МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине
«Математика»
для направления подготовки 08.03.01 Строительство
направленность (профиль) Городское строительство и хозяйство

Пятигорск
2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения дисциплины студенты должны:

Знать: основные понятия аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов.

Уметь: эффективно использовать методы аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов. при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

Владеть: навыками использования методов аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Математика» проводятся в компьютерном классе с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
2 семестр			
11	**Методы и способы интегрирования.** Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование	2	

	рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.		
15	**Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.** Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование. Частные производные высших порядков. Дифференцируемость и полный дифференциал функции. Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.	2	
	Итого за 2 семестр	**4**	

4. Содержание практических работ

Практическая работа 1. **Методы и способы интегрирования.** Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций.
Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл с помощью замены переменной и по частям, интегрировать элементарные дроби и рациональные функции, применять полученные умения при решении практических задач.
Теоретическая часть:

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$= \begin{Bmatrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{Bmatrix} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx\right] = e^{2x} \sin x +$

$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos x e^{2x} dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Интегрирование элементарных дробей.

Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t=ax+ b.

I. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

II. $\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot\, arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx=\left\{\begin{matrix}u=6x-5; & du=6dx;\\ x=\frac{u+5}{6}; & \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{14u+70-24}{u^2+23}du=\frac{7}{3}\int\frac{udu}{u^2+23}+\frac{23}{3}\int\frac{du}{u^2+23}=\frac{7}{6}\ln(u^2+23)+\frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}}+C=$$

$$=\frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right|+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\left\{\begin{matrix}u=x+3; & du=dx;\\ x=u-3; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$

$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-3; & du=dx;\\ x=u+3; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int\frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{array}{l} dv_1 = \dfrac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \displaystyle\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array}\right\}$

$$\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 2ax+b; \quad du = 2adx; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac-b^2; \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью *n*, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

<u>Пример:</u>

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{\begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array}\right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{array}{l} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{array}\right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)}dx$$

Т.к. $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) =$$

$$= 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-4}dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{2}{x^2+4}dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x\,dx.$ 2. $\int \arcsin x\,dx.$

3. $\int x^2 \sin x\,dx.$ 4. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx.$

5. $\int x\ln x\,dx.$ 6. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$

7. $\int e^{2x}\cos x\,dx.$ 8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$

9. $\int \sin\ln x\,dx.$ 10. $\int x^2 e^x\,dx.$

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x = z^2$);

2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ (подстановка $x = \frac{1}{z}$).

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Задача 3. Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби:

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}$.

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$.

Задача 4.

Вычислить:

1) $\int\frac{dx}{x-13}$; 2) $\int\frac{dx}{15-3x}$; 3) $\int\frac{dx}{4-7x}$; 4) $\int\frac{dx}{3-8x}$; 5) $\int\frac{3dx}{4x-9}$.

Задача 5.

Вычислить:

1) $I_1 = \int\frac{dx}{x^2+4x+14}$; 2) $I_2 = \int\frac{dx}{x^2+x+1}$; 3) $I_3 = \int\frac{dx}{x^2+3x+6}$;

4) $I_4 = \int\frac{dx}{x^2-9x+25}$; 5) $I_5 = \int\frac{dx}{x^2-7x+14}$; 6) $I_6 = \int\frac{dx}{x^2-x+14}$.

Задача 6.
Вычислить:

1) $\int \frac{dx}{5x^2+9x+10}$; 2) $\int \frac{dx}{7x^2-3x+5}$;

3) $\int \frac{dx}{9x^2+x+12}$; 4) $\int \frac{dx}{6x^2+7x+15}$;

5) $\int \frac{dx}{3x^2-11x+17}$.

Вопросы:
1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?
4. Какие дроби называют простейшими?
5. Какая дробь называется рациональной?
6. Какая рациональная дробь называется правильной?
7. Как разложить правильную дробь на простейшие?
8. В чем сущность метода неопределенных коэффициентов?

