МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине
«Алгебра»
для направления подготовки 09.03.02 Информационные системы и технологии
направленность (профиль) Информационные системы и технологии обработки цифрового контента

Пятигорск
2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины: формирование набора общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

2. Оборудование и материалы

Практические работы по дисциплине «Алгебра» проводятся в учебной аудитории с мультимедиа оборудованием: проектор, компьютер, экран настенный.

3. Наименование практических работ

№ Темы дисциплины	Наименование тем дисциплины, их краткое содержание	Обьем часов	Из них практическая подготовка, часов
1 семестр			
1	Основные алгебраические структуры. Операции и алгебры. Морфизмы. Алгебры с одной операцией: полугруппы, моноиды, группы. Алгебры с двумя операциями: кольца, поля	1	1
2	Поле комплексных чисел. Действия над комплексными числами	1	1
3	Формы представления комплексных чисел	1	1
4	Действия над матрицами	1	1
5	Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца)	1	1
6	Обратная матрица	1	1
7	Ранг матрицы	1	1
8	Исследование систем линейных уравнений на совместность	1	1
9	Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера	1	1
10	Решение невырожденных систем линейных уравнений матричным методом	1	1
11	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	1	1
12	Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений	1	1
13	Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями	1	1
14	Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	1	1

15	Векторные пространства и их простейшие свойства	1	1
16	Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов векторного пространства	1	1
17	Размерность и базис векторного пространства	1	1
18	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов	1	1
	Итого за 1 семестр	**18**	**18**

4. Содержание практических работ

Практическое занятие 1. Основные алгебраические структуры. Операции и алгебры. Морфизмы. Алгебры с одной операцией: полугруппы, моноиды, группы. Алгебры с двумя операциями: кольца, поля.

Цель: выработать представление об основных алгебраических структурах и их свойствах

Содержание:

бинарная операция;

полугруппа, группа, абелева группа, кольцо, поле.

Теоретическая часть:

В математике и различных её приложениях важную роль играют такие математические объекты, которые называются алгебраическими структурами. В широком смысле под алгебраической структурой понимают всякое множество, на котором заданы некоторые операции (т.е. законы, ставящие в соответствие одному или паре элементов по определённому правилу другой элемент), обладающие определёнными свойствами.

Большинство свойств и результатов об этих множествах получают, опираясь на конкретную природу элементов этих множеств и на конкретный смысл операций над ними. В то же время многие результаты можно получить независимо от природы этих множеств и конкретного смысла операций, а исходя только из свойств этих операций.

Среди таких свойств операций рассматриваются: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, наличие специальных элементов, обладающих определёнными свойствами (нулевой, единичный (нейтральный), обратный элемент к данному и т.д.).

В зависимости от количества операций и свойств, которыми они обладают, различают следующие алгебраические структуры.

Полугруппой называется множество G, на котором задана бинарная операция * (часто её называют умножением и обозначают ·), для которой выполняется свойство ассоциативности, т.е. для любых *a,b,c Î G* $(a*b)*c = a*(b*c)$. Если в полугруппе имеется нейтральный элемент e (нулевой, единичный), т.е. такой, что $a*e=e*a=a$ для любого *a*Î*G*, то полугруппа G называется *унитарной* (полугруппой с нулём; полугруппой с единицей). Если в полугруппе выполняется коммутативный закон, т.е. если для любых *a*,*b*Î*G* $a*b = b*a$, то полугруппа называется *коммутативной* (или *абелевой*).

Унитарная полугруппа называется *группой*, если для любого *a*Î*G* существует обратный элемент *b* Î *G*, т.е. такой, что $a*b = b*a = e$. Если дополнительно выполняется свойство коммутативности, то группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), и в этом случае обычно применяется аддитивная символика, т.е. операция обозначается +, нейтральный элемент 0, обратный элемент к a называют противоположным и обозначается: $-a$.

Если в абелевой группе (K , +) наряду с операцией сложения + задана ещё одна операция: произведение * (или ·), которая связана с + дистрибутивными законами: $(a+b)*c=(a*c)+(b*c)$, $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ для любых *a*,*b*,*c* Î *Equation.3* K и $0*a=a*0=0$ для любого *a* Î *Equation.3* K, то K называется *кольцом*. Если в кольце (К , +, *) дополнительно для произведения * выполняется ассоциативный закон, т.е. если

$(a*b)*c=a*(b*c)$ для любых *a,b,c* Î K,

то кольцо называется *ассоциативным*. А если кроме того существует единичный элемент 1, т.е. такой, что $1*a = a*1=a$ для любого *a*Î *K*, то кольцо называется *унитарным* (или кольцом с 1). Если в кольце выполняется коммутативный закон для *, то кольцо называется *коммутативным*.

Ассоциативное унитарное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент a имеет обратный a^{-1}, т.е. такой, что $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$ называется *телом*. Коммутативное тело называется *полем*.

Вопросы и задачи:

1.Является ли следующее множество группой, кольцом, полем относительно сложения чисел и умножения чисел:

- множество действительных чисел;
- множество рациональных чисел;
- множество целых чисел;
- множество неотрицательных рациональных чисел;
- множество натуральных чисел;
- множество неотрицательных действительных чисел;
- множество четных целых чисел;
- множество неотрицательных целых чисел;
- множество простых чисел;
- множество комплексных чисел?

2.Что такое бинарная операция?

3.Дайте определение группоида.

4.Какая бинарная операция называется коммутативной; ассоциативной?

5.Что такое нейтральный элемент; симметричный элемент?

6.Как называется симметричный; нейтральный элемент для сложения? Для умножения?

7.Дайте определения полугруппы, группы и подгруппы. Приведите примеры.

8.Кольца. Тела. Поля. Дайте определение. Приведите примеры.

Практическое занятие 2. Поле комплексных чисел. Действия над комплексными числами.

Цель: сформировать представление поле комплексных чисел, выработать умение выполнять действия над комплексными числами

Содержание:

комплексное число, мнимая единица, равные комплексные числа, сопряженные комплексные числа;

изображение комплексного числа на плоскости *XOY;*

сложение, вычитание, умножение, деление комплексных чисел.

Теоретическая часть:

Упорядоченная пара двух действительных чисел (x, y) называется *комплексным числом* $z = (x, y)$. Множество комплексных чисел обозначается C.

Числа вида (x, 0) – это действительные числа, числа вида $(0, y)$, где $y \neq 0$ есть чисто мнимые числа, число $(0,1)$ мнимая единица и обозначается $i = (0,1)$, тогда $(0, y) = y(0,1) = iy$, число $(0,0)$ есть действительное число нуль.

Число $x = \operatorname{Re} z$ называется *действительной* (вещественной) частью комплексного числа $z = (x, y)$, а число $y = \operatorname{Im} z$ *мнимой* частью комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

Соотношение больше-меньше для комплексных чисел не вводится.

Комплексное число $z = (x, y) = x + iy$ Equation.3 изображается в плоскости *XOY* точкой M с координатами (x,y), либо вектором, начало которого находится в точке *O(o,o)*, а конец в точке $M(x,y)$.

Действия над комплексными числами

Пусть даны $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right), z_2 \neq 0.$$

$z = x + iy$ – алгебраическая форма записи комплексного числа, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 +$$

$$+ ix_2y_1 + i^2 y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Комплексные числа $z = (x, y) = x + iy$ Equation.3 и $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ Equation.3, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются знаком, называются *взаимно сопряженными* или *комплексно сопряженными*.

Нетрудно видеть, что $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\arg z = -\arg \bar{z}$ (кроме чисел $z = x < 0$; для них $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$).

Деление комплексных чисел в алгебраической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Действительная часть $x = \operatorname{Re} z$ и мнимая часть $y = \operatorname{Im} z$ комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \ \operatorname{Im} z = i\frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Пример. Показать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Решение: Докажем это равенство, используя определение

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Пример. Найти произведение и частное чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + i$.

Решение:

$$z_1z_2 = (2 - 3i)(-4 + i) = -8 + 2i + 12i - 3i^2 = -8 + 14i + 3 = -5 + 14i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{-4 + i} = \frac{(2 - 3i)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-8 - 2i + 12i + 3i^2}{(-4)^2 - i^2} = \frac{-8 + 10i - 3}{4 + 1} =$$

$$= \frac{-11 + 10i}{5} = -\frac{11}{5} + \frac{10i}{5} = -\frac{11}{5} + 2i,$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + i}{2 - 3i} = \frac{(-4 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{-8 - 12i + 2i + 3i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{-8 - 10i - 3}{4 + 9} =$$

$$= \frac{-11 - 10i}{13} = -\frac{11}{13} - \frac{10i}{13}.$$

Пример: Вычислить значение выражения $\frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(3 - 4i)(4 - 5i)}$ Equation.3 .

Решение. Используя правила раскрытия скобок и выполнения действий над комплексными числами, получим

$$\frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(3 - 4i)(4 - 5i)} = \frac{2 - 3i - 4i + 6i^2}{12 - 15i - 16i + 20i^2} = \frac{2 - 7i + 6i^2}{12 - 31i + 20i^2} = \frac{-4 - 7i}{-8 - 31i} = -\frac{4 + 7i}{8 + 31i} =$$

$$=-\frac{(4+7i)(8-31i)}{(8+31i)(8-31i)}=\frac{32-124i+56i-217i^2}{64-961i^2}=\frac{249-68i}{1025}=\frac{249}{1025}-\frac{68i}{1025}.$$

Equation.3

Вопросы и задачи:

1.Вычислить:

а) $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^8$;

б) $\left(-\sqrt{3+\mathrm{i}}\right)^3$;

в) $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{12}$.

2. Определить модуль комплексного числа:

а) $z=2-3i$; б) $z=-7+2i$; в) $z=3-4i$; г) $z=13-i$; д) $z=\dfrac{-4-2i}{-3-i}$; е) $z=\dfrac{7-i}{1+7i}$.

Практическое занятие 3. Формы представления комплексных чисел.

