

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна  
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского  
федерального университета  
Дата подписания: 13.06.2024 17:31:57  
Уникальный программный ключ:  
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8e938

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Пятигорский институт (филиал) СКФУ  
Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

**УТВЕРЖДАЮ**  
Директор Пятигорского института  
(филиал) СКФУ  
Т.А. Шебзухова

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

**ЕН. 01 Математика**  
Специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)  
квалификации бухгалтер

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к подготовке выпуска для получения квалификации Бухгалтер. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности: 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

## Пояснительная записка

Методические указания призваны оказывать помощь студентам в изучении основных понятий, идей, теорий и положений дисциплины, изучаемых в ходе конкретного занятия, способствовать развитию их умений, навыков и профессиональных компетенций.

В данном учебном пособии согласно специфике дисциплины и прописываются:

Современные требования к учебному процессу ориентируют преподавателя на проверку знаний, умений, навыков через деятельность учащихся.

Практическое занятие может быть определена как деятельность, направленная на применение, углубление и развитие теоретических знаний в комплексе с формированием необходимых для этого умений и навыков, самостоятельное использование учебника, наглядных пособий, биологических приборов и материалов и т.д.

Выполнение практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам изучаемых дисциплин;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений: аналитических, проектировочных; конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Дисциплины, по которым планируются практические работы и количество часов, отводимое на их выполнение, определяются рабочим учебным планом.

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;
- применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности;

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
- основные понятия и методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

## Практическое занятие № 1

**Тема 1.2:** Вычисление пределов функции.

**Цель:** Сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

### Теоретическая часть

Число  $A$  называют *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (и пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , такое, что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Теоремы о пределах:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$  ( $c = \text{const}$ ).

2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$   $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$  то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = AB$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число  $e = 2,718\dots$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Примеры решения:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию

1) Пределы с неопределенностью вида  $\frac{\infty}{\infty}$  и метод их решения

1) деление на  $x$  в старшей степени:

Пример 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Сначала мы смотрим на числитель и находим  $x$  в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим  $x$  в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$  необходимо разделить числитель и знаменатель на  $x$  в старшей степени.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} &= \frac{\infty}{\infty} = (*) \\ \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2 & \\ (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} \quad \text{Пример 2:}$$

Найти предел

Снова в числителе и знаменателе находим  $x$  в старшей степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Разделим числитель и знаменатель на  $x^4$

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{x^4}}{\frac{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} + \frac{15}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Пример 3}$$

Найти предел

Разделим числитель и знаменатель на  $x^2$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty$$

при раскрытии неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

2. Пределы с неопределенностью вида  $\frac{0}{0}$  и метод их решения

1) разложение числителя и знаменателя на множители.

Пример 4

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:  
 $2x^2 - 3x - 5 = 0$

Сначала находим дискриминант:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

И квадратный корень из него:  $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$

Далее находим корни:  $x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$   $x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x - (-1)) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = (x + 1) \cdot (2x - 5)$$

Таким образом:

Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель  $x + 1$  уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (*) \quad \text{можно сократить на } (x + 1) :$$

$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$  Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:  $= 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = -2 - 5 = -7$$

2) умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{10x - 21}}{5x - 15} = \frac{0}{0} = (*) \quad \text{Пример 5}$$

Найти предел

Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

выражение:

Применяем формулу

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = (*)$$

: Неопределенность  $\frac{0}{0}$  не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с суммой корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{3+6} + \sqrt{10 \cdot 3 - 21})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(5x-15) \cdot (3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{-9}{5} \right) = -\frac{3}{10}$$

Решение данного примера в чистовом варианте выглядит так:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (*) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6 - (10x-21)}{(x-3) \cdot (\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

### 3) использование 1-го замечательного предела

Пример 6  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$  Найти предел

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится  $7x$ , а в знаменателе  $3x$ . В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом  $7x$ , значит, в знаменателе тоже нужно получить  $7x$ ».

А делается это очень просто:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

### Пример 7

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$$

### Пример 8

Найти предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 \cdot (\cos 2x)^{\rightarrow 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

### Пример 9

Найти предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x} = \\ &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{\frac{1}{2} \cdot 2x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \cdot 2 \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\rightarrow 0} = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

### Пример 10

Найти предел



$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctgx} \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)} &= \frac{\infty \cdot 0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \frac{0}{0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x^2 + 5)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x} = \\
&= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot 3x \cdot 3x \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Данный факт носит название второго замечательного предела.

*Справка:*  $e = 2,718281828\dots$  – это иррациональное число.

В качестве параметра  $\alpha$  может выступать не только переменная  $x$ , но и сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.

Пример 11

Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр  $\alpha = 3x$ , значит, в показателе тоже нужно организовать  $3x$ . Для этого возводим

основание в степень  $3x$ , и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень  $\frac{1}{3x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву  $e$ :

При этом сам значок предела перемещаем в показатель:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

(2-ой замечательный предел)

1. Вычислить пределы функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{8x^2 - 9x + 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9x}{6x^3 - x + 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 1}{8x^2 - 11x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3\sqrt{x}}{x^2 - 1} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{3x^2 - 13x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^3 - x^2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$$

Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\tan 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\sin 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\tan 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{5}{7x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

## Практическое занятие № 2

**Тема 1.3:** Производная элементарной и сложной функции.

**Цель:** Научить вычислять производные и дифференциалы высших функций.

### Теоретическая часть

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю.