Практическая работа 2. **Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.** Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование. Частные производные высших порядков. Дифференцируемость и полный дифференциал функции. Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.
Цель: сформировать умение вычислять частные производные и дифференциал функции нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.
Теоретическая часть:

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad f'_x(x,y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t),\ y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t,\ s),\ y = y(t,\ s)$, то:

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds.$$

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y):

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

<u>Пример</u>. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz\ln x dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{x^2} = \left(f'_x\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^3} = \left(f''_{x^2}\right)'_x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f'''_{x^2 y} = \left(f''_{x^2}\right)'_y, \ ...$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} dx^k dy^{m-k}, \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m f,$$

где $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ - оператор дифференцирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

1. $z = e^{xy}$.
2. $z = x\ln(x/y)$.
3. $z = \sin(xy)$.
4. $z = e^x \cos y$.
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
6. $z = \ln(x^2 + y)$.
7. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
8. $z = \ln\sqrt[3]{xy}$.
9. $z = x\cos y + y\sin x$.
10. $z = (1+x)^2(1+y)^4$.

Задача 2.

Найти производные функции z=z(u,v):

z'_x и z'_y, $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$.

1. $z = u^2 + v^2, \quad u = x + y, \quad v = x - y$.
2. $z = \ln(u^2 + v^2), \quad u = xy, \quad v = x/y$.
3. $z = u^v, \quad u = \sin x, \quad v = \cos y$.
4. $z = u^2 + 2v^3, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = e^{xy}$.
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v), \quad u = x\sin y, \quad v = x\cos y$.
6. $z = \ln(u - v^2), \quad u = x^2 + y^2, \quad v = y$.
7. $z = u^3 + v^2, \quad u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg}(y/x)$.
8. $z = \sqrt{uv}, \quad u = \ln(x^2 + y^2), \quad v = xy^2$.
9. $z = e^{uv}, \quad u = \ln x, \quad v = \ln y$.
10. $z = \ln(u/v), \quad u = \sin(x/y), \quad v = \sqrt{x/y}$.

Задача 3.

Найти производные функций, заданных неявно:

1. $y^x = x^y$.
2. $y = 1 + y^x$.
3. $y = x + \ln y$.
4. $x + y = e^{x-y}$.
5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$.
6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.
7. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.
8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.
9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Вопросы:

1.Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.

2.Что такое полное приращение функции?

3.Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?

4.Поясните геометрический смысл частной производной.

5.Что такое дифференциал функции нескольких переменных?

6.Что такое линеаризация функций?

7.Поясните правила дифференцирования сложных и неявных функций.

8. Как найти частные производные второго, третьего,…, n-го порядка?

9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

5. Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания
по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Математика»
для направления подготовки 08.03.01 Строительство
направленность (профиль) **Городское строительство и хозяйство**

Пятигорск 2024

Содержание

Стр.

Введение

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения дисциплины студенты должны:

Знать: основные понятия аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов.

Уметь: эффективно использовать методы аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов. при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

Владеть: навыками использования методов аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, численных методов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Математика» проводятся в компьютерном классе с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование лабораторных работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
2	**Системы линейных алгебраических уравнений.** Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Численные методы решения СЛУ.	2	
8	**Дифференциальное исчисление функций одной переменной.** Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной функции в точке. Геометрический и механический смысл производной. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование	2	

	неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Численное дифференцирование.		
	Итого за 1 семестр	4	

Лабораторная работа № 1.

Системы линейных алгебраических уравнений. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Численные методы решения СЛУ.

Цель работы*:* выработать умение решать невырожденные СЛУ матричным методом, методом Крамера, методом Гаусса и применять умения для решения практических задач.