Цель: выработать умение представлять комплексное число в форме, требуемой для решения задачи

Содержание:

модуль, аргумент комплексного числа;

тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа;

выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Теоретическая часть:

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется ее расстоянием ρ от полюса *O*: $|OM|=\rho$ ($\vec{\rho}$ полярный радиус – вектор точки) и углом φ, образованным отрезком *OM* полярной осью *Ox* (φ полярный угол точки). Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместит с полюсом, а ось *Ox* направить по полярной оси, то прямоугольные координаты *x* и *y* точки $M(x,y)$ Equation.3 и ее полярные координаты ρ и φ связаны формулами $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$;

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

Тогда комплексное число можно записать в виде

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Эта формула дает тригонометрическую форму комплексного числа. При этом, $|z|=\rho=|\vec{\rho}|=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем комплексного числа*, а угол $\varphi=\mathrm{Arg}z$ – *аргументом комплексного числа*. Угол $\varphi=\mathrm{Arg}z$ определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

где $\arg(z)$ есть главное значение $Arg(z)$, определяемое условием $-\pi<\arg z\le\pi$, причём:

$$
\arg(z)=\begin{cases}
arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если}, x>0,\\
\pi+arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если}, x<0, y\geq 0,\\
-\pi+arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если}, x<0, y<0,\\
\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}, x=0, y>0,\\
-\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}, x=0, y<0.
\end{cases}
$$

Имеют место следующие соотношения

$$
tg(Arg(z))=\frac{y}{x},\ \sin(Arg(z))=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos(Arg(z))=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.
$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы либо равны, либо отличаются на величину, кратную 2π :

$$
|z_1|=|z_2|,\ Arg(z_1)=Arg(z_2)+2\pi n\ \ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots).
$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$
z_1\cdot z_2=\rho_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=
$$

$$
=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2))=
$$

$$
=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).
$$

То есть,

$$
|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\ Arg(z_1z_2)=Argz_1\cdot Argz_2.
$$

Это правило распространяется на любое число сомножителей. Если $z_1=z_2=\ldots=z_n$, то получим *формулу Муавра*

$$
z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).
$$

То есть, $|z^n|=|z|^n$, $Argz^n=nArgz+2\pi k$, $(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$.

Свойства модуля комплексных чисел

1. $|\bar{z}|=|z|$,
2. $z\bar{z}=|z|^2$,
3. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$,
4. $|z^n|=|z|^n$,
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}, z_2\neq 0$,
6. $|\mathrm{Re}\,z|\leq|z|$, $|\mathrm{Im}\,z|\leq|z|$
7. $|z_2+z_1|\leq|z_2|+|z_1|$,
8. $\big||z_2|-|z_1|\big|\leq|z_2-z_1|$.

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$
\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=
$$

$$
=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=
$$

$$
=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).
$$

То есть

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg z_1 - Arg z_2.$$

Извлечения из комплексного числа корня n-ой степени

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,1,2,...,n-1$.

Эта формула дает ровно n различных корней при $k = 0,1,2,...,n-1$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Доказано, что на комплексные степени положительных чисел распространяются все правила действий со степенями и

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Если $x = 0$, то имеет место *формула Эйлера*:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Используя формулу Эйлера, получим еще одну форму записи комплексного числа – показательную.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i\mathrm{Arg}z} = |z|e^{i\arg z}.$$

Операции над числами в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)},$$

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} = |z|^n e^{in\arg z},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\arg z + 2\pi k}{n}},\ \text{где } k = 0,1,2,...,n-1.$$

Показательная функция комплексного переменного z $f(z) = e^z$ является периодической с периодом $2\pi ki$, так как

$$f(z + 2\pi ki) = e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k) = e^z,$$

т.е. $f(z + 2\pi ki) = f(z)$.

Если $z = 0$, то $e^{2\pi i} = 1$ и $e^{2\pi ki} = 1$.

<u>Пример</u>**:** Комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3i}$ представить в тригонометрической форме.

<u>Решение:</u> Здесь $x = –2$, $y = 2\sqrt{3}$. По формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

получаем

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4.$$

По формулам

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

получаем

$$\cos\varphi=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2};\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$, то $\varphi=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$, т.е.

$$\varphi=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ k\in Z$$

где Z – множество целых чисел (0, ±1, ±2, …).

Поскольку φ принадлежит II четверти, то $\varphi=\operatorname{Arg}z=\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, а главное значение аргумента $\varphi=\frac{2}{3}\pi$.

Поэтому число z в тригонометрической форме имеет вид

$$z=4(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Можно использовать и другие значения Arg$z$:

$$z=4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ .$$

<u>Пример</u>**:** Представить числа $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

<u>Решение</u>**:** Так как $r_1=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, $tg\varphi_1=-\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$, но $y>0$, $x<0$, то есть $\varphi_1=\frac{2}{3}\pi$, то $z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$, а $r_2=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$, $tg\varphi_2=-\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$, но $y<0$, $x>0$, то есть $\varphi_2=-\frac{\pi}{3}$, то $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

<u>Пример</u>**:** Найти $\frac{z_1}{z_2z_3}$ Equation.3, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме, если $z_1=1+i$ Equation.3, $z_2=\sqrt{3}+i$ Equation.3 и $z_3=1+\sqrt{3}i$ Equation.3.

<u>Решение</u>**:** Учитывая что, $-\pi<\varphi\le\pi$ Equation.3, найдем модель и аргумент каждого комплексного числа:

для $z_1: r_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ Equation.3, $\varphi_1=arctg1=\frac{\pi}{4}$ Equation.3,

для $z_2: r_2=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ Equation.3 и $\varphi_2=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ Equation.3,

для $z_3: r_3=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$ Equation.3 и $\varphi_3=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ Equation.3.

Тогда заданные числа в тригонометрической форме имеют вид

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),\ z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}),\ z_3 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Следовательно,

$$z_2 \cdot z_3 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \cdot 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) =$$

$$= 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2 z_3} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}{4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})) =$$

,

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Equation.3

Пример. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3}$.

При $k = 0,1,2$ получаются корни

$$\alpha_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

При $k = 3$ $\alpha_3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$, что совпадает с α_0. Все последующие корни будут повторяться, так что различных корней будет только три.

Вопросы и задачи:

1. Найти действительную и мнимую части числа

а) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^3$, б) $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$.

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа

а) $1 + i^{123}$, б) $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$, в) $(1 + i)^8 \cdot (1 - i\sqrt{3})^{-6}$.

3. Выполните арифметические действия над комплексными числами. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

1.1. $\sqrt[4]{\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2 - i)^3 - 6 + 9i}}$.

1.2. $\sqrt[3]{\frac{(2 - 2i)^4 + 72 + 4i}{(1 - 2i)^2 + 5i}}$.

1.3. $\sqrt[6]{\frac{(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2}{48 \cdot (1 + i)^{10}}}$.

1.4. $\sqrt[2]{\frac{(2 - i)^2 - 3}{(-1 + i)^8}}$.

1.5. $\sqrt[3]{\dfrac{(1-2i)^3+(1+2i)^3}{44\cdot(1+i)}}$.

1.6. $\sqrt[3]{\dfrac{33\cdot(2+2i)^5}{(1+3i)^2 14}}$.

1.7. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

1.8. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.9. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.10. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.12. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$.

1.13. $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.14. $\sqrt[4]{\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)}{2}}$.

1.15. $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.16. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.17. $\sqrt[3]{-8i}$.

1.18. $\sqrt[3]{\dfrac{(1-2i)^3+(1+2i)^3}{44\cdot(1+i)}}$.

1.19. $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.20. $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$.

1.21. $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.22. $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

1.23. $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.24. $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$.

1.25. $\sqrt[4]{\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)}{2}}$.

1.26. $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$.

1.27. $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

1.28. $\sqrt[2]{\dfrac{(2-i)^2-3}{(-1+i)^8}}$.

4.Изобразите найденные числа на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^6-60+2i}{(2-i)^3-6+9i}}$,

б) $\sqrt[3]{\dfrac{(2-2i)^4+72+4i}{(1-2i)^2+5i}}$,

в) $\sqrt[6]{\dfrac{(2+3i)^2-(2-3i)^2}{48\cdot(1+i)^{10}}}$.

Практическое занятие 4. Действия над матрицами.

Цель: выработать умение применять алгоритм выполнения действий над матрицами на практике

Содержание:

понятие матрицы, виды матриц;

алгоритмы сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц.

Теоретическая часть:

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Сложение матриц.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ тогда

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью B - A матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица O, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A.

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha a_{ij} \|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\alpha = 3$, $\alpha A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j – го столбца матрицы A.

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

Имеем

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 5\\ -1\cdot(-2)+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ -11 & 14\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1-1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+1\cdot 3\\ 3\cdot 1+5\cdot(-1) & 3\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 21\end{pmatrix}$$

$$AB\neq BA$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

A = и B = .

Вычислите следующие выражения:

а) ;

б) .

Задача 2. Даны матрицы

A = , B = , C=, D = , F = .

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) .

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

A = и B = .

Вычислите следующие выражения:

а) ;

б) ;

в) .

Задача 4. Даны матрицы

A = , B = , C = , D = (–1 , 2, 3), X = .

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) 2;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) .

Задача 5. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка

A = и B =

Вычислите , и .

Задача 6. Даны матрицы

A = , B = , C = , D = , F =

Задача 7. Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) и ;

б) и ;

в) и ;

г) и ;

д) ;
е) .

Практическое занятие 5. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца).

Цель: выработать умение применять алгоритм вычисления определителя n-го порядка

Содержание:

минор, алгебраическое дополнение элемента

алгоритм вычисления определителя n-го порядка

Теоретическая часть:

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы А.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим, что не квадратная матрица не имеет определителя.

Число $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически формула дл я вычисления определителя третьего порядка выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\1&1&-1&4\\2&3&1&3\\3&1&0&5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1&4\\3&1&3\\1&0&5\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-1&4\\2&1&3\\3&0&5\end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1&4\\2&3&3\\3&1&5\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&1\\3&1&0\end{vmatrix}=1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot9=13-6-34-27=-54$$

Рассмотренный определитель можно вычислить другим способом. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. имеем определитель:

$$\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\0&2&-3&1\\0&5&-3&-3\\0&4&-6&-4\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}=1\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\5&-3&-3\\4&-6&-4\end{vmatrix}=24-30+36+12-36-60=-54$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка А = и В = .

Вычислите следующие выражения:

а) ;

б)

в) .

Проверьте, что .

Задача 2. Даны квадратные матрицы 3– го порядка

А = и В =

Вычислите следующие выражения:

а) ;

б)

в) .

Проверьте, что .

Задача 3. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix}2&3&5\\1&4&-2\\-1&0&1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+b\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}-5&1&-4&1\\1&4&-1&5\\-4&1&-8&-1\\3&2&6&2\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}1&-1&2&3&-2\\1&1&-1&2&1\\2&1&3&-2&1\\3&2&1&-2&3\\-2&1&3&4&5\end{vmatrix}$.

Практическое занятие 6. Обратная матрица.

Цель: выработать умение применять алгоритм поиска обратной матрицы

Содержание:

обратная матрица, вырожденная матрица, присоединенная матрица, транспонированная матрица;

алгоритм поиска обратной матрицы.