Основные правила дифференцирования:

1.  $C' = 0$ , где  $C - const$
2.  $(f + g)' = f' + g'$
3.  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

5.  $(f \cdot C)' = f' \cdot C$ , где  $C - const$

Производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной.

Производные высших порядков.

Производная  $y' = f'(x)$  называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной второго порядка называется производная от её первой производной и обозначается  $y''$ . Аналогично определяются производные 3-го, 4-го, ..., порядка.

### Решение упражнений

1.  $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
2.  $y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
3.  $y = \sqrt[5]{x + x^3\sqrt{x}}$
4.  $y = \cos \ln(1 - x^2)$
5.  $y = \sin \sqrt{3} + \frac{1 \sin^2 3x}{3 \cos 6x}$
6.  $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x}$
7.  $y = \arcsin^3 \sqrt{4 - 5x}$
8.  $y = \arccos \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$
9.  $y = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6}}$
10.  $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$
11.  $y = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$
12.  $y = \ln^3(1 + \cos 4x)$
13.  $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + 2\pi^{\sqrt{2}}$
14.  $y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$
15.  $y = e^{-x^2} \cos^3(2x + 3)$
16.  $y = e^{\frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot \operatorname{arctg}^2 2x$
17.  $y = \frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)}}{120x^5}$
18.  $y = (\sin \sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$
19.  $y = (19)^{x^{19}} x^{19}$
20.  $y = (\operatorname{ctg} x)^{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{4}}$

## Практическое занятие №3

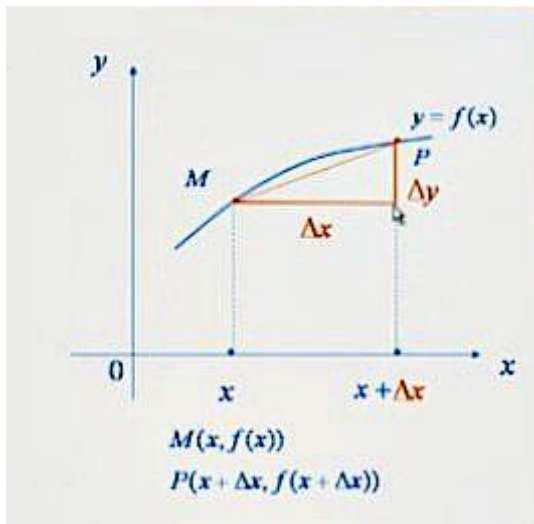
**Тема 1.4:** Правила вычисления производной функции.

**Цель:** Научить вычислять производные

**Теоретическая часть:**

**Определение производной**

Пусть задана функция  $f(x)$  на интервале  $(a,b)$ . Зафиксируем точку  $x$  внутри  $(a,b)$  и придадим  $x$  приращение  $\Delta x$ , МР секущая, приращение функции  $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ . Рассмотрим отношение



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

это тангенс угла наклона секущей MP, он зависит от  $\Delta x$ .

Определение. Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

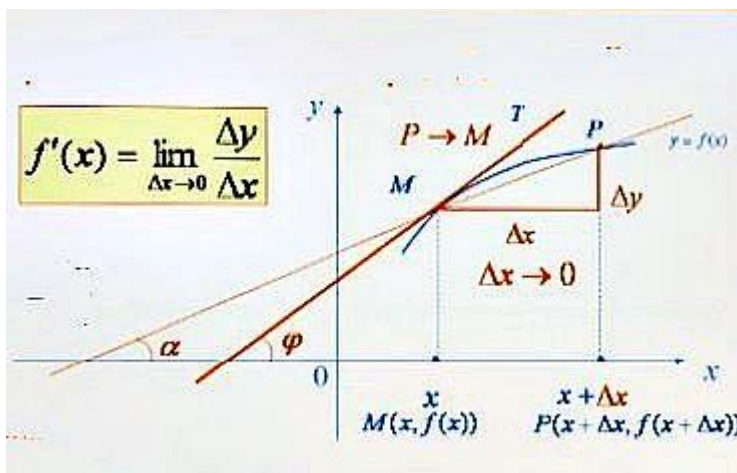
Существует несколько способов обозначения производной, самые важные это  $f'(x)$  и  $y'_x$ .

Пример нахождения  $f'(x)$ , используя определение:

$$f(x) = x^2, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x, \quad f'(x) = (x^2)' = 2x$$

Геометрический смысл производной



$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$   
 По определению устремим точку М к точке Р, это эквивалентно стремлению  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Предельное положение секущей МР это касательная к кривой в точке М, ее угловой коэффициент равен

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Следовательно, производная в точке х равна тангенсу угла наклона касательной в этой точке.

Уравнение касательной в точке  $x_0$  имеет вид  $y - y_0 = k(x - x_0)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ , т.к.

$k = f'(x)$ , то уравнение касательной примет вид  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ . Найдем

уравнение нормали, перпендикулярной данной касательной и проходящей через точку  $x_0$ .

Из условия перпендикулярности прямых  $k_1 \cdot k_2 = -1$  угловой коэффициент нормали равен  $-\frac{1}{f'(x_0)}$ , а уравнение нормали в точке  $x_0$  примет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

### Механический смысл производной

Пусть прямолинейное движение материальной точки задано законом  $S = S(t)$ . Путь,

который проследует точка за время  $\Delta$  равен  $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ . Средняя скорость есть  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ .

мгновенная скорость

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$$

Пример.

