

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Фурсов Владимир Алексеевич

Должность: И.о. директора Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского

федерального университета

Дата подписания: 08.06.2026

Уникальный программный ключ:

1c378726a41fd0143ae5bccc8ba81860b00daa62

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Северо-Кавказский федеральный университет»

Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ

САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

по дисциплине ОП.02 ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Специальность 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт
автотранспортных средств

2026 г.

Методические указания для самостоятельных работ по дисциплине ОП 02 Техническая механика составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к подготовке выпуска для получения квалификации. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств

Пояснительная записка

Методические указания для выполнения самостоятельных работ по учебной дисциплине ОП.02 Техническая механика разработано для студентов 2 курса специальности 23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств. Методические указания адресованы студентам очной формы обучения.

Самостоятельные занятия проводятся с целью закрепления и более тщательной проработки лекционного материала по основным разделам дисциплины «Техническая механика».

В результате выполнения самостоятельных работ, предусмотренных программой по данной специальности, студент должен знать:

- виды машин и механизмов, принцип действия, кинематические и динамические характеристики;
- типы кинематических пар;
- типы соединений деталей и машин;
- основные сборочные единицы и детали;
- характер соединения деталей и сборочных единиц;
- принцип взаимозаменяемости;
- виды движений и преобразующие движения механизмы;
- виды передач; их устройство, назначение, преимущества и недостатки, условные обозначения на схемах;
- передаточное отношение и число;
- методику расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при различных видах деформации

уметь:

- читать кинематические схемы;
- проводить расчет и проектировать детали и сборочные единицы общего назначения;
- проводить сборочно-разборочные работы в соответствии с характером соединений деталей и сборочных единиц;
- определять напряжения в конструктивных элементах;
- производить расчеты элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость;
- определять передаточное отношение.

2. ТРЕБОВАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

1. Студент должен для выполнения самостоятельной работы подготовленным к выполнению работы.

2. Каждый студент после проведения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.

3. Отчет о проделанной работе следует выполнять в журнале самостоятельных работ, выполненном на листах формата А4 с одной стороны листа.

Содержание отчета указано в описании самостоятельной работы.

4. Таблицы и рисунки следует выполнять с помощью чертежных инструментов (линейки, циркуля, и т.д.) карандашом с соблюдением ЕСКД.

5. В заголовках граф таблиц обязательно приводить буквенные обозначения величин в соответствии с ЕСКД.

6. Расчет следует проводить с точностью до двух значащих цифр.

7. Исправления выполняются на обратной стороне листа отчета. При мелких исправлениях неправильное слово (буква, число и т.п.) аккуратно зачеркивают и над ним пишут правильное пропущенное слово (буква, число).

8. Вспомогательные расчеты можно выполнять на отдельных листках, а при необходимости на листах отчета.

9. Если студент не выполнил самостоятельную работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.

10. Оценку по самостоятельной работе студент получает, с учетом срока выполнения работы, если:

- расчеты выполнены правильно и полном объеме;
- сделан анализ проделанной работы и вывод по результатам работы;
- студент может пояснить выполнение любого этапа работы;
- отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнению работы.

Оценка по самостоятельной работе студент получает при условии выполнения всех предусмотренных программой работ после сдачи отчетов по работам при удовлетворительных оценках за опросы и контрольные вопросы во время практических занятий.

3.МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

План-график выполнения СРС

№	Наименование разделов и тем дисциплины, их краткое содержание; вид самостоятельной работы	Форма контроля	Зачетные единицы (часы)
	3 семестр		
1.	Раздел 1. Тема 1.2 Пара сил. Плоская система произвольно расположенных сил.	<i>собеседование</i>	2
2.	Раздел 1. Тема 1.4 Основные понятия кинематики. Определение скорости и ускорения точки	<i>собеседование</i>	2
3.	Раздел 1. Тема 1.5 Движения твердого тела	<i>собеседование</i>	2

4.	Раздел 2. Тема 2.1 Задачи сопротивления материалов. Внутренние силы. Метод сечений	<i>собеседование</i>	2
5.	Раздел 2. Тема 2.2 Виды шарниров. Реакция связей.	<i>собеседование</i>	2
6.	Раздел 2. Тема 2.3 Виды нагружений. Виды напряжений.	<i>собеседование</i>	2
7.	Раздел 2. Тема 2.4 Растяжение и сжатие.	<i>собеседование</i>	2
8.	Раздел 2 Тема 2.5 Нормальные силы и напряжения в поперечном сечении бруса	<i>собеседование</i>	2
	Итого за 3 семестр		16
9	Раздел 3. Детали машин Тема 3.1 Основные принципы проектирования деталей машин.	<i>собеседование</i>	2
10	Раздел 3. Детали машин Тема 3.2 Разъемные и неразъемные соединения деталей	<i>собеседование</i>	2
11	Раздел 3. Детали машин Тема 3.3 Общие сведения о механических передачах. Фрикционные передачи	<i>собеседование</i>	4
12	Раздел 3. Детали машин Тема 3.4 Ременные передачи	<i>собеседование</i>	2
13	Раздел 3. Детали машин Тема 3.5 Зубчатые передачи	<i>собеседование</i>	4
14	Раздел 3. Детали машин Тема 3.8 Цепные, волновые и планетарные передачи	<i>собеседование</i>	2
	Итого за 4 семестр		16
	Итого		32

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Тема 1.2 Пара сил. Плоская система произвольно расположенных сил.

2 часа

Этот материал подготовлен для самостоятельной работы по разделу «Техническая механика» (Статика). Здесь собраны ключевые определения, расчетные формулы и алгоритмы решения задач.

1. Пара сил

Пара сил — это система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на одно и то же тело.

- **Равнодействующая:** Пара сил не имеет равнодействующей ($F=0$), она не может сдвинуть тело линейно, а только вращает его.

- **Момент пары сил ($M=F \cdot a$):** Произведение модуля одной из сил на плечо пары (кратчайшее расстояние между линиями действия сил).

- **Свойство:** Момент пары сил постоянен относительно любой точки плоскости.

2. Момент силы относительно точки

Это величина, характеризующая вращательный эффект силы.

Где:

- — модуль силы;
- — плечо (перпендикуляр из точки на линию действия силы).
- **Знак:** Обычно «
- » — против часовой стрелки, «
- » — по часовой.

3. Плоская система произвольно расположенных сил

Это система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и не пересекаются в одной точке.

Главный вектор (

); Геометрическая сумма всех сил системы.

Главный момент); Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно выбранного центра.

Условия равновесия (три формы):

Самая распространенная форма (основная) гласит, что для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на две оси и сумма их моментов относительно любой точки были равны нулю:

Цель: провести графическое и аналитическое определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил.

Время выполнения: 90 минут.

Для выполнения работы необходимо знать:

Плоская система сходящихся сил – это силы, лежащие в одной плоскости, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующую силу для этой системы определяют по формуле:

$$F_{\Sigma}^2 = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}, \quad (1.1)$$

где

$F_{\Sigma x} = \sum F_{ix}$ - сумма проекций всех сил на ось «X»;

$F_{\Sigma y} = \sum F_{iy}$ - сумма проекций всех сил на ось «Y».

Для равновесия данной системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на две перпендикулярных оси.

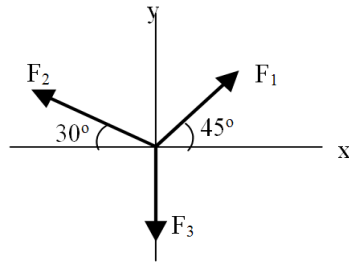
Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Примеры решения задач:

Пример 1

Определить равнодействующую силу графическим и аналитическим способами.



Дано:
 $F_1 = 44 \text{ кН}$
 $F_2 = 22 \text{ кН}$
 $F_3 = 11 \text{ кН}$

Определить: F_Σ

Рисунок 1.1- Расчетная схема

Решение:

1.1 Аналитический способ.

Равнодействующая системы сходящихся сил определяется по формуле:

$$F_\Sigma = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (1.3)$$

где

X – сумма проекций всех сил на ось x ,

Y – сумма проекций всех сил на ось y ;

тогда

$$X = F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 44 \cdot 0,707 - 22 \cdot 0,866 = 12,056 \text{ (кН)};$$

$$Y = F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 30^\circ - F_3 = 44 \cdot 0,707 + 22 \cdot 0,5 - 11 = 31,108 \text{ (кН)};$$

$$F_\Sigma = \sqrt{12,056^2 + 31,108^2} = 33,36 \text{ (кН)}$$

1.2 Графический способ.

Выбирается масштаб сил $M_F = 11 \text{ кН/см}$, тогда длина сил $F_1 = 4 \text{ см}$, $F_2 = 2 \text{ см}$, $F_3 = 1 \text{ см}$.
 Строится силовой многоугольник (рис.1) $F_\Sigma = 3 \text{ см} \cdot 11 \text{ кН/см} = 33 \text{ кН}$.

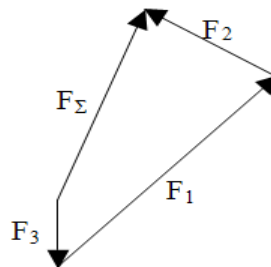
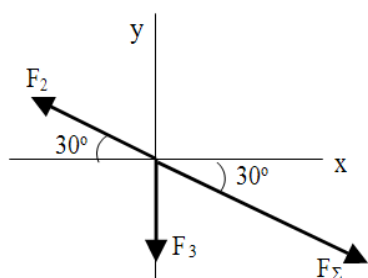


Рисунок 1.2 – Силовой многоугольник к задаче 1

Ответ: 33кН.

Пример 2

Определить силу F_1 графическим и аналитическим способом.



Дано:

$$F_{\Sigma} = 60 \text{ кН}$$

$$F_2 = 15 \text{ кН}$$

$$F_3 = 30 \text{ кН}$$

Определить: F_1

Рисунок 1.3 – Расчетная схема

Решение:

1.3 Аналитический способ.

Определим проекции равнодействующей на оси x , y :

$$X = F_{\Sigma} \cos 30^\circ \quad \text{или} \quad X = -F_2 \cos 30^\circ + F_{1x},$$

тогда

$$F_{\Sigma} \cos 30^\circ = -F_2 \cos 30^\circ + F_{1x},$$

отсюда

$$F_{1x} = F_{\Sigma} \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ = 60 \cdot 0,866 + 15 \cdot 0,866 = 65 \text{ (кН)};$$

$$Y = -F_{\Sigma} \sin 30^\circ \quad \text{или} \quad Y = -F_2 \sin 30^\circ + F_{1y} - F_3,$$

тогда

$$-F_{\Sigma} \sin 30^\circ = -F_2 \sin 30^\circ + F_{1y} - F_3,$$

отсюда

$$F_{1y} = -F_{\Sigma} \sin 30^\circ + F_2 \sin 30^\circ + F_3 = -60 \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,5 + 30 = -7,5 \text{ (кН)};$$

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{65^2 + 7,5^2} = 65,4 \text{ (кН)}$$

Угол наклона силы F_1 к оси x :

$$\cos \alpha = F_{1x} / F_1 = 65 / 65,4 = 0,993, \quad \text{тогда} \quad \alpha = 7^\circ$$

1.4 Графический способ

Выбирается масштаб построения сил $M_F = 15 \text{ кН/см}$, тогда длина сил $F_{\Sigma} = 4 \text{ см}$, $F_2 = 1 \text{ см}$, $F_3 = 2 \text{ см}$.

Строится силовой многоугольник:

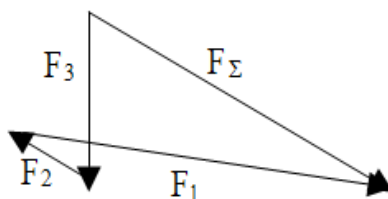


Рисунок 1.4 – Силовой многоугольник к задаче 2

Величина $F_1 = 4,4 \text{ см}$, тогда $F_1 = 4,4 \cdot 15 \text{ кН/см} = 66 \text{ кН}$

Ответ: $F_1 = 65,4 \text{ кН}$.

Индивидуальные задания для выполнения практической работы №1 приведены в таблицах 1.1 и 1.2. Работа состоит из 2-х задач.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Тема 1.4 Основные понятия кинематики. Определение скорости и ускорения точки 2 часа

Материал для самостоятельной работы по разделу «Кинематика» (раздел механики, изучающий движение тел без учета причин, вызывающих это движение).

1. Основные понятия

- **Механическое движение** — изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.
- **Траектория** — непрерывная линия, которую описывает точка при своем движении.
- **Пройденный путь** — длина участка траектории (скалярная величина).
- **Перемещение** — вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки.
- **Закон движения** — уравнение, устанавливающее положение точки в любой момент времени

1.1 Скорость точки.

Скорость - это векторная величина, характеризующая быстроту изменения пройденного точкой расстояния.

Определение скорости зависит от способа задания движения.

При векторном способе задания движение точки определяется ее радиус – вектором, который изменяется с течением времени по заданному закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$, при этом мгновенная скорость точки в любой момент времени равна первой производной от ее радиус - вектора по времени

$$\vec{v} = d\vec{r} / dt$$

При задании движения в декартовой системе координат положение точки определяется ее координатами, которые изменяются с течением времени согласно заданным уравнениям: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Мгновенная скорость при координатном способе задания движения определяется через составляющие скорости по осям координат и равна их геометрической сумме.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

Составляющие скорости по осям координат равны первой производной от соответствующей координаты точки.

$$v_x = dx/dt = \dot{x}; \quad v_y = dy/dt = \dot{y}; \quad v_z = dz/dt = \dot{z}$$

По известным проекциям скорости определяют ее модуль.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Направление вектора скорости определяют по направляющим косинусам.

$$\cos(Ox, v) = v_x / v, \quad \cos(Oy, v) = v_y / v,$$

$$\cos(Oz, v) = v_z / v.$$

При естественном способе задания движения положение точки по известной траектории определяется пройденным расстоянием согласно заданному закону ее движения по траектории $s = s(t)$. Этот способ полностью определяет скорость точки по величине и направлению. Алгебраическую скорость находят дифференцированием по времени заданного закона движения. Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории в данной точке.

$$v_\tau = ds/dt = \dot{s}$$

1.2. Ускорение точки.

Ускорение – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости движущейся точки.

Определение ускорения также зависит от способа задания движения.

При векторном способе задания движения ускорение точки определяется как первая производная скорости по времени.

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$$

При задании движения в декартовой системе координат мгновенное ускорение определяется через составляющие ускорения по осям координат и равно их геометрической сумме.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Составляющие ускорения по осям координат равны первой производной от соответствующей координаты точки.

$$a_x = dv_x/dt; \quad a_y = dv_y/dt; \quad a_z = dv_z/dt$$

По известным проекциям ускорения определяют его модуль.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Направление вектора ускорения определяют по направляющим косинусам.

$$\cos(Ox, a) = a_x / a, \quad \cos(Oy, a) = a_y / a,$$

$$\cos(Oz, a) = a_z / a.$$

При естественном способе задания движения ускорение точки определяется в проекциях по осям естественного трехгранника. Проекция ускорения на положительное направление касательной называется касательным ускорением.

$$a_\tau = (dv_\tau/dt) \tau = \dot{s} \cdot \tau;$$

Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине и направлено по касательной к траектории.

Проекция ускорения на главную нормаль называется нормальным ускорением. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению и направлено внутрь вогнутости траектории.

$$a_n = v^2 / \rho$$

Проекция ускорения на бинормаль, направленная по единичному вектору $\mathbf{b}$, равна нулю; следовательно, ускорение точки расположено в соприкасающейся плоскости траектории.

Т.к. касательная и главная нормаль взаимно перпендикулярны, модуль ускорения можно определить по формуле:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

Движение является ускоренным, если скорость и касательное ускорение одинаковы по знаку.

Движение является замедленным, если скорость и касательное ускорение имеют разные знаки.

2. Расчетно – графическая работа

по теме:

«Кинематика. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения».

В расчетно – графической работе требуется определить скорость и ускорение точки по заданным уравнениям ее движения.

2.1 Содержание работы.

1. Определить уравнение траектории движения точки и начертить ее.
2. Найти координаты точки в момент времени t и обозначить эту точку на траектории.
3. Найти проекции и модули векторов скорости $\vec{V}$ и ускорения точки $\vec{a}$ в момент времени t .
4. Построить из точки векторы скорости $\vec{V}$ и ускорения точки $\vec{a}$, соблюдая масштаб величин.
5. Построить векторы касательного $\vec{a}_{\tau}$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений точки и сделать вывод о темпе ее движения (ускоренное или замедленное).
6. Аналитически найти величины касательного $\vec{a}_{\tau}$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений точки, а также радиус кривизны траектории в данной точке.

2.2. Таблица исходных данных по вариантам.

исходных данных

Таблица

Номер вариант a	Уравнения движения		t с
	x = x(t), см	y = y(t), см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$2t^2 + 2$	$t/2$	1
3	$-t^2/3 + 3$	$t^2/3 - 1$	1
4	$4t$	$-4(t^2 + 1)$	2
5	$2t$	$-3t^2 + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 + 1$	$3t^2 - 3$	1
8	$7t^2 + 3$	$7t^2 - 6$	1
9	$-3t$	$3t^2 + 6$	2
10	$-4t$	$-2t^2$	1
11	$-5t^2 + 2$	$-3t$	1/2
12	$5t/6$	$-5t^2/36 + 5$	1
13	$5t^2/3$	$-5t^2/3$	1
14	$-2t$	$-2(t^2 - 1)$	2
15	$4t$	$-3t^2 + 3$	1

16	$-3t$	$4t^2 + 1$	$1/2$
17	$7t$	$-7t^2 - 1$	1
18	$1 + 3t^2$	$-3t$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$-2 - 6t^2$	$3 - 3t^2$	1
21	$6t^2 - 2$	t	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	$1/4$
23	$3 - 3t^2$	$4 - 3t^2$	1
24	$-4t/3$	$-4t^2$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8t + 2$	$-t^2 - 7$	1
27	$-3 - t^2/6$	$-t$	1
28	$-6t^2 + 3$	$-4t$	1
29	$5t^2 + 5$	$t + 3$	1
30	$t^2/3 - 1$	$-2t^2/3 + 3$	1
31	$3t^2 + 3$	$5t/3$	1
32	$3t$	$4t^2 + 1$	1,5
33	$5t$	$3t^2 + 3$	1
34	$-t^2 - 7$	$8t$	1
35	$2t$	$6t^2 - 2$	2
36	$2 - 4t^2$	$4t$	1
37	$5t$	$t^2/5 - 1$	5
38	$8t^2 - 1$	$2t$	1
39	$4t^2$	$8t$	1

2.3. Пример выполнения работы.

Движение точки задано уравнениями (x и y задано в см)

$$x = -4t^2 + 1$$

$$y = -3t$$

Определить скорость и ускорение точки М при $t = 1$ с.

Решение.