Теоретическая часть:

Пусть задано некоторое число a и пусть существует такое число m, что am = 1. Число m в этом случае называется обратным для a. Если, теперь, рассмотрим квадратную матрицу n–го порядка, то единичная матрица E будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу E.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица X (того же порядка n) называется обратной для A, если AX = XA = E.

Квадратная матрица n-го порядка называется особенной (вырожденной), если ее определитель равен нулю. Если же Δ (A) $\neq$ 0, то A называется несобственной (невырожденной) матрицей.

Для нахождения обратной матрицы, рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и пусть } \quad \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Обратной матрицей A^{-1} будет матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где Aij есть алгебраическое дополнение элемента aij определителя $\Delta = \Delta$ (A).

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

Проверка: A A-1 = E

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12\\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0\\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Вопросы и задачи:

1.Задана квадратная матрица 3– го порядка, найти обратную матрицу.

, , , .

2.Может ли матрица иметь две обратных?

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix} 41\\ 48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 93\\ 155\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix} 4\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19\\ 15\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\\ 14\end{pmatrix}$$

Практическое занятие 7. Ранг матрицы.

Цель: выработать умение применять алгоритмы вычисления ранга матрицы

Содержание:

минор матрицы, ранг матрицы, элементарные преобразования матриц, ступенчатая матрица; метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований.

Теоретическая часть:

Рассмотрим некоторую, *не обязательно квадратную* матрицу A. Выберем какие-нибудь s номеров строк $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и s номеров столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_s$.

Определение. *Минором порядка* s матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка s, образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M^{\,i_1\ldots i_s}_{\,j_1\ldots j_s}=\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_s}\\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_s}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \ldots & a_{i_s j_s}\end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка s, сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_s$.

Определение. В матрице A размеров $m \times n$ минор порядка s называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $s+1$ равны нулю или миноров порядка $s+1$ у матрицы A вообще нет.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $s+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $s+2$, а, следовательно, и всех бо́льших порядков.

Определение. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m \times n$ справедливо соотношение $0 \le r(A) \le \min(m,n)$.

Рассмотрим способы вычисления ранга матрицы:

а) *Метод окаймляющих миноров*

Пусть в матрице найден минор M k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Существует только один минор третьего порядка, окаймляющий выбранный минор M_2. Вычислим его.

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5\cdot 7 + 2\cdot 4\cdot(-3) + 3\cdot 7\cdot(-2) -$$

$$- 3\cdot 5\cdot(-3) - 4\cdot 7\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot 7 = -35 - 24 - 42 + 45 + 28 + 28 = 0.$$

Значит, минор M_2 базисный, а ранг матрицы равен его порядку, т.е. $r(A) = 2$.

Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) *Метод элементарных преобразований*

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановку строк;
4) такие же преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

<u>Теорема</u>. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A)=r$.

В самом деле, $r(A)=r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11}\cdot b_{22}\cdot\ldots\cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r+1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

<u>Пример:</u> Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>Решение:</u> Поменяем местами первую и вторую строку (т.к. первый элемент второй строки -1 и с ней будет удобно выполнять преобразования). В результате получим матрицу, эквивалентную данной.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -5 & 8 & 5\\ -1 & 2 & -3 & -4\\ 3 & -7 & 11 & 9\end{pmatrix}$$

Обозначим i-тую строку матрицы – C_i. Нам необходимо привести исходную матрицу к треугольному виду. Первую строку будем считать ведущей, она будет участвовать во всех преобразованиях, но сама остается без изменений.

На первом этапе выполним преобразования, позволяющие получить в первом столбце нули, кроме первого элемента. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2 $(C_2 - 2C_1)$, к третьей строке прибавим первую$(C_3 + C_1)$, а из третьей вычтем первую, умноженную на 3 $(C_3 - 3C_1)$. Получаем матрицу, ранг которой совпадает с рангом данной матрицы. Обозначим ее той же буквой A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую. При этом имеем:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получена матрица треугольного вида, и можно сделать вывод, что $r(A)=2$, т. е. числу ненулевых строк. Коротко решение задачи можно записать следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 8 & 5\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -3 & -4\\ 3 & -7 & 11 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -5 & 8 & 5\\ -1 & 2 & -3 & -4\\ 3 & -7 & 11 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2-2C_1,\ C_3+C_1,\ C_4-3C_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{C_4-C_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Вопросы и задачи:

Вычислить ранг матрицы двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -6 & 2 & 4 & 8\\ -3 & 18 & -6 & -12 & -24\\ 0 & 6 & 7 & 23 & 11\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7 & 13 & 0\\ 7 & 7 & -6 & 3 & 12\\ -16 & -11 & -17 & 56 & -36\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & -5 & 8 & 11\\ 2 & -2 & -5 & 1 & 0\\ 9 & 41 & -10 & 37 & 55\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}3 & 15 & -9 & 20 & 7\\ 3 & -1 & -6 & 1 & 2\\ 6 & -18 & -9 & -17 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -4 & 13 & 0\\ -2 & 0 & 4 & 1 & 2\\ 0 & -10 & 4 & -27 & -2\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & 10 & -7\\ 3 & 5 & -14 & 2 & 2\\ 16 & 55 & -103 & 64 & -21\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -9 & 8 & 16\\ 1 & 2 & -5 & 6 & 12\\ 5 & 6 & -19 & 20 & 40\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 12 & 0 & 9\\ -2 & 4 & 6 & 11 & 8\\ 2 & 29 & 48 & 22 & 43\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & 4 & 2\\ 6 & 4 & 1 & 8 & 1\\ 15 & -11 & 7 & 20 & 7\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -12 & 3 & 7\\ 2 & 5 & 6 & -9 & 0\\ 5 & 20 & -30 & 0 & 21\end{pmatrix}$$

Практическое занятие 8. Исследование систем линейных уравнений на совместность.

Цель: выработать умение исследовать СЛУ на совместность

Содержание:

совместная и несовместная СЛУ, определенная и неопределенная СЛУ, однородная СЛУ; теорема Кронекера-Капелли, теорема о числе решений СЛУ.

Теоретическая часть:

Линейным (относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$) называют алгебраическое уравнение первой степени, т.е. уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, где $a_1, ..., a_n, b$ – числа. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

В общем случае число уравнений в системе не обязательно совпадает с числом неизвестных: m может быть меньше, равно или больше числа n. Числа a_{ij} (вещественные или комплексные) называются *коэффициентами системы*; b_i – *свободными членами*; $x_1, x_2, ..., x_n$ – *неизвестными*.

Систему можно записать в матричной форме:

$$A\,\overline{x} = \overline{b},$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\bar{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Если $b_1=b_2=\dots=b_m=0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*. Матрицу A называют *матрицей системы*. *Расширенной матрицей системы* линейных уравнений называют матрицу A, к которой добавлен (справа) столбец свободных членов $\bar{b}$. Такую матрицу будем обозначать в дальнейшем символом $(A\,|\,b)$.

Определение. Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система, обладающая хотя бы одним решением, называется *совместной*.

Относительно каждой системы линейных уравнений могут быть поставлены следующие вопросы:

1) Совместна заданная система или нет?
2) В случае, если система совместна, как определить, сколько она имеет решений – одно или несколько?

Вопрос о совместности системы линейных уравнений полностью решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. *Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. чтобы* $r(A\,|\,b)=r(A)$.

Если совместность системы линейных уравнений установлена, то возникает вопрос о том, сколько она имеет решений. Ответ о числе решений системы линейных уравнений дает следующая теорема

Теорема (о числе решений). *Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности, т.е. ранг r матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы. Тогда, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r=n$), то система имеет единственное решение. Если же ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r<n$), то система имеет бесконечное множество решений, а именно: некоторым $n-r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определятся уже единственным образом.*

Пример: Исследовать систему линейных уравнений на совместность:

$$\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$$

Решение: Запишем систему уравнений в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Поменяем местами первую и вторую строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 2 & -1 & 1 & | & -2 \\ 1 & -3 & -2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Первую строку матрицы будем считать ведущей (первый элемент строки равен 1), она не будет меняться при преобразованиях. Будем стремиться привести матрицу к треугольному виду. Для того чтобы в первом столбце матрицы получить нули, выполним следующие преобразования: из второй строки вычтем первую, умноженную на 2, а от третьей вычтем первую. Получим матрицу, равносильную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -5 & | & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Чтобы получить матрицу треугольного вида, необходимо вычесть из третьей строки вторую. Окончательно получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг расширенной матрицы системы равен 3, ранг основной матрицы системы равен 2, т.е. $r(A\,|\,b) \neq r(A)$, следовательно, система несовместна.

Вопросы и задачи:

1.Исследовать систему линейных уравнений на совместность:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

2. Определить количество решений однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Практическое занятие 9. Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: выработать умение применять алгоритм выполнения действий над матрицами на практике

Содержание:

невырожденная СЛУ, теорема Крамера;

алгоритм поиска решений невырожденной СЛУ.

Теоретическая часть:

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Здесь a_{ik} ($i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$) — коэффициенты системы, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные и $b_1, \ldots, b_n$ – свободные члены.

Совокупность n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ называется решением системы, если при подстановке их в каждое уравнение вместо неизвестных все уравнения обращаются в тождества.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система решений не имеет, то она называется несовместной.

Квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей (или просто матрицей) системы.

Матрица порядка n×(n+1)

$$A_{\text{расш}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = & b_n \end{cases}$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами:

$x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k–ого столбца столбцом свободных членов.

<u>Пример</u>. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 10 \end{cases}$$

<u>Решение</u>: Найдем основной и дополнительные определители.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{vmatrix}=6-6+8-36-1+8=-21\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & -3\\ 3 & -3 & 1\\ 10 & 1 & -2\end{vmatrix}=30-9+20-90-5+12=-42$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & -3\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 10 & -2\end{vmatrix}=-6-60+20+36-10+20=0$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & 3\\ 4 & 1 & 10\end{vmatrix}=-30+10+24+60-3-40=21$$

По формулам Крамера имеем

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-42}{-21}=2;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{-21}=0;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{21}{-21}=-1.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Вопросы и задачи:

Используя формулы Крамера, найти решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+3x_2-x_3=11,\\ x_1-2x_2+2x_3=-7\end{cases}$; д) $\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=-4,\\ x_1+x_2-x_3=2,\\ 4x_1+x_2-3x_3=-5\end{cases}$; е) $\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=12,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=6,\\ 2x_1-x_2-x_3=-9\end{cases}$

Практическое занятие 10. Решение невырожденных систем линейных уравнений матричным методом.

Цель: выработать умение решать невырожденные СЛУ матричным методом

Содержание:

алгоритм решения невырожденных СЛУ матричным методом.