Пусть дан закон движения материальной точки  $S(t) = t^2$ , найти скорость точки через  $t = 3$  сек.

$$v = S'(t) = (t^2)' = 2t, \quad v(3) = 2 \cdot 3 = 6 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

### Дифференциал функции

Пусть задана  $y = f(x)$  на интервале  $(a, b)$ . Функция  $y = f(x)$  называется дифференцируемой в точке х, если  $\Delta y$  можно представить с помощью следующего выражения:

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta) \Delta x$$

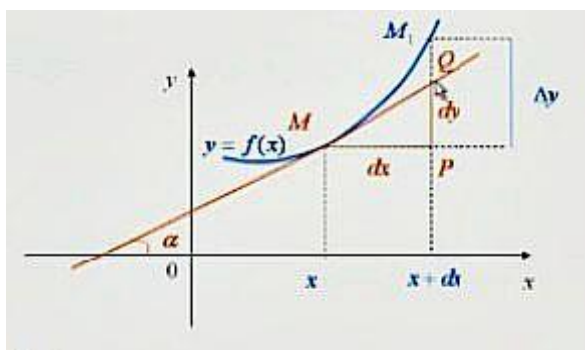
где  $A = \text{const}$  при фиксированном х и  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$

Теорема. Для дифференцируемости функции в точке  $x$  необходимо и достаточно, чтобы функция имела в этой точке конечную производную.

Дифференциалом функции  $y = f(x)$  называется выражение вида  $dy = A \Delta x$  - это главная линейная часть приращения  $\Delta y$ , на основании предыдущей теоремы  $dy = f'(x) \Delta x$ , обозначив дифференциал независимой переменной через  $dx = \Delta x$ , получим выражение для дифференциала:

$$dy = f'(x) dx$$

Геометрический смысл дифференциала виден из следующего рисунка



$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $PQ = MP \operatorname{tg} \alpha = f'(x) dx$ , т.е. дифференциал функции равен отрезку PQ это приращение ординаты касательной, а приращение  $\Delta y$  это отрезок  $PM_1$

### Формулы дифференцирования

|                          |                                                     |
|--------------------------|-----------------------------------------------------|
| $C' = 0$                 | $x' = 1$                                            |
| $(u \pm v)' = u' \pm v'$ | $(Cu)' = Cu'$                                       |
| $(uv)' = u'v + uv'$      | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |

### Таблица производных

|                                              |                                                 |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $(x^n)' = nx^{n-1}$                          | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$          | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        |

|                                   |                                                                 |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $(e^x)' = e^x$                    | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$                   |
| $(a^x)' = a^x \ln a$              | $(\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$                |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$          | $(sh)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = chx$          |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(chx)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = shx$         |
| $(\sin x)' = \cos x$              | $(thx)' = \left( \frac{shx}{chx} \right)' = \frac{1}{ch^2 x}$   |
| $(\cos x)' = -\sin x$             | $(cthx)' = \left( \frac{chx}{shx} \right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$ |
| $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$     |                                                                 |

### Правила вычисления производных

#### Вариант 1

1. Найдите производную функции:

$$a) x^5 + 2x; \quad б) 12x^6 - 45; \quad в) \sin x - 3 \cos x; \quad г) \cos \left( 4x - \frac{\pi}{3} \right).$$

2. Найдите производную функции:  $a) (x^2 - 3)(x + x^3); \quad б) \frac{x^5 + x^2}{x+1}.$

3. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 0,5 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) \text{ в точке } x_0 = \frac{\pi}{12}$$

4. Найдите значения  $x$ , при которых значения производной функции  $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$  положительны.

$$y = \frac{x+2}{\sqrt{x}}.$$

5. Найдите производную функции

6. При каких значениях  $x$  производная функции  $y = (5 - 3x)^4 (3x - 1)^3$  принимает отрицательные значения ?

#### Практическое занятие № 4

**Тема 1.5:** Правила вычисления производной функции.

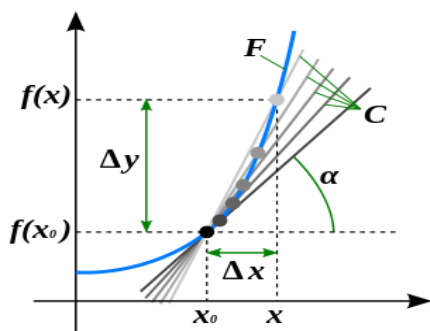
**Цель:** Научить правилам вычисления производной.

**Теоретическая часть.**

**Производная** (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как **предел отношения** приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

Иллюстрация понятия производной



#### Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  определена функция  $f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Таблица производных

| Производные степенных функций | Производные тригонометрических функций | Производные обратных тригонометрических функций |
|-------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|
|-------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|



|                                   |                                                |                                               |
|-----------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $(c)' = 0$                        | $(\sin x)' = \cos x$                           | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$       |
| $(x^a)' = ax^{a-1}$               | $(\cos x)' = -\sin x$                          | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$      |
| $(a^x)' = a^x \ln a$              | $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$               | $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$              |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\operatorname{arctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

Правила дифференцирования

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если  $C$  — постоянное число и  $f=f(x)$ ,  $g=g(x)$  — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования*:

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\dots (g \neq 0)$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$  ( $g \neq 0$ )

