовательности $g[n]$ имеет вид:

$$G(z) = (1 + 3z^{-2} + 2z^{-4}) \sin z^{-1}.$$

Вычислите $g[11]$

2. Вычислите обратное Z-преобразование последовательности

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ N, & N \leq n. \end{cases}$$

3. Восстановите последовательность по ее Z-преобразованию

$$X(z) = (1 + 2z)(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1}).$$

4. По каждому Z-преобразованию из выписанных ниже восстановите соответствующую последовательность, применяя как метод разложения в сумму простейших дробей, так и метод разложения в ряд. Выясните в каждом случае, существует ли Фурье образ.

$$\text{а) } X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}; \quad \text{б) } X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}; \quad \text{г) } X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2};$$

$$\text{д) } X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}, \quad |z| > |1/a|.$$

5. На вход детерминированной ЛС-системы подается сигнал

$$x[n] = u[-n-1] + \frac{u[n]}{2^n} \quad \text{Z-преобразование реакции системы имеет вид}$$

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})}.$$

- а) Найдите $H(z)$, z-преобразование импульсной характеристики этой системы. Обратите внимание на ОС.

- б) Какова ОС $Y(z)$ — z -преобразования соответствующей реакции $y[n]$ системы?
- в) Найдите $y[n]$.
6. Импульсная характеристика детерминированной ЛС-системы равна $h[n]$, а ее z -преобразование имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}.$$

- а) Что можно сказать об ОС $H(z)$?
- б) Является ли данная система устойчивой и почему?
- в) Вычислите z -преобразование $X(z)$ входящего сигнала $x[n]$, реакция системы, на который равна

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n-1].$$

- г) Найдите импульсную характеристику системы.

5. Используемая литература

1. Айфичер, Джервис. Проектирование систем цифровой смешанной обработки сигналов. 2004 год. 989 стр.
2. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 2005. - 312 с.
3. А.Оппенгейм, Р.Шафер Цифровая обработка сигналов. – Техносфера, Москва 2006.

Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье

1. Цель занятия

Ознакомится с таким понятием, как Фурье-образ. Научится использовать Фурье-преобразование.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Ознакомление с Фурье преобразованием 15 мин

2. Рассмотрение примеров 25 мин

3. Выполнение практического задания 30 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Преобразование Фурье

Многие из последовательностей выражаются через интеграл Фурье вида

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (1)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) называют представлением или преобразованием Фурье, а саму функцию $X(e^{j\omega})$ часто называют Фурье-образом последовательности $x[n]$. Формула (1), обратное преобразование Фурье, представляет $x[n]$ как суперпозицию бесконечно малых комплексных синусоид

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

где и принимает значения на интервале длины 2π , а $X(e^{j\omega})$ определяется тем, какой вклад в суперпозицию вносит каждая синусоидальная компонента. Хотя ω в соотношении (1) изменяется в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, его можно заменить на любой сегмент длины 2π . Преобразование Фурье (2) задает правило, вычисляющее $X(e^{j\omega})$ по отсчетам последовательности $x[n]$, т.е. позволяет анализировать $x[n]$ с учетом вклада каждой частотной компоненты, формирующей последовательность посредством (1).

Фурье-образ — комплекснозначная функция от ω . Как и КЧХ, ее можно записать в алгебраической или показательной форме:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (3)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (4)$$

Величины $|X(e^{j\omega})|$ и $\angle X(e^{j\omega})$ — соответственно модуль и фаза Фурье-образа. Первую из них называют иногда амплитудным спектром, а вторую — фазовым спектром. Фурье-образ часто также называют спектром Фурье или просто спектром.

Равенство (4) неоднозначно определяет фазовый спектр, так как при любом ω к фазе можно добавить $2\pi k$ с $k \in \mathbb{Z}$, не меняя значений комплексной экспоненты. Если нам важна однозначность, то будем считать, что $\angle X(e^{j\omega})$ лежит между $-\pi$ до $+\pi$, и обозначать этот угол через $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$. В том случае, когда нам предпочтительнее рассматривать фазу как непрерывную функцию от ω , определенную на промежутке $(0, 2\pi)$, мы будем обозначать ее через $\arg[X(e^{j\omega})]$.

Импульсная характеристика восстанавливается из КЧХ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5)$$

Мы пока еще не показали явным образом, что формулы (1) и (2) действительно взаимно обратны, но выяснили, что обширный класс сигналов может быть представлен в виде выражения (1). Чтобы продемонстрировать, что интеграл (1) действительно служит обратным преобразованием к сумме (2), мы можем найти $X(e^{j\omega})$, опираясь на определение (2), и подставить результат в формулу (1). Итак, рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega = \hat{x}[n] \quad (6)$$

Нам нужно показать, что $\hat{x}[n] = x[n]$, если $X(e^{j\omega})$ определена формулой (2). Заметим, что индекс суммирования был изменен на m , чтобы отличать его от переменной в уравнении (2). Если бесконечный ряд в формуле (6) сходится равномерно на множестве определения ω , то его можно почленно проинтегрировать, т. е.

(7)

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right)$$

Вычисляя интеграл в круглых скобках, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} = \delta[n-m] = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n]$$

Что и нужно было доказать.

Вопрос о представимости сигнала формулой (1) равносильен вопросу о сходимости ряда (2), точнее, нас интересуют условия, при которых ряд (2) сходится, т.е.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \quad \forall \omega,$$

Где $X(e^{j\omega})$ - предел $M \rightarrow \infty$ конечных сумм

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n} \quad (8)$$

Достаточное условие сходимости можно найти следующим образом:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x[n]$ Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ определен на всей числовой прямой. Более того, в этом случае по признаку Вейерштрасса можно показать, что соответствующий ряд равномерно сходится к непрерывной функции от ω . Поскольку устойчивые последовательности абсолютно суммируемы по определению, то для них преобразование Фурье имеет смысл. Кроме того, отсюда следует, что любая устойчивая система имеет конечную непрерывную КЧХ.

Пример 1. Абсолютная суммируемость мгновенно примененной экспоненты

Пусть $x[n] = a^n u[n]$. Фурье-образ этой последовательности имеет вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Если $|a| < 1$ Очевидно, это неравенство является критерием абсолютной суммируемости последовательности $x[n]$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \quad \text{если и только если } |a| < 1. \quad (9)$$

Абсолютная суммируемость — достаточное условие для существования преобразования Фурье, которое также гарантирует равномерную сходимость. Некоторые последовательности не принадлежат классу абсолютно суммируемых, но

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (10)$$

Такие последовательности (суммируемые квадратом) можно представлять с помощью Фурье, если мы откажемся от равномерной сходимости ряда, определяющего $X(e^{j\omega})$. Более точно, в этом случае мы имеем сходимость в среднеквадратичном, т.е. если

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (11)$$

и

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n} \quad (12)$$

то сходимость в среднеквадратичном означает, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0 \quad (13)$$

Другими словами, погрешность $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ может и не стремиться к нулю при $M \rightarrow \infty$ при каких-то конкретных значениях ω , но общая «энергия» убывает до нуля с неограниченным ростом M .

Пример 2. Суммируемость с квадратом для идеального фильтра нижних частот

Определим импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот из примера 1. Его КЧХ равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (14)$$

Вне этого интервала вычисляется по периодичности. Импульсная характеристика $h_{lp}[n]$ находится с помощью преобразования Фурье (1):

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \\ &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Мы заметили, что поскольку $h_{lp}[n] \neq 0$ при $n < 0$, идеальный фильтр нижних частот не детерминирован. Кроме того, последовательность не является абсолютно суммируемой. Члены последовательности, конечно, стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , но не быстрее, чем $1/n$. Это происходит в результате разрыва функции $H_{lp}(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \omega_c$. Поскольку последовательность $h_{lp}[n]$ не является абсолютно суммируемой, ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

на всей числовой прямой сходится неравномерно. Чтобы лучше прочувствовать этот факт, рассмотрим

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n} \quad (16)$$

Можно показать, что $H_M(e^{j\omega})$ представляется в интегральной форме как

$$H_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin((2M+1)(\omega-\theta)/2)}{\sin(\omega-\theta)/2} d\theta.$$

Итак, наш ряд сходится к разрывной функции $H_{lp}(e^{j\omega})$, но неравномерно. Однако $h_{lp}[n]$, определенная уравнением (15) суммируема с квадратом, и, соответственно $H_M(e^{j\omega})$ сходится в среднеквадратичном к $H_{lp}(e^{j\omega})$, т.е.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{lp}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

Хотя погрешность между $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\omega})$ и $H_{lp}(e^{j\omega})$ может показаться несущественной, поскольку эти функции отличаются лишь в точках $\omega = \pm\omega_c$, поведение конечных сумм имеет важное значение при разработке дискретных фильтров.

Пример 3. Фурье-образ постоянной последовательности

Рассмотрим последовательность $x[n] = 1$ при всех n . Она не суммируется ни абсолютно, ни с квадратом, и ряд в формуле (2) в этом случае не сходится ни равномерно, ни в среднеквадратичном. Однако можно и нужно определить Фурье-образ последовательности $x[n]$ как периодическую цепочку импульсов

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (17)$$

Импульсы здесь — функции от непрерывной переменной и поэтому имеют «бесконечную высоту, нулевую ширину и единичную площадь под графиком», что согласуется с тем, что ряд (2) расходится. Формулу (17) обоснованно можно называть Фурье-образом, поскольку формальная подстановка (17) в (1) дает корректный результат.

Пример 4. Преобразование Фурье комплексных экспоненциальных последовательностей

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье преобразование Фурье — периодическая цепочка импульсов

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (18)$$

Покажем, что $x[n]$ — комплексная экспонента $e^{j\omega_0 n}$. Можно

предполагать, что $-\pi < \omega_0 \leq \pi$. Если в действительности ω_0 не удовлетворяет этому условию, то перейдя к $\omega_0 + 2\pi k$ при подходящем целом k , мы попадаем в нужный интервал, оставив без изменения $X(e^{j\omega})$, поскольку импульсу повторяются с периодом 2π .

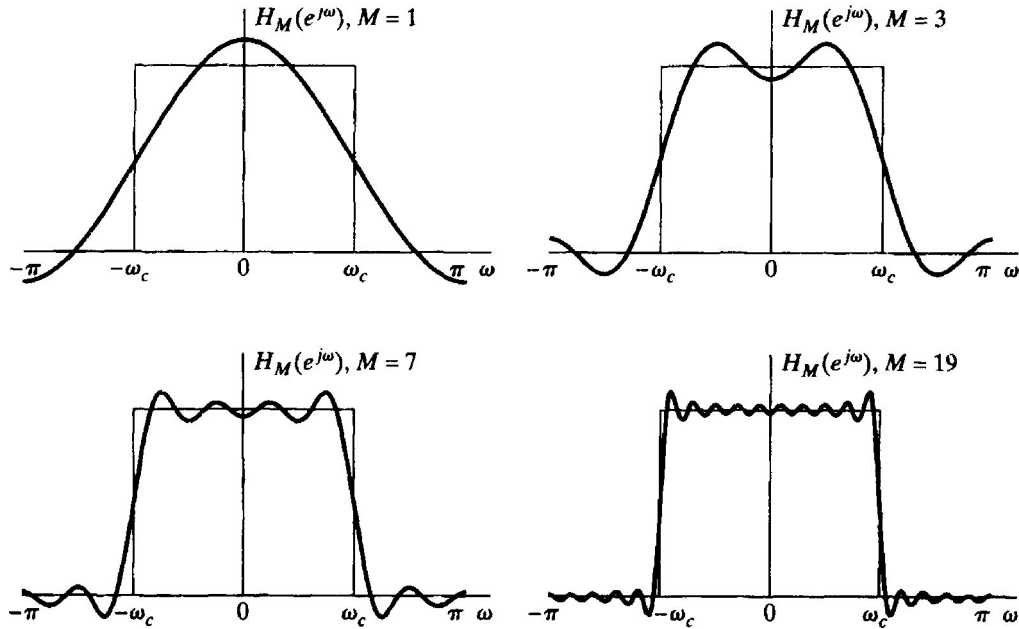


Рисунок 1. Графики частичных сумм преобразования Фурье

Последовательность $x[n]$ можно вычислить, применив к $X(e^{j\omega})$ обратное преобразование Фурье (1). Интегрирование в этой формуле происходит по отрезку $[-\pi, \pi]$, следовательно, в формуле (18) можно ограничиться членом с $r=0$ и записать

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega \quad (19)$$

Из определения δ -функции вытекает, что

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \forall n.$$

При $\omega_0 = 0$ получается постоянная последовательность.