Теоретическая часть:

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A\cdot X=B,$$

где

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Будем предполагать, что основная матрица A невырожденная. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Помножив матричное уравнение $A\cdot X=B$ на матрицу A^{-1} слева, получим формулу, на которой основан матричный метод решения систем линейных уравнений:

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Замечание. Отметим, что матричный метод решения систем линейных уравнений в отличие от метода Гаусса имеет ограниченное применение: этим методом могут быть решены только такие системы линейных уравнений, у которых, во-первых, число неизвестных равно числу уравнений, а во-вторых, основная матрица невырожденная.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Вопросы и задачи:

1. Решить систему линейных уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

Практическое занятие 11. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: выработать умение решать СЛУ методом Гаусса
Содержание:
метод последовательного исключения неизвестных.
Теоретическая часть:

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \text{в}_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \text{в}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = \text{в}_m \end{cases}$$

Будем производить над системой следующие элементарные преобразования:

1. Вычеркивание уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами двух уравнений.

Пусть теперь $a_{11} \neq 0$.(Если $a_{11} = 0$,то мы поменяем местами первое уравнение с тем уравнением, где коэффициент при x_1 отличен от нуля). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на ($-\frac{a_{21}}{a_{11}}$), затем прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на ($-\frac{a_{31}}{a_{11}}$) и т.д. к последнему уравнению прибавим первое, умноженное на ($-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$). При этом получим систему

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mr}x_r + \cdots + c_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Далее, применив те же рассуждения к полученной системе, исключим из уравнений, начиная с третьего x_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы придем к одному из двух случаев:

1. Либо после определенного шага получиться система, содержащая уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \text{в}$ и $\text{в} \neq 0$. Тогда наша система не имеет решений, т.е. несовместна.
2. либо система не содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \text{в}$ и $\text{в} \neq 0$. Тогда рано или поздно мы придем к системе

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = a_r \end{cases}$$

Возможны два случая:

a) $r = n$. Тогда последнее уравнение последней системы имеет вид: $c_{nn}x_n = a_n$, откуда $x_n = \frac{a_n}{c_{nn}}$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т.д. из первого уравнения системы находим x_1.

b) $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.

Замечание. С практической точки зрения процесс решения системы можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей расширенной матрицей системы.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножив первую строку на $-\frac{3}{2}$, затем умножив первую строку на $-\frac{5}{2}$, наконец, умножив первую строку на -1, сложим первую строку последовательно со второй, с третьей и с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

В последней матрице мы умножили вторую и третью строку на 2. Далее 1 и 2 строки оставляем без изменения. Сперва умножим вторую строку на $-\frac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\frac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу мы получили, умножив третью строку на $\frac{1}{2}$ и сложив с четвертой строкой. Последняя четвертая строка означает, что мы имеем уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$$

следовательно, по сказанному выше система несовместна.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторую матрицу мы получим сложив сперва вторую строчку с третьей, затем сложив вторую строчку с четвертой. Нулевые строчки выбрасываем. Остается система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ \qquad x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases} \qquad (*)$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными, обозначая их: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$

Из второго уравнения системы (*) найдем x_2

$$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$$

Подставив x_2 в первое уравнение, получим:

$x_1 + 2(10\alpha - 17\beta - 2) - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 + 20\alpha - 34\beta - 4 - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5 \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2 \end{cases} \qquad \alpha \in (R)$$

Вопросы и задачи:

1.Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

2.Являются ли системы уравнений, соответствующие матрицам, получающимся в результате элементарных преобразований строк расширенной матрицы, эквивалентными? Обоснуйте ответ.

Практическое занятие 12. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

Цель: выработать умение находить фундаментальную систему решений СЛУ
Содержание:

система линейных однородный уравнений, фундаментальная система решений.

Теоретическая часть:

Система **m** линейных уравнений с **n** переменными называется системой линейных однородных уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0; 0; …; 0).

Если в СЛУ m = n , а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, как это следует из формул Крамера. Ненулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа переменных, или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Иначе: *система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при rang(A) < n.*

Обозначим решение системы через $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$,…,$x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. Если строка $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — решение системы (*), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots, \lambda k_n)$— также решение этой системы.
2. Если строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ —решения системы (*), то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1, c_1 k_2 + c_2 l_2, \ldots, c_1 k_n + c_2 l_n)$$

также решение данной системы.

Убедиться в справедливости указанных свойств решений системы линейных однородных уравнений можно непосредственной подстановкой их в уравнения системы.

Из сформулированных свойств следует, что всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (*), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Решения $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k$ равна нулю, только при условии что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

<u>Определение</u>. Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (*) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

<u>Теорема.</u> Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений (*) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы (*) состоит из n – r решений.

Общим решением системы (*) линейных однородных уравнений называется множество всех ее решений, записанных в виде: $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_k e_k$, где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — любая фундаментальная система решений, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные числа и k = n – r .

Общее решение неоднородной системы m линейных уравнений с n переменными равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных линейных уравнений и произвольного частного решения этой системы.

<u>Пример</u>**.** Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, поэтому система имеет единственное нулевое решение: x = y = z = 0.

Пример. Найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений и записать фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение: Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, поэтому система имеет бесконечное множество решений. Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13 \neq 0$, то этот минор можно принять за базисный. Поскольку rang A = 2, n = 3, возьмем первые два уравнения системы и найдем ее общее решение.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3, \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам Крамера и задав свободной переменной x_3 значение $x_3 = c_1$ (c_1 – произвольное число), получаем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & 4 \\ -5c_1 & -3 \end{vmatrix} = -3c_1 + 20c_1 = 17c_1; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & c_1 \\ 1 & -5c_1 \end{vmatrix} = -15c_1 - c_1 = -16c_1.$$

Отсюда находим, что

$$x_1 = \frac{-17c_1}{-13} = \frac{17}{13}c_1, \qquad x_2 = \frac{-16c_1}{-13c_1} = \frac{16}{13}c_1, \qquad x_3 = c_1.$$

Итак $x_1 = \frac{17}{13}c_1, \quad x_2 = \frac{16}{13}c_1, \quad x_3 = c_1$ - общее решение.

Полагая $c_1 = 1$, получим частное решение $x_1 = \frac{17}{13}, \quad x_2 = \frac{16}{13}, \quad x_3 = 1.$

Или в матричном виде $X=\begin{pmatrix} 17/13\cdot c_1 \\ 16/13\cdot c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=c_1\cdot\begin{pmatrix} 17/13 \\ 16/13 \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из единственного вектора $e_1=\begin{pmatrix} 17/13 \\ 16/13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: общее решение $x_1=\frac{17}{13}c_1,\qquad x_2=\frac{16}{13}c_1,\qquad x_3=c_1,$

где c_1 - произвольное число. $e_1=\left(\frac{17}{13};\frac{16}{13};1\right)$- фундаментальная система решений.

Вопросы и задачи:

Найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений и записать фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -18x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -12x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -13x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 0. \end{cases}$

Практическое занятие 13. ***Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями.***

Цель: выработать умение выполнять линейные операции над векторами; действия над векторами, заданными проекциями

Содержание:

вектор, нулевой вектор, коллинеарные векторы, равные векторы;
сложение векторов по правилу треугольника, сложение векторов по правилу параллелограмма, вычитание векторов, умножение вектора на число.

Теоретическая часть:

Направленный отрезок будем называть вектором и обозначать $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *или* $\overline{a}, \overline{в}, \ldots$

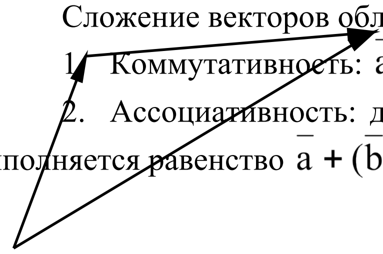
Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают и обозначают $\overline{o}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Два вектора называются равными, если выполнены следующие три условия: 1) длины векторов равны, 2) векторы параллельны (коллинеарны), 3) векторы направлены в одну и ту же сторону.

1. Сложение векторов

Суммой $\overline{a}+\overline{в}$ Equation.3 двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ Equation.3 называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ Equation.3 в конец вектора $\overline{b}$ Equation.3 при условии, что вектор $\overline{b}$ Equation.3 приложен к концу вектора $\overline{a}$ Equation.3 (правило треугольника) и записывают $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$ Equation.3 .

Сложение векторов обладает следующими основными свойствами:



1. Коммутативность: $\overline{a}$ Equation.3 + $\overline{b}$ Equation.3 = $\overline{b}$ Equation.3 + $\overline{a}$ Equation.3
2. Ассоциативность: для любых векторов $\overline{a}$ Equation.3 , $\overline{b}$ Equation.3 и $\overline{c}$ Equation.3 выполняется равенство $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ Equation.3

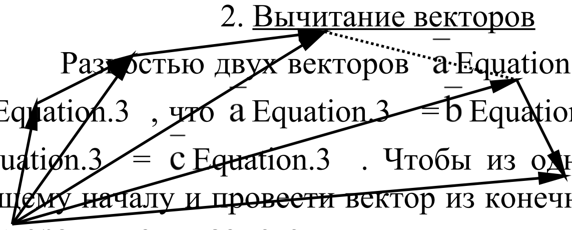
3. Прибавление нулевого вектора к любому вектору $\bar{a}$ Equation.3 не меняет последнего: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$. Equation.3

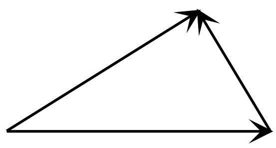
4. Сумма вектора $\bar{a}$ Equation.3 и противоположного вектора $\bar{a}$ Equation.3 [1] равна нулевому вектору, т. е. $\bar{a}$ Equation.3 + $\bar{a}$ Equation.3 [1] =0

Из второго свойства следует, что если даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$, Equation.3 расположенные так, что конец предыдущего вектора является началом последующего, то сумма $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}$, Equation.3 будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\bar{a}$ Equation.3 $_1$ в конец вектора $\bar{a}$ Equation.3 $_n$.

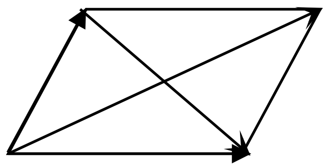
2. Вычитание векторов

Разностью двух векторов $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ Equation.3 называется такой третий вектор $\bar{c}$ Equation.3 , что $\bar{a}$ Equation.3 = $\bar{b}$ Equation.3 + $\bar{c}$ Equation.3 и обозначает $\bar{a}$ Equation.3 - $\bar{b}$ Equation.3 = $\bar{c}$ Equation.3 . Чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно их отнести к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора – вычитаемого в конечную точку вектора – уменьшаемого.