**Задание:** Вычислите производные следующих функций:

|    |                                                                                                           |    |                                                                                                                         |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | а) $5x^4 - 3,5x^2 + x + 6$ ;<br>б) $\left(\frac{8}{x} + x^2\right)\sqrt{x}$ ;<br>в) $\frac{1+x}{4-x^2}$ . | 4. | а) $2x^{10} + 0,05x^4 - \frac{1}{7}x + 0,3$ ;<br>б) $(4-x^2)\cos x$ ;<br>в) $\frac{\sin x}{2-x^3}$ .                    |
| 2. | а) $\frac{5}{x} - x^3 + \sqrt{x} + 3$ ;<br>б) $(x^2 - 3x - 2)\sqrt{x}$ ;<br>в) $\frac{1-x^2}{1-x^3}$ .    | 5. | а) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$ ;<br>б) $x^2 \cdot 5^x$ ;<br>в) $\frac{x^3 - 3x}{1-2x}$ . |
| 3. | а) $0,7x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 0,75x^2 + \frac{1}{10}$ ;<br>б) $(x+2)\sin x$ ;<br>в) $\frac{x^2}{x+3}$ .   | 6. | а) $2^x + \lg x - 3$ ;<br>б) $(2 - \sqrt{x}) \cdot \operatorname{tg} x$ ;<br>в) $\frac{2x^2}{3-x}$ .                    |

## Практическое занятие № 5

**Тема 1.6:** Правила вычисления производной сложной функции.

**Цель:** Научить правилам вычисления сложной производной.

**Теоретическая часть.**

### Правило для вычисления производной сложной функции

Имея две функции  $f(z)$  и  $g(x)$ , можно образовать сложную функцию  $h(x) = f(g(x))$ . При этом важно заметить, что при вычислении значения  $h(x)$  при  $x = x_0$  сначала вычисляется значение функции  $g(x)$  в точке  $x_0$ , а затем значение функции  $f(z)$  вычисляется уже в точке  $z_0 = g(x_0)$ . Соответственно правило вычисления производной сложной функции  $f(g(x))$  в точке  $a$  использует значение производной функции  $g(x)$  в точке  $a$  и значение производной функции  $f(z)$  в точке  $b = g(a)$ .

Сформулируем правило вычисления производной сложной функции.

*Пусть функция  $g(x)$  имеет производную в точке  $a$ , функция  $f(z)$  имеет производную в точке  $b = g(a)$ . Тогда функция  $h(x) = f(g(x))$  имеет производную в точке  $a$  и*  
$$h'(a) = f'_z(b) \cdot g'(a).$$

### Пример 1. Вычислить производную функции

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ при } x = a.$$

Решение.  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(g(x))$ , где  $g(x) = 3x - \frac{\pi}{3}$ . Поэтому нужно вычислить значение  $g(x)$  в точке  $a$  и значение  $(\sin z)'$  в точке  $b = g(a) = 3a - \frac{\pi}{3}$ . Так как  $g'(x) = (3x - \frac{\pi}{3})' = 3$ ,  
 $(\sin z)' = \cos z$ , то  $g'(a) = 3$ ,  $(\sin z)'(3a - \frac{\pi}{3}) = \cos(3a - \frac{\pi}{3})$ . Отсюда

$$((\sin(3x - \frac{\pi}{3}))'(a) = (\cos(3a - \frac{\pi}{3})) \cdot 3 = 3 \cos(3a - \frac{\pi}{3}).$$

### Пример 2. Вычислить производную функции $\sqrt{x^2 + x}$ при $x = a$ .

Решение,  $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{g(x)} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$ , где  $g(x) = x^2 + x$ . Поэтому нужно вычислить значение  $g'(x)$  в точке  $a$  и значение  $(\sqrt{z})'$  в точке  $b = a^2 + a$ . Так как  $(x^2 + x)' = 2x + 1$ ,  
 $(\sqrt{z})' = (z^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ , то  $g'(a) = 2a + 1$ ,  $(z^{\frac{1}{2}})'(a^2 + a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + a}}$ . Отсюда  
 $(\sqrt{x^2 + x})'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + a}} \cdot (2a + 1) = \frac{2a + 1}{2\sqrt{a^2 + a}}.$

**Доказательство формулы для производной сложной функции для случая монотонных функций**

В том случае, когда функция  $g(x)$  строго монотонна, правило вычисления производной сложной функции можно доказать следующим образом.

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$ ,  $b = g(a)$  и  $\lim_{z \rightarrow b} \frac{f(z) - f(b)}{z - b} = f'(b)$ . В силу монотонности  $g(x) - g(a) \neq 0$  при  $x \neq a$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x) - b} \cdot g'(a) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(z) - f(b)}{z - b} \cdot g'(a) = f'(b) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

В общем случае доказательство правила вычисления производной сложной функции непростое, и мы его не приводим.

**Вопрос.** Как в приведенном доказательстве использовалось свойство монотонности функции  $g(x)$ ?

Иногда правило вычисления производной сложной функции записывают в следующем виде:

$$(f(g(x)))' = f'_z(g(x)) \cdot g'(x).$$

При этом предполагается, что значение производной функции  $f(g(x))$  вычисляется в точке  $x$ ; производная функции  $f(z)$  вычисляется по переменной  $z$ , а затем вместо  $z$  подставляется  $g(x)$ , производная функции  $g(x)$  вычисляется в точке  $x$ .

**Пример 3.**  $(\ln(\sin x))' = (\ln z)'_z (\sin x) \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$

**Пример 4.**  $(x^a)' = (e^{a \ln x})' = (e^z)'_z (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$ .

**Вопрос.** Как из равенства  $(e^x)' = e^x$  вывести, что  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ?

Используя правило [дифференцирования](#) сложной функции, можно вычислить производные обратных тригонометрических функций.