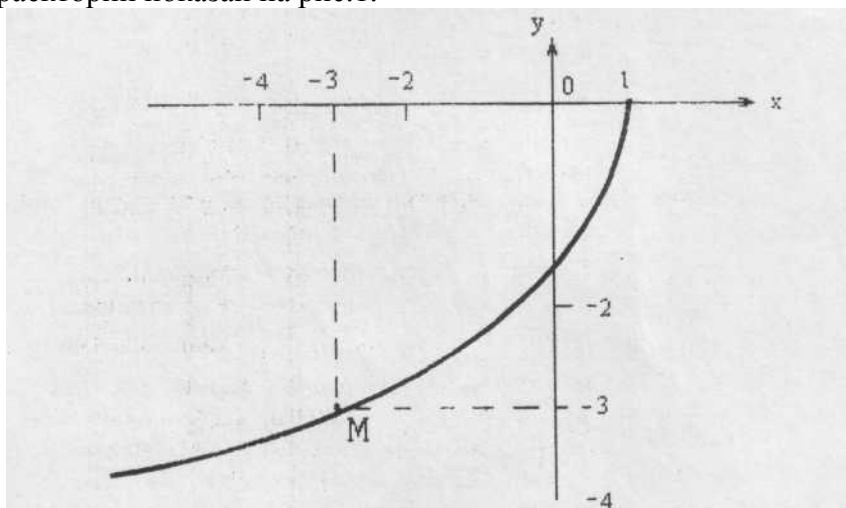
1. Определение уравнения траектории точки.

Из второго уравнения выразим время t через координату y и подставим в первое уравнение.

$$t = -y/3$$

$$x = -4y^2/9 + 1$$

Получили квадратичную зависимость координаты x от y , которая представляет собой уравнение параболы, симметричной оси x . Ветви параболы направлены в сторону отрицательных значений оси x (влево), а вершина находится в точке $(1, 0)$. График траектории показан на рис.1.



ординаты точки.

Рис. 1

$$x = -4 \cdot 1 + 1 = -3 \text{ (см);} \quad y = -3 \cdot 1 = -3 \text{ (см.)}$$

3. Скорость и ускорение точки.

3.1. Скорость точки.

Проекции скорости вычисляем как производные по времени от уравнений движения.

$$\begin{aligned} V_x = \dot{x} = -4 \cdot 2t = -8t & \quad \text{при } t = 1 \text{ с} & V_x = -8 \text{ см/с} \\ V_y = \dot{y} = -3 & \quad \text{при } t = 1 \text{ с} & V_y = -3 \text{ см/с;} \end{aligned}$$

$$\overline{V} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{64t^2 + 9} \quad \text{при } t = 1 \text{ с} \quad V = 8,54 \text{ см/с}$$

При графическом построении векторов V_x и V_y , составляющих вектор скорости $\overline{V}$, следует учесть, что отношение длин этих векторов равно

$$V_x / V_y = 8 / 3 = 2,66.$$

Те. вектор V_y рисуем параллельно оси Y произвольной длины из точки вниз, а вектор V_x - параллельно оси X влево в 2,66 раза больше.

3.2 Ускорение точки

Проекции ускорения вычисляем как производные по времени от проекций скорости

$$a_x = dv_x / dt = -8 \text{ см/с}^2 = \text{const}$$

$$a_y = dv_y / dt = 0$$

при всех значениях t ускорение точки равно $a = 8 \text{ см/с}^2$

Вектор ускорения имеет одну проекцию, поэтому изображаем его в точке произвольной длины параллельно оси X влево. (см. рис. 2)

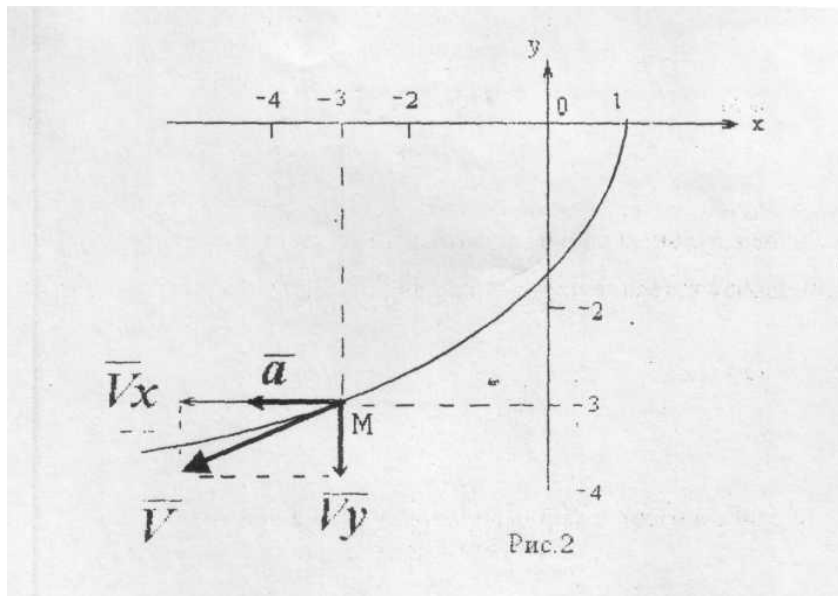


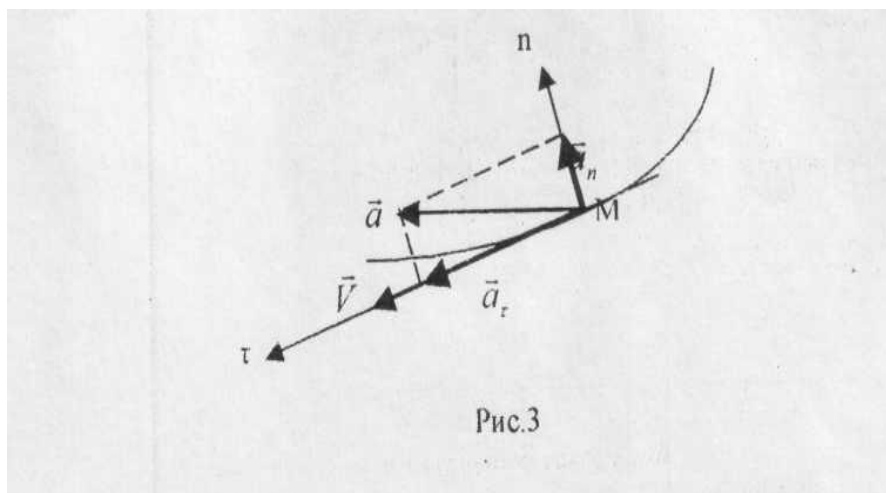
Рис.2

4. Построение касательного и нормального ускорений.

Проведем вдоль вектора скорости касательную к траектории движения точки. Перпендикулярно ей построим нормаль к траектории в заданной точке. Разложим вектор ускорения на две составляющих, опустив перпендикуляры на касательную и нормаль. (Рис. 3)

a_τ – касательное ускорение

a_n – нормальное ускорение.



Из чертежа (Рис. 3) видно, что вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости. Следовательно, движение точки является **ускоренным**.

5. Аналитическое определение величины касательного и нормального ускорений точки

Касательное ускорение определяется как производная от модуля скорости по времени.

$$a_t = dV/dt = 1/2 * [64t^2 + 9]^{-1/2} * 64 * 2t$$

при $t = 1$ с $a_t = 7,5$ см/с²

Нормальное ускорение определим, зная величину полного ускорения и касательного ускорения.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{64 - 51} = 2,8 \text{ см/с}^2$$

6. Определение радиуса кривизны траектории в данной точке

$$\rho = V^2/a_n = 73/2,8 = 26,1 \text{ см}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Тема 1.5 Движения твердого тела

2 часа

Для самостоятельной работы по теме «Движение твёрдого тела» можно использовать материал, включающий теоретические сведения и задачи, а также литературу, посвящённую этой теме.

Теоретические сведения

Некоторые понятия, которые можно включить в материал:

- **Абсолютно твёрдое тело** — тело, расстояния между двумя любыми точками которого остаются неизменными вне зависимости от действующих на тело сил.

- **Поступательное движение** — движение, при котором любая прямая, жёстко скреплённая с телом, остаётся во всё время движения параллельной своему первоначальному положению. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

- **Вращательное движение** (вращение тела вокруг неподвижной оси) — движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через эти точки (ось вращения). Точки, не лежащие на оси вращения, описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения и центры которых лежат на этой оси. **Плоское движение** — движение, при котором все точки тела

перемещаются в неподвижных параллельных между собой плоскостях. Частным случаем плоского движения является вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Задачи

Некоторые задачи, которые можно включить в материал:

- **Задача о двух шкивах, соединённых ременной передачей.** Ведущий шкив вращается с частотой $\nu_1 = 3000$ об/мин, ведомый шкив — с частотой $\nu_2 = 600$ об/мин. Ведомый шкив имеет диаметр $D_2 = 500$ мм. Какой диаметр D_1 у ведущего шкива?

- **Задача о колесе, радиус которого 40 см, катящемся по горизонтальной дороге со скоростью 2 м/с.** Определить скорости относительно дороги точек колеса, находящихся на концах его вертикального и горизонтального диаметров, а также ускорения этих точек.

- **Задача о катушке с намотанной на неё нитью,** которая может катиться по поверхности горизонтального стола без скольжения. С какой скоростью u_0 и в каком направлении будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью v ? Радиус внутренней части катушки — r , внешней — R .

При решении задач по этой теме важно обращать внимание на связь кинематических характеристик поступательного и вращательного движений: в одних случаях одинаковыми могут быть угловые скорости, в других — линейные скорости движения

-

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Тема 2.1 Задачи сопротивления материалов. Внутренние силы. Метод сечений

.2 часа

Внутри любого материала имеются внутренние межуатомные силы, наличие которых определяет способность тела воспринимать действующие на него внешние силы, сопротивляться разрушению, изменению формы и размеров. Приложение к телу внешней нагрузки вызывает изменение внутренних сил. В сопротивлении материалов изучаются дополнительные внутренние силы. В сопротивлении материалов они называются просто внутренними силами.

Внутренние силы – силы взаимодействия между отдельными элементами конструкций или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Чтобы численно установить величину внутренних сил пользуются методом сечений.

Метод сечений сводится к четырем действиям:

1.

Разрезают (мысленно) тело плоскостью I в том месте, где нужно определить внутренние силы (рис. 7);

2.

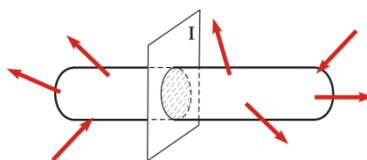


Рис. 7

1.

Отбрасывают любую отрезанную часть тела (желательно наиболее сложную), а ее действие на оставшуюся часть заменяют внутренними силами, чтобы оставшаяся исследуемая часть находилась в равновесии (рис.8);

2.

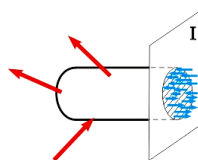


Рис. 8

1.

Приводят систему сил к одной точке (как правило, к центру тяжести сечения) и проецируют главный вектор и главный момент системы внутренних сил на нормаль к плоскости (ось X) и главные центральные оси сечения (Y и Z).

2.

Полученные силы (N , Q_y , Q_z) (рис. 9) и моменты (M_k , M_y , M_z) называют внутренними силовыми факторами в сечении

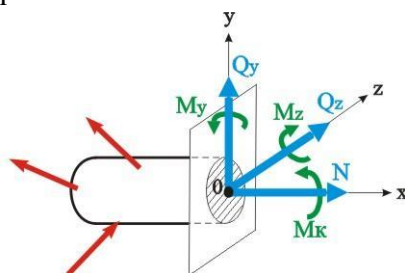


Рис. 9

Для внутренних силовых факторов приняты следующие названия:

N - продольная или осевая сила;

Q_y и Q_z - поперечные силы;

M_k - крутящий момент;

M_y и M_z - изгибающие моменты.

1.

Находят внутренние силовые факторы, составляя шесть уравнений равновесия статики для рассматриваемой части рассеченного тела.

2.

Напряжение

Если в сечении выделить бесконечно малую площадку dF и предположить, что внутренние силы, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению, то равнодействующая их dR будет проходить через центр тяжести элемента dF (рис. 10).

Проекциями dR на оси X , Y и Z будут элементарная продольная сила dN , и элементарные поперечные силы dQ_y и dQ_z .

Разделим эти элементарные силы на площадь dF , получим величины, называемые напряжениями в точке проведенного сечения.

$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dF},$$

где σ - нормальное напряжение; τ - касательное напряжение.

Напряжение – внутренняя сила, отнесенная к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения.

Напряжение измеряется в единицах напряжения - паскалях (Па) и кратных ему – (кПа, МПа)

$$1Pa = \frac{1H}{1M^2}$$

Иногда кроме нормальных и касательных напряжений рассматривают еще и полное напряжение

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}$$

Понятие «напряжение» играет очень важную роль в расчетах на прочность. Поэтому значительная часть курса сопротивления материалов отводится изучению способов вычисления напряжений σ и τ .

Растяжение и сжатие

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только продольная сила (растягивающая и сжимающая) а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

Продольные силы определяются с помощью метода сечений.

Пример

Пусть имеется ступенчатый стержень, нагруженный силами $P_1 = 2\text{кН}$, $P_2 = 3\text{кН}$ и $P_3 = 2\text{кН}$ вдоль оси стержня, показанного на рис. 11, а. Определить величину продольных сил.

Решение. Стержень может быть разделен на участки по местам приложения нагрузок и по местам изменения поперечного сечения.

Первый участок ограничен точками приложения сил P_1 и P_2 . Направим ось x вдоль оси участка вверх с началом координат в точке приложения силы P_1 (начало первого участка).

Мысленно рассечем первый участок поперечным сечением на расстоянии x_1 от начала первого участка. Причем координата x_1 может быть взята в интервале $0 \leq x_1 \leq a$, где a – длина первого участка.

Рассмотрим равновесие нижней части стержня, заменив действие верхней части на нижнюю часть стержня продольной силой N_1 , предварительно направив ее в сторону растяжения рассматриваемой части.

Из условия равновесия статики:

$$\sum F_x = 0; N_1 - P_1 = 0; N_1 = P_1 = 2, \text{ кН}$$

Положительный знак продольной силы говорит о том, что первый участок растянут.

Значение продольной силы не зависит от координаты x_1 , поэтому на всем участке значение продольной силы постоянно и равно N_1 .

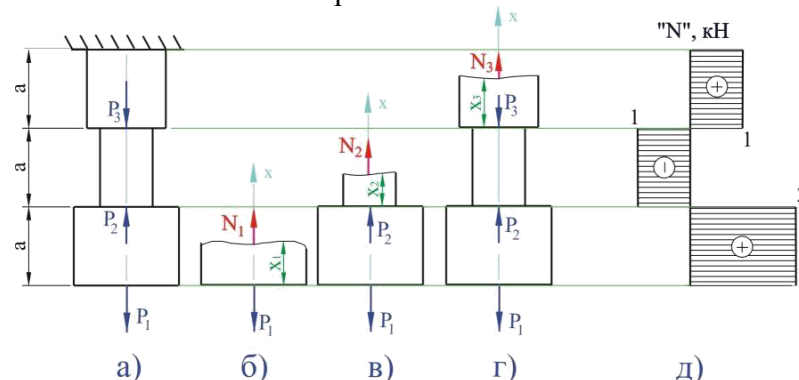


Рис. 11

Второй участок ограничен точками приложения сил P_2 и P_3 . Направим ось X вдоль оси участка вверх с началом координат в точке приложения силы P_2 (начало второго участка).

Мысленно рассечем второй участок поперечным сечением на расстоянии x_2 от начала второго участка. Причем координата x_2 может быть взята в интервале $0 \leq x_2 \leq a$, где a - длина второго участка.

Рассмотрим равновесие нижней части стержня, заменив действие верхней части на нижнюю часть стержня продольной силой N_2 , предварительно направив ее в сторону растяжения рассматриваемой части.

Из условия равновесия статики:

$$\sum F_x = 0; N_2 - P_1 + P_2 = 0;$$

$$N_2 = P_1 - P_2 = 2 - 3 = -1, \text{ кН}$$

Знак минус говорит о том, что второй участок сжат.

Аналогично для третьего участка :

$$2a \leq x_3 \leq 3a$$

$$\sum F_x = 0; N_3 - P_1 + P_2 - P_3 = 0;$$

$$N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 2 - 3 + 2 = 1, \text{ кН}$$

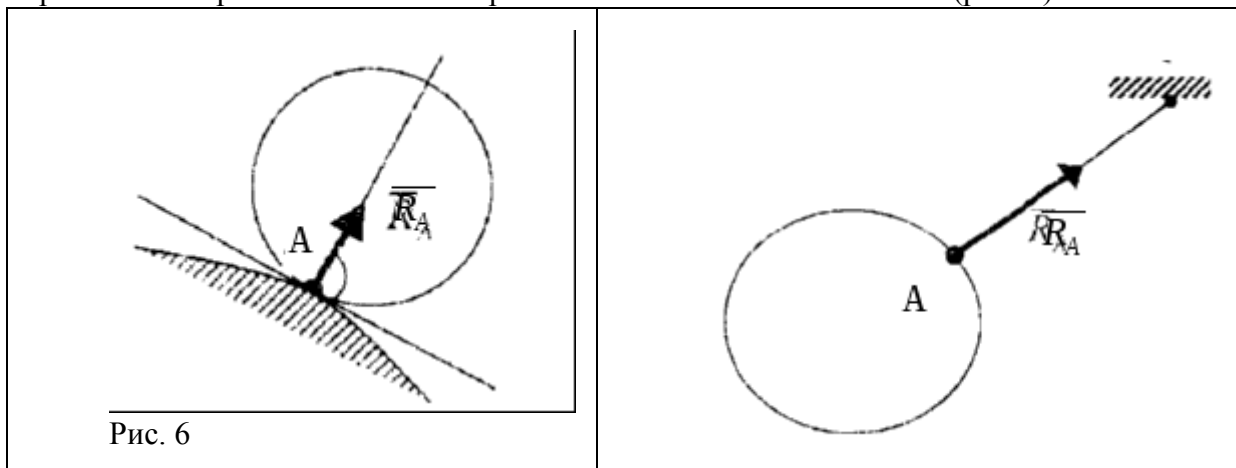
Полученные результаты для большей наглядности удобнее представить в виде графика (эпюры N), показывающего изменение продольной силы вдоль оси стержня. Для этого проводим нулевую (базовую) линию параллельно оси стержня, перпендикулярно которой будем в масштабе откладывать значения осевых усилий (рис.1.11, д). В одну сторону откладываем положительные значения, в другую - отрицательные. Эпюра заштриховывается перпендикулярно нулевой линии, а внутри эпюры ставится знак откладываемой величины. Рядом указываются значения откладываемых величин. Рядом с эпюрой в кавычках указывается название эпюры (« N ») и через запятую - единицы измерения (кН)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Тема 2.2 Виды шарниров. Реакция связей.