Поэтому формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (20)$$

Нуждается в специфической интерпретации, которая приводится в теории обобщенных функций. Опираясь на эту теорию, можно строго обобщить понятие преобразование Фурье на класс последовательностей, являющихся суммой отдельных гармоник

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (21)$$

Из примера 4 вытекает, что

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (22)$$

служит приемлемым Фурье-образом последовательности $x[n]$.

Другая последовательность, не относящаяся ни к абсолютно суммируемым, ни к суммируемым с квадратом, - это единичный скачок $u[n]$. Ее Фурье-образ имеет вид

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r) \quad (23)$$

Обоснование этого факта мы опустим.

Задания для самостоятельного решения

1. Определите, какие из сигналов являются периодическими, и установите их период

- а) $(x[n]) = e^{j(\pi n/6)}$; б) $(x[n]) = e^{j(3\pi n/4)}$;
 в) $(x[n]) = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$; г) $(x[n]) = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.

2. Рассмотрите разностное уравнение

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1].$$

а) Что можно сказать о частотной и импульсной характеристике, реакции на единичный скачок ЛС-системы, описываемой этим разностным уравнением?

б) Что можно сказать об общем виде однородного решения этого разностного уравнения?

3. Определите, какие из следующих дискретных сигналов являются собственными для устойчивой ЛС-системы:

- а) $e^{j2\pi n/3}$; б) 3^n ; в) $2^n u[-n-1]$;
 г) $\cos(\omega_0 n)$; д) $(1/4)^n$; е) $(1/4)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$.

4. а) Найдите Фурье-образ последовательности

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б) Рассмотрите последовательность

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right) \right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 6
Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье

1. Цель занятия

Ознакомится с основными понятиями о линейной и циклической свертках. Изучить их свойства, и научиться решать поставленные задачи.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о вычислениях свертки 15 мин
2. Рассмотрение циклических свертки 20 мин.
3. Рассмотрение примеров 35 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Метод вычисления свертки двух последовательности:

1. Вычислить N-точечное ДПФ $X_1[k]$ и $X_2[k]$ двух последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$.
2. Найти произведение $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ при $0 \leq k \leq N - 1$.
3. Восстановить последовательность $x_3[n] = x_1x_2[n]$ по ее ДПФ $X_3[k]$.

Для эффективной работы многих приложений необходима возможность быстрого вычисления линейной свертки. В принципе

реализация любой линейной системы сводится к свертке входного сигнала с импульсной характеристикой. Но иногда это становится особенно важным, например при дискретизации речевого или радарного сигнала и при вычислении их автокорреляционных функций. Чтобы добиться линейной свертки, мы должны быть уверенными, что циклическая свертка ведет себя как линейная. Займемся более тщательным анализом ситуации.

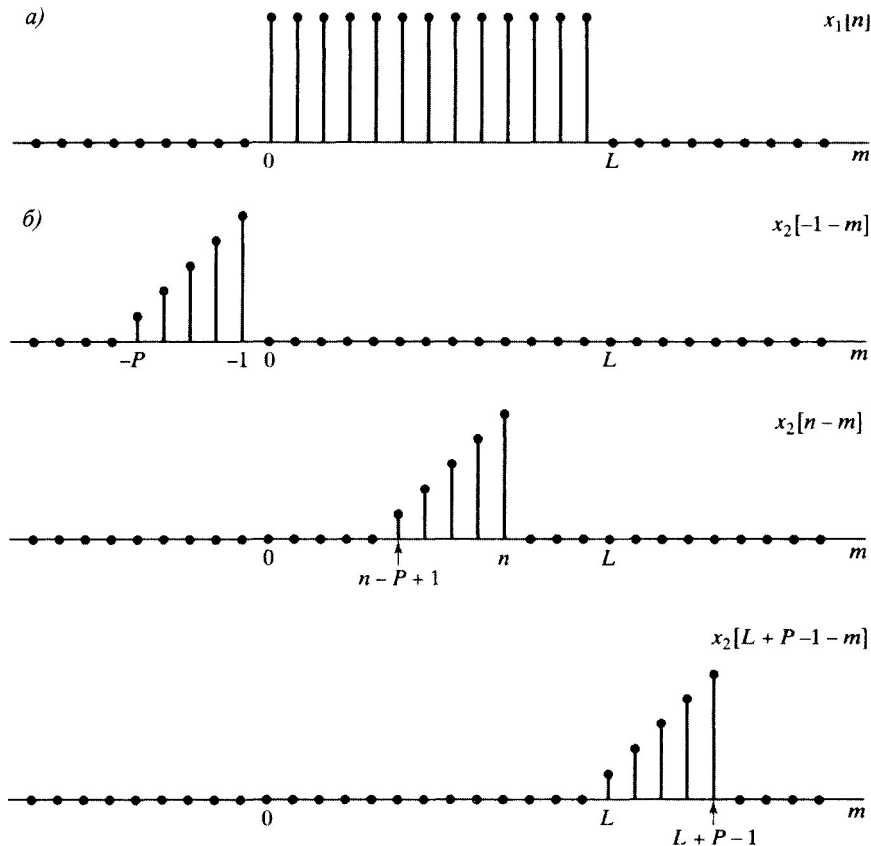


рис1. Пример линейной свёртки двух конечных последовательностей, показывающий что результат свертки равен нулю.

Линейная свертка двух конечных последовательностей

Рассмотрим L -членную последовательность $x_1[n]$ и P -членную последовательность $x_2[n]$. Напомним, что их линейная свертка определяется формулой:

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m] \quad (1)$$

На рисунка 1, а) представлена типичная последовательность $x_1[m]$, а элементы $x_2[n-m]$ для нескольких значений n показаны на рис. 1, б). Ясно, что произведение $x_1[m]x_2[n-m]$ будет равно нулю при $n < 0$ и $n > L+P-2$. Таким образом, члены $x_3[n]$ могут быть отличны от нуля только при

$0 \leq n \leq L + P - 2$. Следовательно, $L + P - 1$ — максимально возможная длина результата свертки последовательностей длин L и P .

Циклическая свертка как линейная с наложением во времени

Если дискретизовать Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$ в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, то получившаяся последовательность будет состоять из коэффициентов ДРФ периодической последовательности

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \quad (2)$$

С другой стороны, конечная последовательность

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3)$$

является ДПФ одного периода последовательности $\tilde{x}[n]$, т.е.

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что если длина последовательности $x[n]$ не превосходит N , то наложения во временной области не происходит и $x_p[n] = x[n]$. Однако если количество членов последовательности $x[n]$ больше N , то ввиду суперпозиции различных отсчетов последовательности $x[n]$ последовательность $x_p[n]$ может отличаться от исходной в нескольких (или даже во всех точках). Чтобы отличать исходную последовательность от одного периода последовательности, получающейся в результате применения обратного ДПФ к дискретизованному Фурье-образу последовательности $x[n]$, мы будем использовать индекс p , который будет опускаться, если наложения не происходит и имеет место равенство $x_p[n] = x[n]$.

Фурье-образ последовательности $x_3[n]$ из свертки (1) вычисляется как произведение

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \quad (5)$$

Определив ее ДПФ как

$$X_3[k] = X_3(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (6)$$

получим очевидное равенство

$$X_3[k] = X_1(e^{j(2\pi k/N)})X_2(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (7)$$

откуда

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] \quad (8)$$

Значит, результат применения обратного ДПФ к $X_3[k]$ имеет вид:

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rN], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

С другой стороны, по теореме о циклической свертке

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]. \quad (10)$$

Таким образом, циклическая свертка двух конечных последовательностей совпадает с линейной сверткой, искаженной наложением (см. формулу (9)).

Заметим, что если N больше L или P (количества членов последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$), то $X_1[k]$ и $X_2[k]$ представляют последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ абсолютно точно, но $x_{3p}[n] = x[n]$ при всех n только тогда, когда N не меньше длины последовательности $x_3[n]$. Как было установлено в предыдущем подразделе, максимально возможное число ненулевых отсчетов последовательности $x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$ равно $(L + P - 1)$. Следовательно, циклическая свертка последовательностей с ДПФ, равным $X_1[k]X_2[k]$, совпадает с линейной, Фурье-образ которой — это произведение $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$, если число точек ДПФ N удовлетворяет неравенству $N \geq L + P - 1$.

Пример 1. Циклическая свертка как линейная с наложением

Заметим, что $x_1[n]$ и $x_2[n]$ — постоянные последовательности длины $L = 6$, как показано на рис. 2, а). Поэтому длина их линейной свертки равна $L + P - 1 = 11$, причем сама свертка имеет треугольную форму (рис. 2, б)). На рис. 2, в) и г) показаны сдвинутые версии последовательности $x_3[n - rN]$ из (9) при $r = \pm 1$ и $N = 6$. N -точечная циклическая свертка последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ может быть вычислена с помощью формулы (9). Результат вычислений представлен на рис. 2, д) для $N = L = 6$, а в случае $N = 2L = 12$ — на рис. 2, е). Заметим, что при $N = L = 6$ в циклическую свертку вносит вклад как сама последовательность $x_3[n]$, так и сдвинутая ее версия $x_3[n + N]$, а при $N = 2L = 12$ — только последовательность $x_3[n]$. Так как длина линейной свертки равна $2L - 1$, 12-точечная циклическая свертка совпадет с линейной при всех $n \in [0; N - 1]$. Фактически это останется верным и при $N = 2L - 1 = 11$.

Итак, мы выяснили, что если $N \geq L + P - 1$, то при N-точечной циклической свертке двух конечных последовательностей наложения не происходит. С другой стороны, при $N = L = P$ циклическая свертка может отличаться от линейной во всех отсчетах без исключения. Однако при $P < L$ некоторые члены L-точечной циклической свертки могут совпадать с соответствующими отсчетами линейной. Лучше всего это можно понять, если вновь привлечь интерпретацию с наложением.

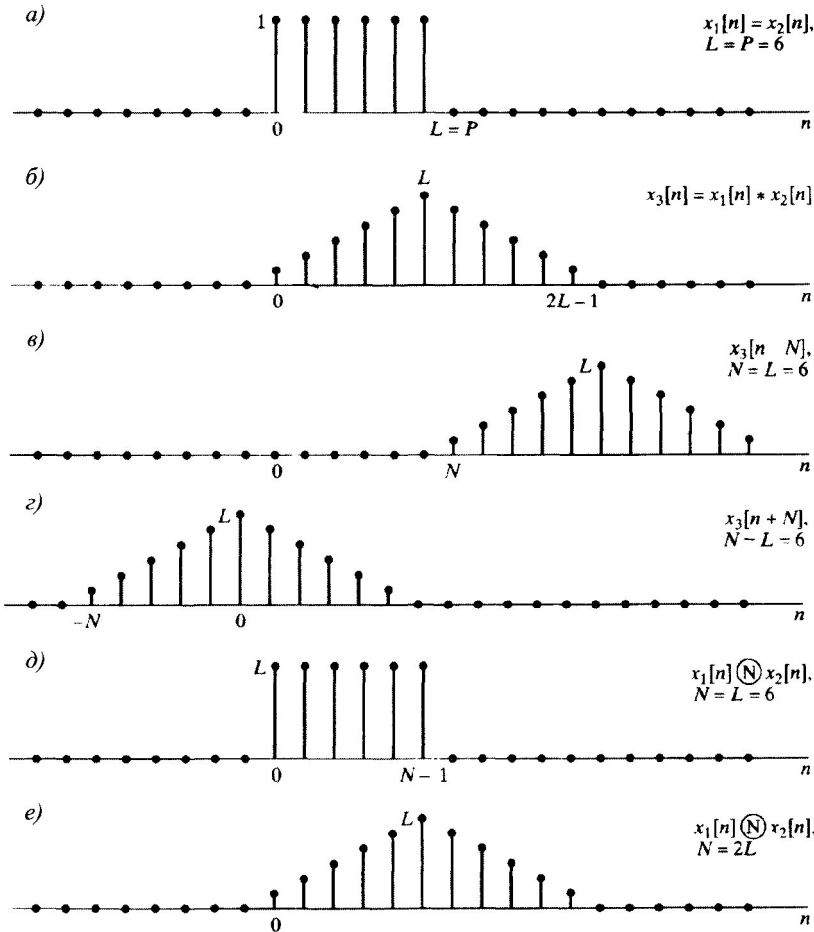


рис.2 Сравнение циклической свертки и линейной с наложением.