**Пример 5.** Так как  $\sin(\arcsin x) = x$ , то  $1 = (x)' = (\sin(\arcsin x))' = \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)'$ ,  
откуда  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

### Логарифмическая производная и ее применение

С помощью правил, изложенных в уроках 2 и 3 настоящей темы можно найти производные практически всех элементарных функций. Не вполне ясно пока, как найти производную функции типа  $h(x) = f(x)^{g(x)}$ , где  $f(x) > 0$ . Для отыскания производной

такой функции можно использовать так называемую логарифмическую производную, или, иначе говоря, производную от логарифма функции.

Действительно, вычислим производную от функции  $\ln h(x)$  по правилам

дифференцирования сложной функции. Получим  $(\ln h(x))' = \frac{1}{h(x)} h'(x)$ , откуда  $h'(x) = h(x)(\ln h(x))'$ .

Подставляя теперь  $h(x) = f(x)^{g(x)}$ , получим

$$h'(x) = f(x)^{g(x)} (\ln(f(x)^{g(x)}))' = f(x)^{g(x)} (g(x) \ln f(x))' = f(x)^{g(x)} (g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)})$$

$$(x^{\sin x})' = x^{\sin x} ((\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}) = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

Решить упражнения.

1. Найти производную функции:

а)  $\ln 5x$ ; б)  $\ln 2x$ ; в)  $\sin 3x$ ; г)  $\lg(x^2 - 1)$ ;

д)  $\sqrt{2x+3}$ ; е)  $e \sin x$ ; ж)  $\arccos 2x$ ; з)  $\sqrt{9x^2 - 16}$ ;

и)  $\lg 2x$ ; к)  $\lg x + \operatorname{ctg} 2x$ .

2. Изобразить графики функций  $\ln x$ ,  $\ln 2x$ ,  $\ln 3x$  и показать, что они пересекают прямую  $x = 1$  под углом  $45^\circ$ .

3. Найти производную функции  $y = x^x$ .

4. Предполагая существование производной и пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, найти производную функции:

а)  $y = \ln x$ ; б)  $y = \arccos x$ ; в)  $y = \operatorname{arctg} x$ .

## Практическое занятие № 6.

**Тема 1.7:** Применение производной к решению прикладных задач.

**Цель:** Научить определять непрерывность функции.

Теоретическая часть.

### Применения непрерывности

Функция называется непрерывной в точке  $x_0$ , если  $f(x)$  стремится к  $f(x_0)$  при стремлении  $x$  к  $x_0$ . При этом  $f(x) - A = f(x) - f(x_0) = \Delta f$ . Если функция  $f$  непрерывна в каждой точке некоторого промежутка  $A$ , то эта функция будет являться непрерывной на всем промежутке  $A$ . А сам промежуток  $A$ , называют в таком случае **промежутком непрерывности** функции  $f$ .

График непрерывных функций, изучаемых в школьном курсе математики, можно нарисовать «не отрывая карандаш от бумаги», так как он представляет собой сплошную линию. Если на некотором интервале  $(a; b)$  функция  $f$  непрерывна и не обращается в нуль, то на этом интервале она будет сохранять постоянный знак.

Это свойство очень легко для понимания. Функция, расположенная выше оси  $Ox$ , имеет знак «плюс», функция, расположенная ниже оси  $Ox$ , имеет знак «минус». Если линия функции не пересечет ось  $Ox$  (на оси  $Ox$  функция равна нулю), то она явно не изменит свой знак.

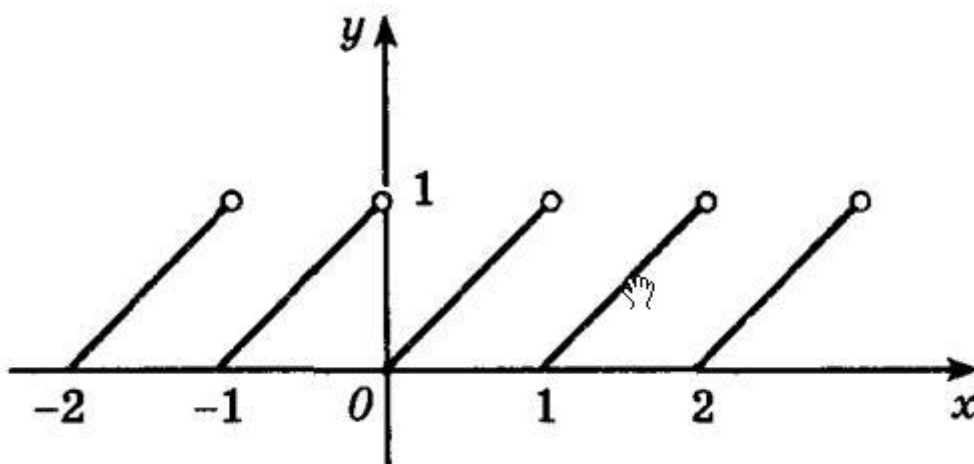
### Метод интервалов

Одним из ярких применений свойств непрерывности функций является метод интервалов, который используется для решения неравенств с одной переменной. Пусть некоторая функции непрерывна на интервале  $A$  и обращается в нуль в конечном числе точек принадлежащих этому интервалу.

Используя свойство, приведенное выше, эти точки будут разбивать весь интервал  $A$  на промежутки, в которых функция будет сохранять свой знак. Чтобы определить знаки всех промежутков, достаточно знать знак одного любого из этих интервалов.