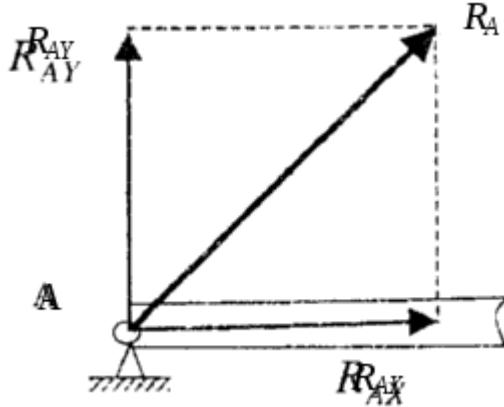
2 часа

1. Гладкая (без трения) опорная поверхность. Такая связь препятствует движению тела в одном направлении. Реакция $\vec{R}$ гладкой поверхности направлены всегда по общей нормали к поверхности тела и поверхности связи в их точке касания (рис. 6).



2. Гибкая связь. Реакции гибких связей всегда направлены вдоль самих связей к точке их подвеса (рис. 7).

3. Неподвижный цилиндрический шарнир (неподвижная шарнирная опора). Тело может только вращаться вокруг оси шарнира, перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 8).



Реакция R_A проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости. При решении задач целесообразно заменить ее составляющими R_{AX} и R_{AY} .

4. Подвижная шарнирная опора. Реакция такой опоры направлена по нормали к опорной поверхности (рис. 9).

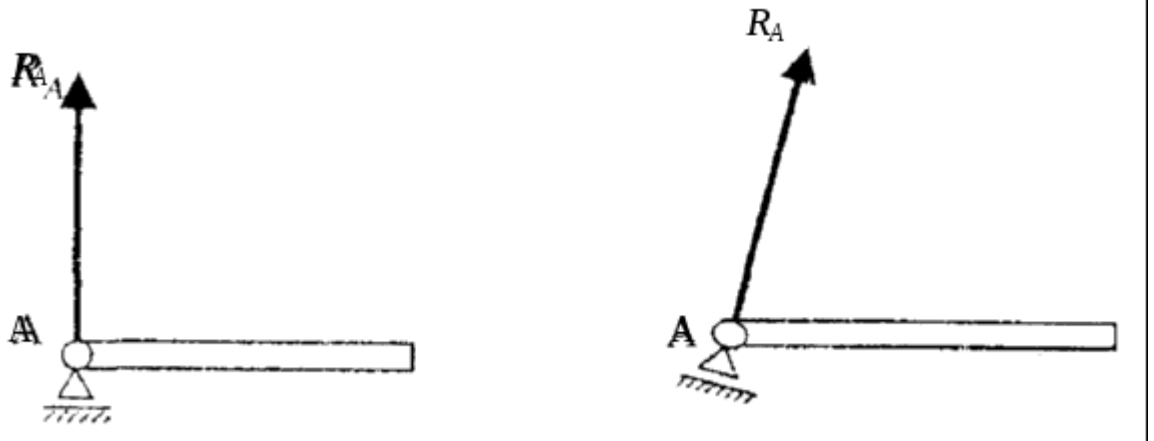


Рис. 9

5. Стержень. Стержень – прямолинейный невесомый элемент с двумя шарнирами на концах. При отсутствии нагрузки по его длине реакция стержня направлена вдоль его оси (рис. 10).

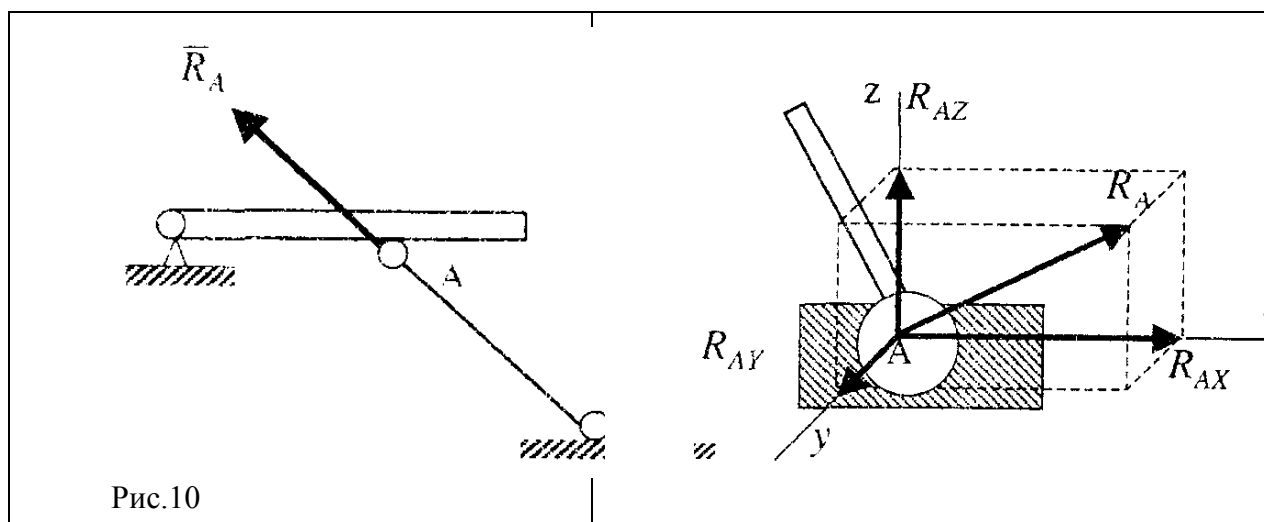


Рис.10

. Шаровой шарнир (рис. 11). Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать линейных перемещений в пространстве, при решении задач целесообразно заменить эту силу ее составляющими R_{AX} , R_{AY} , R_{AZ} .

7. Жесткая заделка (неподвижное защемление). Такая связь не допускает не только линейных перемещений, но и поворота тела (рис. 12).

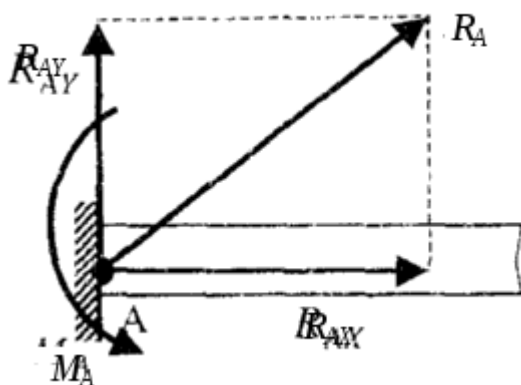


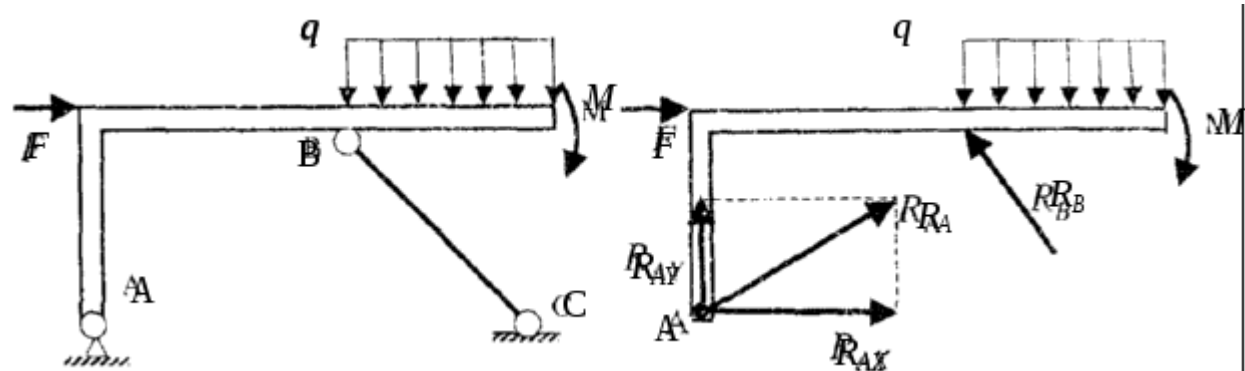
Рис. 12

Со стороны связи на тело действует реакция R_A и момент M_A (момент реакции заделки или реактивный момент). При решении задач рекомендуется силу R_A заменить ее составляющими R_{AX} и R_{AY} и момент M_A .

Равновесие несвободных тел изучается в статике на основании аксиомы связей:

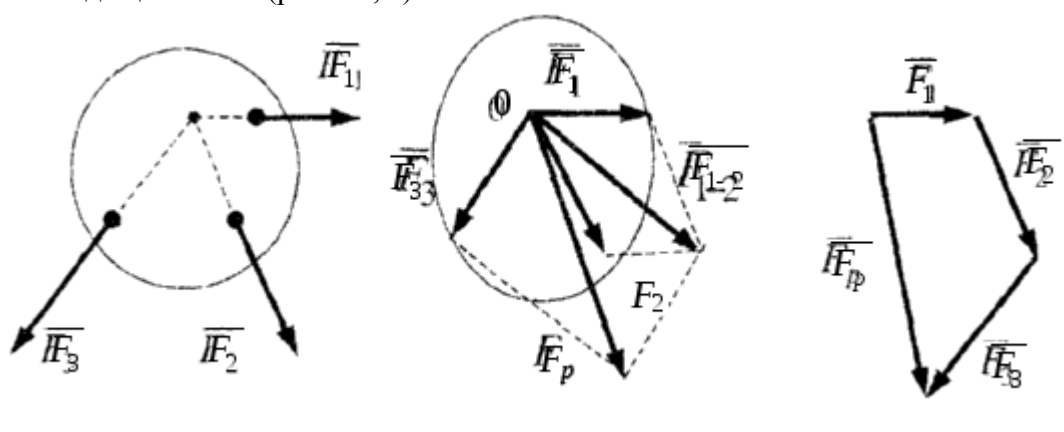
-всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

Например, элемент, для которого связями являются шарнирно-неподвижная опора A и стержень BC (рис. 13,а), можно рассматривать как свободное тело, находящееся в равновесии под действием заданных сил и реакций связей R_{AX} , R_{AY} и R_B (рис. 13,б). Значения этих реакций определяются из условий равновесия.



4. Плоская система сходящихся сил

Система си, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил (рис. 14,а.)



а) б) в)

Рис. 14

Продолжив линии действия заданных сил до пересечения, перенесем точки приложения сил в точку пересечения (рис. 14,б).

Используя последовательно правило параллелограмма, получим:

$$\overline{F_{1-2}} = \overline{F_1} + \overline{F_2}, \quad \overline{F_\delta} = \overline{F_{1-2}} + \overline{F_3} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}.$$

$$\overline{F_\delta} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \dots + \overline{F_n} = \sum_{i=1}^n \overline{F_i}$$

В общем случае (для n сил):

Таким образом, система сходящихся сил приводится к равнодействующей, равной их векторной сумме и проходящей через точку их пересечения.

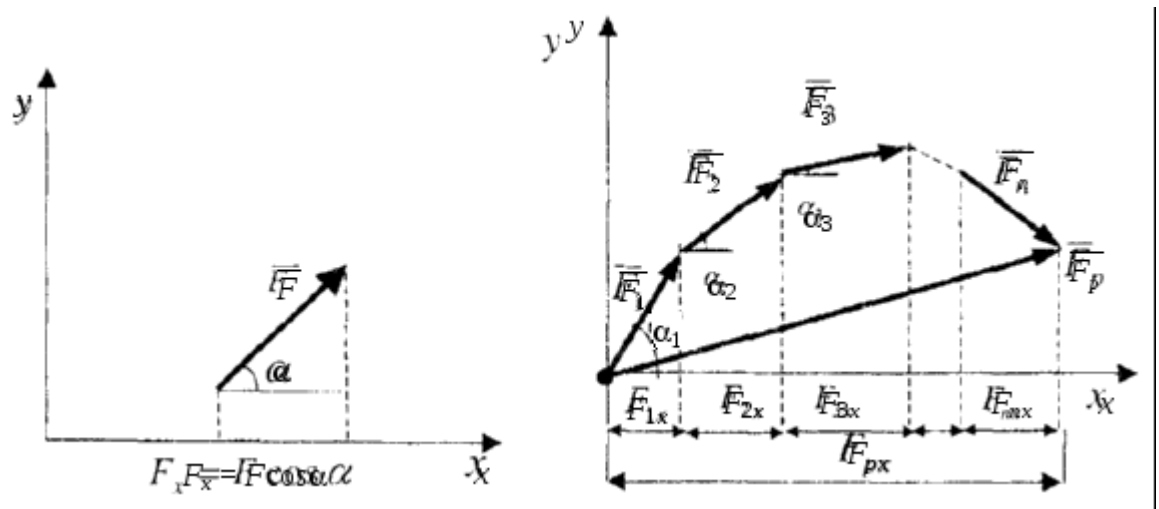
Равнодействующую можно определить графически с помощью векторного (силового) многоугольника (рис. 14,в). Для этого последовательно в выбранном масштабе откладываются векторы заданных сил. Равнодействующей системы сил является вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего.

Равнодействующую можно также определить аналитическим способом. Проекция силы на ось (рис. 15,а) определяется произведением модуля силы на косинус угла между направлением силы и направлением оси.

На рис. 15,б показан многоугольник сил. Из рисунка видно, что

$$F_{px} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx},$$

$$\text{где } F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1, \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2, \quad \dots, \quad F_{nx} = F_n \cos \alpha_n.$$



а) б)

Рис. 15

Аналогичные соотношения можно записать и для оси Y .

Т.е. проекция равнодействующей на какую-либо ось равна сумме проекций составляющих сил на ту же ось:

$$F_{px} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_{py} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (4)$$

Равнодействующая определяется так:

$$\vec{F}_p = F_{px} \vec{i} + F_{py} \vec{j} \quad (5)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные векторы – орты.

Модуль равнодействующей равен

$$F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2} \quad (6)$$

Направление вектора равнодействующей определяется с помощью направляющих косинусов – косинусов углов между равнодействующей и осями x , y :

$$\cos(\vec{F}_p, x) = \frac{F_{px}}{F_p}, \quad \cos(\vec{F}_p, y) = \frac{F_{py}}{F_p} \quad (7)$$

Контрольные вопросы

1. Почему в шарнирно-подвижной опоре возникает только одна реакция?
2. В какую сторону принято направлять векторы неизвестных реакций при составлении уравнений? (Ответ: обычно по положительному направлению осей координат. Если в ответе получится «минус», значит реальное направление противоположно).
3. Можно ли составить уравнение моментов относительно точки, где не закреплена опора? (Ответ: да, уравнения моментов можно составлять относительно любой точки плоскости, но удобнее — относительно опор).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Тема 2.3 Виды нагружений. Виды напряжений

4 часа

Материал для самостоятельной работы по разделу «Соппротивление материалов» (Сопромат). Здесь мы переходим от статики (где тела абсолютно твердые) к изучению того, как реальные тела деформируются под нагрузкой.

1. Виды нагружений (Деформаций)

В зависимости от того, как приложены внешние силы к брусу (стержню), возникают различные виды нагружения:

Вид нагружения	Характеристика действия сил	Пример детали
Растяжение / Сжатие	Силы действуют вдоль оси стержня в разные или встречные стороны.	Канат, колонна здания, заклепка.
Сдвиг (Срез)	Две равные силы действуют перпендикулярно оси очень близко друг к другу.	Болт в нахлесточном соединении, работа ножниц.
Кручение	В поперечных сечениях возникают вращающие моменты (пары сил).	Вал двигателя, ключ в замке.
Изгиб	Силы или моменты действуют перпендикулярно оси, искривляя её.	Балка перекрытия, ось вагона.
Сложное сопротивление	Сочетание нескольких видов (например, изгиб с кручением).	Коленчатый вал.

2. Понятие напряжения

Напряжение — это мера интенсивности внутренних сил, возникающих в теле под действием внешней нагрузки. Оно характеризует прочность материала.

Единица измерения в системе СИ: **Паскаль (Па)** или **МПа**

Виды напряжений:

В произвольном сечении возникают два типа напряжений:

1. Нормальные напряжения (— «сигма»):

1. Действуют перпендикулярно (по нормали) к сечению.
2. Возникают при **растяжении, сжатии и изгибе**.

Если в поперечных сечения бруса возникают только продольная сила N , то брус *растянут* (сила $N > 0$ направлена от сечения) или *сжат* (сила $N < 0$ направлена к сечению). Если в поперечном сечении возникает только крутящий момент M_z , то брус в данном сечении работает на *кручение*. Если в поперечном сечении возникают только изгибающие моменты M_x или M_y , то происходит *чистый изгиб*. Если в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом возникает и поперечная сила Q_x или Q_y , то это *поперечный изгиб*. Если в поперечном сечении возникают только поперечные силы, то происходит *сдвиг, срез* материала.

Напряжение – численная мера интенсивности распределения внутренних сил по площади поперечного сечения (векторная величина). Используется при исследовании

внутренних сил конструкций. Единицей напряжения служит единица силы, делённая на единицу площади: $1\text{Н/мм}^2=1\text{МПа}$.

Рассмотрим в поперечном сечении бруса любую точку, в которой возникают и ВСФ, и напряжения. Восстановим нормаль из т.К. σ - нормальное напряжение; τ – касательное напряжение; p – полное напряжение; ΔS - площадь сечения; ΔR – элементарная сила, равнодействующая внутренних сил.

Полное напряжение $P=\lim_{(\Delta S \rightarrow 0)}(\Delta R/\Delta S)$; Среднее напряжение $P_{\text{ср}} = \Delta R/\Delta S$, $\tau = \tau_x^2 + \tau_y^2$;
 $p = \sqrt{(\sigma^2 + \tau^2)}$.

Наличие нормального напряжения в любой точке поперечного сечения обусловлено возникновением в этом сечении нормальной силы N или изгибающих моментов M_x и M_y . Наличие касательных напряжений обусловлено ВСФ, возникающими в плоскости сечения, т. е. поперечными силами Q_y , Q_x или крутящим моментом M_z . Если σ или τ превышают предельные значения, то происходит разрушение конструкции.

Исследование *РО* начинается с выбора расчетной схемы. *Расчетная схема* – РО, освобожденный от несущественных свойств. Допущения схематизации: 1. сх. материала конструкции (однород., сплошной, изотропный); 2. сх. нагрузок по способу приложения (сосредоточенная, распределенная); 3. сх. формы тела (брус, оболочка).

2. Напряжение и деформированное состояние, свойства (характеристики) материала.

Напряжение – это численная мера интенсивности распределения внутренних сил по площади поперечного сечения (векторная величина). Совокупность напряжений (τ, σ) во множестве площадок, проходящих через заданную точку характеризуют *напряженное состояние* в данной точке. *Деформация* – количественная мера изменения геометрических размеров тела. *Деформированное состояние* – совокупность линейных и угловых деформации во множестве площадок, проходящих через заданную точку тела.