Рассмотрим последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$, изображенные на рис.3, а) и б) соответственно. Длина L последовательности $x_1[n]$ больше количества членов P последовательности $x_2[n]$. Вычислив сначала L -точечную свертку этих последовательностей, выясним, какие из ее отсчетов совпадают с соответствующими членами линейной свертки, а какие нет. Линейная свертка последовательностей $x_1[n]$ и $x_2[n]$ представлена на рис. 3, в). Ее длина равна $(L + P - 1)$. L -точечная циклическая свертка получается по формулам (9) и (10):

$$x_{3p}[n] \begin{cases} x_1 \otimes x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rL], & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11)$$

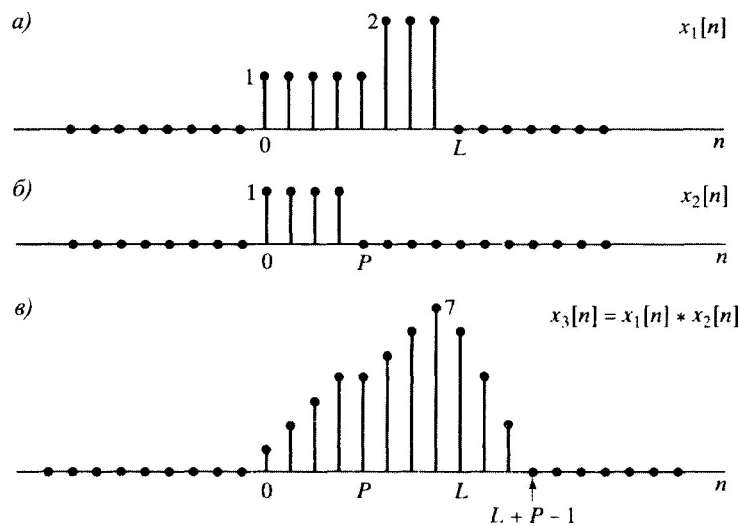


рис.3 Пример линейной свертки двух конечных последовательностей

На рис. 4, а) представлена последовательность $x_3[n - rL]$ при $r = 0$, а на рис. 4, б) и в) при $r = +1$ и $r = -1$ соответственно. На рисунке видно, что последовательность $x_{3p}[n]$ на отрезке $[0; L - 1]$ получается как сумма только двух слагаемых: $x_3[n]$ и $x_3[n + L]$.

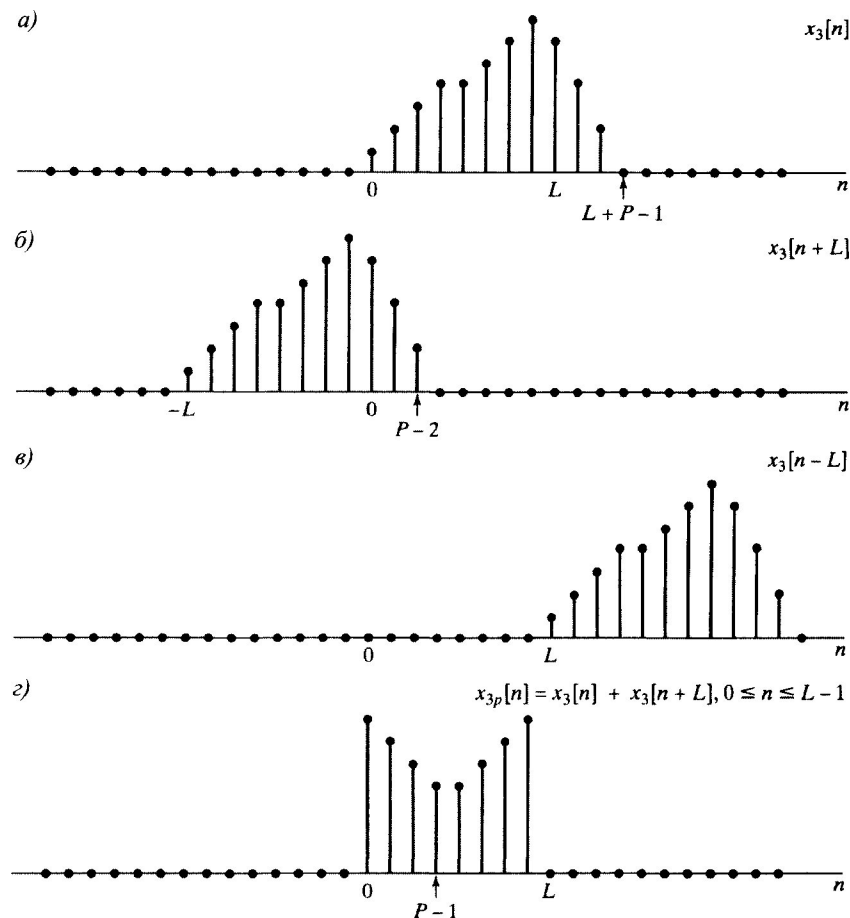


рис.4 Интерпретация циклической свертки последовательностей чрез линейную свертку с наложением.

И в общей ситуации при $P < L$ в циклическую свертку, определенную на отрезке $[0; L - 1]$, вклад вносят только две последовательности: $x_3[n]$ и $x_3[n+L]$. Суммирование происходит следующим образом: последние $(P - 1)$ отсчета последовательности $x_3[n+L]$ (от $n = 0$ до $n = P - 2$) складываются с первыми $(P - 1)$ отсчетами $x_3[n]$, а последние $(P - 1)$ члены последовательности $x_3[n]$, расположенные над отрезком $[L; L + P - 2]$, отбрасываются. Иными словами, последовательность $x_{3p}[n]$ строится по-разному на разных частях отрезка $[0; L - 1]$. Поскольку последние $(P - 1)$ члены последовательностей $x_3[n]$, и $x_3[n+L]$, идентичны, возможен альтернативный взгляд на циклическую свертку, согласно которому она получается как линейная свертка с наложением спектров из-за сложения членов последовательности $x_3[n]$, с номерами от $n = L, L + 1, \dots, L + P - 2$ с первыми отсчетами последовательности $x_3[n]$. Процесс построения циклической свертки показан на рис. 5 для случая $P = 4$ и $L = 8$. Линейная свертка $x_3[n]$ представлена на рис. 5, а). Ее отсчеты с номерами $n \geq L$ отмечены незаполненными кружочками. Обратите внимание, что только $(P - 1)$ ее членов при $n \geq L$ отличны от нуля. На рис. 5, б) показан процесс построения $x_{3p}[n]$, который кратко можно охарактеризовать как «наворачивание» последовательности $x_3[n]$ на себя. В результате первые $(P - 1)$ ее членов искажаются за счет наложения во времени, а остальные (от $n = P - 1$ до $n = L - 1$) остаются неизменными, т. е. совпадают с соответствующими членами линейной свертки.

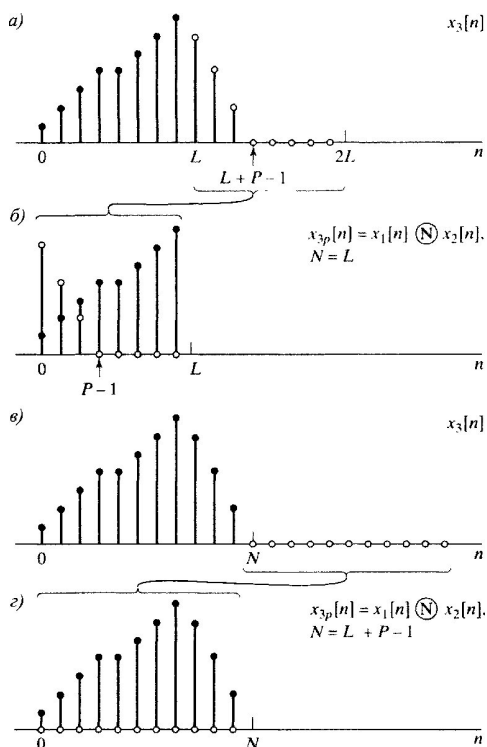


рис.5 Процесс формирования циклической свертки в результате «наворачивания»

Итак, при достаточной длине циклической свертки относительно сворачиваемых последовательностей наложения не происходит, т.е. циклическая свертка совпадет с линейной.

Задания для самостоятельного решения.

1. Пусть ряд Фурье периодического непрерывного сигнала $x_c(t)$ с периодом 1 мс имеет вид:

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

В результате дискретизации сигнала $x_c(t)$ с шагом $T = \frac{1}{6}10^{-3}$ получается последовательность $x[n]$, т.е.

$$x[n] = x_c\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$$

- а) Является ли последовательность $x[n]$ периодической и каков ее период?
- б) Как соотносится частота дискретизации, при которой получен сигнал $x[n]$, с частотой Найквиста? Иными словами, достаточно ли мал шаг дискретизации, чтобы гарантировать отсутствие ложных частот?
2. Рассмотрите последовательность $x[n] = a^n u[n]$. Напомним, что ее периодическое продолжение $\tilde{x}[n]$ описывается формулой:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

- а) Вычислите Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ последовательности $x[n]$
- б) Найдите коэффициенты $\tilde{X}[k]$ ДРФ последовательности $\tilde{x}[n]$.

3. определите ДПФ каждой из перечисленных конечных последовательностей, считая, что все они имеют длину N .

а) $x[n] = \delta[n]$;

б) $x[n] = \delta[n - n_0]$, $0 \leq n_0 \leq N - 1$;

в) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ — четно,} \\ 0, & n \text{ — нечетно;} \end{cases}$

г) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & N/2 \leq n \leq N - 1; \end{cases}$

д) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

4. ДПФ 8-членных последовательностей изображены на рис.6, найдите

выражение, связывающее $X_1[k]$ и $X_2[k]$

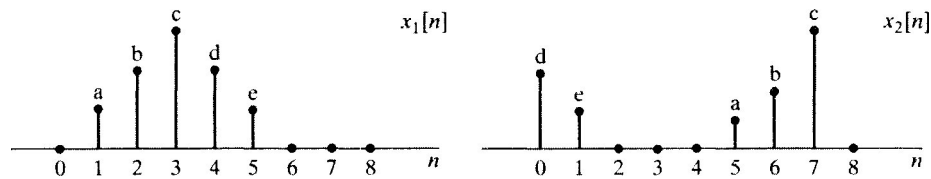


рис.6

5. Изобразите шеститочечную свертку последовательностей из рис.6

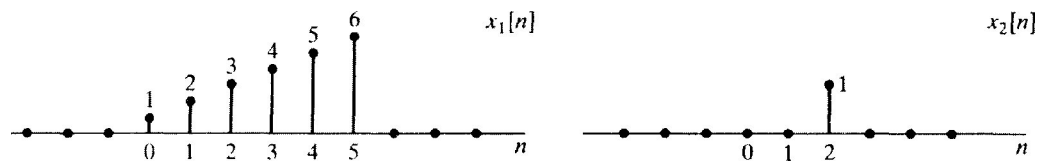


рис.7

5. Используемая литература

1. Айфичер, Джервис. Проектирование систем цифровой смешанной обработки сигналов. 2004 год. 989 стр.
2. А.Оппенгейм, Р.Шафер Цифровая обработка сигналов. – Техносфера, Москва 2006.
- 3.Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. - М.: Техносфера, 2004. - 368 с.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки

1. Цель занятия

Научиться представлять линейные стационарные системы в импульсной и частотной форме. Изучить соотношение между импульсной и частотной

характеристиками, как пару, связанную с преобразованием Фурье и ознакомится с основными свойствами преобразований.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о функциях стационарных систем 15 мин
 2. Рассмотрение частотных характеристик 20 мин.
 3. Рассмотрение примеров 35 мин
- Проверка выполнения практического занятия 10 мин
- Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье.

Так как ЛС-система реализуется линейной сверткой, то циклическая свертка) может быть использована для реализации таких систем. Действительно, рассмотрим L -членную входную последовательность $x[n]$ и импульсную характеристику $h[n]$ длины P . Длина их линейной свертки, которую обычно обозначают через $y[n]$, не превосходит числа $(L + P - 1)$. Следовательно, N - точечная циклическая свертка входного сигнала с импульсной характеристикой совпадет с реакцией системы, если $N \geq (L + P - 1)$. Напомним, что искомая циклическая свертка вычисляется как обратное ДПФ от произведений ДПФ последовательностей $x[n]$ и $h[n]$. Поскольку это произведение должно представлять линейную свертку $x[n] * h[n]$, длина которой равна $(L + P - 1)$, количество членов вычисляемых ДПФ тоже должно быть не меньше чем $(L + P - 1)$, т.е. к этим последовательностям нужно добавить отсчеты с нулевой амплитудой так, чтобы длины сворачиваемых последовательностей стали равными искомому числу. Процесс добавления нулевых членов к конечной последовательности обычно называют продолжением нулем.