### Пример функции, которая не является непрерывной

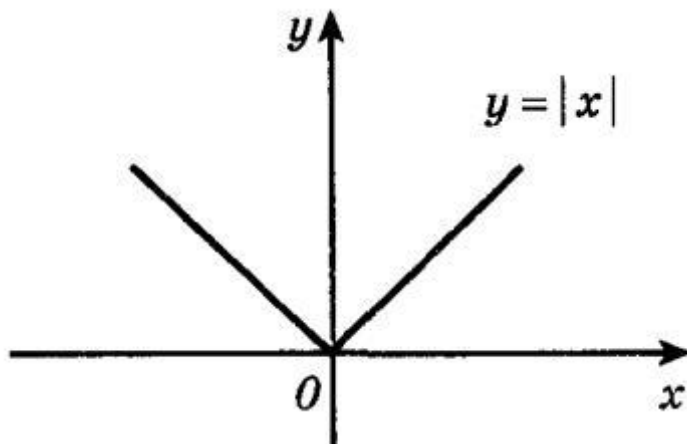
До сих пор мы сталкивались только с непрерывными функциями. Но существуют функции, которые не являются непрерывными в каждой точке, в которой они определены. Например, функция  $f(x) = \{x\}$ , где  $\{x\}$  – есть дробная часть числа  $x$ . Её график изображен на следующем рисунке.



Легко заметить, что основное свойство непрерывности функции в точке  $x_0$  равное любому целому числу, не будет выполняться. Но в тоже время функция  $f(x) = \{x\}$  непрерывна во всех других точках, на которых она определена, кроме точек, где  $x$  равно целому числу. На графике такие точки отмечены выколотыми кружками.

### Функции непрерывные, но не дифференцируемые в данной точке

Есть функции которые являются непрерывными в каждой точке своей области определения. Но при этом не будут иметь производные в некоторых точках. Например, функция  $y=|x|$  непрерывна на все числовой оси, но при этом не дифференцируема в точке  $x = 0$ . Ниже представлен график этой функции.



Исследуйте функцию на непрерывность и постройте схематически график.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{если } x < 1 \\ x^2 + 3, & \text{если } 1 \leq x < 2 \\ 3x + 5, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

**Решение.** Каждая отдельная функция, входящая в исходную, непрерывна, следовательно, разрывы могут возникнуть лишь в точках, при переходе через которые одно выражение сменяется другим, т.е. в точках  $x = -1$  и  $x = 2$ . Рассмотрим, как ведёт себя функция в окрестности точки  $x = -1$ .

$$1) x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} (x + 5) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 + 3) = 4$$

Следовательно, в точке  $x = -1$  функция непрерывна.

$$2) x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + 3) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (3x + 5) = 11$$

Следовательно, в точке функция имеет разрыв I рода.

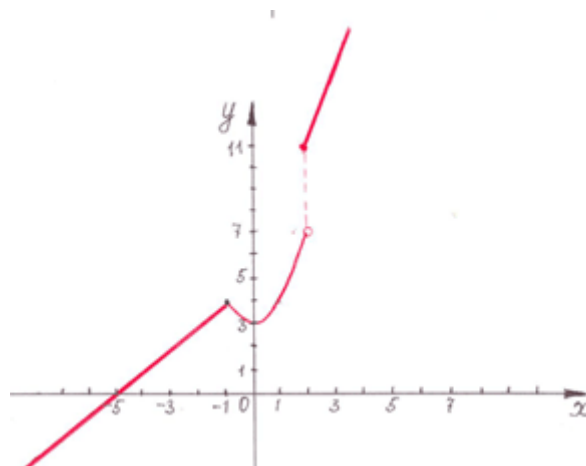


Рисунок 1

2. Найдите область определения функции.

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 7x + 12}{x}}$$

**Решение.** Так как арифметический квадратный корень можно вычислить из

неотрицательного числа, то  $\frac{x^2 + 7x + 12}{x} \geq 0$ .

Вводим функцию  $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x}$ ,  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Находим нули функции  $f(x) = 0$ , тогда  $x^2 + 7x + 12 = 0$ ; по теореме Виета и обратной к ней:

$$x_1 + x_2 = -7$$

$$x_1 * x_2 = 12$$

получаем  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -4$



Рисунок 2

$$x \in [-4; -3] \cup (0; +\infty)$$

**Ответ:**  $D(y) = [-4; -3] \cup (0; +\infty)$ .

3.

а) Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + \dots + n} = 2$

б) Вычислите:  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$

а) В знаменателе дроби под знаком предела стоит сумма членов арифметической

прогрессии, поэтому её можно записать как  $s = \frac{a_1 + a_2}{2} * n = \frac{1 + n}{2} * n = \frac{n^2 + n}{2}$ , тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + \dots + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{\frac{n^2 + n}{2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6n - 4}{n^2 + n} = \frac{[\infty]}{[\infty]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{n} - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25} = \frac{[0]}{[0]} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1}{x+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

4. Докажите, что уравнение  $x^3 - 3x + 1$  имеет корень на отрезке  $[0; 1]$  и найдите его с точностью до 0,1.