Замечание. Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) правилом параллелограмма: если векторы $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ Equation.3 приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\bar{a}$ Equation.3 + $\bar{b}$ Equation.3 есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ Equation.3 , а вторая диагональ, идущая из конца вектора $\bar{b}$ Equation.3 в конец вектора $\bar{a}$ Equation.3 есть разность $\bar{a}$ Equation.3 - $\bar{b}$ Equation.3 .



3. Произведение вектора на число

Произведением α $\bar{a}$ Equation.3 (или $\bar{a}$ Equation.3 α) вектора $\bar{a}$ Equation.3 на вещестренное число a Equation.3 называется вектор $\bar{b}$ Equation.3 , коллинеарный вектору $\bar{a}$ Equation.3 , (причем вектор $\bar{b}$ Equation.3 имеет длину, равную $|a|$ Equation.3 $|\bar{a}|$ Equation.3) и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$ Equation.3 в случае a Equation.3 › 0 и противоположное направление в случае a Equation.3 ‹ 0.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\bar{a}$ Equation.3 на число a Equation.3 вектор $\bar{a}$ Equation.3 растягивается (сжимается) в a Equation.3 раз.

При этом, если a Equation.3 › 1, то $\bar{a}$ Equation.3 растягивается, если 0< a Equation.3 <1, то вектор $\bar{a}$ Equation.3 сжимается и вектор α $\bar{a}$ Equation.3 сохраняет то же направление, что и вектор $\bar{a}$ Equation.3 .

Если же а Equation.3 ‹ 0, то вектор $\bar{a}$ Equation.3 растягивается при |а Equation.3 |› 1 и сжимается при |а Equation.3 |‹ 1 и при этом происходит изменение направления на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. а Equation.3 ($\bar{a}$ Equation.3 + $\bar{b}$ Equation.3) = а Equation.3 $\bar{a}$ + а Equation.3 $\bar{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов).
2. (а Equation.3 + β) $\bar{a}$ Equation.3 = α$\bar{a}$ Equation.3 + β$\bar{a}$ Equation.3 (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел).
3. а(β$\bar{a}$ Equation.3) = (αβ) $\bar{a}$ Equation.3 (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Так как по определению вектор есть направленный отрезок, а проекции направленного отрезка на оси координат находят как разности одноименных координат конца и начала направленного отрезка, то точно также находят проекции вектора на координатные оси. Эти проекции и называются координатами вектора.

Например, пусть даны точки A(3, -2, 5) и B(-1, 2, 3). Тогда координатами вектора $\overline{AB}$ будут: -1-3=-4; 2-(-2)=4, 3-5=-2 и обозначают $\overline{AB}$={-4, 4, -2}.

В дальнейшем, координаты (проекции на оси) мы будем обозначать $\bar{a}$ Equation.3 ={x, y, z}.

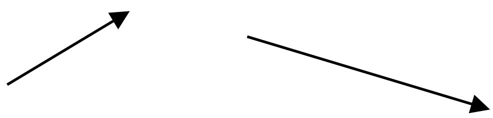
Отметим, что действия над векторами можно произвести в координатах.

Пусть даны векторы в координатах: $\bar{a}$ Equation.3 ={x_1, y_1, z_1} и $\bar{b}$ Equation.3 = {x_2, y_2, z_2}.

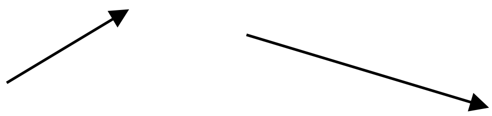
Тогда: $\bar{a}$ Equation.3 + $\bar{b}$ Equation.3 = {$x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$; $z_1 + z_2$}, $\bar{a}$ Equation.3 - $\bar{b}$ Equation.3 = {$x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$; $z_1 - z_2$}, а Equation.3 $\bar{a}$ = {а Equation.3 x_1, а Equation.3 y_1, а Equation.3 z_1}.

Вопросы и задачи:

Задача 1. По данным векторам *и построийте векторы , , и*



Задача 2. По данным векторам *и* постройте векторы , *и* .



Задача 3. Какому условию должны удовлетворять векторы *и* , чтобы векторы *и* были коллинеарны. Какой геометрический смысл имеет это условие?

Задача 4. Определите координаты начала вектора , если его конец совпадает с точкой .

Задача 5. Пусть в некотором базисе *и* . Найдите координаты вектора в этом базисе.

Вопросы:

1. Что называется геометрическим вектором?
2. Какие векторы считаются равными?
3. Как определяется длина вектора?
4. Что такое орт вектора AB?
5. Как определяется угол между векторами?
6. Какие векторы называются ортогональными?
7. Какие векторы называются коллинеарными?
8. Какие векторы называются компланарными? Как определяется сумма векторов AB и BC?
9. Как определяется сумма векторов AB и AC?

10. Как определяется произведение вектора и действительного числа?
11. Как определяется разность векторов AB и AC?
12. Какими свойствам обладают линейные операции с векторами?
13. Что такое координаты вектора в фиксированном базисе?
14. Как сложить векторы, если заданы их координаты в некотором базисе?
15. Как умножить вектор на число, если заданы его координаты в некотором базисе?

Практическое занятие 14. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.
Цель: выработать умение применять на практике скалярное, векторное и смешанное произведения векторов в соответствии с геометрическими, физическими приложениями
Содержание:
скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, свойства произведений векторов
выражение произведений векторов через координаты
приложения произведений векторов
Теоретическая часть:

Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ Equation.3 . Скалярными произведениями двух векторов $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ Equation.3 называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}| \times |\bar{b}| \cos J$, где J - угол между векторами Equation.3

Можно дать другое определение скалярного произведения двух векторов. Из теории проекций известно, что

$np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos J$ и $np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos J$.

Т.о. скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на первый вектор.

$(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{b}| np_{\bar{b}}\bar{a}$ *или* $(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}| np_{\bar{a}}\bar{b}.$

Скалярное произведение векторов обладает следующими основными свойствами:

1. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ Equation.3 обращается в нуль в том случае, когда по крайней мере один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны.
2. Скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно произведению длин этих векторов, если данные векторы параллельны, т. е. φ = 0.

$$\left(\bar{a}\,\bar{b}\right) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos 0 = |\bar{a}| \times |\bar{b}|$$

Отсюда следует, что скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату длины этого вектора, т. е. $\left(\bar{a} \times \bar{a}\right) = |\bar{a}|^2$

3. Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством умножения: $\left(\bar{a}\,\bar{b}\right) = \left(\bar{b}\bar{a}\right)$.
4. Скалярное произведение обладает распределительным свойством относительно суммы векторов: $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \left(\bar{a}\,\bar{c}\right) + \left(\bar{b}\bar{c}\right)$.

Пусть даны два вектора в координатах: $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ *и* $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который обладает следующими свойствами:

1) $\bar{c}$ ^ $\bar{a}$ *и* $\bar{c}$ ^ $\bar{b}$, то есть вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, где лежат вектора $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$;

2) Длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ к второму вектору $\bar{b}$ вокруг вектора $\bar{c}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$.

Векторное произведение обозначают символом $\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]$ или $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

а) Основные свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулевому вектору в том и только в том случае, когда эти векторы параллельны.

Из этого свойства следует, что векторное произведение любого вектора на самого себя, т.е. $[\bar{a}\bar{a}] = 0$.

2. Векторное произведение двух векторов антикоммутативно, а именно: $[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$

3. Векторное произведение обладает свойствами сочетательности относительно числового множителя: $\alpha[\bar{a}\bar{b}] = [\alpha\bar{a} \cdot \bar{b}]$ или $[\bar{a} \cdot \alpha\bar{b}]$.

4. Векторное произведение векторов обладает распределительным свойством относительно векторов.

Векторное произведение векторов в координатах

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в координатах $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$[\bar{a}\bar{b}] = \bar{c}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Пример. Пусть даны векторы $\bar{a} = \{2, -1, 4\}$ и $\bar{b} = \{3, 1, 0\}$

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2l_3 + 12l_2 + 3ll_3 - 4l_1 = -4l_1 + 12l_2 + 5l_3.$$

т.е. $[\bar{a}\bar{b}] = \bar{c} = \{-4, 12, 5\}$.

Пусть даны три вектора $\bar{a}$ Equation.3 , $\bar{b}$, $\bar{c}$. Если из трех векторов любые два вектора умножить векторно, а затем полученный вектор $\bar{d}$ = [$\bar{a}$ Equation.3 $\bar{b}$] умножить на третий вектор $\bar{c}$ скалярно, то в результате мы получим число, которое и называется смешанным произведением трех векторов и обозначают: либо $\bar{a}$ Equation.3 $\bar{b}\,\bar{c}$, либо ([$\bar{a}$ Equation.3 $\bar{b}$]$\bar{c}$).

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a}$ Equation.3 , $\bar{b}$ и $\bar{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Смешанное произведение векторов в координатах.

Пусть даны три вектора в координатах

$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}. \bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Тогда смешанное произведение этих векторов можно вычислить по формуле:

$$([\overline{a}\overline{b}]\overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ Equation.3 .

Многие задачи геометрии, физики, механики решаются методами векторной алгебры.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\overline{F}$ = {3, -5, -2} когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения *A* (2, 5, -3) в положение *B* (3, -1, -2).

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{S} = \overline{AB}$

$\overline{S}$ = {3-2; -1-5; -2+3} = {1; -6; 1}

Тогда величина искомой работа равна скалярному произведению ($\overline{F} \times \overline{S}$), т.е.

$W = (\overline{F}\ \overline{S}) = 3\times1 + (-5)\times(-6) - 2\times1 = 31.$

Пример. Найти угол, образованный векторами: $\overline{a}$ Equation.3 ={3,0,-4} и $\overline{b}$={-1,1,-2}.

Решение. $\cos j = \dfrac{3\cdot(-1) + 0\cdot1 + (-4)\cdot(-2)}{\sqrt{3^2 + 0 + 4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{5}{5\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}.$

Пример. Даны координаты вершин треугольника *A*(1,2,0), *B*(3,0,-3) и *C*(5,2,6). Найти площадь этого треугольника.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ Equation.3 и $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ Equation.3 = {3-1, 0-2, -3-0} = {2, -2, -3}

$\overline{AC}$ = {5-1, 2-0, 6-0} = {4, 0, 6}

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ Equation.3 и $\overline{AC}$: [$\overline{AB}$ Equation.3 $\times \overline{AC}$]

$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ Equation.3 $= -12e_1 - 12e_2 + 8e_3 - 12e_2 = -12e_1 - 24e_2 + 8e_3$ Equation.3

Итак, [$\overline{AB}$ Equation.3 $\times \overline{AC}$] = $\overline{d}$ = {-12, -24, 8}.