Описанная процедура позволяет вычислить линейную свертку конечных последовательностей на основе ДПФ, т.е. реакцию КИХ-системы на конечный входной сигнал можно определить с помощью ДПФ. Во многих приложениях, таких как, например, фильтрование речевого сигнала, длина входного сигнала неопределена. Несмотря на это, с теоретической точки зрения мы могли бы сохранить полную форму сигнала и реализовать процедуру привлечения ДПФ для большого числа отсчетов, но такое ДПФ довольно трудно вычислить. Другая идея реализации фильтрования заключается в том, чтобы вычислять выходной сигнал только после того, как все отсчеты входного будут собраны вместе. Но, как правило, хотелось бы избежать неизбежной для такого подхода большой задержки. Выход из создавшегося положения дает так называемая блочная свертка, при которой фильтруемый сигнал разбивается на куски длины L . Каждый такой участок сигнала сворачивается с конечной импульсной характеристикой, после чего профильтрованные куски склеиваются вместе подходящим образом. При этом обработка каждого блока осуществляется с помощью ДПФ.

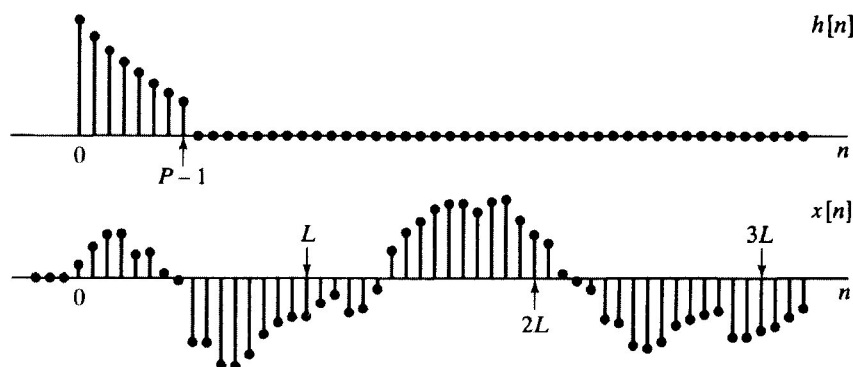


рис.1 Конечная импульсная характеристика $h[n]$ и входной сигнал $x[n]$ неопределенной длины.

Для иллюстрации метода и описания процесса склейки профильтрованных участков рассмотрим импульсную характеристику $h[n]$ длины P и входной сигнал $x[n]$, изображенные на рис. 1. Будем предполагать, что $x[n] = 0$ при $n < 0$ и длина входного сигнала много больше P . Последовательность $x[n]$ можно представить как сумму сдвинутых блоков длины L :

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \quad (1)$$

где

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Указанное разбиение последовательности $x[n]$ из рис. 1 показано на

рис. 2, а). Обратите внимание, что первый отсчет каждого участка $x_r[n]$ имеет номер $n = 0$, а его значение совпадает с величиной отсчета входного сигнала под номером rL . Эта особенность отражена на рис. 2, а) тем, что график каждого участка сдвинут на свою реальную позицию.

Поскольку свертка является линейной стационарной операцией, то из формулы (1) следует, что

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL] \quad (3)$$

где

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n] \quad (4)$$

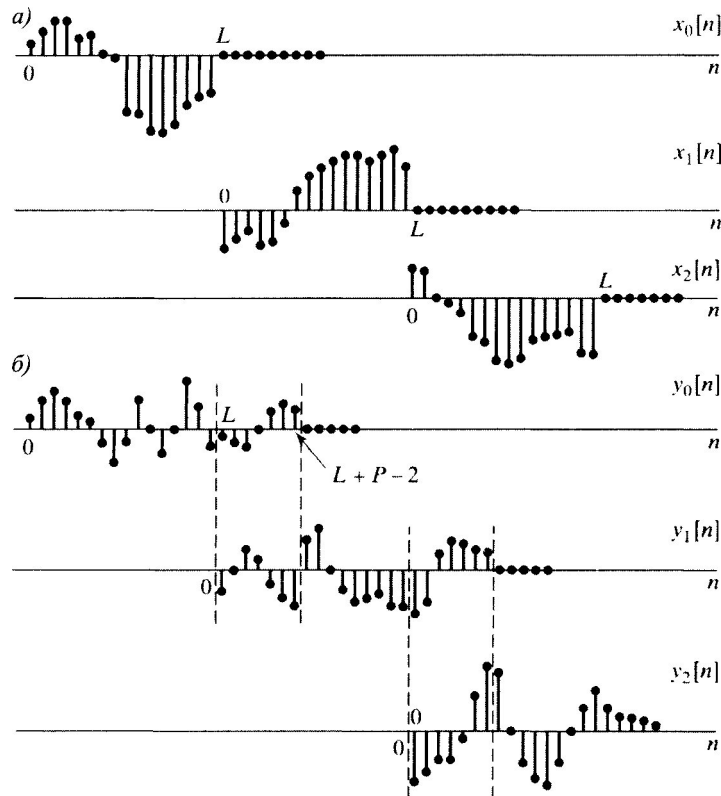


рис.2

Поскольку число отсчетов участка $x_r[n]$ равно L , а длина импульсной характеристики — P , количество членов любого участка $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ не превосходит $L + P - 1$. Поэтому линейную свертку $x_r[n] * h[n]$ можно вычислить с помощью ранее описанной процедуры, использующей N -точечное ДПФ с $N \geq L + P - 1$. Так как входной сигнал разбивается на участки длины L , а результат фильтрации участков имеет длину $L + P - 1$,

то профильтрованные сегменты перекрываются друг с другом в $P - 1$ точках, причем для получения искомого результата налагающиеся друг на друга отсчеты необходимо просуммировать. Профильтрованные участки $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ показаны на рис. 2,б). Так как входной сигнал является суммой задержанных конечных участков из рис. 2, а), результат фильтрации $x[n] * h[n]$ получается как сумма задержанных профильтрованных сегментов, изображенных на рис. 2, б). Такая процедура вычисления реакции фильтра часто называется суммированием перекрытий.

Напомним, что перекрытие участков возникает потому, что линейная свертка каждого участка с импульсной характеристикой, как правило, получается длиннее, чем сворачиваемый участок. Метод суммирования перекрытий блочной свертки не привязан к ДПФ и циклической свертке. Основная его идея состоит в вычислении сверток участков входного сигнала, которые затем суммируются подходящим образом.

Другая процедура вычисления блочной свертки называется методом хранения перекрытий. Она заключается в реализации L -точечной циклической свертки P -членной импульсной характеристики с L -членным участком $x_r[n]$ и последующим выделении отсчетов циклической свертки, совпадающих со значениями линейной. Полученные таким образом куски склеиваются вместе для формирования выходного сигнала. Мы показали, что при циклической свертке L -членной последовательности с P -членной (при $P < L$) первые $P - 1$ отсчеты результата искажены, в то время как остальные тождественны членам линейной свертки. Мы можем разделить входную последовательность $x[p]$ на L -членные сегменты таким образом, что каждый следующий участок перекрывается с предыдущим по $P - 1$ отсчету:

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1], \quad 0 \leq n \leq L - 1 \quad (5)$$

где, как и раньше, индекс первого отсчета каждого участка равен нулю.

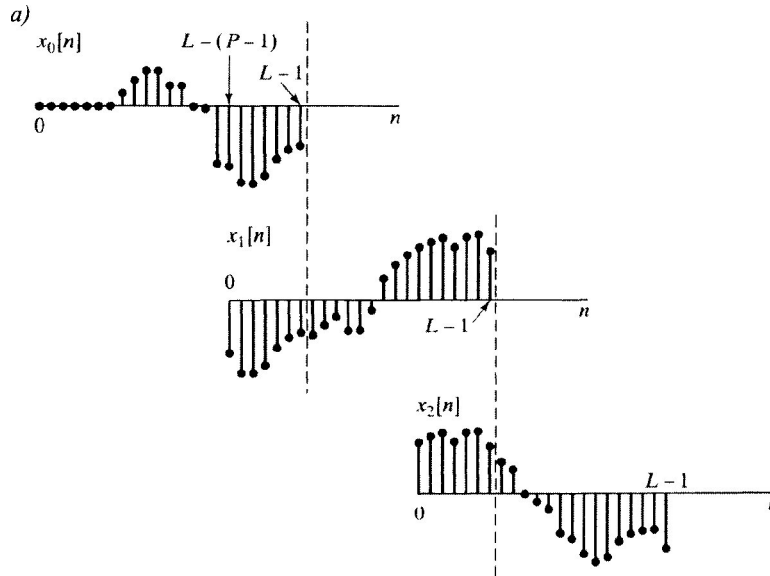


рис.3

Такой способ сегментации последовательности показан на рис. 3, а). Циклическая свертка каждого участка с $h[n]$ обозначена через $y_m[n]$ (рис. 4, б)). Дополнительный индекс r указывает, что эта последовательность получена в результате циклической свертки, в которой может присутствовать наложение по времени. Отсчеты каждого выходного сегмента, индексы которых принадлежат отрезку $[0; P - 2]$, необходимо отбросить. Оставшиеся члены каждого выходного сегмента составляются вместе, в результате чего получается искомый выходной сигнал:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1] \quad (6)$$

где

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P - 1 \leq n \leq L - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

Описанная процедура называется методом хранения перекрытий, поскольку сегменты входного сигнала перекрываются так, что каждый следующий участок начинается с $(P - 1)$ отсчета предыдущего и заканчивается $L - P + 1$ новыми.

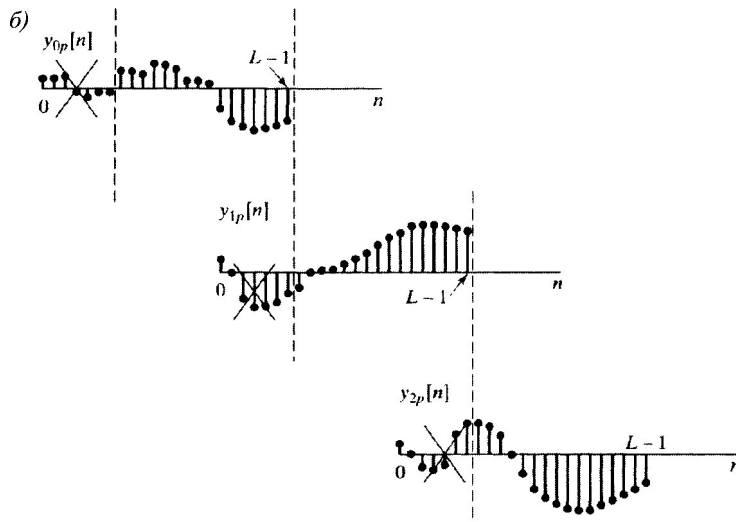


рис.4 (окончание)

Дискретное косинус-преобразование

ДПФ, возможно, наиболее типичный пример большого класса преобразований, которые в общем виде можно записать как

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \varphi_k^*[n] \quad (8)$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \varphi_k[n] \quad (9)$$

Последовательности $\varphi_k[n]$ удовлетворяют замечательному свойству попарной ортогональности:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k[n] \varphi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & \text{иначе} \neq k \end{cases} \quad (10)(10)$$

и называются базисными.

Базисными последовательностями в ДПФ служат комплексные экспоненты $e^{j2\pi kn/N}$, а последовательность $A[k]$ здесь имеет комплексные отсчеты даже в том случае, когда последовательность $x[n]$ вещественна. Возникает естественный вопрос: существует ли преобразование, сохраняющее вещественность? Ответ положителен. Указанным свойством обладают, например, преобразования Хаара и Адамара и преобразование Хартли [11-13]. Другим примером ортогонального преобразования вещественных последовательностей служит дискретное косинуспреобразование (ДКП) [1, 131]. Оно тесно связано с ДПФ и становится особенно полезным и важным в ряде приложений по обработке

сигналов, особенно при сжатии изображений и звука.

Определение дискретного косинус-преобразования

ДКП называется преобразование вида (8) и (9), базисными последовательностями ~~и~~ $x[n]$ которого служат косинусы. Поскольку косинус — периодическая четная последовательность, то продолжение $x[n]$ за отрезок $[0; N - 1]$ по формуле синтеза (9) будет периодичным и четным. Иначе говоря, тогда как ДПФ содержит неявную периодичность, в ДКП заложена как периодичность, так и четность.

Определение ДПФ начиналось с периодического продолжения конечной последовательности, которое затем выражалось в виде линейной комбинации комплексных экспонент. Подход к определению ДКП полностью аналогичен. Сначала по конечной последовательности строится периодическая четная последовательность, по которой исходная восстанавливается однозначно. Ввиду большого числа способов продолжения возникает несколько различных определений ДКП.