Теоретическая часть

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A\cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что основная матрица A невырожденная. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Помножив матричное уравнение $A\cdot X = B$ на матрицу A^{-1} слева, получим формулу, на которой основан матричный метод решения систем линейных уравнений:

$$X = A^{-1}\cdot B.$$

Замечание. Отметим, что матричный метод решения систем линейных уравнений в отличие от метода Гаусса имеет ограниченное применение: этим методом могут быть решены только такие системы линейных уравнений, у которых, во-первых, число неизвестных равно числу уравнений, а во-вторых, основная матрица невырожденная.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A\cdot X = B,$ где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами: $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k–ого столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 10 \end{cases}$$

Решение: Найдем основной и дополнительные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 8 - 36 - 1 + 8 = -21$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 - 9 + 20 - 90 - 5 + 12 = -42$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 60 + 20 + 36 - 10 + 20 = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -30 + 10 + 24 + 60 - 3 - 40 = 21$$

По формулам Крамера имеем

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-42}{-21}=2;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{-21}=0;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{21}{-21}=-1.$$

Ответ: x = 2, y = 0, z = -1.

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=в_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=в_m \end{cases}$$

Будем производить над системой следующие элементарные преобразования:

1. Вычеркивание уравнения вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=0$.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами двух уравнений.

Пусть теперь $a_{11}\neq 0$.(Если $a_{11}=0$,то мы поменяем местами первое уравнение с тем уравнением, где коэффициент при x_1 отличен от нуля). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на ($-\frac{a_{21}}{a_{11}}$), затем прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на ($-\frac{a_{31}}{a_{11}}$) и т.д. к последнему уравнению прибавим первое, умноженное на ($-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$). При этом получим систему

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=a_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=a_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{m2}x_2+\cdots+c_{mr}x_r+\cdots+c_{mn}x_n=a_m \end{cases}$$

Далее, применив те же рассуждения к полученной системе, исключим из уравнений, начиная с третьего x_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы придем к одному из двух случаев:

1. Либо после определенного шага получиться система, содержащая уравнение вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=в$ и $в\neq 0$. Тогда наша система не имеет решений, т.е. несовместна.
2. либо система не содержит уравнение вида $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=в$ и $в\neq 0$. Тогда рано или поздно мы придем к системе

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=a_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=a_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=a_r \end{cases}$$

Возможны два случая:

a) $r = n$. Тогда последнее уравнение последней системы имеет вид: $c_{nn}x_n = a_n$, откуда $x_n = \frac{a_n}{c_{nn}}$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т.д. из первого уравнения системы находим x_1.

b) $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.

Замечание. С практической точки зрения процесс решения системы можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей расширенной матрицей системы.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножив первую строку на $-\frac{3}{2}$, затем умножив первую строку на $-\frac{5}{2}$, наконец, умножив первую строку на -1, сложим первую строку последовательно со второй, с третьей и с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

В последней матрице мы умножили вторую и третью строку на 2. Далее 1 и 2 строки оставляем без изменения. Сперва умножим вторую строку на $-\frac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\frac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу мы получили, умножив третью строку на $\frac{1}{2}$ и сложив с четвертой строкой. Последняя четвертая строка означает, что мы имеем уравнение:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=-7$$

следовательно, по сказанному выше система несовместна.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1 \\ x_1+3x_2-13x_3+22x_4=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторую матрицу мы получим сложив сперва вторую строчку с третьей, затем сложив вторую строчку с четвертой. Нулевые строчки выбрасываем. Остается система уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1 \\ \qquad x_2-10x_3+17x_4=-2 \end{cases} \qquad (*)$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными, обозначая их: $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$

Из второго уравнения системы $(*)$ найдем x_2

$$x_2=10\alpha-17\beta-2$$

Подставив x_2 в первое уравнение, получим:

$x_1+2(10\alpha-17\beta-2)-3\alpha+5\beta=1$ или

$x_1+20\alpha-34\beta-4-3\alpha+5\beta=1$ или

$x_1=-17\alpha+29\beta+5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x_1=-17\alpha+29\beta+5 \\ x_2=10\alpha-17\beta-2 \end{cases} \qquad \alpha\in(R)$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Решить СЛУ матричным методом и методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+2x_3=-7 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=-9 \end{cases}$

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3+6x_4=18 \\ 4x_1+2x_2+5x_3+7x_4=24 \\ 3x_1+2x_2+8x_3+5x_4=13 \\ 2x_1+8x_2+7x_3+3x_4=6 \end{cases}$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 2.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной функции в точке. Геометрический и механический смысл производной. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Численное дифференцирование.