**Решение.** Введём функцию  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ , она непрерывна на всей числовой прямой, а её значения  $f(0) = 1$ ;  $f(1) = -1$ . Так как функция разных знаков на концах отрезка, то на этом интервале она может обратиться в нуль хотя бы в одной точке. Разобьём интервал  $[0; 1]$  на более мелкие отрезки и составим таблицу:

|        |   |       |        |        |        |    |
|--------|---|-------|--------|--------|--------|----|
| $x$    | 0 | 0,2   | 0,4    | 0,6    | 0,8    | 1  |
| $f(x)$ | 1 | 0,408 | -0,135 | -0,584 | -0,888 | -1 |

**Вывод.** Так как функция меняет знак на отрезке  $[0,2; 0,4]$ , то корень уравнения с точностью до 0,1 будет равен  $x = 0,3$ .

**Ответ:**  $x = 0,3$ .

5. Решить неравенство:  $\frac{x^2 + 7x + 12}{x} > 0$ .

**Решение.** Вводим функцию  $f(x) = \frac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2}$ ;  $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

Найдём нули функции  $f(x) = 0$ , следовательно,  $(x-2)^3(x+5) = 0$ , тогда  $x = 2$ ,  $x = -5$ .



Рисунок 3

$$f(3) = \frac{(3-2)^3(3+5)}{(3+3)^2} > 0$$

$$f(3) = \frac{(3-2)^3(3+5)}{(3+3)^2} > 0$$



$$f(-4) = \frac{-216}{(-1)^2} < 0$$

$$f(-6) = \frac{(-8)^3(-1)}{(-3)^2} > 0$$

$$x \in (-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$ .

## Практическое занятие № 7

**Тема 1.9:** Неопределенный интеграл. Вычисление неопределенных интегралов.

**Цель:** Научить вычислять неопределенные интегралы

### Теоретическая часть

#### Неопределенный интеграл

$F(x)$  - **первообразная** для  $f(x)$  на множестве  $X$  если  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in X$ . Если  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$  на множестве  $X$ , то  $F(x) + C$  - множество всех первообразных для  $f(x)$  на множестве  $X$ . Это множество первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

*Основные формулы интегрирования*

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции  $f(x)$  в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

### Решение упражнений:

$$1. \int x dx$$

$$2. \int \frac{x}{5} dx$$

$$3. \int x^5 dx$$

$$4. \int 7x^6 dx$$

$$5. \int (7x+1)^3 dx$$

$$6. \int 10 \sin 5x dx$$

$$7. \int 3(5x+1)^2 dx$$

$$8. \int (2x-1)^2 dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^3}$$

$$10. \int \sqrt[4]{x^3} dx$$

$$11. \int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$$

$$12. \int 3 \cos 3x dx$$

$$13. \int 4(5-6x)^3 dx$$

$$14. \int \frac{dx}{x^4}$$

$$15. \int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$$

$$16. \int \frac{4dx}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right)}$$

$$17. \int 2^3 \sqrt{(7-3x)^2} dx$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2-9}$$

$$19. \int \frac{dx}{x^2-25}$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$21. \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$$

$$23. \int \frac{dx}{25+x^2}$$

$$24. \int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$$

$$25. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$26. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} 27. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

## Практическое занятие № 8

**Тема 1.13:** Основные методы вычисления интегралов

**Цель:** Научить вычислять интегралы

**Тема:** Первообразная функции. Неопределенный интеграл. Вычисление неопределенных интегралов.

**Цель:** Научить вычислять неопределенный интегралы

### Теоретическая часть

#### Неопределенный интеграл

$F(x)$  - **первообразная** для  $f(x)$  на множестве  $X$  если  $F'(x) = f(x)$  для всех  $x \in X$ . Если  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$  на множестве  $X$ , то  $F(x) + C$  - множество всех первообразных для  $f(x)$  на множестве  $X$ . Это множество первообразных называют неопределенным интегралом и обозначают  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

Основные свойства неопределенного интеграла

5. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

6. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

7. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

8. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

*Основные формулы интегрирования*

1.  $\int dx = x + C$

2.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5.  $\int e^x dx = e^x + C$

6.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7.  $\int \cos x dx = \sin x + C$

8.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

9.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

10.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции  $f(x)$  в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула

Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

### Решение упражнений:

$$1. \int x dx$$

$$2. \int \frac{x}{5} dx$$

$$3. \int x^5 dx$$

$$4. \int 7x^6 dx$$

$$5. \int (7x+1)^3 dx$$

$$6. \int 10 \sin 5x dx$$

$$7. \int 3(5x+1)^2 dx$$

$$8. \int (2x-1)^2 dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x^3}$$

$$10. \int \sqrt[4]{x^3} dx$$

$$11. \int \frac{5dx}{\sqrt{5x-7}}$$

$$12. \int 3 \cos 3x dx$$

$$13. \int 4(5-6x)^3 dx$$

$$14. \int \frac{dx}{x^4}$$

$$15. \int \frac{3dx}{(8-7x)^4}$$

$$16. \int \frac{4dx}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right)}$$

$$17. \int 2^3 \sqrt{(7-3x)^2} dx$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2-9}$$

$$19. \int \frac{dx}{x^2-25}$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$21. \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$$

$$23. \int \frac{dx}{25+x^2}$$

$$24. \int_0^3 \frac{dx}{9-x^2}$$

$$25. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$26. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} 27. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

## Практическое занятие № 9

**Тема 1.15:** Определенный интеграл как предел интегрирования суммы. Вычисление определенного интеграла.

**Цель:** Научить вычислять определенные интегралы

### Теоретическая часть.

Понятие определенного интеграла вводится следующим образом. Пусть на отрезке  $[a, b]$  определена функция  $f(x)$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Из каждого интервала  $(x_{i-1}, x_i)$  возьмем произвольную точку  $\xi_i$  и составим сумму  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Сумма вида  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  называется *интегральной суммой*, а ее предел при  $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$ , если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* функции  $f(x)$  от  $a$  до  $b$  и обозначается:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

Функция  $f(x)$  в этом случае называется *интегрируемой на отрезке*  $[a, b]$ , числа  $a$  и  $b$  носят название *нижнего и верхнего предела интеграла*.