На рис. 5 показаны 17 отсчетов четырех примеров продолжения четырехчленной последовательности. Отсчеты исходной конечной последовательности всюду обозначены черными кружочками. Все продолжения периодические (период равен 16 или меньше) и обладают свойством четности. В каждом случае конечная последовательность легко выделяется как первые четыре члена периода. Обозначим все 16 периодические последовательности, построенные по каждому из четырех примеров рис. 5, через $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$, $\tilde{x}_3[n]$ и $\tilde{x}_4[n]$. Заметим, что реальный период последовательности $\tilde{x}_1[n]$ равен $2N - 2 = 6$, причем она обладает четной симметрией как относительно $n = 0$, так и относительно $n = N - 1 = 3$. Период последовательности $\tilde{x}_2[n]$ равен $2N = 8$, а центры ее четной симметрии расположены в точках $n = -\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{2}$. Период последовательностей $\tilde{x}_3[n]$ и $\tilde{x}_4[n]$ состоит из 16 отсчетов. В обоих случаях период вычисляется как $16 = 4N$. Центры симметрии третьей последовательности находятся в точках $n = 0$ и $n = 8$, а четвертой — в $n = -\frac{1}{2}$ и $n = (2N - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$.

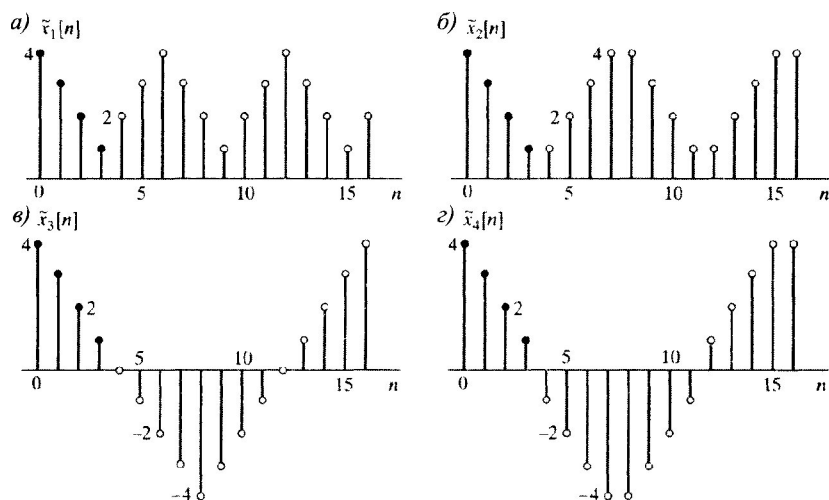


рис.5

Четыре случая, изображенные на рис. 5, иллюстрируют периодичность, неявно присутствующую в четырех типах ДКП, называемых ДКП-1, ДКП-2, ДКП-3 и ДКП-4. Можно показать, что существует еще четыре способа четного периодического продолжения последовательности $x[n]$, что влечет четыре дополнительных типа ДКП. Более того, по данной конечной последовательности можно построить восемь нечетных периодических вещественных продолжений, ведущих к восьми типам дискретного синус-преобразования (ДСП), базисными функциями в котором служат ортонормированные последовательности синусов. Названные преобразования образуют семейство из 16 преобразований вещественных последовательностей. К наиболее используемым из них относятся ДКП-1 и ДКП-2.

Задания для самостоятельного решения

1. Рассмотрите последовательности $x_1[n]$ и $x_2[n]$ из рис. 6. Найдите наименьшее значение N , при котором справедливо равенство $x_1[n] \circledast x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$

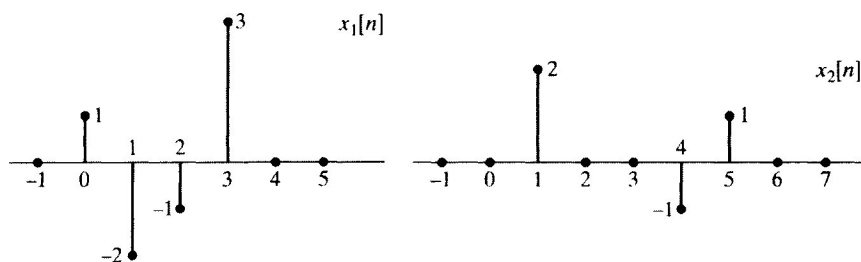


рис. 6

2. ДПФ последовательностей $x[n]$ и $x_1[n]$ изображенных на рис. 7,

удовлетворяют соотношению $X_1[k] = \hat{X}[k]e^{-j(2\pi km/6)}$ где m — неизвестная константа. Можно ли узнать точное значение m , основываясь на рис. 7? Единственное ли такое значение? Положительный ответ обоснуйте, а отрицательный подкрепите примером.

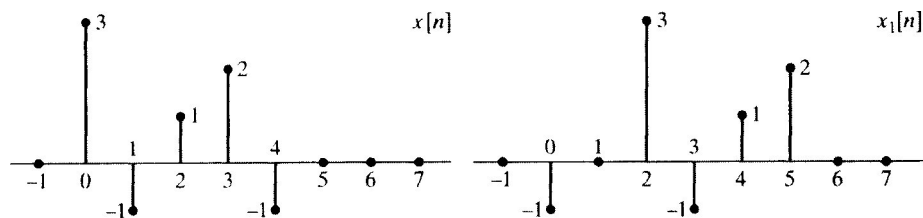


рис. 7

- Покажите, что для любой N -членной последовательности $x[n]$ выполнено равенство

$$x[((-n))_N] = x[((N - n))_N]$$

- Изобразите N -точечную циклическую свертку последовательностей из рис. 8 при $N = 6$ и $N = 10$.

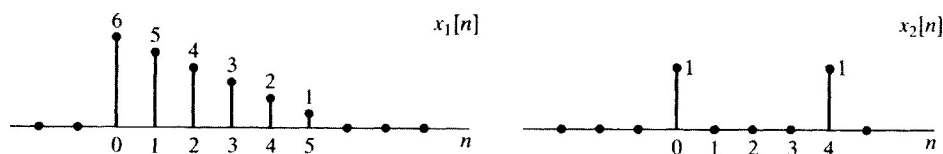


рис. 8

5. Используемая литература

- Айфичер, Джервис. Проектирование систем цифровой смешанной обработки сигналов. 2004 год. 989 стр.
- Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 2005. - 312 с.
- А.Оппенгейм, Р.Шафер Цифровая обработка сигналов. – Техносфера, Москва 2006.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Представление цифровых фильтров в виде сигнальных графов

1. Цель занятия

Ознакомится с таким понятием, как потоковый граф. Научиться представлять разностные уравнения с помощью сигнальных потоковых графов аналогично блок-схемам, за исключением нескольких обозначений

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

3. Основные теоретические сведения

Представление разностных уравнений с помощью сигнальных потоковых графов аналогично блок-схемам, за исключением нескольких обозначений. С формальной точки зрения сигнальный потоковый граф — это сеть направленных ветвей, соединяющих узлы. Каждый узел обозначен переменной или меткой. Метка, соответствующая узлу k , может выглядеть как w_k , или, подчеркивая тот факт, что переменные, относящиеся к узлам, как правило — последовательности, ее обозначают через w Символ (j, k)

обозначает ветвь потокового графа, исходящую из узла j и заканчивающуюся в узле k (рис. 1).

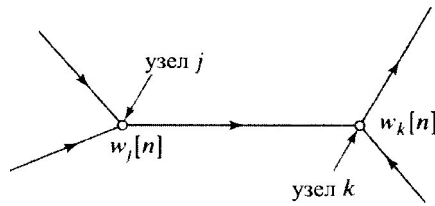


рис.1 Пример узлов и ветвей сигнального потокового графа

Каждой ветви отвечает входной и выходной сигналы. Входным сигналом для ветви (j, k) служит последовательность, взятая в качестве метки узла, т.е. $w_j[n]$. В линейном сигнальном потоковом графе, а именно такие мы и рассматриваем, выходной сигнал, соответствующий ветви, получается линейным преобразованием ее входного сигнала. Простейшим примером служит постоянное усиление, когда выходной сигнал ветви — это входной сигнал, умноженный на константу. Линейная операция, изображаемая ветвью, обычно ставится рядом со стрелкой, указывающей ориентацию. В случае умножителя на константу, или масштабного преобразователя, эта константа просто ставится рядом со стрелкой. Ветвь, обозначение операции которой опущено, представляет собой ветвь с единичным коэффициентом усиления, или тождественное преобразование. По определению, значение каждого узла графа равно сумме всех входящих в него сигналов.

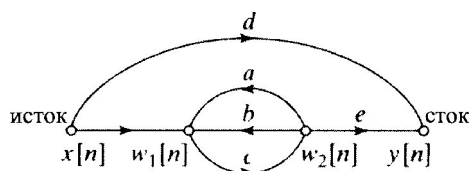


рис.2 Пример сигнального потокового графа со стоком и истоком

Для завершения определения сигнального потокового графа нам необходимо ввести два специальных типа узлов: сток и исток. Истоком называется узел, в который не входит ни одной ветви, иначе говоря, стрелки, стоящие на всех ветвях, инцидентных с ним, направлены от этого узла. Исток используется для обозначения входного сигнала всей системы или источников сигнала внутри нее. Стоком называют узел, имеющий лишь входящие ветви. Он, как правило, обозначает общий выход системы. Сток, исток и ветви с единичным коэффициентом усиления иллюстрируются рис. 2, который представляет следующие линейные соотношения:

$$\begin{aligned}
w_1[n] &= x[n] + aw_2[n] + bw_2[n] \\
w_2[n] &= cw_1[n], \\
y[n] &= dx[n] + ew_2[n].
\end{aligned}
\tag{1}$$

Сложение, умножение на константу и задержка — базисные операции, необходимые для реализации линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, в связи с чем алгоритмы, реализующие ЛС-системы, можно изображать сигнальными потоковыми графами, состоящими из этих элементов. Как пример такой реализации рассмотрим блок-схему из рис. 3, а), где в прямой форме Π реализована система с характеристической функцией $F.1$). Сигнальный потоковый граф, соответствующий этой системе, приведен на рис. 3, б). Узел 0 на рис. 3, б) является истоком, чьим значением служит входная последовательность $x[n]$, а узел 5 — стоком; его метка — выходной сигнал $y[n]$. Обратите внимание, для четкого выделения входа и выхода системы сток и исток соединены с остальным графом ветвями с единичным коэффициентом усиления. Очевидно, узлы 3 и 5 имеют одинаковые значения. Все ветви на рис. 3, б), за исключением одной (ветвь задержки В,4)), являются простыми ветвями усиления, т.е. выходной сигнал ветви получается из ее входного сигнала умножением на константу. Задержку во временной области представить ветвью усиления нельзя. Однако z -преобразование единичной задержки — это умножение на z^{-1} . Заменив разностное уравнение его эквивалентом, полученным с помощью z -преобразования, можно обозначать все ветви соответствующими характеристическими функциями. При этом каждый коэффициент ветви будет являться функцией от z . В частности, коэффициент усиления ветви единичной задержки — z^{-1} . По договоренности узлы графа обозначаются последовательностями, а не их z -преобразованиями, но рядом с задерживающей ветвью будем ставить коэффициент z^{-1} . Необходимо осознавать, что выходом этой ветви служит входная последовательность, сдвинутая на один отсчет. Граф из рис. 3, б) с учетом этого соглашения перерисован на рис. 4. Уравнения, представляемые рис. 4, имеют следующий вид:

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n] \tag{2}$$

$$w_2[n] = w_1[n] \tag{3}$$

$$w_3[n] = b_0w_2[n] + b_1w_4[n] \tag{4}$$

$$w_4[n] = w_2[n - 1] \tag{5}$$

$$y[n] = w_3[n] \tag{6}$$

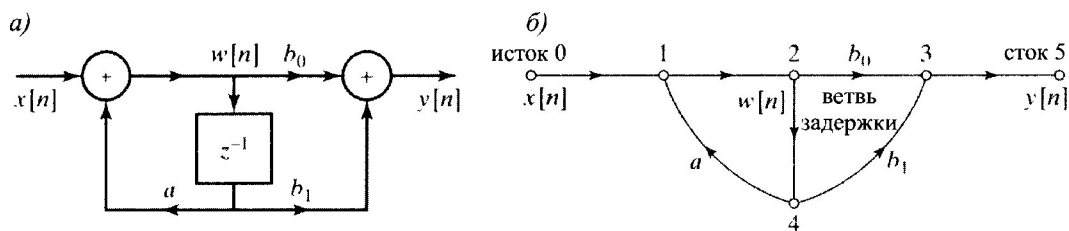


рис.3

Сравнивая рис. 3, а) и 4, легко заметить, что существует прямое соответствие между ветвями потокового графа и стрелками блок-схемы. Фактически, граф отличается от блок-схемы тем, что узлы в нем изображают как точки ветвления, так и сумматоры, в то время как в блок-схемах за сумматором закреплен определенный символ. Точка ветвления блок-схемы соответствует узлу графа, снабженному одной входящей ветвью и несколькими выходящими. Сумматор же на сигнальном потоковом графе представляется узлом с двумя (или более) входными ветвями. Таким образом, сигнальный потоковый граф полностью эквивалентен блок-схеме в смысле графического изображения разностного уравнения, но его легче рисовать. Как и в случае блок-схем, узлы и ветви потокового графа можно переставлять, не меняя свойств реализуемой ЛС-системы. Разработан большой раздел теории сигнальных потоковых графов, который можно непосредственно прилагать к дискретным системам, характеризуемым разностными уравнениями. Хотя потоковые графы в нашем учебнике присутствуют прежде всего в иллюстративных целях, мы будем использовать некоторые теоремы, касающиеся приложения сигнальных потоковых графов к исследованию альтернативных структур реализации линейных систем.