Цель работы*:* сформировать умение вычислять производные элементарных функций, сложной и обратной функций и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u=\varphi(x)$ *имеет в точке* x *производную* u'*, то в этой точке*

$$(Cu)'=Cu' \quad (C=const).$$

Пример

$$y = 5\cos x, \qquad y' = (5\cos x)' = 5(\cos x)' = -5\sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Пример

$$y = x^5 - 3x^2 + 2x - 1,$$

$$y' = (x^5)' - (3x^2)' + (2x)' - (1)' = 5x^4 - 6x + 2.$$

III. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то справедлива формула

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Пример

$y = (x^2 - 3x)\sin x$,

$y' = (x^2 - 3x)'\sin x + (x^2 - 3x)(\sin x)' = (2x - 3)\sin x + (x^2 - 3x)\cos x$.

Пример

$y = (x-1)(x-2)(x-3)$,

$y' = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$

IV. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, причем в этой точке $v \neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x \neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$y=\frac{a}{u}$; $y'=-\frac{a}{u^2}\cdot u'$ (a — постоянная величина);

$y=u^n$; $y'=nu^{n-1}\cdot u'$

(n — любое действительное число)

$$y=\sqrt{u}; \qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u';$$

$$y=a^u;\ y'=a^u\cdot\ln a\cdot u';\ y=e^u;\ y'=e^u u';\ a>0,\ a\neq 1;$$

$$y=\log_a u; \qquad y'=\frac{1}{u}u'\log_a e=\frac{u'}{u\ln a};$$

$$y=\ln u; \qquad y'=\frac{1}{u}u';$$

$$y=\sin u; \qquad y'=\cos u\cdot u';$$

$$y=\cos u; \qquad y'=-\sin u\cdot u';$$

$$y=\operatorname{tg} u; \qquad y'=\frac{1}{\cos^2 u}u';$$

$$y=\operatorname{ctg} u; \qquad y'=-\frac{1}{\sin^2 u}u';$$

$$y=\sec u; \qquad y'=\sec u\operatorname{tg} u\cdot u';$$

$$y=\operatorname{cosec} u; \qquad y'=-\operatorname{cosec} u\cdot\operatorname{ctg} u\cdot u';$$

$$y=\arcsin u; \qquad y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u';$$

$$y=\arccos u; \qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u';$$

$$y=\operatorname{arctg} u; \qquad y'=\frac{1}{1+u^2}u';$$

$$y=\operatorname{arcctg} u; \qquad y'=-\frac{1}{1+u^2}u'.$$

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x. С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x. В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x.

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u=\varphi(x)$.

<u>Пример</u> $y=u^3$. Если взять $u=x^2-3x+1$, то получим сложную функцию $y=\left(x^2-3x+1\right)^3$.

<u>Пример</u> $y=\sqrt{u}$, $u=2-x$. Тогда $y=\sqrt{2-x}$.

<u>Пример</u> $y=\dfrac{1}{u+|u|}$, $u=\sin x$. Тогда $y=\dfrac{1}{\sin x+|\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u', то существует и конечная производная от y по x, причем $y'=f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример $y=\left(1+x^2\right)^5$. Положим $y=u^5$, $u=1+x^2$. $y'=5u^4u'=5\left(1+x^2\right)^4\left(1+x^2\right)'=10x\left(1+x^2\right)^4$.