Рассмотрим в данном теле до деформации отрезок АВ длиной l . После деформации A_1B_1 . Абсолютные перемещения точек: A_1A , B_1B . Угловая деформация $\alpha-\alpha'$. Абсолютное удлинение отрезка Δl . Длина отрезка после деформации: $l+\Delta l$. Относительная продольная деформация $\epsilon=\Delta l/l$.

Виды деформаций: 1. упругие (после снятия всей нагрузки конструкция принимает свое первоначальное состояние равновесия, деформация исчезает); 2. пластические (остаточные, не исчезают после снятия нагрузки, неработоспособная деталь). *Мех. характ. материала*: 1. прочность – способность материала тела сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь, без остаточных деформаций; 2. жёсткость – способность материала сопротивляться образованию деформаций; 3. выносливость – способность материала долгое время выдерживать переменные нагрузки; 4. устойчивость – способность конструкции сохранять исходное состояние равновесия и готовность воспринимать последующую нагрузку; 5. вязкость – способность воспринимать ударные нагрузки. *Св-ва материалов*: твёрдость – способность материала противодействовать мех. проникновению в него посторонних тел; хрупкость – способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций; пластичность – способность материала без разрушения получать большие остаточные деформации. *Допущения о св-вах материалов*: однородные – в любой точке материалы имеют одинаковые физико-химические св-ва; сплошная среда –

кристаллич. строение и микроскопич. дефекты не учитываются; изотропны – механич. св-ва не зависят от направления нагружения; идеальная упругость – полностью восстанавливают форму и размеры после снятия нагрузки.

Контрольные вопросы

1. Почему в шарнирно-подвижной опоре возникает только одна реакция?
2. В какую сторону принято направлять векторы неизвестных реакций при составлении уравнений? (Ответ: обычно по положительному направлению осей координат. Если в ответе получится «минус», значит реальное направление противоположно).
3. Можно ли составить уравнение моментов относительно точки, где не закреплена опора? (Ответ: да, уравнения моментов можно составлять относительно любой точки плоскости, но удобнее — относительно опор).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Тема 2.3 Растяжение и сжатие

4 часа

Растяжением (сжатием) называют такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только продольные силы N , а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня. **Продольной осью** стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, как это показано на рис. 2.1.

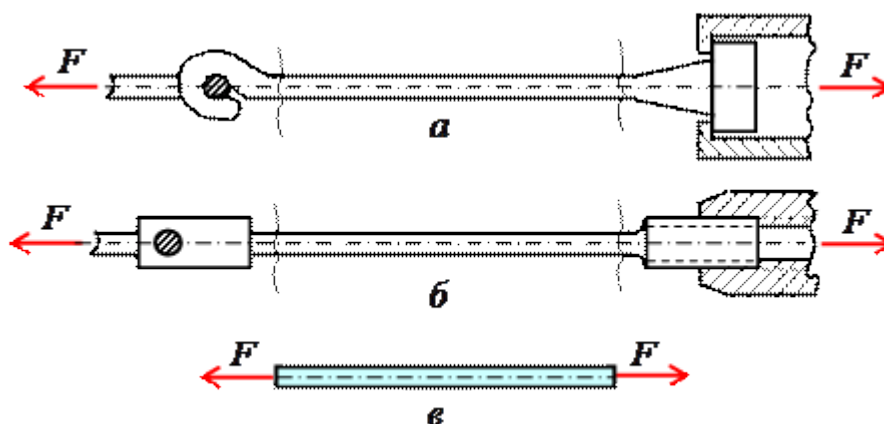


Рис. 2.1

Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую F , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 2.1, а, б) оказывается единой (рис. 2.1, в) согласно принципу Сен – Венана.

Если воспользоваться методом сечений (рис. 2.2), то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают продольные силы N_z , равные силе F (рис. 2.2, б).

Сжатие отличается от растяжения только знаком силы N_z . При растяжении нормальная сила N_z направлена от сечения (рис. 2.2, б), а при сжатии – к сечению.

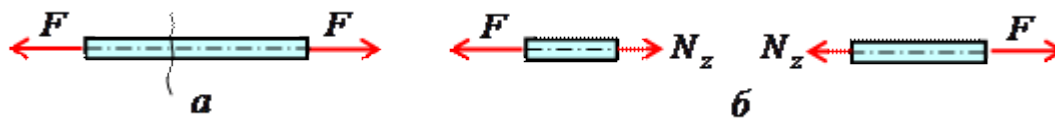


Рис. 2.2

Растягивающие продольные силы принято считать **положительными** (рис. 2.3, а), а сжимающие – **отрицательными** (рис. 2.3, б).

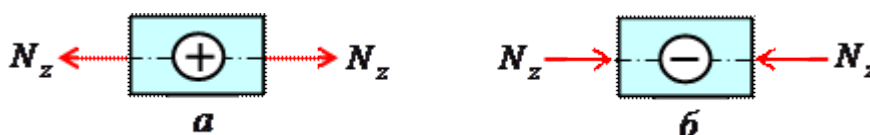


Рис. 2.3

При расчете стержней, испытывающих деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от N_z), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Продольные силы (N_z), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется **эпюрой продольных сил** (эп. N_z). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

Осью абсцисс служит ось стержня. Каждая ордината графика – продольная сила (в масштабе сил) в данном сечении стержня.

Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие (например, найти $N_{\max}$ при растяжении-сжатии). Сечение, где действует максимальное усилие будем называть **опасным**.

Перед построением эпюр необходимо освободить брус, в котором будем строить эпюры от опорных связей (выделить объект равновесия) и приложить к нему все действующие внешние силы (активные и реактивные). Затем необходимо установить границы участков, в пределах которых закон изменения внутренних сил постоянный. Границами таких участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы или начинается и кончается распределенная нагрузка, а также сечения, где имеется перелом стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков изложенные выше, получаем уравнения изменения внутренних сил в пределах длины каждого участка бруса. Затем, используя, полученные зависимости строим графики (эпюры) этих усилий. Ординаты эпюр в определенном масштабе откладываем от базисной линии, которую проводим параллельно оси бруса

Пример 1.

Пусть имеется стержень постоянного поперечного сечения, нагруженный силами $2P$ и $3P$ вдоль продольной оси стержня, показанный на рис.2.4.1. Определить величину внутренних сил.

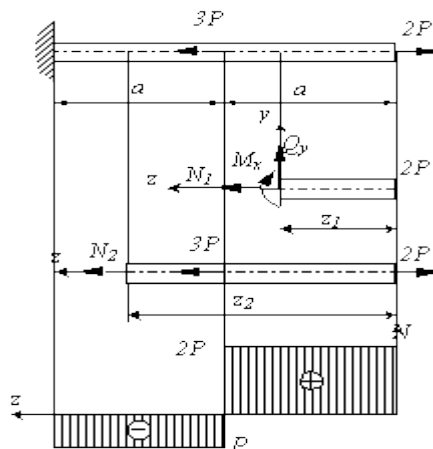


Рис.2.4.1

Решение.

Стержень может быть разделен на два участка, граничными точками которых являются точки приложения сосредоточенных сил и точка закрепления. Если начало координат расположить на правом конце стержня, а ось z направить справа налево, то, используя метод сечений, **рассекая** последовательно участки, **отбрасывая** левую часть, **заменяя** ее действие внутренними усилиями N , Q_y , M_x и **уравновешивая** оставшуюся часть, получим:

I участок: $0 \leq z_1 \leq a$

$$\Sigma z = 0, \quad N_1 = 2P;$$

$$\Sigma y = 0, \quad Q_y = 0;$$

$$\Sigma m_x = 0, \quad M_x = 0$$

Как видно, при растяжении в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор - нормальная сила N .

II участок: $a \leq z_2 \leq 2a$

$$\Sigma z = 0, \quad N_2 = 2P - 3P = P.$$

Таким образом, нормальная сила равна алгебраической сумме проекций сил, приложенных к отсеченной части на продольную ось $N = \Sigma P_{iz}$.

Полученные результаты для большей наглядности удобно представить в виде графика, (эпюры N), показывающего изменение продольной силы вдоль оси стержня (рис.2.4.1). Построим на первом участке линию параллельную оси z на высоте $2P$, на втором участке – линию со значением $-P$. Области ограниченные графиком и осью z принято штриховать и обозначать знак этой области. Видно, что наибольшая продольная сила возникает на первом участке стержня и, как следствие, при прочих равных условиях, он скорее может разрушиться, чем второй участок.

Напряжение в поперечных сечениях стержня

Нормальная сила N приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и, в соответствии с этим, определяется следующим образом:

$$N = \int_A \sigma dA.$$

Но из этой формулы нельзя найти закон распределения нормальных σ напряжений в поперечных сечениях стержня. Для этого обратимся к анализу характера его деформирования.

Если на боковую поверхность этого стержня нанести прямоугольную сетку (рис. 2.2, б), то после нагружения поперечные линии $a-a$, $b-b$ и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует *гипотезе плоских сечений* (*гипотезе Бернулли*).

Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.2)$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

В сечениях, близких к месту приложения внешних сил, гипотеза Бернулли нарушается: сечения искривляются, и напряжения в них распределяются неравномерно. По мере удаления от сечений, в которых приложены силы, напряжения выравниваются, и в сечениях, удаленных от места приложения сил на расстояние, равное наибольшему из размеров поперечного сечения, напряжения можно считать распределенными по сечению равномерно. Это положение, называемое **принципом Сен-Венана**, позволяет при определении напряжений в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, не учитывать способ их приложения, заменять систему внешних сил статически эквивалентной системой. Например, экспериментально установлено, что во всех трех случаях нагружения стержня (рис. 2.7, а) значения напряжений в сечениях, удаленных от крайних сечений на

расстояние не менее высоты сечения h , одинаковы: $\sigma = \frac{N}{A}$ (рис. 2.7, б), а в сечениях, близких к местам приложения внешних сил, распределения напряжений по сечению существенно различны (рис. 2.7, в).

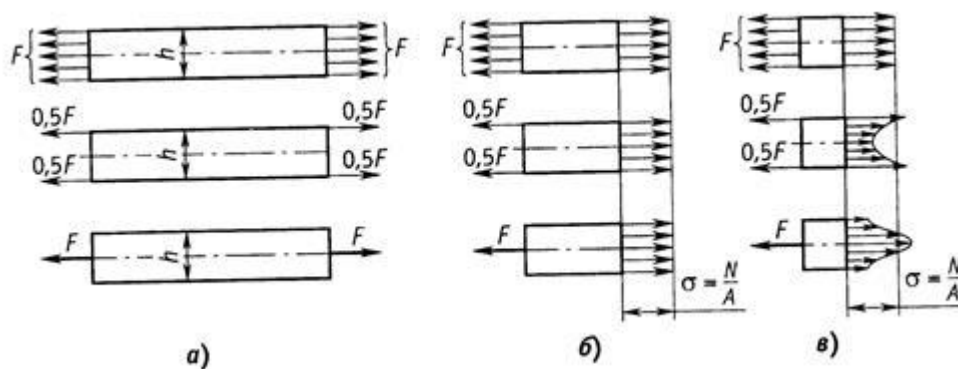


Рис.2.7

Высказанное предположение о равномерном распределении нормальных напряжений в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 2.2, в); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций.

Нормальные напряжения при сжатии определяют также, как и при растяжении, но считают отрицательными.

Деформации и перемещения. Закон Гука

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим - свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 2.8). До нагружения стержня его длина равнялась l - после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (рис. 2.8). Величину Δl называют **абсолютной продольной деформацией**

(**абсолютным удлинением**) стержня. В большинстве случаев оно мало по сравнению с его первоначальной длиной l ($\Delta l \ll l$).

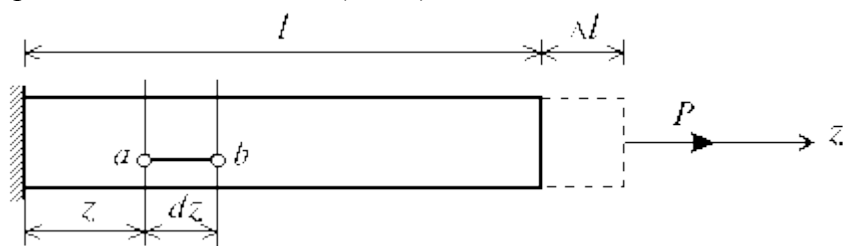


Рис. 2.8

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ε остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.4)$$

Величина ε называется **относительной продольной деформацией**.

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (рис. 2.8). При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (2.5)$$

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде (**нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной линейной деформации ε**):

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.6)$$

Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый **модулем упругости материала первого рода (модуль продольной упругости)**. Его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться деформированию под действием внешней нагрузки.

Из совместного рассмотрения уравнений (2.5) и (2.6) получим:

$$\Delta dz = \sigma \frac{dz}{E},$$

откуда с учетом того, что

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \text{ и } \Delta l = \int_0^l \Delta dz,$$

окончательно получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA}. \quad (2.7)$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = \text{const}$, имеет постоянное поперечное сечение $A = \text{const}$ и нагружен по концам силой P , то из (2.7) получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}. \quad (2.8)$$

Зависимость (2.8) также выражает закон Гука. Знаменатель EA называется **жесткостью при растяжении - сжатии** или **продольной жесткостью**.

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом

независимости действия сил, и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \quad (2.9)$$

где α - коэффициент температурного расширения материала; t - перепад температуры тела. Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} + \alpha l t. \quad (2.10)$$

Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к упругому телу и вызывающие изменение геометрии тела, совершают работу W на соответствующих перемещениях. Одновременно с этим в упругом теле накапливается потенциальная энергия его деформирования U . При действии динамических внешних нагрузок часть работы внешних сил превращается в кинетическую энергию движения частиц тела K . Приняв энергетическое состояние системы до момента действия данных сил равным нулю, и в условиях отсутствия рассеивания энергии, уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$W = U + K. \quad (2.11)$$

При действии статических нагрузок $K = 0$, следовательно,

$$W = U. \quad (2.12)$$

Это означает, что при статическом нагружении работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации. При разгрузке тела производится работа за счет потенциальной энергии деформации, накопленной телом. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии. Это свойство упругого тела широко используется в технике, например, в заводных пружинах часовых механизмов, в амортизирующих рессорах и др. В случае простого растяжения (сжатия) для вывода необходимых расчетных зависимостей потенциальной энергии деформации рассмотрим решение следующей задачи.

На рис. 2.9, а изображен растягиваемый силой P стержень, удлинение которого соответствует отрезку Δl , ниже показан график изменения величины удлинения стержня Δl в зависимости от силы P (рис. 2.9, б). В соответствии с законом Гука этот график носит линейный характер.

Пусть некоторому значению силы P соответствует удлинение стержня Δl . Дадим некоторое приращение силе dP — соответствующее приращение удлинения составит $d(\Delta l)$. Тогда элементарная работа на этом приращении удлинения составит:

$$dW = (P + dP) \cdot d(\Delta l) = P \cdot d(\Delta l) + dP \cdot d(\Delta l), \quad (2.13)$$

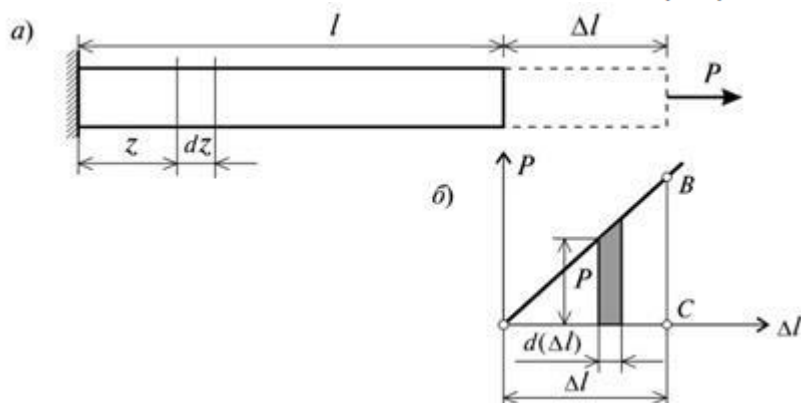


Рис.2.9

вторым слагаемым, в силу его малости, можно пренебречь, и тогда

$$dW = P \cdot d(\Delta l). \quad (2.14)$$

Полная работа равна сумме элементарных работ, тогда, при линейной зависимости “нагрузка $\propto$ перемещение”, работа внешней силы P на перемещении Δl будет равна площади треугольника OCB (рис. 2.9), т.е.

$$W = 0,5P \cdot \Delta l. \quad (2.15)$$

В свою очередь, когда напряжения σ и деформации ε распределены по объему тела V равномерно (как в рассматриваемом случае) потенциальную энергию деформирования стержня можно записать в виде:

$$U = V \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon. \quad (2.16)$$

Поскольку, в данном случае имеем, что $V = Al, P = \sigma A, \sigma = E\varepsilon$, то

$$U = Al \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = 0,5AlE\varepsilon^2 = 0,5\sigma A\Delta l = 0,5P\Delta l, \quad (2.17)$$

т.е. подтверждена справедливость (2.12).

С учетом (2.8) для однородного стержня с постоянным поперечным сечением и при $P = const$ из (2.17) получим:

$$U = \frac{P^2 l}{2EA}. \quad (2.18)$$

Единицей измерения потенциальной энергии деформации является $1\text{Нм} = 1\text{Дж}$.

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее безопасной эксплуатации. Важнейшим условием, обеспечивающим безопасную эксплуатацию конструкции, является условие прочности. Существуют различные методы обеспечения прочности конструкций. Мы чаще всего будем пользоваться одним из этих методов – расчетом по допускаемым напряжениям. Согласно этому методу для конструкций, работающих на растяжение-сжатие, условие прочности, составленное для опасного сечения, можно записать в таком виде:

$$\sigma = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$$

где σ_{max} – максимальное напряжение в конструкции; $[\sigma]$ – характеристика материала, называемая **допускаемым напряжением**.

Допускаемое напряжение находится по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n} \quad (2.27)$$

где $\sigma_{пред}$ – предельное напряжение, при достижении которого в стержне наступает **предельное состояние материала**: появляются пластические деформации, если материал стержня – пластичный, или происходит разрушение, если стержень выполнен из хрупкого материала; n – нормируемый коэффициент запаса прочности.

Кроме формулы (2.26), возможен второй вариант условия прочности

$$n_{действ} \geq n, \quad (2.28)$$

$$\text{где } n_{действ} = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}} \quad (2.29)$$

называется действительным коэффициентом запаса прочности, показывающим во сколько раз надо увеличить максимальное напряжение в стержне, чтобы материал стержня оказался в опасном (предельном) состоянии.

Условие прочности в зависимости от цели поставленной задачи позволяет выполнять расчеты на прочность двух видов: проектный и проверочный. Для спроектированного стержня можно также определять допускаемую нагрузку.