Найдем модуль векторного произведения

$$|[\overline{AB}\times\overline{AC}]| = |\overline{d}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28.$$

Искомая площадь треугольника: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overline{AB}\times\overline{AC}]\right| = \dfrac{1}{2}\cdot 28 = 14$ Equation.3 кв. ед.

Пример. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках O(1,1,2), A(2,3,-1), B(2,-2,4), C(-1,1,3).

Решение. Тетраэдр построен на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ Equation.3 Найдем координаты этих векторов: $\overline{OA} = \{1,2,-3\}$ Equation.3 , $\overline{OB} = \{1,-3,2\}$ Equation.3 , $\overline{OC} = \{-2,0,1\}$ Equation.3 . Тогда искомый объем:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left([\overline{OA}\times\overline{OB}]\times\overline{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-3 - 8 + 18 - 2| = \frac{1}{6}\times 5 = \frac{5}{6}$$

$V = \dfrac{5}{6}$ куб. ед.

Пример. Вычислить модуль вектора $\overline{a}$ Equation.3 = {6,3,-2}.

<u>Решение</u>. Если дан вектор $\bar{a}$ Equation.3 $= \{x, y, z\}$, то $|\bar{a}$ Equation.3 $| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Equation.3 . Следовательно, имеем

$|\bar{a}$ Equation.3 $| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$ Equation.3 .

<u>Пример</u>. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ Equation.3 $= \{12,-15,-16\}$.

<u>Решение</u>. $|\bar{a}$ Equation.3 $| = \sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25$ Equation.3 .

$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{12}{25}$; $\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}$; $\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{-16}{25}$ Equation.3 .

<u>Пример</u>. Векторы $\bar{a}$ Equation.3 и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 60^0$, причем $|\bar{a}$ Equation.3 $| = 5$ и $|\bar{b}| = 8$. Определить $|\bar{a}$ Equation.3 $+ \bar{b}|$ и $|\bar{a}$ Equation.3 $- \bar{b}|$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим скалярное произведение ($\bar{a}$ Equation.3 $+ \bar{b}$) и ($\bar{a}$ Equation.3 $+ \bar{b}$) т.е.

$(\bar{a}$ Equation.3 $+ \bar{b})^2 = (\bar{a}$ Equation.3 $\bar{a}) + 2(\bar{a}$ Equation.3 $\bar{b}) + (\bar{b}\,\bar{b}) = |\bar{a}$ Equation.3 $|^2 + 2|\bar{a}$ Equation.3 $|\times|\bar{b}|\times\cos 60^0 + |\bar{b}|^2 = 25+2\times5\times8\times\frac{1}{2}$ Equation.3 $+64 = 129$,

следовательно $|\bar{a}$ Equation.3 $+ \bar{b}| = \sqrt{129}$ Equation.3 .

Аналогично, рассмотрим $(\bar{a}$ Equation.3 $- \bar{b})^2$

$(\bar{a}$ Equation.3 $- \bar{b})^2 = |\bar{a}$ Equation.3 $|^2 - 2(\bar{a}$ Equation.3 $\bar{b}) + |\bar{b}|^2 = 25-2\times5\times8\times\frac{1}{2}$ Equation.3 $+64 = 49$. $|\bar{a}$ Equation.3 $- \bar{b}| = \sqrt{49} = 7$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a}$ Equation.3 $=\{-2, 3, \beta\}$ и $\bar{b}=\{\alpha, -6, 2\}$ коллинеарны.

Задача 2. Даны три вектора $\bar{p}$ Equation.3 $= \{3,-2,1\}$, $\bar{q} = \{-1,1,-2\}$, $\bar{r} = \{2,1,-3\}$. Найти разложение вектора $\bar{c} = \{11,-6,5\}$ по базису $\bar{p}$ Equation.3 , $\bar{q}$, $\bar{r}$.

Задача 3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\bar{p}$ Equation.3 $= \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.

Задача 4. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{5,2,5\}$ на ось вектора $\bar{b} = \{2,-1,2\}$.

Задача 5. Даны вершины тетраэдра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задача 6. Найти орт вектора $\bar{a} = 3e_1 + 4e_2 - 12e_3$.

Задача 7. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\bar{a} = \{1,-3,1\}$ и $\bar{b} = \{2,-1,3\}$.

Задача 8. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$ и $C(7;4;-2)$. Убедиться, что этот треугольник равнобедренный. Сделать чертеж.

Задача 9. Зная одну из вершин треугольника $A(2;-5;3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB} = \{4;1;2\}$ и $\overline{BC} = \{3;-2;5\}$. Найти остальные вершины и координаты вектора $\overline{CA}$ Equation.3 .

Вопросы:

1. Что называется скалярным произведением двух векторов? Физический смысл скалярного произведения векторов.
2. Основные свойства скалярного произведения векторов.

3. Как определяется скалярное произведение двух векторов в координатах?
4. Как найти угол между двумя данными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
5. Что называется векторным произведением двух векторов?
6. Геометрический и физический смысл векторного произведения двух векторов.
7. Как можно найти площадь треугольника, в трехмерном пространстве, если известны вершины данного треугольника?
8. Как найти векторное произведение двух векторов в координатах?
9. Как найти орт вектора $\overline{a} = \{x, y, z\}$?
10. Основные свойства векторного произведения векторов
11. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл.
12. Основные свойства смешанного произведения векторов.
13. Смешанное произведение трех векторов в координатах.

Практическое занятие 15. Векторные пространства и их простейшие свойства.
Цель: сформировать представление о векторных пространствах и их свойствах
Содержание:
векторное пространство над полем вещественных чисел; простейшие свойства векторных пространств.
Теоретическая часть:

Определение. Пусть - произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами, K – поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком + и называть сложением векторов. Пусть также на множестве определена внешняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения. Другими словами определены два отображения:

$$V \times V \to V,\quad \forall x, y \in V,\ (x, y) \to x + y \in V;$$

.

Множество вместе с этими двумя алгебраическими операциями называется векторным пространством над полем K, если выполняются следующие аксиомы:

1. Сложение ассоциативно, т.е.

.

2. Существует нулевой вектор, т.е.

$$\exists 0 \in V: \forall x \in V,\ x + 0 = 0 + x = x.$$

3. Для любого вектора существует противоположный ему:

$$\forall x \in V,\ \exists y \in V: x + y = y + x = 0.$$

Вектор y, противоположный вектору x, обычно обозначается –x, так что

$$\forall x \in V,\ \exists(-x) \in V: x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

4. Сложение коммутативно, т.е. .
5. Умножение вектора на скаляр подчиняется закону ассоциативности, т.е.

,

где произведение есть произведение скаляров, определенное в поле K.
6. , где 1 - это единица поля K.
7. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения векторов:

.

8. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения скаляров: .

Определение. Векторное пространство над полем вещественных чисел называется вещественным векторным пространством.

Теорема. (Простейшие свойства векторных пространств.)

1. В векторном пространстве существует единственный нулевой вектор.
2. В векторном пространстве любой вектор имеет единственный противоположный ему.
3. $\forall \lambda \in K, \forall x \in V, \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ или $x = 0$.
4. .

Примеры векторных пространств.

1) Множество числовых вещественных функций одной переменной, непрерывных на интервале (0; 1) относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

2) Множество многочленов от одной буквы с коэффициентами из поля K относительно сложения многочленов и умножения многочленов на скаляр.

3) Множество комплексных чисел относительно сложения комплексных чисел и умножения на действительное число.

4) Множество матриц одного и того же размера с элементами из поля K относительно сложения матриц и умножения матриц на скаляр.

Следующий пример является важным частным случаем примера 4.

5) Пусть - произвольное натуральное число. Обозначим через множество всех столбцов высоты n, т.е. множество матриц над полем K размера $n \times 1$.

Множество является векторным пространством над полем K и называется арифметическим векторным пространством столбцов высоты n над полем K.

В частности, если вместо произвольного поля K взять поле действительных чисел , то векторное пространство R^n называется вещественным арифметическим векторным пространством столбцов высоты n.

Аналогично, векторным пространством является и множество матриц над полем K размера $1 \times n$ или, иначе, строк длины n. Оно обозначается также через и также называется арифметическим векторным пространством строк длины n над полем K.

Системы векторов векторного пространства.

<u>Определение.</u> Системой векторов векторного пространства называют любое конечное непустое множество векторов этого пространства.

Обозначение: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

<u>Определение.</u> Выражение

,

где - скаляры поля K, – векторы векторного пространства V, называется линейной комбинацией системы векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Скаляры называются коэффициентами этой линейной комбинации.

<u>Определение.</u> Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то такую линейную комбинацию называют тривиальной, в противном случае – нетривиальной.

<u>Пример.</u> Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ система из трех векторов векторного пространства V. Тогда

$$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

– тривиальная линейная комбинация данной системы векторов;

$$-e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

– нетривиальная линейная комбинация данной системы векторов, т.к. первый коэффициент этой комбинации $\alpha_1 = -1 \neq 0$.

<u>Определение.</u> Если какой-либо вектор x векторного пространства V может быть представлен в виде:

,

то говорят, что вектор x линейно выражается через векторы системы $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. В этом случае говорят также, что система $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ линейно представляет вектор x.

<u>Пример</u>. Пусть $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ – система из двух столбцов арифметического вещественного векторного пространства столбцов высоты 2. Тогда столбец $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы системы или данная система столбцов линейно представляет столбец x. Действительно,

$$x = 2e_1 - 3e_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ -4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Вопросы и задачи:

1. Обозначим буквой A множество бесконечных последовательностей вещественных чисел, имеющие предел: $A=\{(a_k), k\in N \mid (\lim\limits_{k\to\infty} a_k)\in R\}$.

Определим на множестве A покомпонентное сложение последовательностей и покомпонентное умножение последовательности на число. Докажите, что A является векторным пространством.

2. Обозначим буквой A множество бесконечных последовательностей вещественных чисел, имеющие одинаковый предел $a\in R: A=\{(a_k), k\in N \mid \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a\}$. Определим сложение на A и умножение на число как в задаче 1.

а) Докажите, что если $a\ne 0$, то множество A не является векторным пространством. Какая аксиома векторного пространства не выпроняется?

б) Докажите, что если $a=0$, то множество A является векторным пространством.

Практическое занятие 16. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов векторного пространства.

Цель: сформировать представления о линейной независимости систем векторов векторного пространства и аспектах применения линейной зависимости (независимости)

Содержание:

тривиальное (нетривиальное) представление нулевого вектора;

линейно зависимая (независимая) системы векторов;

необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов.