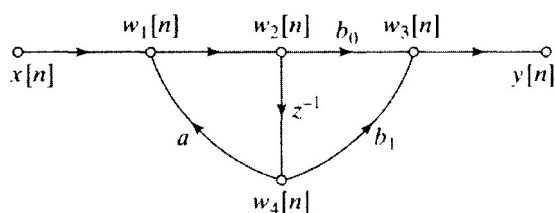


рис.4 Потоковый граф

Формулы (2-6) определяют многошаговый алгоритм, вычисляющий реакцию ЛС-системы на входной сигнал $x[n]$, и служат типичным примером соотношений, возникающих при реализации общей БИХ-системы. Очевидно, что выполнять действия, указанные в формулах, можно только в определенном порядке. В выражениях (2) и (4) осуществляется умножение и сложение, в то время как (3) и (6) — простое переобозначение переменных.

Формула (5) представляет собой «обновление» памяти системы, которое может быть реализовано замещением содержащегося в регистре памяти значения $w_4[n]$ на $w_2[n-1]$, что необходимо осуществить либо перед, либо после вычисления всех остальных величин. Условие состояния покоя в начальном положении в этом случае сводится к одному из равенств: $w_2[-1] = 0 = 0$ или $w_4[0] = 0$. Ясно, что вычисления выражений (2)-(6) должны проводиться в том порядке, в котором они выписаны, за исключением того, что два последних можно поменять местами и/или (5) поставить на первое место. Поточковый граф представляет множество разностных уравнений, по одному на каждый узел сети. В случае графа из рис. 4 мы можем довольно легко исключить некоторые переменные, оставив всего два соотношения:

$$w_2[n] = aw_2[n-1] + x[n] \quad (7)$$

$$y[n] = b_0w_2[n] + b_1w_2[n-1] \quad (8)$$

определяющих структуру прямой формы 11.

Решение разностных уравнений, соответствующих потоковому графу - довольно сложная задача ввиду всевозможных задержек переменных. Чтобы ее облегчить, следует применить z-преобразование.

Пример. Вычисление характеристической функции по потоковому графу.

Рассмотрим рис. 5, где изображен граф, непосредственно по которому не удастся выписать характеристическую функцию. Однако, помня о том, что значение каждой переменной — линейная комбинация смежных узловых переменных, коэффициенты которой приписаны соответствующим ветвям, можно легко получить систему разностных уравнений.

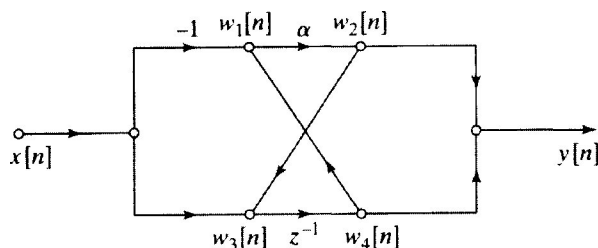


рис. 5

В нашем примере эта система имеет следующий вид:

$$w_1[n] = w_4[n] - x[n] \quad (9)$$

$$w_2[n] = \alpha w_1[n] \quad (10)$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n] \quad (11)(11)$$

$$w_4[n] = w_3[n - 1], \quad (12)$$

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n] \quad (13)$$

На основе уравнений можно написать вычислительный алгоритм, реализующий систему в форме, диктуемой данным графом, но нет гарантии, что этот алгоритм окажется самым эффективным. Поэтому имеет смысл попытаться найти как характеристическую функцию, так и различные эквивалентные системы уравнений. Применив к выписанным уравнениям z -преобразования, придем к системе:

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z) \quad (14)$$

$$W_2(z) = \alpha W_1(z) \quad (15)$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z) \quad (16)$$

$$W_4(z) = z^{-1} W_3(z) \quad (17)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z) \quad (18)$$

Функции $W_1(z)$ и $W_3(z)$ можно исключить из системы уравнений, подставляя (14) в (15), а (16) в (17):

$$W_2(z) = \alpha(W_4(z) - X(z)) \quad (19)$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_2(z) + X(z)) \quad (20)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z) \quad (21)$$

Из первых двух уравнений находим

$$W_2(z) = \frac{\alpha(z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z) \quad (22)$$

$$W_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z) \quad (23)$$

Подставив (22) и (23) в (21), получим

$$Y(z) = \left(\frac{\alpha(z^{-1} - 1) + z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) = \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) \quad (24)$$

Следовательно, характеристическая функция, соответствующая потоковому графу из рис. 5, равна

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (25)$$

откуда извлекаем импульсную характеристику системы

$$h[n] = \alpha^{n-1} u[n-1] - \alpha^{n+1} u[n] \quad (26)$$

и прямую форму I потокового графа, которая приведена на рис. 6.

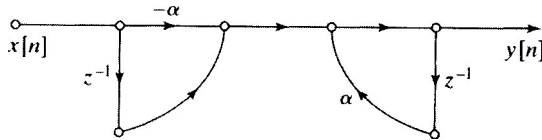


рис. 6.

Из разобранный примера видно, что трудноразрешимая система разностных уравнений, включающая в себя задержанные переменные, или обратную связь, в результате применения $\wedge$ -преобразования превращается в систему линейных алгебраических уравнений, решение которых легко может быть найдено стандартными методами. Кроме того, сравнивая потоковые графы 5 и 6, иллюстрирующие реализацию одной и той же дискретной системы, легко убеждаемся, что они представляют разные вычислительные алгоритмы, требующие различный объем вычислений. Так, в исходной реализации (рис. 5) нужно только одно умножение и одна задержка (т.е. один элемент памяти), в то время как для цифровой реализации прямой формы I уже потребуется два умножения и два задерживающих элемента. Заметим еще, что при реализации той же системы в прямой форме II будет задействован один элемент памяти и два умножения.

Задания для самостоятельного решения.

1. Определите характеристические функции, соответствующие сетям, приведенным на рис. 7, и покажите, что они имеют одни и те же полюса.

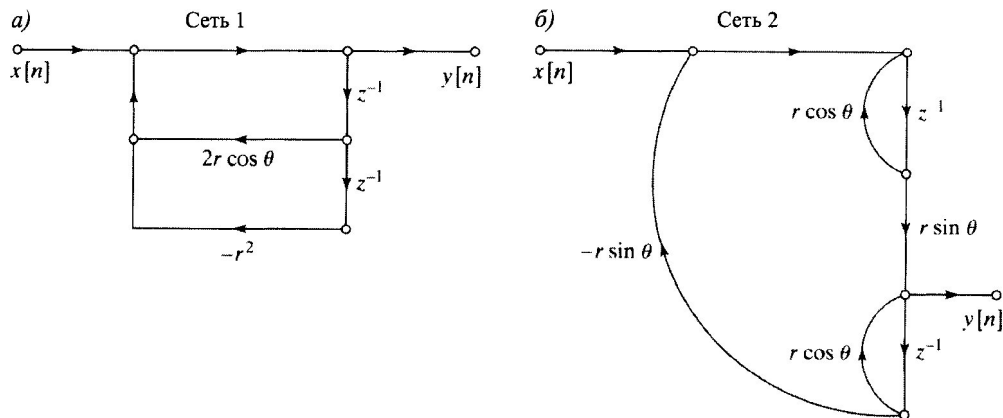
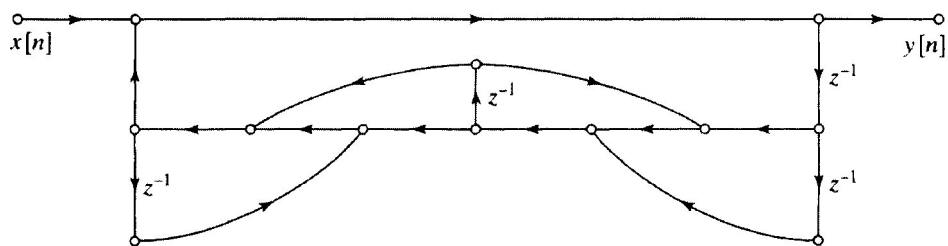
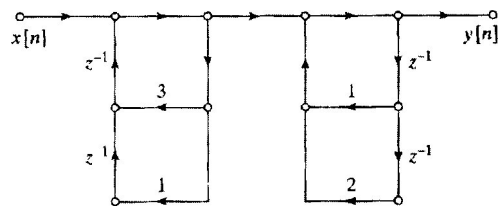


рис. 7

2. Выпишите линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, связывающее входной сигнал и реакцию системы, представленную сигнальным потоковым графом



3. ЛС-система реализована потоковым графом



а) Выпишите разностное уравнение, соответствующее этому графу.

б) Найдите характеристическую функцию.

в) Подсчитайте количество умножений и сложений вещественных чисел, необходимых для вычисления каждого отсчета выхода при такой реализации системы, в предположениях о вещественнозначности входного сигнала $x[n]$ и не учитывая умножение на 1.

г) При реализации системы, показанной, необходимо четыре

запоминающих регистра (задерживающих элементов). Можно ли уменьшить их количество, воспользовавшись эквивалентной структурой? Если да, изобразите соответствующий потоковый граф. Если нет, объясните почему.

5. Используемая литература

5. Сергиенко А. В. Цифровая обработка сигналов. - СПб.: Питер, 2002. - 608 с.
6. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. - М.: Техносфера, 2004. - 368 с.
7. А.Оппенгейм, Р.Шафер Цифровая обработка сигналов. – Техносфера, Москва 2006.
8. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 2005. - 312 с.

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

Представление цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений

1. Цель занятия

изучить представление цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений.

2. Подготовка к занятию

1. Изучить (повторить) теоретический материал.
2. Ознакомиться с заданием на Лабораторное занятие.

3. Распределение времени занятия:

Всего: 90 мин

Вступительная часть 2 мин

Проверка готовности студентов к занятию 5 мин

Программа практического занятия

1. Основные сведения о представлении цифровых фильтров в виде систем линейных уравнений 55 мин
2. Рассмотрение примера 15 мин

Проверка выполнения практического занятия 10 мин

Заключительная часть 3 мин

4. Основные теоретические сведения

Для направленного сигнального графа система линейных уравнений примет вид

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^N V_{jk}(z) W_j(z) + \sum_{j=1}^M S_{jk}(z), \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (1a)$$

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^N R_{jk}(z), \quad k = 1, 2, \dots, P. \quad (1b)$$

Если граф представляет линейную инвариантную к сдвигу систему, то каждая ветвь может быть полностью охарактеризована ее передачей. В общем случае удобно предположить, что ветви, соединяющие узлы цепи с истоками и стоками, обладают постоянными передачами, не зависящими от z . При этом не происходит потери общности, так как, в случае необходимости, можно ввести узел цепи, связанный непосредственно с истоковым узлом, и этот узел, в свою очередь, может иметь ветви к другим узлам с непостоянной передачей. Подобная процедура может быть использована, если необходимо, и для стоковых узлов. Тогда

$$V_{jk}(z) = F_{jk}(z) W_j(z); \quad (2)$$

$$S_{jk}(z) = b_{jk} X_j(z); \quad (3)$$

$$R_{jk}(z) = c_{jk} W_j(z). \quad (4)$$

В результате подстановки (2) – (4) в (1) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^N F_{jk}(z) W_j(z) + \sum_{j=1}^M b_{jk} X_j(z); \quad (5a)$$

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^N c_{jk} W_j(z). \quad (5b)$$

Эти уравнения более компактно можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{F}^t(z) \mathbf{W}(z) + \mathbf{B}^t \mathbf{X}(z); \quad (6a)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}^t \mathbf{W}(z), \quad (6b)$$

где $\mathbf{W}(z)$ – вектор-столбец величин $W_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, N$; $\mathbf{X}(z)$ – вектор-столбец величин $X_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, M$; $\mathbf{Y}(z)$ – вектор столбец величин $Y_j(z)$, j

$= 1, 2, \dots, P$. Матрица $F^t(z)$ является транспонированной матрицей $F(z)$ (размерностью $N \times N$), определяемой выражением

$$\mathbf{F}(z) = \{F_{kj}(z)\}. \quad (7)$$

имеют нулевую передачу, соответствующий элемент в матрице $F_{kj}(z)$ будет нулевым. Матрица B^t является транспонированной матрицей (размерностью $N \times M$) от матрицы

$$\mathbf{B} = \{b_{kj}\} \quad (8)$$

а C^t - транспонированной матрицей (размерностью $P \times N$) от матрицы $\mathbf{C} = \{c_{kj}\}$. Операция транспонирования матриц, обозначенная буквой t , необходима в выражениях (6) для согласованности обозначений условными индексами графов и матриц.