Проектный расчет выполняют с целью определения размеров поперечных сечений элемента конструкции при известных рабочих нагрузках и материале (допускаемых напряжений). Площадь поперечного сечения определяют из выражения

$$A \geq \frac{N_{max}}{[\sigma]}. \quad (2.30)$$

Форма сечения стержня не влияет на его прочность при растяжении (сжатии). Форму сечения стержня необходимо знать только для определения размеров сечения при известном значении площади.

Зная площадь сечения и его форму, находят размеры сечения.

Проверочный расчет выполняют для спроектированной конструкции с целью проверки ее прочности. При проверочном расчете должны быть известны площадь опасного сечения, нагрузка и материал (допускаемое напряжение). Проверочный расчет выполняют по формуле (2.26).

Определение допускаемой нагрузки для спроектированного элемента конструкции, размеры поперечного сечения которого и материал (допускаемые напряжения) известны. Условие прочности в этом случае записывают в виде

$$[N] \leq [\sigma]A \quad (2.31)$$

Зная значение $[N]$, определяют допускаемую нагрузку $[P]$.

Так как допускаемые напряжения не имеют точного значения, а выбираются приближенно, то при проверочном расчете максимальные рабочие напряжения могут превышать допускаемые на 5%. По этой же причине можно округлять полученные в расчетах значения площади опасного поперечного сечения или допускаемой нагрузки так, чтобы максимальные напряжения отличались от допускаемых не более чем на 5%. По этой же причине можно округлять полученные в расчетах значения площади опасного поперечного сечения или допускаемой нагрузки так, чтобы максимальные напряжения отличались от допускаемых не более чем на 5%.

При проектировании элементов конструкций стремятся сделать их во всех сечениях **равнопрочными**.

Рассмотренные три вида расчетов на прочность можно выполнять не только при растяжении или сжатии, а при любом виде деформации (сдвиге, кручении, изгибе).

Для хрупких строительных материалов условия прочности принимают вид:

при растяжении:

$$\sigma_t \leq \sigma_{adm,t}, \quad \sigma_{adm,t} = \frac{\sigma_{ut}}{n_t};$$

при сжатии:

$$\sigma_c \leq \sigma_{adm,c}, \quad \sigma_{adm,c} = \frac{\sigma_{uc}}{n_c}, \quad (2.33)$$

где $\sigma_{adm,t}$ и $\sigma_{adm,c}$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии; n_t и n_c – нормативные коэффициенты запаса прочности по отношению к пределу прочности ($n_t, n_c > 1$).

В некоторых случаях работоспособность элемента конструкции определяется не только его прочностью, но и **жесткостью**, т.е. способностью элемента воспринимать нагрузки без недопустимых упругих деформаций. При расчетах на жесткость определяют максимальные перемещения сечений и сопоставляют их с допускаемыми перемещениями.

Условие жесткости, ограничивающее изменение длины элемента, имеет следующий общий вид:

$$\Delta l \leq [\Delta l],$$

где Δl – изменение размеров детали;

$[\Delta l]$ – допускаемая величина этого изменения.

Учитывая, что при растяжении (сжатии) абсолютное удлинение в общем виде определяется как алгебраическая сумма величин Δl по участкам

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(z) dz}{EA(z)}, \quad (2.35)$$

условие жесткости при растяжении (сжатии) запишем следующим образом:

$$|\Delta l| = \left| \sum \int \frac{N(z) dz}{EA(z)} \right| \leq [\Delta l]. \quad (2.36)$$

Так как перемещение, согласно закону Гука, зависит от нагрузки и размеров поперечного сечения, условие жесткости позволяет решать те же три вида задач, что и условие прочности.

Расчеты статически определимых стержней

Статически определимый стержень – это стержень, который можно рассчитать, используя только уравнения равновесия (уравнения статики).

В любой науке, которая называется «точной» и в которой используются аналитические методы описания состояний и явлений, не обойтись без моделей. В нашем случае при решении различных задач мы каждый раз будем выбирать для рассматриваемого объекта расчетную схему.

Расчетная схема – это упрощенная схема конструкции или ее элементов, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. При этом расчетная схема должна отражать все наиболее существенное для характера работы данной конструкции и не содержать второстепенных факторов, мало влияющих на результаты ее расчета. Построение и обоснование расчетной схемы – ответственный этап проектирования и расчета конструкции.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 2.

Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием $F=10$ т. Относительное удлинение не должно превышать $l/2000$, а напряжение – 1200 кг/см². Найти наименьший диаметр, удовлетворяющий этим условиям, если модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

Как и ранее, решение задачи начинается с изображения расчетной схемы и построения эпюра продольных сил (рис. 2.14).

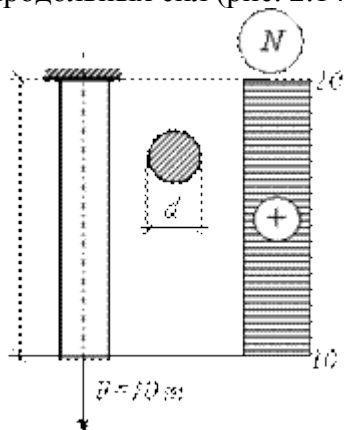


Рис.2.14

По условию задачи напряжение не должно превышать 1200 кг/см², в связи с чем данная величина может быть принята за расчетное сопротивление материала стойки на растяжение, то есть $R_{\text{раст}} = 1200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 120$ МПа. По аналогии заданное относительное удлинение можно принять за предельно допустимое для данной стойки, то есть $[\varepsilon] = l/2000$. В результате необходимо подобрать диаметр стойки, удовлетворяющий условию прочности и условию жесткости.

Продольное растягивающее усилие равно по величине внешней нагрузке, действующей на стержень $N=10 \text{ т}=0,1 \text{ МН}$.

Требуемая площадь поперечного сечения колонны из условия прочности будет определяться выражением:

$$A_{\text{тр}} = \frac{N}{R_{\text{раст}}} = \frac{0,1 \text{ МН}}{120 \text{ МПа}} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Зная требуемую площадь, выразим необходимый из условия прочности диаметр:

$$A_{\text{тр}} = \frac{\pi d_{\text{тр}}^2}{4} \Rightarrow d_{\text{тр}} = \sqrt{\frac{4A_{\text{тр}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8,3 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,032 \text{ м} = 3,2 \text{ см}.$$

Условие жесткости при центральном растяжении-сжатии:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{\Delta l_{\text{max}}} &\leq [\varepsilon] \\ \frac{l}{Nl} &\leq \frac{1}{2000}, \\ \frac{EA}{N} &\leq \frac{1}{2000}, \\ EA &\leq \frac{N}{2000}. \end{aligned}$$

Выражаем из предельного неравенства требуемую из условия жесткости площадь поперечного сечения:

$$A_{\text{тр}} = \frac{2000N}{E} = \frac{2000 \cdot 0,1}{2 \cdot 10^5} = 100 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0,001 \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки из условия жесткости определим по формуле:

$$d_{\text{тр}} = \sqrt{\frac{4A_{\text{тр}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,001}{3,14}} = 0,036 \text{ м} = 3,6 \text{ см}.$$

Окончательно принимаем из двух диаметров большой, $d=3,6 \text{ см}$.

Пример 3.

Определить грузоподъемность и удлинение балки, если $R=160 \text{ МПа}$; $A=12 \text{ см}^2$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Расчетная схема бруса и эпюра продольных сил изображены на рис. 2.15.

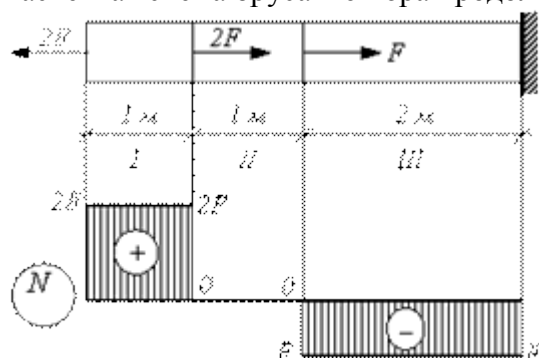


Рис.2.15

Решение.

Грузоподъемность бруса – это максимальная нагрузка, которую он может выдержать, не разрушаясь. Таким образом, необходимо определить требуемую нагрузку из условия прочности:

$$\sigma_z^{\text{max}} \leq R \text{ или } \frac{N^{\text{max}}}{A} \leq R.$$

Согласно эпюре $N^{\text{max}} = 2f$, тогда условие прочности примет вид:

$$\sigma_z^{max} \leq \frac{2F}{A} \leq R$$

Отсюда грузоподъемность бруса будет равна:

$$F = \frac{R \cdot A}{2},$$

$$F = \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}{2} = 96 \text{ кН} = 9600 \text{ кг.}$$

Для определения удлинения стержня Δl разбиваем его на участки. Каждый участок, должен иметь постоянную жесткость EA и величину продольной силы. Таким образом, для данного бруса получаем три участка (на рис. 2.15 они обозначены римскими цифрами), тогда абсолютная деформация в общем виде будет определяться выражением:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3,$$

в котором каждое слагаемое определяется отдельно:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3},$$

где N_1, N_2, N_3 - значения продольных сил соответственно на первом, втором и третьем участках; l_1, l_2, l_3 - длины соответственно первого, второго и третьего участков; E_1, E_2, E_3 - значения модулей упругости материалов бруса для каждого участка; A_1, A_2, A_3 - площади поперечных сечений стержня на первом, втором и третьем участках.

Поскольку жесткости всех трех участков одинаковые (балка изготовлена из одного материала и имеет постоянное по всей длине поперечное сечение), можно обозначить $E_1 \cdot A_1 = E_2 \cdot A_2 = EA$ и вынести этот множитель за скобки. В результате получим выражение в виде:

$$\Delta l = \frac{1}{EA} (N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2 + N_3 \cdot l_3).$$

$$\Delta l = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (2F \cdot 1 + 0 \cdot 1 - F \cdot 2) = 0,$$

$$\text{где } N_1 = 2F \text{ кН, } N_2 = 0 \text{ кН, } N_3 = -F \text{ кН, } l_1 = l_2 = 1 \text{ м, } l_3 = 3 \text{ м.}$$

Пример 4.

Проверить прочность чугунного бруса (рис.2.16, а). Принять $\sigma_B = 150$ МПа; $\sigma_B^c = 650$ МПа, допускаемый коэффициент запаса прочности $[n] = 4$.

Решение.

Строим эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ (рис.2.16, б и в).

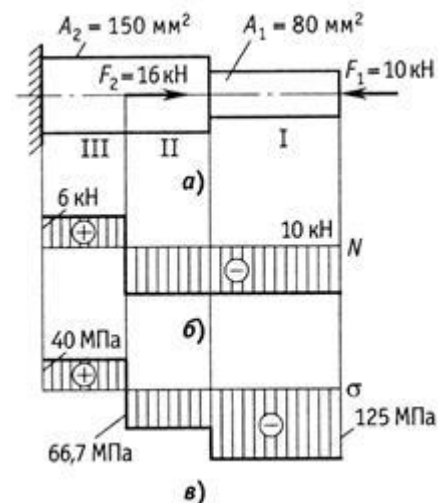


Рис.2.16

Напряжения на участках бруса

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = -\frac{10 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^{-6}} = -125 \cdot 10^6 \text{ Па} = -125 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = -\frac{10 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^{-6}} = -66,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = -66,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = -\frac{6 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^{-6}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа}.$$

Так как материал бруса имеет различную прочность при растяжении и сжатии, проверку прочности следует выполнять для сжатого и растянутого участков, несмотря на то, что на участке I напряжение значительно больше по абсолютному значению.

Коэффициенты запаса прочности

$$n_I = \frac{\sigma_B^c}{\sigma_I} = \frac{650}{125} = 5,2 > [n]$$

- прочность обеспечена;

$$n_{III} = \frac{\sigma_B}{\sigma_{III}} = \frac{150}{40} = 3,75 < [n]$$

- прочность обеспечена.

Из решения задачи можно сделать следующие выводы:

1) прочность стержня не обеспечена, так как на одном его участке коэффициент запаса прочности меньше требуемого;

2) на участках I и II коэффициент запаса прочности завышен, следовательно, эти участки бруса можно сделать меньшего диаметра. При проектировании элементов конструкций следует стремиться к тому, чтобы во всех сечениях коэффициент запаса прочности был равен или близок к требуемому.

Проверку прочности бруса можно было выполнить, используя условие прочности в виде $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$, определив предварительно допускаемые напряжения по формулам

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_B}{[n]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_B^c}{[n]}.$$

Расчет статически определимых стержневых систем

Статически определимая стержневая система – это система, в которой все неизвестные реакции опор и внутренние усилия можно определить из уравнений равновесия (статики).

Для «решения» любой стержневой системы необходимо выделить в ней объект равновесия. В связи с этим, все системы можно разделить на два типа:

1 тип – системы, состоящие из абсолютно жестких (недеформируемых) стержней и одиночных невесомых (деформируемых) стержней. Для стержневых систем этого типа объектами равновесия являются недеформируемые стержни.

2 тип – системы, состоящие из нескольких деформируемых стержней, соединенных в одной точке. Точки соединения двух и более стержней называются узлами, которые и являются объектами равновесия для систем 2-го типа.

Все соединения в элементах систем шарнирные, однако существуют определенные правила, по которым вводятся реакции и усилия в стержнях:

- в шарнире, соединяющем абсолютно жесткий элемент системы с «землей» или с другой конструкцией, всегда возникают две реакции – горизонтальная H и вертикальная R ;

- в шарнире, соединяющем деформируемый стержень с абсолютно жестким стержнем или с другой конструкцией, всегда возникает одна реакция, направленная вдоль этого стержня и равная по величине усилию, возникающему в нем.

В абсолютно жестких стержнях никогда не возникает внутренних усилий, они не деформируются!

- в шарнире, соединяющем несколько деформируемых стержней (узловой шарнире), возникают усилия, направленные вдоль этих стержней и сходящиеся в этом узле.

Порядок решения большинства задач о проверке прочности статически определимых стержневых систем при расчете по допускаемым напряжениям сводится к следующим этапам:

- 1) находим внутренние усилия (продольную силу при растяжении-сжатии) и выявляем опасные сечения;
- 2) определяем напряжения;
- 3) после выявления максимальных напряжений используем условие прочности (формулы (2.26), (2.28), (2.32)) при растяжении-сжатии).

Пример 11.

Абсолютно жесткий брус CD поддерживается стальным стержнем АВ, имеющим площадь поперечного сечения 100 мм^2 (рис.2.25, а). Определить из условия прочности стержня АВ допускаемую нагрузку [Р] и проверить, обеспечена ли жесткость системы, если допускается перемещение сечения D бруса под действием силы Р не более 2 мм. Допускаемое напряжение принять равным $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

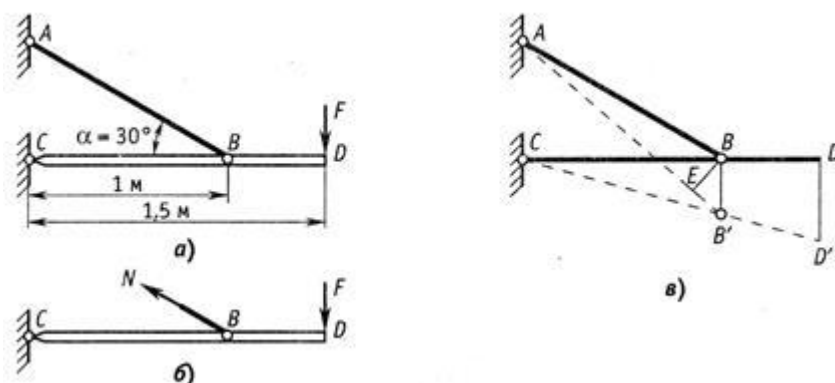


Рис.2.25

Решение.

Используя метод сечений, определим соотношение между продольной силой N в стержне АВ и нагрузкой Р. Из условия равновесия сил (рис.2.25, б) находим

$$\sum M_C = 0; \quad P \cdot 1,5 - N \cdot 1 \sin \alpha = 0;$$

$$P = \frac{N \sin 30^\circ}{1,5} = \frac{N \cdot 0,5}{1,5} = \frac{N}{3}.$$

Допускаемая продольная сила [N] для стержня АВ из условия его прочности

$$[N] = [\sigma] A = 150 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 15 \cdot 10^3 \text{ Н} = 15 \text{ кН}.$$

Допускаемая нагрузка на систему

$$[P] = [N]/3 = 15/3 = 5 \text{ кН}.$$

При нагружении системы стержень АВ удлиняется на Δl , а абсолютно жесткий брус поворачивается, оставаясь прямолинейным. Система после деформации стержня АВ показана штриховой линией на рисунке 2.25, в. Из треугольника ABC определяем длину l стержня АВ: $l = 1/\cos 30^\circ = 1,153 \text{ м}$.

На основании принципа начальных размеров принимаем, что значение угла α не изменяется, а точки В и D перемещаются по вертикали.

Из прямоугольного треугольника ВВ'Е находим

$$BB' = B'E / \sin \alpha; \text{ так как } BB' = \delta_B, B'E = \Delta l, \text{ то}$$

$$\delta_B = \frac{\Delta l}{\sin \alpha} = \frac{Nl}{EA \sin \alpha} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 1,153}{2 \cdot 10^{11} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \sin 30^\circ} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,73 \text{ мм}.$$

Перемещение точки D определяем из подобия треугольников CDD' и CBB'

$$\frac{\delta_D}{\delta_B} = 1,5; \delta_D = 1,5\delta_B = 1,5 \cdot 1,73 = 2,65 \text{ мм} > [\delta].$$

Жесткость системы не обеспечена.

Следует заметить, что нельзя повысить жесткость системы, применив для стержня АВ более прочную сталь, так как характеристикой свойств материала, влияющей на жесткость, является модуль упругости, значение которого для всех марок сталей примерно одинаково. Повысить жесткость системы можно, либо увеличив площадь поперечного сечения стержня АВ, либо уменьшив его длину.

Пример 12.

Определить допускаемую нагрузку $[P]$ для системы из двух стержней, изготовленных из дюралюминиевых труб одинакового поперечного сечения (рис.2.26, а). Допускаемое напряжение принять $[\sigma] = 100$ МПа.

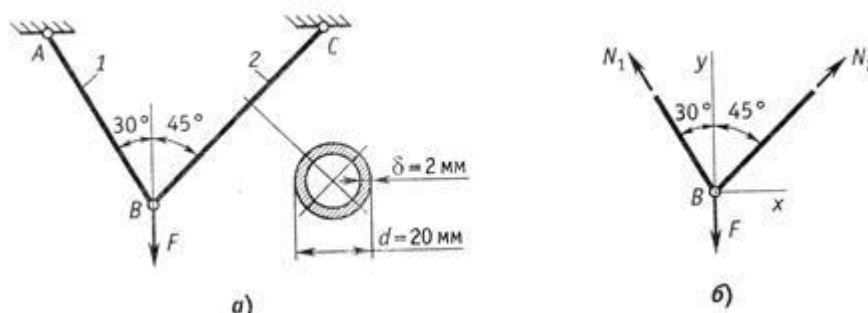


Рис.2.26

Решение.