Пример $y=\sin 3x$, т. е. $y=\sin u$, где $u=3x$. $y'=\cos u\, u'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример $y=(1+\sin 2x)^3$, $y'=3(1+\sin 2x)^2(1+\sin 2x)'=3(1+\sin 2x)^2\cos 2x(2x)'=6(1+\sin 2x)^2\cos 2x$.

Пусть дана функция $y=f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, ε - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения ε. Если функция $y=f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E, для которого $y=f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x=g(y)$, которую называют обратной для функции $y=f(x)$. Она имеет своей областью задания множество ε, а областью изменения E; E и ε поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y=f(x)$ и $x=g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x)\neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Найти производную функции в точке x=0:

1. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^3 + x^2 \sin\dfrac{2}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 \cos\dfrac{1}{9x}\right) + 2x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x \cos\dfrac{1}{5x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \operatorname{tg}\left(x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x \sin\dfrac{3}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. 1. $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$
2. $y = \sqrt{x}$
3. $y = -ctg\ x - x$
4. $y = \dfrac{1}{x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{x^2}$
6. $y = 5\sin x + 3\cos x$
7. $y = 5(tg\ x - x)$
8. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$
9. $y = 2^{x^2}$
10. $y = x\sqrt{x}$

Задача 3. Найти производные заданных функций:

1. $y = 2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. 3. $y = \ln^2(1 - \cos x)$.

4. $y = \ln(\arcsin\sqrt{x})$. 5. $y = \dfrac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1 + \ln^2 3}$. 6. $y = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y = \operatorname{arctg} 3^{\sqrt{x}}$. 9. $y = \ln(1 + \sqrt{\operatorname{th} x})$.

10. $y = \ln\sin 3 - \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 4. Вычислить производную функции

а) $y = 5^x + x\ln x$, в точке $x_0 = 1$;

б) $y(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x \quad -4x^3 + 5$, в точке $x_0 = 1$;

в) $f(x) = 2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 4$;

г) $f(x) = 4x^3 + 6x + 3$ в точке $x_0 = 1$.

Задание 5. Вычислить производные:

а)

1) $y = \arcsin 5x$; 2) $y = \arcsin\sqrt{x}\ (x > 0)$; 3) $y = \arcsin mx$;

4) $y = \arccos 6x$; 5) $y = \arccos(1 - x^2)$; 6) $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

б)

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{1 + x^2}$.

в)

1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Вопросы

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
4. Какая функция называется сложной?
5. Объясните правила дифференцирования сложной функции.
6. Какая функция называется обратной данной?
7. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»
для студентов направления подготовки 08.03.01 Строительство
направленность (профиль) Городское строительство и хозяйство

Пятигорск, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Математика и информатика» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Математика» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине

		(модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-1: Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата	ИД-1$_{ОПК-1}$ Применяет математический аппарат аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной. ИД-2$_{ОПК-1}$ Применяет математический аппарат теории функции нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории дифференциальных уравнений. ИД-3$_{ОПК-1}$ Применяет математический аппарат теории вероятностей и математической статистики. ИД-4$_{ОПК-1}$ Применяет математический аппарат численных методов.	Решает задачи профессиональной деятельности на основе использования математического аппарата.

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;

- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (акад.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	4,5	0,5	5
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Подготовка к лабораторным занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	9	1	10
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Выполнение контрольной работы	Комплект заданий для контрольной работы	13,5	1,5	15
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-9	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	63	7	70
Итого за 1 семестр			**90**	**10**	**100**
2 семестр					
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	4,5	0,5	5
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Подготовка к практическим занятиям	Комплект заданий и вопросов по разделам	9	1	10

		дисциплины			
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Самостоятельное изучение литературы по темам 10-26	Комплект заданий и вопросов по разделам дисциплины	45	5	50
ИД-1 ОПК-1 ИД-2 ОПК-1 ИД-3 ОПК-1 ИД-4 ОПК-1	Выполнение контрольной работы	Комплект заданий для контрольной работы	13,5	1,5	15
Итого за 2 семестр					**80**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические указания по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические указания по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

Успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.