Уравнение (6а) может быть решено для $\mathbf{W}(z)$ путем обращения матриц

$$\mathbf{W}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}^t(z)]^{-1} \mathbf{B}^t \mathbf{X}(z) = \mathbf{T}^t(z) \mathbf{X}(z), \quad (9a)$$

где матрица передаточной функции системы

$$\mathbf{T}^t(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}^t(z)]^{-1} \mathbf{B}^t = \{T_{jh}(z)\}. \quad (9b)$$

Как следствие (9), можно записать выражение для сигнала в k -м узле:

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^M T_{jh}(z) X_j(z), \quad (10)$$

т.е. каждая узловая переменная выражается в виде линейной комбинации сигналов истоков. Если в цепи имеются только один ненулевой истоковый узел (узел a с величиной входного сигнала $X_a(z)$) и только один стоковый узел с выходным сигналом $Y(z)$, причем $Y(z) = C^t W(z)$, то величина $Y(z)$ будет определяться выражением

$$Y(z) = C^t \mathbf{W}(z) = C^t \mathbf{T}^t X_a(z); \quad (11)$$

При этом передаточная функция будет иметь вид

$$H(z) = C^t \mathbf{T}^t. \quad (12)$$

В том случае, когда передаточная функция каждой ветви цепи имеет порядок не выше первого, т.е. содержит либо множитель на константу, либо такой множитель совместно с элементом единичной задержки, то элементами матрицы в (6а) будут либо постоянные числа, либо постоянные, умноженные на z^{-1} . Если отделить элементы матрицы, содержащие задержку, от элементов которые ее не содержат, то выражение для $F^t(z)$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}^t(z) = \mathbf{F}_c^t + z^{-1} \mathbf{F}_d^t, \quad (13)$$

где F_c^t и F_d^t - матрицы размера $N \times N$. С учетом обозначения (13) выражение

(6a) принимает вид

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{F}_c^t \mathbf{W}(z) + z^{-1} \mathbf{F}_d^t \mathbf{W}(z) + \mathbf{B}^t \mathbf{X}(z). \quad (14)$$

Аналогичным путем на основании (9б) получается выражение для $T^t(z)$:

$$\mathbf{T}^t(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_c^t - z^{-1} \mathbf{F}_d^t]^{-1} \mathbf{B}^t, \quad (15)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Поскольку F_c^t и F_d^t постоянные и не зависящие от z матрицы, то в результате обратного z -преобразования (14) получим

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{F}_c^t \mathbf{w}(n) + \mathbf{F}_d^t \mathbf{w}(n-1) + \mathbf{B}^t \mathbf{x}(n). \quad (16a)$$

В (6б) подразумевается также, что

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}^t \mathbf{w}(n). \quad (16б)$$

Выражения (16) могут, конечно, быть записаны прямо из графа или обратно, можно построить граф непосредственно из системы уравнений.

Пример.

В качестве примера рассмотрим систему первого порядка, направленный сигнальный граф которой представлен на рис. 1. Этому графу соответствует система уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(n-1) \\ w_2(n-1) \\ w_3(n-1) \\ w_4(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \|x(n)\|; \\ y(n) &= \|0 \ 0 \ 1 \ 0\| \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \\ w_3(n) \\ w_4(n) \end{bmatrix} = w_3(n). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Очевидно, что вид матриц F_c^t и F_d^t зависит от порядка расположения уравнений или, что то же самое, порядка нумерации узлов. На рис. 2 показан граф рис. 1 с узловыми переменными, пронумерованными в другом порядке.

Рисунок 1. Направленный сигнальный граф системы первого порядка, соответствующий выражению (17)

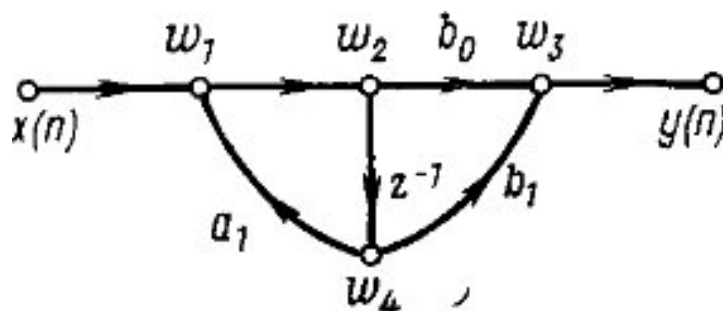
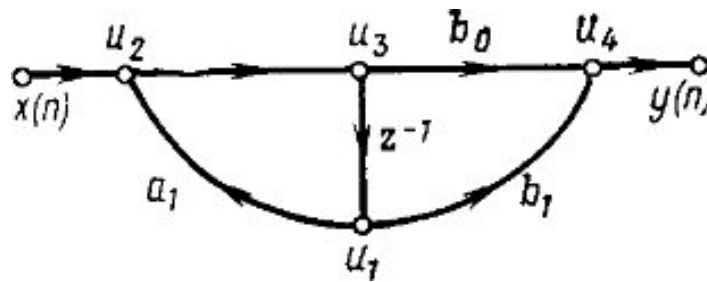


Рисунок 2. Направленный граф уеи рис. 1 с измененной нумерацией узлов



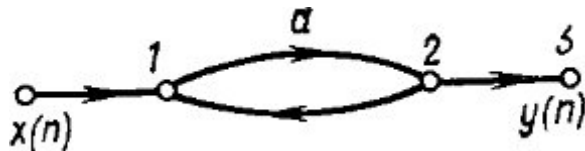
Для этого графа можно записать следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \\ u_3(n-1) \\ u_4(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \|x(n)\|; \\ y(n) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{bmatrix} = u_4(n). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из анализа графа рис. 1 или, что то же самое, уравнений (17) очевидно, что узловые переменные не могут вырабатываться последовательно, т.е. сначала ω_1 , затем ω_2 и т.д. Так, например, величина ω_4 необходима для вычисления ω_1 . С другой стороны, тот же самый граф, но с нумерацией узлов рис. 2 может быть вычислен последовательным образом.

В некоторых случаях не существует способов переупорядочения узлов в графе для того, чтобы вырабатывать узловые переменные в последовательном порядке. Граф такого вида считается **невычислимым**. Простой пример невычислимого графа показан на рис.3, где все ветви имеют постоянную передачу.

Рисунок 3. Пример невычислимого направленного графа



Необходимо подчеркнуть, что случай, когда граф оказывается невычислимым, не означает, что система уравнений, представляющая такой граф, не может быть решена. Это значит, что они не могут быть решены непосредственно для каждой узловой переменной в последовательном порядке.

Из (18), соответствующих графу рис. 2, следует, что в матрице F_c^t нулевыми элементами являются все элементы главной диагонали и все элементы, стоящие выше нее. Этого не выполняется в уравнениях (17), соответствующих графу рис.1. Можно показать, что необходимым и достаточным условием вычислимости графа является возможность пронумеровать узлы так, чтобы в матрице F_c^t были нулевыми все элементы главной диагонали и все элементы, стоящие выше нее. Также может быть показано, что эквивалентно необходимым и достаточным условием вычислимости графа является то, чтобы в графе не было петель с ветвями, не имеющими задержки. В графе рис. 3, например, есть петля, не содержащая задержки, и, следовательно, такой граф является невычислимым.

Система уравнений (18) может быть получена из (17) путем замены узловых переменных. В матричной записи это выполняется путем линейного преобразования вектора $w(n)$ в вектор $u(n)$, т.е.

$$u(n) = Pw(n), \quad (19)$$

где P – невырожденная $N \times N$ постоянная матрица.

В предыдущем примере эта матрица имела вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В более общем случае, если P – любая невырожденная матрица, то можно записать

$$w(n) = P^{-1} u(n) \quad (21)$$

И, подставив это выражение в (16), получить

$$\left. \begin{aligned} u(n) &= PF_c^t P^{-1} u(n) + PF_d^t P^{-1} u(n-1) + PB^t x(n); \\ y(n) &= C^t P^{-1} u(n). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Уравнения (22) записаны в той же форме, что и уравнения (16), но соответствуют другому графу или другой схеме цепи. Таким образом, существует множество способов построения цепи с одной и той же передаточной функцией.

В (16) текущие значения узловых переменных выражались через текущие и предшествовавшие величины, т.е. $\omega(n)$ формируется с помощью $\omega(n)$ и $\omega(n-1)$. Иногда удобно строить цепи таким образом, чтобы $\omega(n)$ выражались только через значения предшествовавших величин узловых переменных и текущих значений входного сигнала. Это соответствует

нулевому значению матрицы F_c^t в (16). Если использована такая форма выражения величин в уравнениях цепи, то узловой вектор $w(n_1)$ для любого момента времени n_1 будет определяться узловым вектором $w(n_0)$ в момент времени n_0 и вектором входного сигнала $s(n)$ для $n_0 \leq n \leq n_1$. Такой подход к представлению цепи эквивалентен представлению ее методом переменных состояний, хотя в нашей формулировке число состояний (узлов) оказывается, как правило, больше, чем число существенных переменных состояний, необходимых для представления цепи. Представление цепи методом переменных состояний этого типа может быть получено из представления цепи в виде соотношений (16). В частности, выражение (16а) можно записать как

$$[I - F_c^t] w(n) = F_d^t w(n-1) + B^t x(n).$$

Предполагая, что матрица $(I - F_c^t)$ является невырожденной, можно получить решение для $w(n)$ в виде

$$w(n) = [I - F_c^t]^{-1} F_d^t w(n-1) + [I - F_c^t]^{-1} B^t x(n).$$

Введя обозначения

$$D = [I - F_c^t]^{-1} B^t \quad (23a)$$

и

$$A = [I - F_c^t]^{-1} F_d^t, \quad (23b)$$

получим матричное представление величин

$$w(n) = A w(n-1) + D x(n) \quad (24a)$$

и

$$y(n) = C^t w(n). \quad (24b)$$

Можно показать, что если система является вычислимой, то матрица $(I - F_c^t)$ является невырожденной. Таким образом, можно найти матричное представление в форме соотношений (24) для любой вычислимой системы.

Отметим, что преобразование узловых переменных согласно (21) соответствует преобразованию направленного графа, т.е. это изменяет его структуру, сохраняя в то же время соотношение между входом и выходом. Поскольку существует много преобразований типа (21), то имеется и много способов построения цепи, имеющих одну и ту же передаточную функцию. Однако на практике наибольшее распространение нашли лишь некоторые из них.

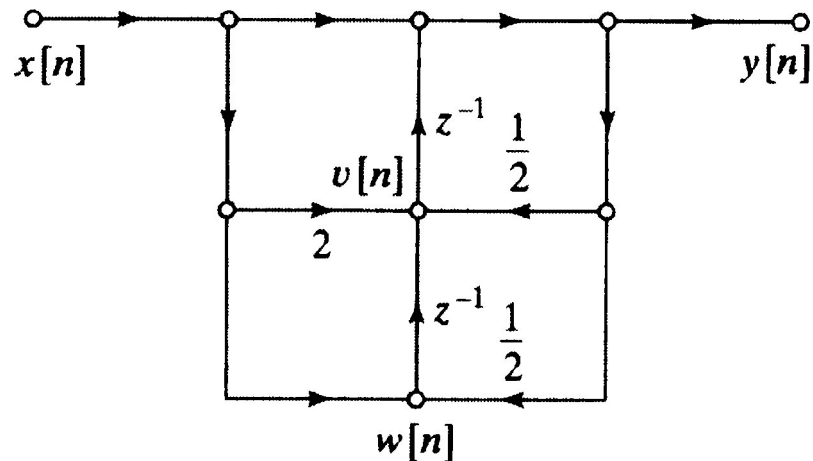
Задания для самостоятельного решения.

1.

Рассмотрите сигнальный потоковый граф из рис. 4

- Используя указанные обозначения узловых переменных, выпишите систему разностных уравнений, представленную этой сетью.
- Нарисуйте эквивалентный потоковый граф, изображающий каскад двух подсистем первого порядка.
- Является ли данная система устойчивой? Ответ обоснуйте.

Рисунок 4.



2.