Теоретическая часть:

Так как произведение нулевого скаляра на любой вектор есть нулевой вектор и сумма нулевых векторов равна нулевому вектору, то для любой системы векторов выполняется равенство

$$0\cdot e_1+0\cdot e_2+\ldots+0\cdot e_n=0.$$

Отсюда следует, что нулевой вектор линейно выражается через векторы любой системы векторов или, говоря иначе, любая система векторов линейно представляет нулевой вектор.

Пример. Пусть $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$. В этом случае нулевой столбец $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ можно линейно выразить через столбцы системы не одним способом:

$$0\cdot e_1+0\cdot e_2=0\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

или

$$e_1+e_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

или $\forall a\in R$

$$a\cdot e_1+a\cdot e_2=a\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Чтобы различать эти способы линейного представления нулевого вектора введем следующее определение.

Определение. Если выполняется равенство

$$a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n=0$$

и при этом все коэффициенты $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, то говорят, что система $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ представляет нулевой вектор тривиально. Если же в равенстве хотя бы один из коэффициентов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ не равен нулю, тогда говорят, что система векторов $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ представляет нулевой вектор нетривиально.

Из последнего примера мы видим, что существуют системы векторов, которые могут представлять нулевой вектор нетривиально. Из следующего примера мы увидим, что существуют системы векторов, которые не могут представлять нулевой вектор нетривиально.

<u>Пример.</u> Пусть $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ – система двух столбцов из векторного пространства . Рассмотрим равенство:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

где $\alpha,\beta\in R$ неизвестные пока коэффициенты. Используя правила умножения столбца на скаляр (число) и сложения столбцов, получаем равенство:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Из определения равенства матриц следует, что $\alpha=0$ и $\beta=0$.

Таким образом, данная система не может представлять нулевой столбец нетривиально.

Из приведенных примеров следует, что существует два вида систем векторов. Одни системы представляют нулевой вектор нетривиально, а другие нет. Отметим еще раз, что любая система векторов представляет нулевой вектор тривиально.

<u>Определение</u>. Система векторов векторного пространства, которая представляет нулевой вектор ТОЛЬКО тривиально называется линейно независимой.

<u>Определение</u>. Система векторов векторного пространства, которая может представить нулевой вектор нетривиально называется линейно зависимой.

Последнее определение можно дать в более развернутом виде.

<u>Определение</u>. Система векторов $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ векторного пространства V называется линейно зависимой, если найдется такой ненулевой набор скаляров поля K

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq(0,0,\ldots,0),$$

что

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n=0.$$

Но этого недостаточно, чтобы выяснить линейно зависимая или же линейно независимая данная система векторов. Из определения следует, что линейно независимая система векторов не может представлять нулевой вектор нетривиально, а только тривиально. Поэтому для того, чтобы убедиться в линейной независимости данной системы векторов, нужно рассмотреть представление нуля произвольной линейной комбинацией этой системы векторов:

$$0=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n.$$

Если это равенство невозможно при условии, чтобы хотя бы один коэффициент этой линейной комбинации был ненулевой, тогда эта система является по определению линейно независимой.

Следующие теоремы дают несколько критериев линейной зависимости и соответственно линейной независимости систем векторов.

<u>Теорема.</u> (Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов.)

Система векторов векторного пространства является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через другие вектора этой системы.

<u>Следствие.</u>

1. Система векторов векторного пространства является линейно независимой тогда и только тогда, когда ни один из векторов системы линейно не выражается через другие вектора этой системы.

2. Система векторов, содержащая нулевой вектор или два равных вектора, является линейно зависимой.

<u>Теорема</u> (О линейной зависимости системы из одного вектора).

Система, состоящая из одного вектора является линейно зависимой тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

<u>Следствие</u>. Система, состоящая из одного вектора является линейно независимой тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

Вопросы и задачи:

1. Докажите, что система $\left\{ f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$ является линейно независимой. Является ли эта система порождающей?

2. Докажите, что система $\left\{ g_1 = \begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix}4\\14\\10\end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix}1\\9\\2\end{pmatrix} \right\}$ является линейно зависимой. Является ли эта система порождающей?

3. Обозначим $R_2[x]$ – множество многочленов от буквы x с действительными коэффициентами, степень которых не превышает 2: $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$.

а) Докажите, что системы $\{1, x, x^2\}$ и $\{1, x - 1, (x - 1)^2\}$ являются линейно независимыми. Является ли эта система порождающей?

б) Докажите, что системы $\{1, x + 1, 2x, x^2\}$ и $\{x + 1, x^2, x^2 - x + 1\}$ являются линейно зависимыми. Являются ли эти системы порождающими?

4.Докажите, что система $\left\{ f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$ является линейно независимой. Является ли эта система порождающей?

5. Докажите, что система $\left\{ g_1 = \begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix}4\\14\\10\end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix}1\\9\\2\end{pmatrix} \right\}$ является линейно зависимой. Является ли эта система порождающей?

6. Обозначим $R_2[x]$ – множество многочленов от буквы x с действительными коэффициентами, степень которых не превышает 2: $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$.

а) Докажите, что системы $\{1, x, x^2\}$ и $\{1, x - 1, (x - 1)^2\}$ являются линейно независимыми. Является ли эта система порождающей?

б) Докажите, что системы $\{1, x + 1, 2x, x^2\}$ и $\{x + 1, x^2, x^2 - x + 1\}$ являются линейно зависимыми. Являются ли эти системы порождающими?

Практическое занятие 17. *Размерность и базис векторного пространства*.

Цель: сформировать представление о размерности и базисе векторного пространства, возможностях практического применения изученного

Содержание:

n-мерное линейное пространство; размерность пространства;
разложение вектора по базису;
переход к новому базису.

Теоретическая часть:

Вектор a_m называется линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, ..., a_{m-1}$ векторного пространства R, если он равен следующей сумме:
$a_m = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_{m-1} a_{m-1}$, где $\lambda_1, ..., \lambda_{m-1}$ - произвольные действительные числа.

Векторы $a_1, ..., a_m$ векторного пространства R называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что их линейная комбинация равна нулевому вектору:
$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_m a_m = 0$

В противном случае (т.е. когда нуль-вектор получается только при $\lambda_i = 0, \forall\ i = \overline{1, n}$) векторы $a_1, a_2, ..., a_m$ называются ***линейно независимыми***.

Линейное пространство R называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые (n+1) векторов уже являются линейно зависимыми.

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. Обозначается размерность dim ®.
Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства R называется ***базисом.***
Теорема. Каждый вектор $x \in R$ можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса.
Такая линейная комбинация
$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$
называется ***разложением вектора*** x по базису $e_1, e_2, ..., e_n$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ - координатами вектора x относительно этого базиса.
Теорема. Если $e_1, e_2, ..., e_n$ - система линейно независимых векторов пространства R и любой вектор a в нем линейно выражается через $e_1, e_2, ..., e_n$, то пространство R является n-мерным, а векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ - его базисом.

<u>Переход к новому базису</u>

Пусть в пространстве R имеются 2 базиса:
Старый $e_1, e_2, ..., e_n$ и новый $e^*_1, e^*_2, ..., e^*_n$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса:
$$\begin{cases} e^*_1 = a_{11} e_1 + ... + a_{1n} e_n, \\ e^*_2 = a_{21} e_1 + ... + a_{2n} e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad (*) \\ e^*_n = a_{n1} e_1 + ... + a_{nn} e_n. \end{cases}$$
Эта система означает, что переход от старого базиса к новому задается матрицей перехода $A = (a_{ij})(i, j = \overline{1, n})$. Эта матрица неособенная (т.е. невырожденная), т.к. в противном случае ее строки (а значит, и базисные векторы) оказались бы линейно зависимыми. Обратный переход от нового базиса к старому осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}
Найдем зависимость между координатами вектора в разных базисах.
Пусть x имеет координаты:
$$x = x^*_1 e^*_1 + ... + x^*_n e^*_n = x_1 e_1 + ... + x_n e_n.$$
Подставим значения $e^*_1, e^*_2, ..., e^*_n$. из системы $(*)$ в левую часть последнего равенства, получим:
$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x^*_1 + a_{21} x^*_2 + ... + a_{n1} x^*_n, \\ x_2 = a_{12} x^*_1 + a_{22} x^*_2 + ... + a_{n2} x^*_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{1n} x^*_1 + a_{2n} x^*_2 + ... + a_{nn} x^*_n \end{cases}$$
или в матричной форме:
$$X = A' X^*,$$
$$X^* = (A^{-1})' X$$
Скалярным произведением двух векторов $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ называется число:
$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
Свойства скалярного произведения.
1. $(x, y) = (y, x)$ - коммутативность;

2. $(x, y+z)=(x, y)+(x, z)$ - дистрибутивность;
3. $(\alpha x; y)=\alpha(x, y), \forall \alpha$ - однородность;
4. $(x, x)\succ 0$, если $x \neq 0, (x, x)=0$, если $x=0$.

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется евклидовым пространством.
Длиной (нормой) вектора x в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата: $|x|=\sqrt{(x, x)}=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\ldots+x_n{}^2}$
Свойства длины вектора:
1. $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;
2. $|\lambda x|=|\lambda| \cdot|x|, \lambda$ - действительное число;
3. $|(x, y)| \leq|x| \cdot|y|$ - (неравенство Коши-Буняковского);
4. $|x+y| \leq|x|+|y|$ -(неравенство треугольника).
Угол φ между двумя векторами x и y определяется равенством:
$\cos \varphi=\dfrac{(x, y)}{|x| \cdot|y|}$, где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Два вектора называются ортогональными**,** если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору. Если два ненулевых вектора ортогональны, то $\varphi=\pi / 2$.

Векторы $e_1, e_2 \ldots, e_n$ n-мерного евклидова пространства образуют ортонормированный базис, если $(e_i, e_j)=0, i \neq j, |e_i|=1, i=\overline{1, n}.$

Рассмотрим два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m.
Если задан закон (правило), по которому каждому вектору $x \in R^n$ ставится в соответствие единственный вектор $y \in R^m$, то говорят, что задан оператор (преобразование, отображение) А (x), действующий из R^n в R^m, и записывают y=A(x).

Оператор называется линейным, если для любых векторов $a, b \in R^n, \forall \lambda$ выполняются соотношения:
1. $\widetilde{A}(a+b)=\widetilde{A}(a)+\widetilde{A}(b)$ - свойство аддитивности;
2. $\widetilde{A}(\lambda a)=\lambda \widetilde{A}(a)$ - свойство однородности оператора.
Вектор $y=\widetilde{A}(x)$ называется образом вектора х, а сам вектор х- прообразом вектора y.

Если пространства R^n и R^m совпадают, то оператор А отображает пространство R^n в себя. Рассмотрим именно этот случай.

Выберем в R^n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, запишем разложение произвольного вектора x по этому базису:
$x=x_1 e_1+x_2 e_2+\ldots+x_n e_n$.