Используя метод сечений, вырезаем узел В и из уравнений равновесия сил

$$\sum X = 0; N_2 \sin 45^\circ - N_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ + P = 0$$

находим неизвестные продольные силы, возникающие в стержнях, через нагрузку P (рис.2.26, б)

$$N_1 = 0,732P; N_2 = 0,518P.$$

Допускаемую нагрузку $[P]$ определяем из условия прочности наиболее нагруженного стержня 1:

$$[N_1] = [\sigma]A_1 = 100 \cdot 10^6 \frac{\pi}{4} (20^2 - 16^2) \cdot 10^{-6} = 11300 \text{ Н} = 11,3 \text{ кН}.$$

$$[P] = \frac{[N_1]}{0,732} = \frac{11,3}{0,732} = 15,4 \text{ кН}.$$

Следует отметить, что стержень 2 недогружен. Напряжение в нем

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,518P}{A_2} = \frac{4 \cdot 0,518 \cdot 15,4 \cdot 10^3}{\pi(20^2 - 16^2) \cdot 10^{-6}} = 70,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,7 \text{ МПа}.$$

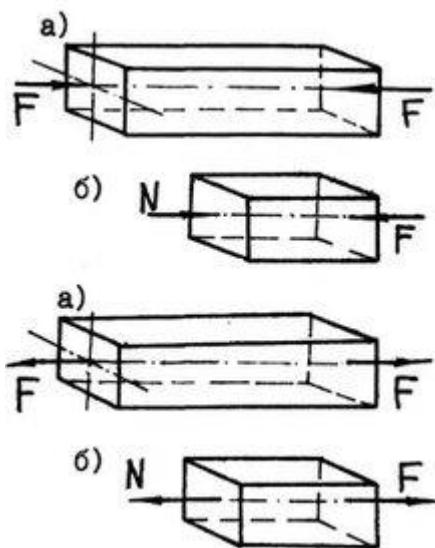
что примерно на 30% ниже допускаемого. Для стержня 2 можно использовать трубу меньшего поперечного сечения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Тема 2.5 Нормальные силы и напряжения в поперечном сечении бруса

2 часа

Это следует из вида деформации — центрального растяжения (или центрального сжатия), при котором в поперечном сечении возникает только продольная сила, а все остальные внутренние усилия равны нулю.



Нормальные силы

Продольная сила — это внутренняя сила, перпендикулярная плоскости сечения. Она равна сумме внешних сил, действующих по одну сторону от сечения вдоль продольной оси. **Правило знаков:**

- При растяжении продольная сила положительна и направлена от сечения.
- При сжатии — отрицательна и направлена к сечению.

Определение: продольная сила определяется методом сечений: она равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось.

Напряжения

Нормальные напряжения — это интенсивность нормальных сил в рассматриваемой точке сечения. Обозначаются σ . **Формула:** $\sigma = N / A$, где:

- N — продольная сила;
- A — площадь поперечного сечения бруса.

Знак нормальных напряжений: такой же, как и для продольной силы: при растяжении — «плюс», при сжатии — «минус». **Особенности:**

- Нормальные напряжения равномерно распределены по сечению.
- Форма сечения бруса на величину напряжений не влияет.
- Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса строят **эпюру нормальных напряжений** — график, ось которого — отрезок прямой, равный длине бруса и параллельный его оси.

При стержне постоянного сечения эпюра нормальных напряжений имеет такой же вид, как и эпюра продольных сил (она отличается от неё лишь принятым масштабом). При стержне переменного сечения вид этих двух эпюр различен: например, для стержня со ступенчатым законом изменения поперечных сечений эпюра нормальных напряжений имеет скачки не только в сечениях, в которых приложены сосредоточенные осевые нагрузки, но и в местах изменения размеров поперечных сечений.

Растяжение вызывает удлинение стержня (также возможен разрыв и остаточная деформация), сжатие вызывает укорочение стержня (возможна потеря устойчивости и возникновение продольного изгиба).

Продольная сила – внутреннее усилие, равное сумме проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, на ось стержня. Правило знаков для продольной силы: растягивающая продольная сила положительна, сжимающая – отрицательна

Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие.

Нормальная сила. При растяжении или сжатии в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор — нормальная сила.

НАПРЯЖЕНИЕ НОРМАЛЬНОЕ — отношение составляющей силы, действующей перпендикулярно данному сечению, к площади этого сечения. Измеряется в кг/мм² или кг/см²; в зависимости от знака различают сжимающие и растягивающие нормальные напряжения.

Продольные и поперечные деформации при растяжении. Закон Гука. Построения эпюры.

Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине называется относительным удлинением или продольной деформацией. Поперечные размеры стержня в результате деформирования также изменяются, при этом при растяжении они уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Если материал является изотропным, то его поперечные деформации равны между собой.

Закон Гука - сила упругости, возникающая в теле при его деформации, прямо пропорциональна величине этой деформации

Напряжения в наклонных сечениях. Максимальные касательные напряжения. Закон парности касательных напряжений.

Напряжения в наклонных площадках наблюдаются, если мысленно «разрезать» стержень, растягиваемый силами P , наклонной плоскостью под углом α к поперечному сечению (рис. 2.2, а), проходящей через точку K , и отбросить правую часть.

При плоском поперечном изгибе возникают два вида внутренних силовых факторов (рис. 1):

M_x - изгибающий момент,

Q_y - поперечная сила,

которые соответственно определяют нормальные σ и касательные τ напряжения.

Закон парности касательных напряжений устанавливает зависимость между величинами и направлениями пар касательных напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам элементарного параллелепипеда. Касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.

Коэффициент запаса прочности, факторы, влияющие на выбор его. Допускаемое напряжение. Расчеты на прочность.

Допускаемое (допустимое) напряжение – это значение напряжения, которое считается предельно приемлемым при вычислении размеров поперечного сечения элемента, рассчитываемого на заданную нагрузку.

Сдвиг. Основные расчетные предпосылки, расчетные формулы. Смятие.

Сдвиг — в сопротивлении материалов — вид продольной деформации бруса, возникающий в том случае, если сила прикладывается касательно его поверхности (при этом нижняя часть бруска закреплена неподвижно).

Смятие в сопротивлении материалов, местное сжатие, сопровождающееся, как правило, остаточными деформациями материала (его обмятием).

Базовые понятия и определения

- Что понимается под **центральной растяжкой (сжатием)** бруса? Какое силовое условие должно выполняться для возникновения этого вида деформации?

- Дайте определение **нормальной силы**
-). С помощью какого метода она определяется в произвольном сечении?
- Сформулируйте **правило знаков** для нормальной силы. В каком случае она считается положительной, а в каком — отрицательной?

2. Нормальные напряжения

- Что такое **нормальное напряжение** и каков его физический смысл?
- Запишите формулу для определения нормального напряжения при растяжении-сжатии:
- Укажите единицы измерения всех величин в системе СИ.
- Какая гипотеза лежит в основе вывода формулы для нормальных напряжений (гипотеза плоских сечений или **гипотеза Бернулли**)? В чем её суть?
- Как распределяются нормальные напряжения по площади поперечного сечения бруса при центральном растяжении?

3. Деформации и закон Гука

- Сформулируйте **закон Гука** для одномерного напряженного состояния. Как связаны между собой напряжение и относительная деформация?
- Что такое **модуль Юнга** ? Какую механическую характеристику материала он отражает?
- Запишите формулу для определения **абсолютного удлинения** бруса через его жесткость:
- Что характеризует величина, стоящая в знаменателе формулы?

4. Практические и расчетные вопросы

- Как строятся **эпюры нормальных сил**? Какие основные правила контроля правильности построения вы знаете (например, в точках приложения сосредоточенных сил)?
- В каких сечениях бруса возникают **максимальные напряжения**, если площадь сечения ступенчато изменяется по длине?
- Сформулируйте условие прочности по допускаемым напряжениям. Что такое **коэффициент запаса прочности**?
- В чем заключается суть принципа **Сен-Венана**? Как он влияет на распределение напряжений вблизи точек приложения нагрузки?

Как проверить себя?

Если вы готовитесь к защите работы, попробуйте кратко (в 1-2 предложениях) ответить на каждый вопрос. Если какой-то пункт вызывает затруднение, это сигнал, что стоит еще раз заглянуть в конспект или учебник.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Тема 2.6 Практические расчеты на срез и смятие
2 часа

Последовательность решения задачи

1. Определить диаметр соединительного элемента (болта, заклепки, штифта и т.п.) используя условие прочности на срез:

$$\tau_{cp} = Q / A_{cp} \leq [\tau]_{cp}$$

где τ_{cp} – расчетное напряжение среза в плоскости рассчитываемого сечения;

$[\tau]_{cp}$ – допускаемое напряжение при срезе (сдвиге);

Q – поперечная сила;

A_{cp} – площадь среза соединительного элемента:

$$A_{cp} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot k \cdot z$$

k – число плоскостей среза в одном соединительном элементе (болте, заклепке, штифте и т.п.)

z – число соединительных элементов (болтов, заклепок, штифтов и т.п.);

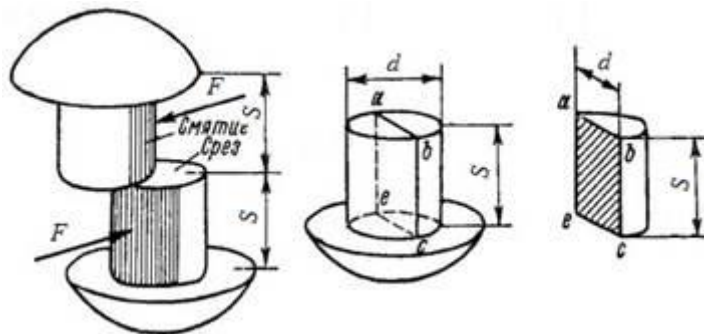


Рис. 1 - Зоны возникновения напряжений среза и смятия

2. Определить диаметр соединительного элемента (болта, заклепки, штифта и т.п.) используя условие прочности на смятие:

$$\sigma_{cm} = Q / A_{cm} \leq [\sigma]_{cm}$$

где σ_{cm} – расчетное напряжение смятия;

$[\sigma]_{cm}$ – допускаемое напряжение смятия;

Q – поперечная сила (при передаче силы F при нескольких соединительных элементах $Q = F / z$);

z – число соединительных элементов (болтов, заклепок, штифтов и т.п.);

A_{cm} – площадь смятия:

Из допущения о характере распределения сил взаимодействия по поверхности контакта следует, что если контакт осуществляется по поверхности полуцилиндра, то расчетная площадь A_{cm} равна площади проекции поверхности контакта на диаметральною плоскость, т.е. равна диаметру цилиндрической поверхности d на ее минимальную высоту s :

$$A_{cm} = d \times s_{min}$$

3. Принять наибольшее значение диаметра соединительного элемента (болта, заклепки, штифта и т.п.)

Пример 1. Определить, исходя из условий прочности на срез и смятие, необходимый диаметр болта в соединении, показанном на рисунке 2. К листам приложена растягивающая сила $F = 40 \text{ кН}$. Толщина одного листа 8 мм, второго листа - 10 мм. Материал болта - Ст3. Допускаемое напряжение на срез $[\tau]_{cp} = 80 \text{ МПа}$. Допускаемое напряжение на смятие $[\sigma]_{cm} = 160 \text{ МПа}$. Болт без зазора входит в отверстие.

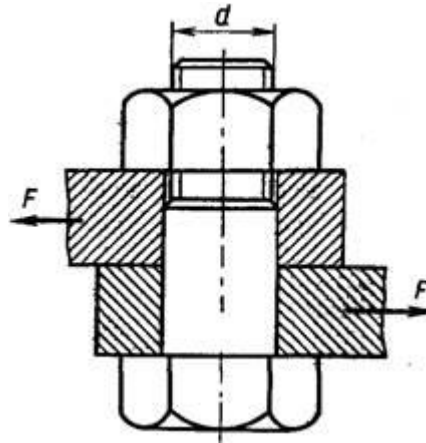


Рис. 2 - Схема задачи

Решение:

1. Определяем диаметр болта используя условие прочности на срез:

$$A_{ср} = Q / [\tau]_{ср}$$

т.к. $k = 1$ и $z = 1$

$$A_{ср} = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot [\tau]_{ср}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0252 \text{ м} = 25,2 \text{ мм}$$

2. Определяем диаметр болта используя условие прочности на смятие:

$$A_{см} = Q / [\sigma]_{см}$$

т.к. $z = 1$

$$A_{см} = d \cdot s_{min}$$

$$d = \frac{F}{s_{min} \cdot [\sigma]_{см}} = \frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-3} \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,03125 \text{ м} = 31,25 \text{ мм}$$

Из двух значений диаметра, найденных по условиям прочности на срез и смятие, следует принять большее, т.е. $d \geq 31,25 \text{ мм}$.

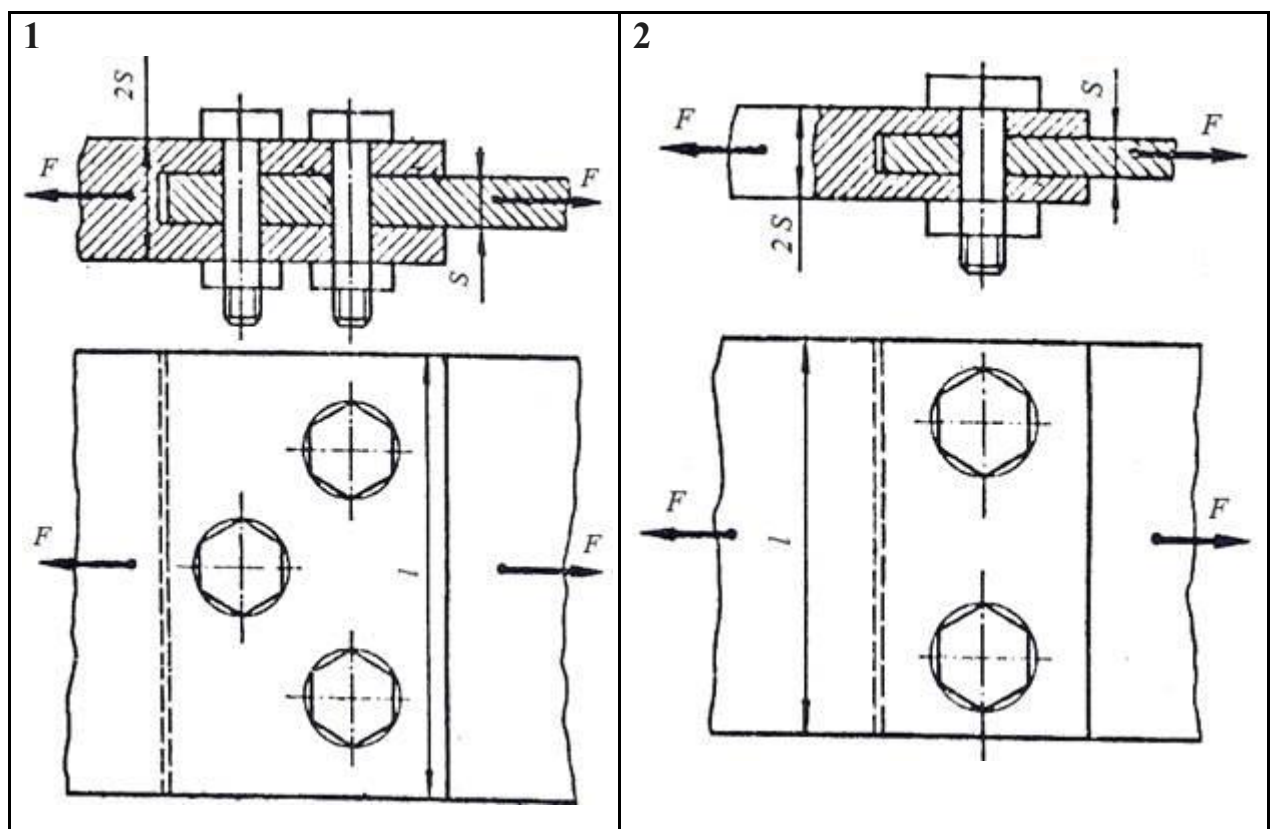
Согласно ГОСТ 24705-2004 Резьба метрическая надо взять болт с номинальным диаметром 32 мм.