Рассмотрите детерминированную ЛС-систему S с импульсной характеристикой $h(n)$ и характеристической функцией вида

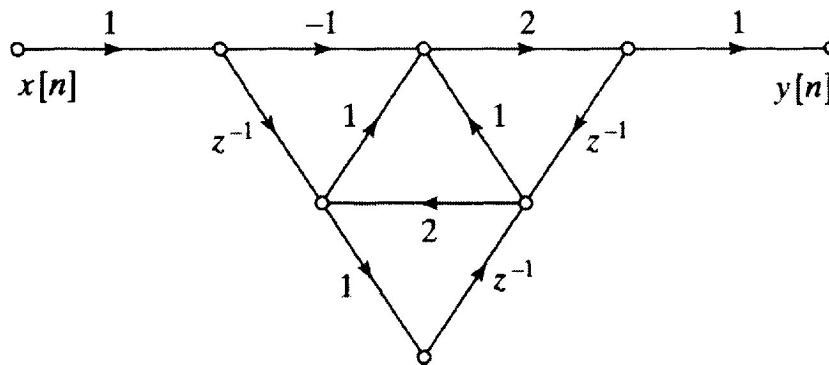
$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}.$$

- Нарисуйте прямую форму потокового графа системы S .
- Изобразите транспонированную форму графа из предыдущего пункта задачи.

3.

Выпишите разностное уравнение, характеризующее ЛС-систему, реализованную потоковым графом из рис. 5.

Рисунок 5.



4.

Начертите сигнальный потоковый граф в прямой форме I , реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

5.

Начертите сигнальный потоковый граф в прямой форме II , реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

6.

Начертите сигнальный потоковый граф в транспонированной прямой форме II , реализующий ЛС-систему с характеристической функцией

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- Торокин А.А. Инженерно-технической защита информации. – М.: «Гелиос АРВ», 2005.
- Конахович Г.Ф. и др. Защита информации в телекоммуникационных системах. – К.: «МК-Пресс», 2005.
- Лагутин В.С., Петраков А.В. Утечка и защита информации в телефонных каналах. – М.: Энергоатомиздат, 1996.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Рекомендуемая литература

Основная литература:

- 1 Литюк, В. И. Методы цифровой многопроцессорной обработки ансамблей радиосигналов : монография / В.И. Литюк, Л.В. Литюк. - Москва : СОЛОН- ПРЕСС, 2009. - 590 с. - (Библиотека студента). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 5-98003-303-3

2 Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р Шафер ; пер. С. Ф. Боев. - 3-е изд., испр. - Москва : Техносфера, 2012. - 1048 с. - (Мир радиоэлектроники). - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233730>

Дополнительная литература:

1. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов : учебное пособие / С.В. Умняшкин. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Техносфера, 2012. - 368 с. - (Мир цифровой обработки). - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733>

Методическая литература:

1. Методические указания по выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов».

2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов».

Интернет-ресурсы:

1. www.intuit.ru – национальный открытый университет «ИНТУИТ»;
2. www.window.edu.ru –единое окно доступа к образовательным ресурсам;
3. www.citforum.ru – сервер информационных технологий.
4. <http://catalog.ncfu.ru/catalog/ncfu-> автоматизированная информационно-библиотечная система. «Фолиант»
5. <http://www.biblioclub.ru> - ЭБС «Университетская библиотека online.

Программное обеспечение:

1	Альт Рабочая станция 10
2	Альт Рабочая станция К
3	Альт «Сервер»
4	Пакет офисных программ - Р7-Офис

Материально-техническое обеспечение

1. Лабораторные и практические занятия проводятся в компьютерных классах, в которых установлено вышеперечисленное программное обеспечение.
2. Лекционный курс проводится в аудиториях, оснащенных проектором.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ**

ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ»

для направления подготовки **10.03.01 Информационная безопасность**
направленность (профиль) **Безопасность компьютерных систем**

Пятигорск, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

<u>1. Общие положения</u>	90
<u>2. Цель и задачи самостоятельной работы</u>	91
<u>3. Технологическая карта самостоятельной работы студента</u>	91
<u>4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом</u>	91
<u>4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой</u>	92
<u>4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям</u>	93
<u>4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний</u>	94
<u>4.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, рефератов, эссе, научных статей и т.д.)</u>	94
<u>4.5. Методические рекомендации по подготовке к зачетам</u>	96
<u>Список литературы для выполнения СРС</u>	97

1. Общие положения

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин;
- выполнение выпускной квалификационной работы и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

2.Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование универсальных компетенций.

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- ~ систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- ~ углубление и расширение теоретических знаний;
- ~ формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- ~ развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- ~ формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- ~ развитие исследовательских умений;
- ~ использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельной работы и лабораторных занятий.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
3 семестр					
ПК-3(ИД-1ИД-2ИД-3)	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование	29,88	3,32	33,2
ПК-3(ИД-1ИД-2ИД-3)	Подготовка к лабораторным занятиям	Собеседование	9,72	1,08	10,8
ПК-3(ИД-1ИД-2ИД-3)	Подготовка доклада	Доклад	9	1	10
Итого за 3 семестр			48,6	5,4	54
Итого			48,6	5,4	54

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того, насколько осознанно читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста**:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

2. Выделите главное, составьте план.

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение отвечать на вопросы для собеседования.

Вопросы для собеседования.

Базовый уровень

Тема 1. 1. Общие сведения о дискретных сигналах

Тема 2. 1. Операции над дискретными последовательностями

Тема 3. 1. Доступ персонала к конфиденциальным сведениям 2. Доступ к персональному компьютеру, серверу или рабочей станции

Тема 4. 1. Дискретные сигналы, их представление в частотной области.

Тема 5. 1. Охарактеризуйте понятие «сигналы».

Тема 6. 1. Дискретизация методом прямого z- преобразования.

Тема 7. 1. Представление последовательностей конечной длины дискретным рядом Фурье.

Тема 8. 1. Реализация двумерной линейной свертки последовательностей с помощью круговой свертки.

Тема 9. 1. Представление структур фильтров в виде сигнальных графов.

Повышенный уровень

Тема 1. 1. Общие сведения о линейных системах.

Тема 2. 1. Схемы инвариантных к сдвигу линейные систем

Тема 3. 1. Математические основы цифровой обработки сигналов

Тема 4. 1. Дискретные сигналы, их представление в импульсной области.

Тема 5. 1. Охарактеризуйте линейные системы.

Тема 6. 1. Дискретизация методом обратного z- преобразования.

Тема 7. 1. Дискретное преобразование Фурье для свертки дискретных последовательностей.

Тема 8. 1. Вычисление свертки двух последовательностей дискретным преобразованием Фурье.

Тема 9. 1. Представление структур фильтров в виде матриц цифровых цепей.

4.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, рефератов, эссе, научных статей и т.д.)

Перед тем, как приступить к написанию научного текста, важно разобраться, какова истинная цель вашего научного текста - это поможет вам разумно распределить свои силы и время.

Во-первых, сначала нужно определиться с идеей научного текста, а для этого необходимо научиться либо относиться к разным явлениям и фактам несколько критически (своя идея – как иная точка зрения), либо научиться увлекаться какими-то известными идеями, которые нуждаются в доработке (идея – как оптимистическая позиция и направленность на дальнейшее совершенствование уже известного). Во-вторых, научиться организовывать свое время.

Писать следует ясно и понятно, стараясь основные положения формулировать четко и недвусмысленно (чтобы и самому понятно было), а также стремясь структурировать свой текст.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют студенту написать работу.

Рабочий вариант текста доклада предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление.

Структура доклада:

Введение (не более 3-4 страниц). Во введении необходимо обосновать выбор темы, ее актуальность, очертить область исследования, объект исследования, основные цели и задачи исследования.

Основная часть состоит из 2-3 разделов. В них раскрывается суть исследуемой проблемы, проводится обзор мировой литературы и источников Интернет по предмету исследования, в котором дается характеристика степени разработанности проблемы и авторская аналитическая оценка основных теоретических подходов к ее решению. Изложение материала не должно ограничиваться лишь описательным подходом к раскрытию выбранной темы. Оно также должно содержать собственное видение рассматриваемой проблемы и изложение собственной точки зрения на возможные пути ее решения.

Заключение (1-2 страницы). В заключении кратко излагаются достигнутые при изучении проблемы цели, перспективы развития исследуемого вопроса

Список использованной литературы (не меньше 10 источников), в алфавитном порядке, оформленный в соответствии с принятыми правилами. В список использованной литературы рекомендуется включать работы отечественных и зарубежных авторов, в том числе статьи, опубликованные в научных журналах в течение последних 3-х лет и ссылки на ресурсы сети Интернет.

Приложение (при необходимости).

Требования к оформлению:

- ~ текст с одной стороны листа;
- ~ шрифт Times New Roman;
- ~ кегль шрифта 14;
- ~ межстрочное расстояние 1,5;
- ~ поля: сверху 2,5 см, снизу – 2,5 см, слева - 3 см, справа 1,5 см;
- ~ реферат должен быть представлен в сброшюрованном виде.

Порядок защиты доклада:

На защиту доклада отводится 5-7 минут времени, в ходе которого студент должен показать свободное владение материалом по заявленной теме. При защите доклада приветствуется использование мультимедиа-презентации.

Доклад оценивается по следующим критериям: соблюдение требований к его оформлению; необходимость и достаточность для раскрытия темы приведенной в тексте доклада информации; умение студента свободно излагать основные идеи, отраженные в докладе; способность студента понять суть задаваемых преподавателем и сокурсниками вопросов и сформулировать точные ответы на них.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если в докладе студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует для написания доклада современные научные материалы; анализирует полученную информацию; проявляет самостоятельность при написании доклада.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если качество выполнения доклада достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопросы по теме доклада.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если материал доклада излагается частично, но пробелы не носят существенного характера, студент допускает неточности и ошибки при защите доклада, дает недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не подготовил доклад или допустил существенные ошибки. Студент неуверенно излагает материал доклада, не отвечает на вопросы преподавателя.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

4.5. Методические рекомендации по подготовке к зачетам

Процедура зачета как отдельное контрольное мероприятие не проводится, оценивание знаний обучающегося происходит по результатам текущего контроля.

Зачет выставляется по результатам работы в семестре, при сдаче всех контрольных точек, предусмотренных текущим контролем успеваемости. Если по итогам семестра обучающийся имеет от 33 до 60 баллов, ему ставится отметка «зачтено». Обучающемуся, имеющему по итогам семестра менее 33 баллов, ставится отметка «не зачтено».

Количество баллов за зачет (Sзач) при различных рейтинговых баллах по дисциплине по результатам работы в семестре

Рейтинговый балл по дисциплине по результатам работы в семестре ($R_{сем}$)	Количество баллов за зачет ($S_{зач}$)
$50 \leq R_{сем} \leq 60$	40
$39 \leq R_{сем} < 50$	35
$33 \leq R_{сем} < 39$	27
$R_{сем} < 33$	0

Контроль самостоятельной работы студентов

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем в аудитории.

Предусмотрены следующие виды контроля: собеседование, оценка выполнения доклада и его презентации.

Подробные критерии оценивания компетенций приведены в Фонде оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Список литературы для выполнения СРС

Основная литература:

- 1 Литюк, В. И. Методы цифровой многопроцессорной обработки ансамблей радиосигналов : монография / В.И. Литюк, Л.В. Литюк. - Москва : СОЛОН- ПРЕСС, 2009. - 590 с. - (Библиотека студента). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 5-98003-303-3
- 2 Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р Шафер ; пер. С. Ф. Боев. - 3-е изд., испр. - Москва : Техносфера, 2012. - 1048 с. - (Мир радиоэлектроники). - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233730>

Дополнительная литература:

1. Умняшкин, С. В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов : учебное пособие / С.В. Умняшкин. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Техносфера, 2012. - 368 с. - (Мир цифровой обработки). - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233733>

Методическая литература:

1. Методические указания по выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов».
2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы по дисциплине «Математические основы цифровой обработки сигналов».

Интернет-ресурсы:

1. www.intuit.ru – национальный открытый университет «ИНТУИТ»;
2. www.window.edu.ru –единое окно доступа к образовательным ресурсам;
3. www.citforum.ru – сервер информационных технологий.
4. <http://catalog.ncfu.ru/catalog/ncfu-> автоматизированная информационно-библиотечная система. «Фолиант»
5. <http://www.biblioclub.ru> - ЭБС «Университетская библиотека online.

Программное обеспечение:

1	Альт Рабочая станция 10
2	Альт Рабочая станция К
3	Альт «Сервер»
4	Пакет офисных программ - Р7-Офис

Материально-техническое обеспечение

1. Лабораторные и практические занятия проводятся в компьютерных классах, в которых установлено вышеперечисленное программное обеспечение.
2. Лекционный курс проводится в аудиториях, оснащенных проектором.