Применим к этому выражению линейный оператор $\widetilde{A}$, в силу его линейности получаем:
$\widetilde{A}(x)=x_1 \widetilde{A}(e_1)+x_2 \widetilde{A}(e_2)+\ldots+x_n \widetilde{A}(e_n)$.

Поскольку $\widetilde{A}(e_i), i=\overline{1, n}$ -также вектор из R^n, то его можно разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$\widetilde{A}(e_i)=a_{1i} e_1+a_{2i} e_2+\ldots+a_{ni} e_n, (i=\overline{1, n})$

Тогда
$\widetilde{A}(x)=x_1(a_{11} e_1+\ldots+a_{n1} e_n)+x_2(a_{12} e_1+\ldots+a_{n2} e_n)+\ldots+x_n(a_{1n} e_1+\ldots+a_{nn} e_n)$

Перегруппируем сомножители в правой части, вынося за скобки базисные векторы $e_1, e_2, ..., e_3$, получим:

$$\widetilde{A}(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)e_2 + ...(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)e_n \ (*)$$

С другой стороны, вектор $y = \widetilde{A}(x)$, имеющий в том же базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ координаты $y_1, y_2, ..., y_n$ можно записать так:

$$\widetilde{A}(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n. \ (**)$$

Разложение вектора по базису единственно, следовательно, правые части (*) и (**) равны, поэтому:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ .... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases},$$

или в матричной форме: $Y = AX$.

Матрица $A = (a_{ij}), (i, j = \overline{1, n})$, каждый столбец которой состоит из координат образа $\widetilde{A}(e_i)$ соответствующего базисного вектора e_i в том же базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, называется матрицей оператора $\widetilde{A}$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, а ранг r матрицы A рангом оператора $\widetilde{A}$.

Таким образом, каждому линейному оператору соответствует матрица в данном базисе. Наоборот, всякой матрице n-го порядка соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Вектор x и его образ $y = \widetilde{A}(x)$ связаны матричным уравнением:

$Y = AX$,

где A- матрица линейного оператора $X = (x_1, x_2, ..., x_n), Y = (y_1 y_2, ..., y_n)'$.

<u>Пример:</u> Линейный оператор $\widetilde{A}$ в R^3 в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ Найти образ $y = \widetilde{A}(x)$ вектора $x = 4e_1 - 3e_2 + e_3$.

<u>Решение:</u> Применяем формулу перехода: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}$

Образ вектора x имеет вид: $y = 10e_1 - 13e_2 - 18e_3$.

Практическое занятие 18. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

Цель: сформировать представление о собственных векторах и собственных значениях линейных операторов и их приложениях

Содержание:

собственный вектор, собственное значение линейного оператора;

определение характеристического уравнения матрицы;

алгоритм вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы A.

Теоретическая часть:

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий из некоторого пространства L в то же пространство L.

Любой ненулевой вектор x, удовлетворяющий уравнению:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, при этом число l называется собственным значением линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору x.

Если задан базис линейного пространства L и в этом базисе линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу A, то приведенное выше уравнение можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}.$$

При этом вектор x называется собственным вектором матрицы A, а число l называется собственным значением матрицы A, соответствующим собственному вектору x.

Теорема. Множество собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ совпадает со множеством корней характеристического уравнения этого оператора вне зависимости от того, в каком базисе задана матрица оператора $\hat{A}$. Уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

называется характеристическим уравнением матрицы A.

В развернутом виде характеристическое уравнение запишется следующим образом:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы A порядка n необходимо:

1. Составить характеристическое уравнение и найти все его различные действительные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, которые и будут собственными значениями матрицы.
2. Для каждого собственного значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x} = 0,$$

оно и будет задавать собственные векторы, которым соответствует собственное значение l_i.

Пример. Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \det\begin{vmatrix} 0-\lambda\cdot 1 & 1-\lambda\cdot 0 & 2-\lambda\cdot 0 \\ 4-\lambda\cdot 0 & 0-\lambda\cdot 1 & 1-\lambda\cdot 0 \\ 3-\lambda\cdot 0 & -1-\lambda\cdot 0 & 1-\lambda\cdot 1 \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^2(1-\lambda) + 1\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot(-\lambda)\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot(1-\lambda) - (-\lambda)\cdot 1\cdot(-1) =$$

$$= \lambda^2 - \lambda^3 + 3 - 8 + 6\lambda - 4 + 4\lambda - \lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9,$$

то характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0.$$

Один из корней этого уравнения находится методом подбора. Проверим, является ли число $\lambda = 1$ корнем этого уравнения:

$$-1^3 + 1^2 + 9\cdot 1 - 9 = 0 \text{ —}$$

верно. Вынесем в левой части уравнения множитель $(\lambda - 1)$ за скобку:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 9 = -\lambda^2(\lambda-1) + 9(\lambda-1) = (9-\lambda^2)(\lambda-1) = (3+\lambda)(3-\lambda)(\lambda-1) = -(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Характеристическое уравнение, таким образом, принимает вид

$-(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$, откуда $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$.

Соответствующая однородная система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для собственного значения $\lambda_1=-3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1=-3$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

где c_1 — произвольное действительное число, н е р а в н о е н у л ю.

Система линейных уравнений для определения собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_2=1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\beta \\ -3\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2=1$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -c_2 \\ -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_2\neq 0.$$

Аналогичным образом определяется множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_3=3$:

$$\begin{pmatrix} 7c_3 \\ 11c_3 \\ 5c_3 \end{pmatrix}, \qquad c_3\neq 0.$$

Вопросы и задачи:

1. Найти собственные значения и собственные векторы, привести к диагональному виду матрицу линейного оператора:

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 7. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.Определите, является ли международная торговля двух стран А и Б сбалансированной, если вектор национальных доходов x и структурная матрица А этих стран

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 12\,000\,000\,000 \\ 7\,000\,000\,000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Вопросы:

1. Что такое собственное значение матрицы?
2. Что такое собственный вектор матрицы?
3. Что такое характеристический многочлен матрицы?
4. Сколько различных собственных значений может иметь матрица?
5. Сколько различных собственных векторов могут соответствовать одному собственному значению матрицы?
6. Как найти все собственные значения матрицы?

5. Перечень литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра: учебное пособие / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак; под редакцией Т. В. Рязанова. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 116 с. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69589.html

Дополнительная литература:

Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: учебник/ А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова; под редакцией А. П. Господариков. — Санкт-Петербург: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71687.html

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Алгебра»
для студентов направления подготовки 09.03.02 **Информационные системы и технологии** направленность (профиль) **Информационные системы и технологии обработки цифрового контента**

Пятигорск, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

Самостоятельная работа является важнейшей формой усвоения знаний. В ходе самостоятельной работы студенты уясняют знания по конкретной теме учебного материала, закрепляют и уточняют уже известные и осваивают новые категории. Сталкиваясь с недостаточно понятными элементами темы, студенты стремятся находить ответы или фиксировать вопросы для постановки и уяснения их на консультации с преподавателем или во время практического занятия.

Задачи самостоятельной работы состоят в следующем:

1. Развить логическое и алгоритмическое мышление.

2. Выработать первичные навыки математического исследования прикладных вопросов.

3. Выработать навыки доведения решения задачи до приемлемого практического результата – числа, графика, точного качественного вывода с применением адекватных вычислительных средств, таблиц, справочников.

4. Выработать умение самостоятельно разбираться в математическом аппарате, применяемом в литературе, связанной со специальностью студента.

5. Научить оперировать абстрактными объектами и адекватно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Самостоятельная работа студента по учебной дисциплине «Алгебра» включает подготовку к практическим занятиям и выполнение практических заданий, самостоятельное изучение тем учебного материала по рекомендуемой литературе и с использованием информационных ресурсов.

Самостоятельная работа по дисциплине «Алгебра» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов

ОПК-1: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**ИД-1$_{\textbf{ОПК-1}}$** Знаком с основами математики, физики, вычислительной техники и программирования. **ИД-2$_{\textbf{ОПК-1}}$** Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.	Применяет естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического моделирования в профессиональной деятельности.

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и

выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3.Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (акад.)		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Подготовка к лекциям	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	44,55	4,95	49,5
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Подготовка к практическим работам	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	3,24	0,36	3,6
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	Самостоятельное изучение литературы по темам 1-7	Комплект заданий и вопросов по темам дисциплины	17,01	1,89	18,9
		Итого за 1 семестр	**64,8**	**7,2**	**72**
ОПК-1 (ИД-1,2,3)	**Подготовка к экзамену**	**Вопросы к экзамену**	**32,4**	**3,6**	**36**

4.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют ***четыре основные установки в чтении научного текста***:

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

5.Контроль самостоятельной работы студентов

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль

Рейтинговая оценка знаний студента

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1.	Практическое занятие 5	5 неделя	15
2.	Практическое занятие 10	10 неделя	20
3.	Практическое занятие 15	15 неделя	20
	Итого за 1 семестр		**55**
	Итого		**55**

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55.** Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	***Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)***
Отличный	***100***
Хороший	***80***
Удовлетворительный	***60***
Неудовлетворительный	***0***

Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в форме **экзамена** предусматривает проведение обязательной экзаменационной процедуры и оценивается 40 баллами из 100. В случае если рейтинговый балл студента по дисциплине по итогам семестра равен 60, то программой автоматически добавляется 32 премиальных балла и выставляется оценка «отлично». Положительный ответ студента на экзамене оценивается рейтинговыми баллами в диапазоне от **20** до **40** (**20** ⊠ Sэкз ⊠ **40**), оценка **меньше 20** баллов считается неудовлетворительной.

Шкала соответствия рейтингового балла экзамена 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	**Оценка по 5-балльной системе**
35 – 40	Отлично
28 – 34	Хорошо
20 – 27	Удовлетворительно

Итоговая оценка по дисциплине, изучаемой в одном семестре, определяется по сумме баллов, набранных за работу в течение семестра, и баллов, полученных при сдаче экзамена:

Шкала пересчета рейтингового балла по дисциплине
в оценку по 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	***Оценка по 5-балльной системе***
88-100	*Отлично*
72-87	*Хорошо*
53-71	*Удовлетворительно*
<53	*Неудовлетворительно*

6. Список литературы

6.1. Перечень основной литературы:

Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра: учебное пособие / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак; под редакцией Т. В. Рязанова. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 116 c. - Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69589.html

6.2. Перечень дополнительной литературы:

Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: учебник/ А. П. Господариков, Е. А. Карпова, О. Е. Карпухина, С. Е. Мансурова; под редакцией

А. П. Господариков. — Санкт-Петербург: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 105 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71687.html