Задача 1. Стальные листы соединены между собой при помощи болтов, плотно вставленных в отверстия. К листам приложены растягивающие силы F . Материал болтов - Ст3. Допускаемое напряжение на срез $[\tau]_{ср} = 80$

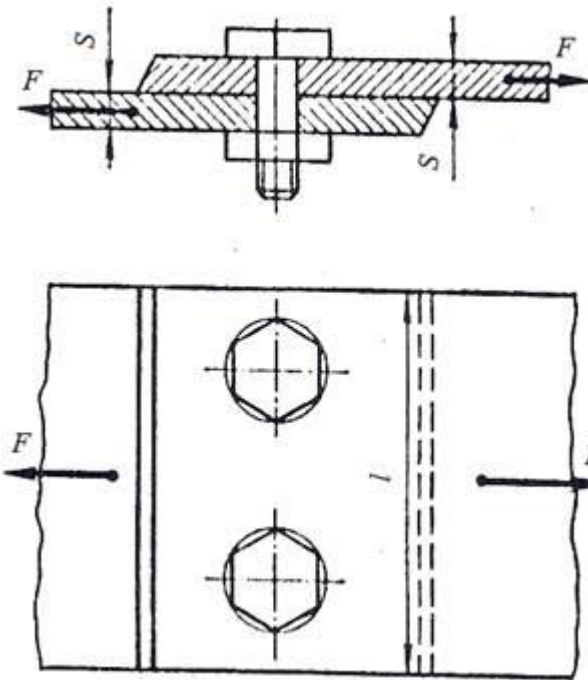
МПа. Допускаемое напряжение на смятие $[\sigma]_{\text{см}} = 160$ МПа. (рисунок 4).
 Определить диаметр болтов. Данные своего варианта взять из таблицы 1

Таблица 1 - Исходные данные

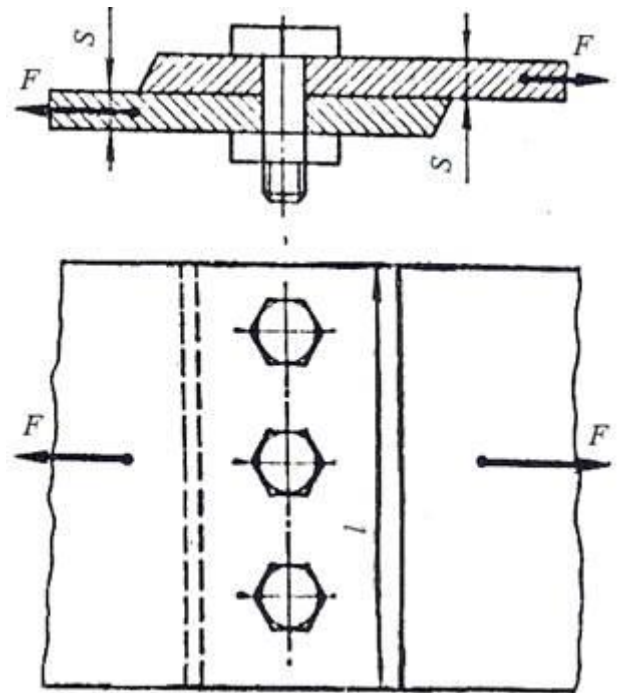
Номер схемы на рисунке 4										F	S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Варианты										кН	мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	180	14
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	200	16
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	160	10



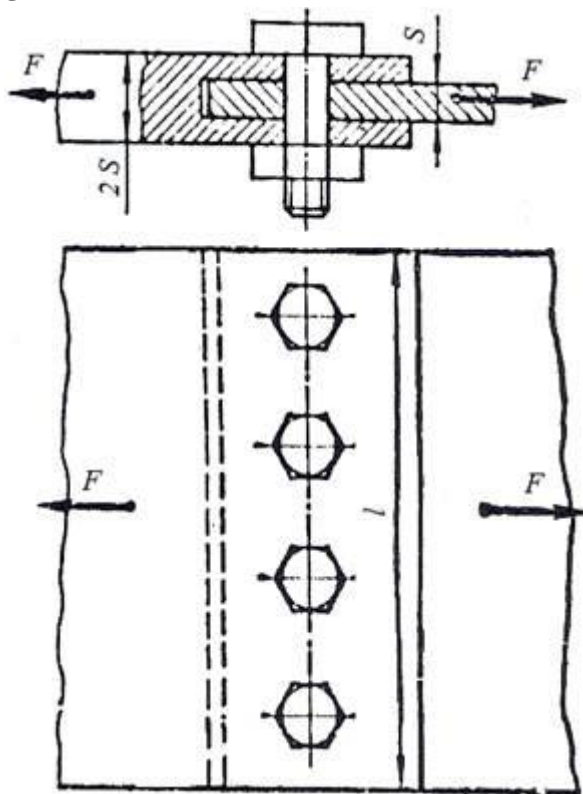
3



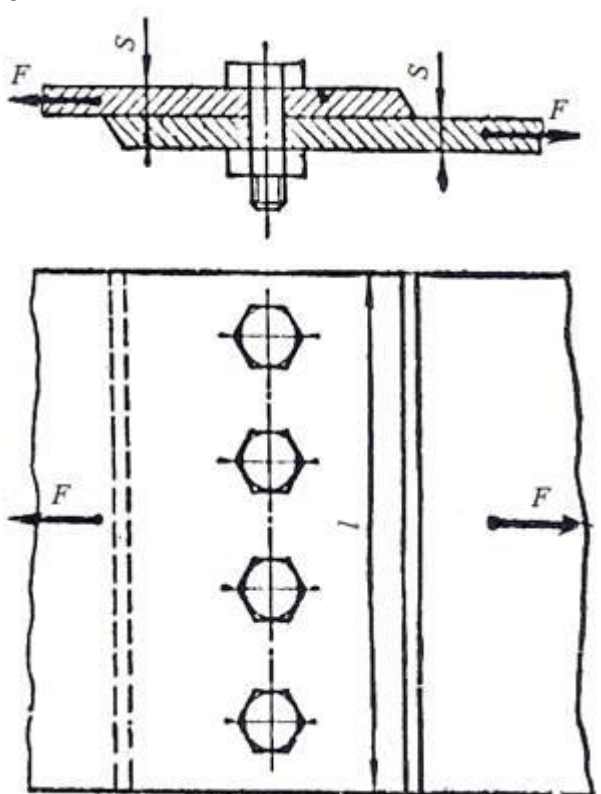
4



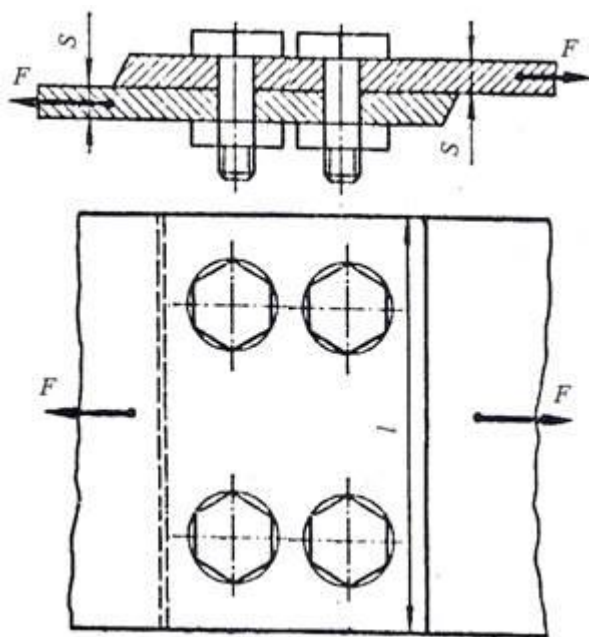
5



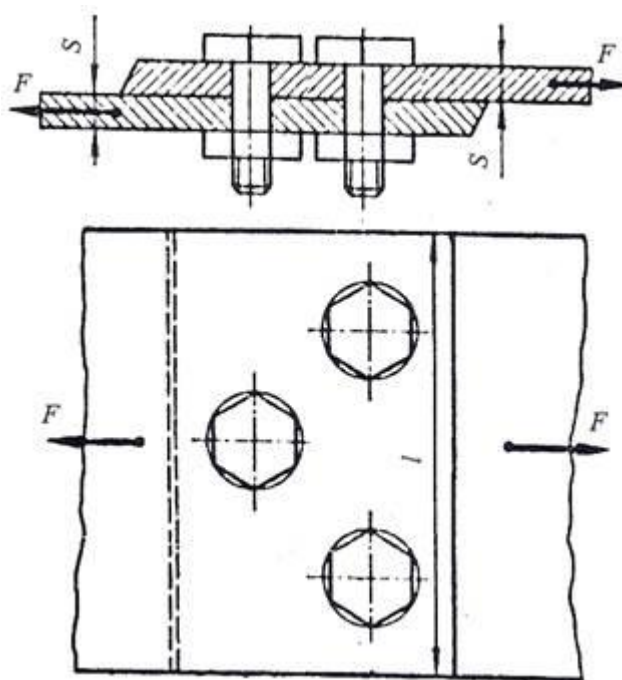
6



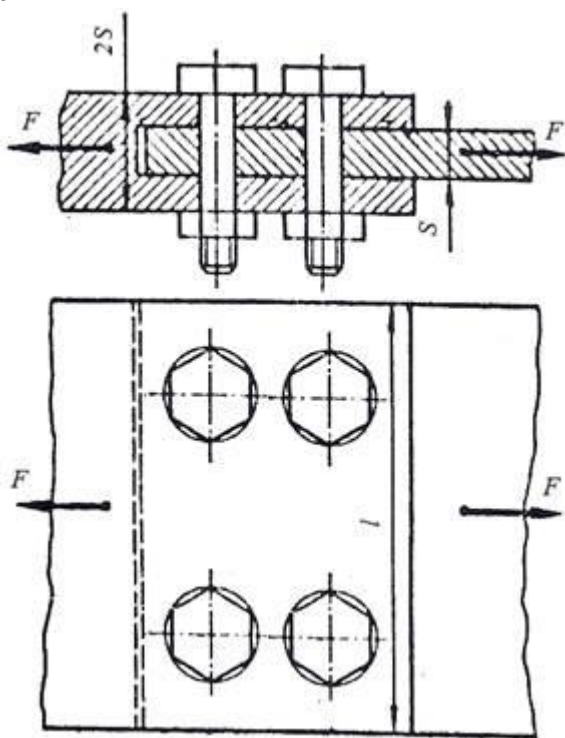
7



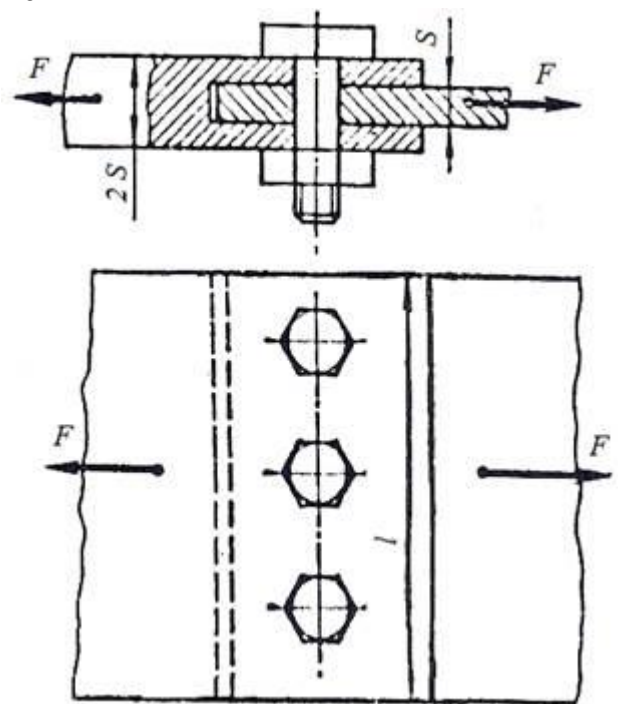
8



9



10



- Схема задачи

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Тема 2.7 Кручение. Крутящий момент 2 часа

Основные понятия и определения.

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор — крутящий момент M_k . Кручение вызывается действием внешних пар сил, приложенных в плоскости поперечного сечения тела. Крутящий момент — это внутренний силовой фактор, для его определения применяем метод РОЗУ (метод сечений). График распределения крутящих моментов по длине тела называется **эпюрой крутящих моментов**.

Правило определения крутящего момента в любом сечении: крутящий момент в любом произвольном сечении равен алгебраической сумме всех внешних моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Правило знаков: условимся считать M_k положительным, если со стороны отброшенной части стержня видим его направленным против часовой стрелки. M_k считаем отрицательным, если со стороны отброшенной части стержня видим его направленным по часовой стрелке.

Условие прочности стержня при кручении принимает вид

$$\tau_{\max} = M_k \max / W_p \leq [\tau]$$

Где $[\tau]$ — допускаемое напряжение на кручение.

$W_p = 2J_p / d$ — момент сопротивления при кручении или полярный момент сопротивления.

Полярный момент сопротивления для круга определяется по формуле

$$W_p = \pi d^3 / 16,$$

где d — диаметр круга.

Полярный момент сопротивления для кольца определяется по формуле

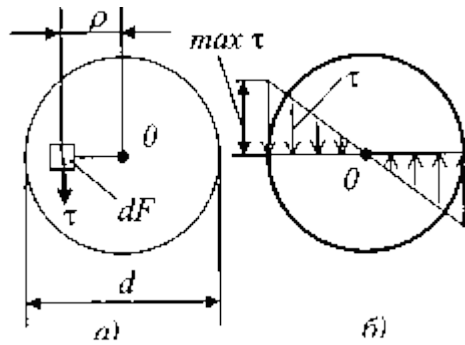
$$W_p = \pi D^3 (1 - c^4) / 16,$$

где D — наружный диаметр кольца,

$c = d/D$ — коэффициент кольца,

d — внутренний диаметр кольца

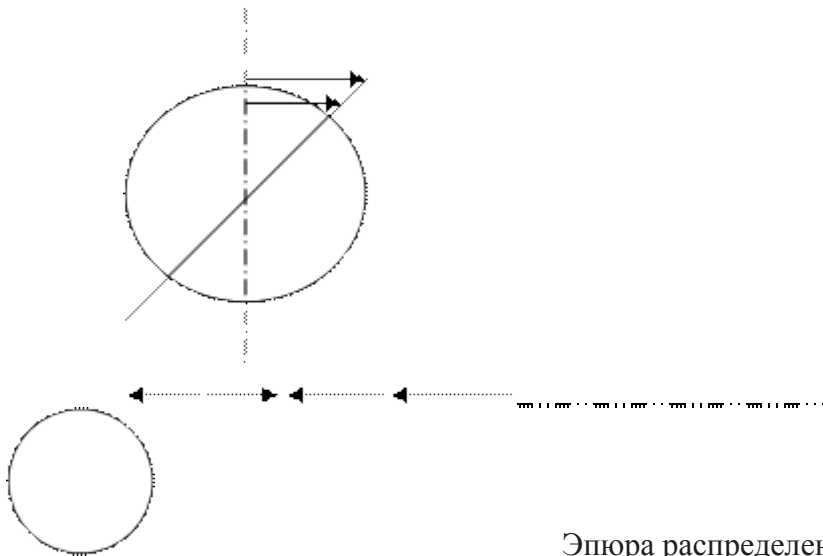
Распределение касательных напряжений по сечению не зависит от упругих свойств материала и способа нагружения, а зависит от расположения точки относительно центра сечения. Максимальные касательные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от центра. Учитывая линейный характер изменения касательных напряжений по радиусу и связанное с этим лучшее использование материала, кольцевое сечение следует признать наиболее рациональным при кручении стержня. Коэффициент использования материала тем выше, чем меньше относительная толщина трубы.



напряжений по круглому сечению

Эпюра распределение

касательных



Эпюра распределения

касательных напряжений
по кольцевому сечению

Полный угол закручивания стержня длиной l

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_p}$$

В случае, когда по длине стержня M_z и GJ_p постоянны, получаем формулу:

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p},$$

Формула справедлива, если:

1. стержень нагружен одним внешним моментом в крайнем сечении,
2. сечение стержня постоянно по всей длине,
3. однородность материала стержня по всей длине

При невыполнении хотя бы одного условия полный угол закручивания определяется как сумма углов поворота отдельных участков стержня:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{M_{zk} l_k}{(GJ_p)_k}$$

2.Задания по расчетно – графической работе по теме:

«Расчет вала на кручение».

В расчетно – графической работе требуется для вала, передающего вращение и нагруженного по схеме, выполнить следующие расчеты:

- . Построить эпюру крутящих моментов.
- . Подобрать сечение сплошного и кольцевого вала по условию прочности и жесткости.
- . Сделать сравнение весовых характеристик.
- . В опасном сечении кольцевого вала построить эпюру касательных напряжений.
- . Определить полный угол закручивания и построить эпюру φ для вала кольцевого сечения.

2.1. Таблица исходных данных.

Номер		ад/сек	2	3	4	1	2	3		τ	φ
ариант а	хемы		кВт			м				/мм ²	рад/м
		0	0	5	6	,1	,1	,1	,6	0	,3
		0	0	5	7	,2	,2	,2	,7	0	,4
		20	0	5	6	,3	,4	,3	,6	5	,3
		00	7	3	7	,4	,4	,4	,5	8	,4
		0	4	7	2	,5	,5	,5	,7	3	,5
		10	5	0	5	,6	,6	,6	,7	0	,6
		0	6	8	4	,4	,6	,8	,6	7	,5
		05	6	2	1	,2	,4	,5	,8	7	,4
		5	3	2	7	,9	,7	,4	,7	8	,5
0	0	40	6	2	4	,7	,3	,1	,6	3	,4
1		0	0	5	6	,1	,1	,1	,6	0	,3
2		0	0	5	7	,2	,2	,2	,7	0	,4
3		20	0	5	6	,3	,4	,3	,6	5	,3
4		00	7	3	7	,4	,4	,4	,5	8	,4
5		0	4	7	2	,5	,5	,5	,7	3	,5
6		10	5	0	5	,6	,6	,6	,7	0	,6

7		0	6	8	4	,4	,6	,8	,6	7	,5
8		05	6	2	1	,2	,4	,5	,8	7	,4
9		5	3	2	7	,9	,7	,4	,7	8	,5
0	0	40	6	2	4	,7	,3	,1	,6	3	,4

Расчетные схемы



. Пример выполнения работы.

Исходные данные.

Мощность: $N_1 = 20$ кВт; $N_3 = 50$ кВт; $N_4 = 70$ кВт

Угловая скорость: $\omega = 100$ рад/сек;

Коэффициент кольца: $c = 0,8$

Модуль упругости II рода: $G = 8 \cdot 10^4$ н/мм²

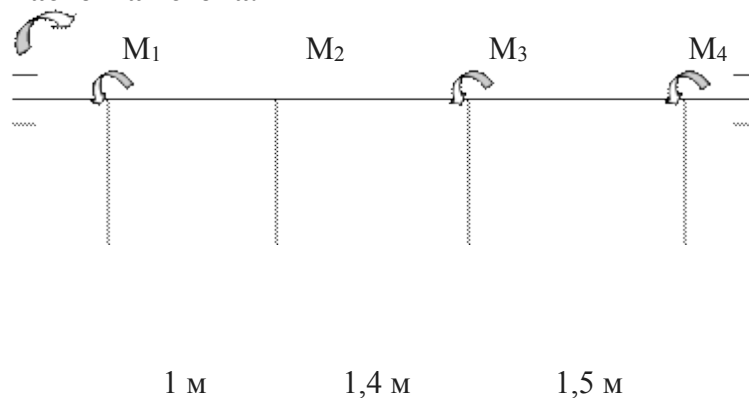
Длина участков вала: $L_1 = 1$ м, $L_2 = 1,4$ м; $L_3 = 1,5$ м

Допускаемое касательное напряжение: $[\tau] = 80$ н/мм²

Допускаемый относительный угол закручивания:

$[\varphi_0] = 0,4$ град/м.

Расчетная схема.



Решение:

Построение эпюры крутящих моментов.

Определим внешний момент M_2 из условия равновесия вала. $\sum M_i = 0$; $M_1 + M_3 + M_4 - M_2 = 0$

$M = N / \omega$

$M_1 = 20/100 = 0,2$ кН м $M_3 = 50/100 = 0,5$ кН м

$M_4 = 70/100 = 0,7$ кН м $M_2 = M_1 + M_3 + M_4 = 1,4$ кН м

Определяем крутящие моменты по участкам.

$M_{к1} = 0$

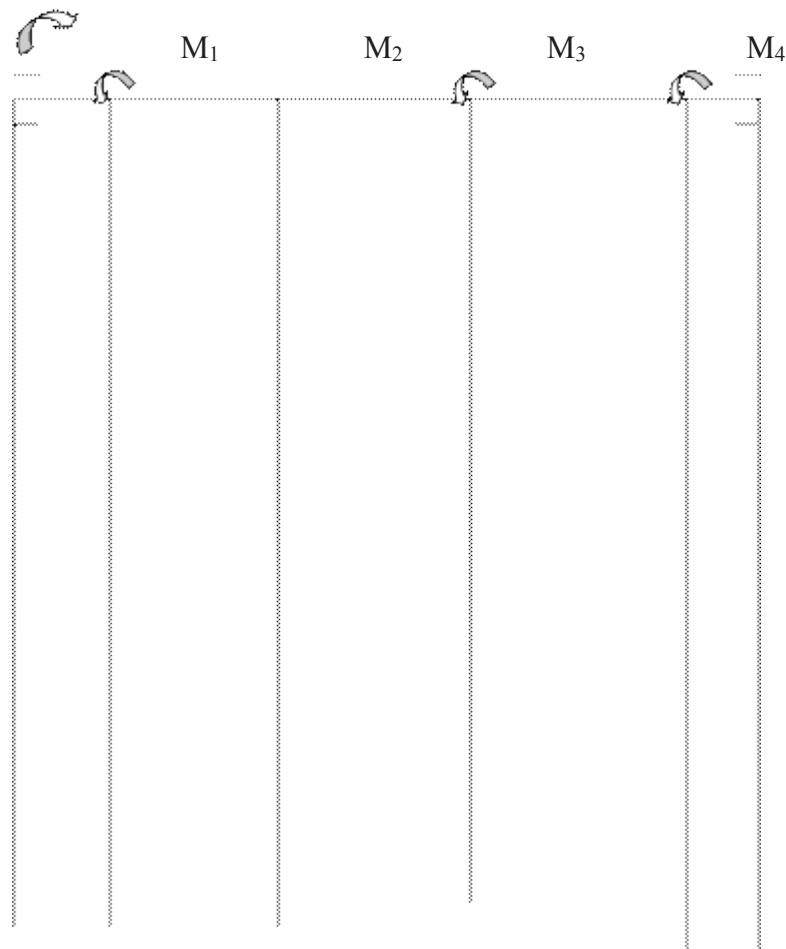
$M_{к2} = M = 0,2$ кН м

$M_{к3} = M_1 - M_2 = -1,2$ кН м

$$M_{K4} = M_1 + M_3 - M_2 = -0,7 \text{ кН м}$$

$$M_{K5} = M_1 + M_3 + M_4 - M_2 = 0$$

По полученным значения крутящих моментов строим эпюру и находим опасный участок – третий, так как на нем действует максимальный по модулю крутящий момент.



0,5 м 1 м 1,4 м 1,5 м 0,5 м

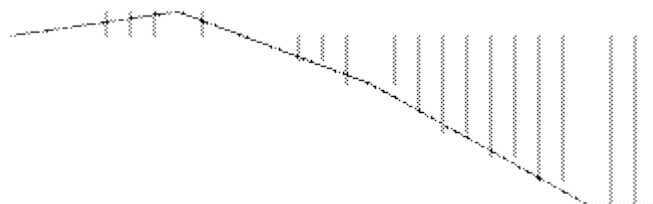
1 2 3 4 5

Эпюра крутящих моментов 0,2 кН м

1,2 кН м

Эпюра углов поворота

0,00116 рад



Практический совет

При кручении важно помнить, что гипотеза плоских сечений верна **только для круглых** (сплошных и полых) валов. Для прямоугольных сечений картина напряжений будет принципиально иной (происходит деформация сечения).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Тема 2.8 Геометрические характеристики плоских сечений

2 часа

Самостоятельная работа на тему «Геометрические характеристики плоских сечений» может включать теоретические знания, задачи и тесты.

Теоретические знания

В работе можно рассмотреть, например:

- **Статический момент площади** — взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от них до оси, лежащей в той же плоскости. Равен произведению площади фигуры на расстояние её центра тяжести до этой оси. Статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры (центральной оси), в том числе относительно оси симметрии фигуры, равен нулю. **Осевой момент инерции** — взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от них до этой оси. Осевой и полярный моменты инерции имеют одинаковую размерность: м^4 , см^4 , мм^4 .

- **Полярный момент инерции** — взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат их расстояния до некоторой точки (полюса). Характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). **Главные оси и главные моменты инерции.** Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называются главными осями инерции. Момент инерции относительно главной оси называется главным моментом инерции. Если главная ось проходит через центр тяжести фигуры, то называется главной центральной осью, а момент инерции — главным центральным моментом инерции. **Моменты инерции сечений сложной формы.** Момент инерции сечения сложной формы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций его составных частей относительно той же оси.

Задачи

В работе можно рассмотреть, например:

- **Определение моментов инерции прямоугольного сечения** относительно осей y и z , которые являются осями симметрии сечения. **Расчёт моментов инерции круглого сечения** относительно центральных осей y и z . **Определение положения главных центральных осей** и вычисление главных центральных моментов инерции сечения, состоящего из нескольких простейших фигур (прямоугольник, треугольник, круг и др.). В таком случае сечение разбивают на простейшие фигуры, вычисляют моменты инерции каждой из них и суммируют их. **Расчёт моментов инерции сечения коробчатого типа** при условии, что оси y и z — оси симметрии сечения. Поскольку оси y и z — оси симметрии, они являются главными центральными осями, поэтому положение центра тяжести сечения определено — точка пересечения осей y и z .

Рекомендации:

- Предварительно определиться, в какой системе координат планируется выполнять расчёты: правой или левой. При повороте системы координат на 180° геометрические характеристики не меняют своих численных значений.

- Поскольку к расчёту предлагается фигура, состоящая из нескольких простейших, исходные формулы можно упростить, заменяя в них интегралы на суммы.

Тесты

В работе можно использовать онлайн-тесты, например:

- **Тест №0 «Геометрические характеристики плоских сечений»** — состоит из 10 вопросов от самых простых до составных фигур. Тест включает вопросы по определению площадей, центру тяжести, моментам инерции.

- **Тест «Геометрические характеристики плоских сечений — площади фигур»** — 5 вопросов от простых к более сложным.

Важно: для успешного прохождения теста не требуется заучивание формул, нужно уметь их использовать.

Задача № 1 Геометрические характеристики плоских сечений

Для поперечного сечения, составленного из стандартных прокатных профилей, требуется:

Вычертить сечение в масштабе.

Разбить сечение на простые элементы.

Для каждой фигуры нанести центральные оси x_i ; y_i .

Выписать из сортамента для стандартных профилей значения площадей, моментов инерции и необходимые расчетные размеры.

Выбрать произвольные оси x ; y и определить положение центра тяжести сечения относительно этих осей.

Нанести положение центра тяжести на чертеж и провести центральные оси x_c ; y_c , параллельные ранее принятым осям x ; y .

Определить осевые и центробежные моменты инерции всего сечения относительно осей x_c ; y_c .

Определить направление главных центральных осей.

Вычислить значения главных центральных моментов инерции.

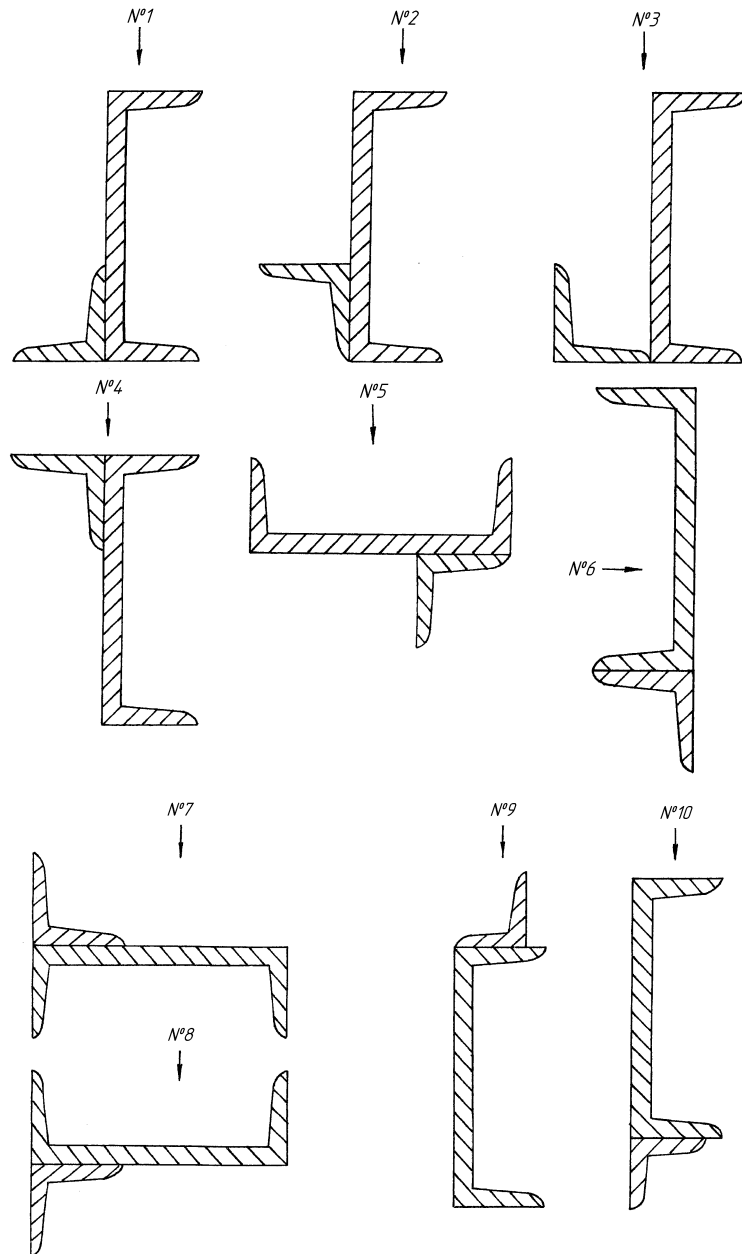
Данные для расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1

Алфавит	ГРАФЫ		
	0	1	2
	№ схемы	Уголок	Швеллер
А, К, Ф	1	80×80×8	№ 14
Б, Л, Х	2	70×70×8	№ 16
В, М, Ц	3	90×90×8	№ 18
Г, Н, Ч	4	40×40×4	№ 12
Д, О, Ш	5	63×63×5	№ 18a
Е, П, Щ	6	100×100×8	№ 22 a

Ё, Р, Ы	7	140×90×10	№ 30
Ж, С, Э	8	160×100×10	№ 27
З, Т, Ю	9	70×45×5	№ 33
И, У, Я	10	40×25×4	№ 24 а

Расчетные схемы к задаче №1



Задача № 2 Расчет ступенчатого бруса

Для ступенчатого бруса ($E=2 \times 10^5$ МПа, $\sigma_T=240$ МПа, коэффициент линейного расширения $\alpha=1,25 \times 10^{-7}$) требуется:

Вычертить расчетную схему бруса с указанием численных значений приложенных нагрузок.

Определить продольные силы и построить эпюру продольных сил.

Задавшись коэффициентом запаса прочности, вычислить допускаемые напряжения (материал бруса – сталь, $E=2 \times 10^5$ МПа, $\sigma_T=240$ МПа).

Из условия прочности найти площади поперечных сечений для всех участков бруса.

Вычислить нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса и построить эпюру нормальных напряжений.

Определить аналитически нормальное и касательное напряжения в опасном сечении на площадке, расположенной под углом α к нормальной.

Определить полное перемещение свободного конца бруса и построить эпюру перемещений.

1.

Данные для расчета приведены в таблице 2.

Таблица 2

Алфавит	ГРАФЫ											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	$q_{сх.}$	$1K_H$	$2K_H$	$3K_H$	q_1	q_2	$q_{1м}$	$q_{2м}$	$q_{3м}$	$q_{4м}$	$q_{5м}$	$q_{6м}$
А,К,Ф		0	0	0	,2		,2	,4	,3	,1	,6	
Б,Л,Х		5	5	0	,3	,9	,3	,5	,2	,4	,5	8
В,М,Ц		0	0	0	,4	,8	,6	,5	,3	,2	,4	9
Г,Н,Ч		5	5	0	,5	,7	,8	,3	,1	,6	,4	7
Д,О,Ш		0	0	0	,6	,6	,7	,9	,2	,5	,8	5
Е,П,Щ		5	5	0	,7	,5	,5	,7	,3	,4	,1	2
Ё,Р,Ы	7	50	40	30	1, 8	1, 4	0, 4	0, 8	0, 5	0, 3	0, 2	4
Ж,С,Э	8	55	45	25	1, 9	1, 3	0, 1	0, 3	0, 4	0, 6	0, 5	9
З,Т,Ю	9	60	50	20	2	1, 2	0, 9	0, 1	0, 4	0, 5	0, 6	3
И,У,Я	10	65	55	15	2, 1	1, 1	0, 7	0, 6	0, 5	0, 4	0, 3	2

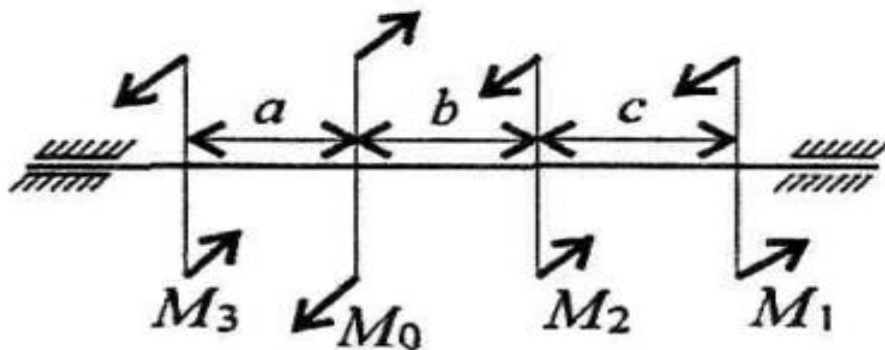
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Тема 2.9 Поперечный изгиб прямого бруса Построение эпюр.
2 часа

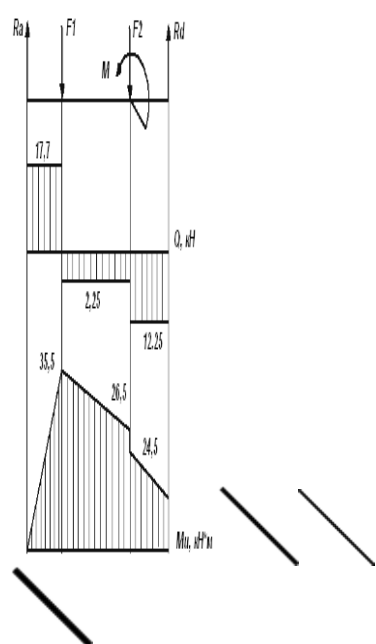
Цель работы: научиться строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Задание: Для двухопорной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Балка нагружена активными силами: сосредоточенной силой F и парой сил с моментом M . При расчете принять: $[\sigma] = 160$ МПа, $F = 10$ кН, $M = 15$ кН·м, $l = 0,3$ м.

Дано: $l_1 = 3l$; $l_2 = 3,5l$; $l_3 = 2l$; $[\sigma] = 160$ МПа, $F = 10$ кН, $M = 15$ кН·м, $l = 0,3$ м.



R A B C D R



Решение:

Освободим балку от опор, заменив их опорными реакциями.

Составляем уравнение равновесия статики и определяем неизвестные реакции опор.

$$-M - F \cdot AC - R_D \cdot AD = 0$$

$$R_{Ay} \cdot BA - F \cdot BC - R_D \cdot BD = 0$$

$$R_{Ay} \cdot CA - M - R_D \cdot CD = 0$$

где значения $\{R\} \cdot BA$ и $\{R\} \cdot AD$ из уравнения равновесия неизвестны.

2.1) Находим R_D из уравнения А

1.

$$R_D = \frac{-M - F \cdot AC}{AD} = \frac{-15 - 10 \cdot 1,95}{2,55} = -13,52$$

2.

2,2) Находим R_{Ay} из уравнения В

1.

$$R_{Ay} = \frac{-F \cdot BC - R_D \cdot BD}{BA} = \frac{(-10 \cdot 1,05) - ((-13,52) \cdot 1,65)}{0,9} = -11,808$$

Проверяем правильность полученных результатов.

1.

3,1) Подставим в уравнение полученные значения реакций .

A)

$$A) -15 - 10 \cdot 1,95 - (-13,52 \cdot 2,55) = 0$$

3,2) Подставим в уравнение полученные значения реакций R_{Ay}

$$B) R_A \cdot BA - F \cdot BC - R_D \cdot BD = 0$$

$$B) -11,808 \cdot 0,9 - 10 \cdot 1,05 - ((-13,52) \cdot 1,65) = 0$$

Условие выполняется, следовательно, реакции опор найдены верно

Делим балку (рис.4.3) на участки по характерным точкам A, B, C, D.

Определяем ординаты и строим эпюру Q_y слева направо:

$$Q_A^{\text{лев}} = 0$$

$$Q_A^{\text{прав}} = R_A + F + R_D = -11,808 + 10 + (-13,52) = -15,3 \text{ кН}$$

$$Q_B^{\text{лев}} = R_A = \text{кН}$$

$$Q_B^{\text{прав}} = F + R_D = 10 + (-13,52) = -3,52 \text{ кН}$$

$$Q_C^{\text{лев}} = R_A = \text{кН}$$

$$Q_C^{\text{прав}} = F + R_D = 10 + (-13,52) = -3,52 \text{ кН}$$

$$Q_D^{\text{лев}} = R_A + F + R_D = -11,808 + 10 + (-13,52) = -15,3 \text{ кН}$$

$$Q_D^{\text{прав}} = 0$$

Вычисляем ординаты и строим эпюру M

$$M_A = 0$$

$$M_B^{\text{лев}} = R_A \cdot BA = -11,808 \cdot 0,9 = -10,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_B^{\text{прав}} = -M - F \cdot BC = -15 - 10 \cdot 1,05 = -25,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_C^{\text{лев}} = R_A \cdot AC - M = -11,808 \cdot 1,95 - 15 = -38,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_C^{\text{прав}} = -R_D \cdot CD = 13,52 \cdot 0,6 = 8,112 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_D = 0$$

Контрольные вопросы

Что называется прямым изгибом?

Изгиб называется прямым, если внешние силы, действующие на балку, лежат в одной плоскости, (эта плоскость называется силовой плоскостью), проходящей через продольную ось балки и главную центральную ось инерции сечения.

Что называется чистым и поперечным изгибом?

Изгиб называется поперечным, если в любом поперечном сечении балки возникают отличные от нуля, неравные константе поперечные силы:

$$M_x, M_y \neq 0$$

$$Q_x, Q_y$$

Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса?

При косом изгибе в поперечных сечениях бруса действуют следующие внутренние усилия: M_z , M_y – изгибающие моменты и Q_y , Q_z – поперечные (перерезывающие) силы.

Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?

Правило знаков для внутренних усилий: изгибающие моменты – положительны, если вызывают растяжение в положительном квадранте координатной системы zOy ; поперечные силы – положительны, если под их действием отсеченный элемент поворачивается по часовой стрелке.

Как вычисляются изгибающий момент и поперечная сила в поперечном сечении бруса?

Берётся точка одна взаимодействия, далее опираясь на эту точку составляем формулу по схеме, учитывая длину двухопорной балки. Сначала левую сторону, потом правую или наоборот.

Какая существует дифференциальная зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?

Поперечная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, действующих на оставленную часть:

$$Q = \sum F_i$$

Вывод: научился строить эпюры крутящих моментов для круглого вала, и находить диаметр вала из условий прочности и жесткости.