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad (k = \text{const}, k \in \mathbb{R});$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \in [a, b]).$$

Последнее свойство называется *теоремой о среднем значении*.

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда на этом отрезке существует неопределенный интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

и имеет место *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Геометрическая интерпретация: определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $y=f(x)$ , прямыми  $x = a$  и  $x = b$  и отрезком оси  $Ox$ .

### Решение упражнений.

1. Вычислить  $\int dx/(x+2)$ .

2. Найти  $\int \operatorname{tg} x dx$ .

3. Найти  $\int dx/\sin x$ .

4. Найти  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ .

5. Найти  $\int \operatorname{arctg} x dx$ .

6. Вычислить  $\int \ln x dx$ .

7. Вычислить  $\int e^x \sin x dx$ .

**Пример 3.37.** Вычислить  $J = \int \cos(\ln x) dx/x$ .

*Решение.* Так как  $dx/x = d(\ln x)$ , то  $J = \int \cos(\ln x) d(\ln x)$ . Заменяя  $\ln x$  через  $t$ , приходим к табличному интегралу  $J = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C$ .

8. Вычислить  $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$ .

9. Вычислить интеграл  $J = \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ .

10. Можно ли применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу  $\int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$ ?

11. Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ .

## Практическое занятие № 10

**Тема 2.2:** Квадратная матрица. Операции над матрицами.

**Цель:** Научить решать определять значения матриц.

**Теоретическая часть:**

**Тема:** Операции над матрицами. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы

**Цель:** Освоить способы выполнения операций над матрицами, элементарные преобразования матриц, нахождения обратной матрицы

Теоретическая часть

Операции над матрицами

**Сложение матриц.** Суммой двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  одной и той же размерности  $m \times n$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  той же размерности такая, что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Итак, можно складывать только матрицы одной и той же размерности. При сложении матриц складываются соответствующие элементы.

**Пример 1.**

Найдите сумму матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3-3 & 2-2 \\ -1+1 & 0+0 \\ 1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — нуль-матрица размерности } 3 \times 2.$$

Из определения суммы следует, что сложение матриц подчинено:

а) коммутативному закону  $A + B = B + A$ ;

б) ассоциативному закону

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C);$$

в)  $A_{m \times n} + 0_{m \times n} = A_{m \times n}$  — закон поглощения нуля.

**Умножение матрицы на число.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})$  на число  $\lambda$  (или  $\lambda$  на матрицу  $A$ ) называется матрица  $B = (b_{ij})$ , где  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ , т.е. при умножении матрицы на число надо все элементы матрицы умножить на это число.

**Пример 2**

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

*Свойства операции умножения матрицы на число:*

а)  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$  (ассоциативность);

б)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$  (дистрибутивность относительно сложения чисел);

в)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$  (дистрибутивность относительно сложения матриц);

г)  $1 \cdot A = A$ .

**Пример 3**

Найдите  $2A + 3B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$2A + 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & 4+9 & 6+0 \\ 0+6 & 2+3 & -2+3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Умножение матриц.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})$  размерности  $n \times m$  на матрицу  $B = (b_{ij})$  размерности  $m \times p$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размерности  $n \times p$  такая, что  $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Умножать матрицы  $A$  и  $B$  можно лишь в том случае, когда число столбцов первого сомножителя  $A$  (число элементов в каждой строке матрицы  $A$ ) совпадает с числом строк второго сомножителя  $B$  (число элементов в каждом столбце  $B$ ). В частности для квадратных матриц одинакового порядка определены оба произведения  $AB$  и  $BA$ , и матрицы произведения являются матрицами того же порядка

**Пример 4** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ . Найдите произведения  $AB$  и  $BA$  (если это возможно).

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{выделяются 1-я строка матрицы } A \\ \text{и первый столбец матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение  $BA$  не существует, так как число столбцов матрицы  $B$  не совпадает с числом строк матрицы  $A$  ( $3 \neq 2$ ).

**Пример 5** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Найдите произведения  $AB$  и  $BA$  (если это возможно).

$$AB = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -3 + 2 - 2 = -3.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 & -1 \cdot 2 & -1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных выше примеров ясно, что в общем случае  $AB \neq BA$ .



*Коммутирующими* называют матрицы  $A$  и  $B$ , если для них выполнено условие  $AB=BA$ .

*Свойства операции умножения матриц:*

- а) ассоциативность: если определено одно из произведений  $(AB)C$  или  $A(BC)$ , то определено также и второе произведение, и имеет место выше приведённое равенство  $(AB)C = A(BC) = A \cdot B \cdot C$ ;
- б) дистрибутивность: если  $C$  — такая матрица, что определено произведение  $AC$ , то определены произведения  $BC$  и  $(A+B)C$  и верно равенство  $(A+B)C = AC + BC$  ( $A$  и  $B$  — матрицы одинаковых размеров);
- в) дистрибутивность: если  $A$  — такая матрица, что определено произведение  $AB$ , то определены произведения  $AC$  и  $A(B+C)$  и верно равенство  $A(B+C) = AB + AC$  ( $B$  и  $C$  — матрицы одинаковых размеров);
- г)  $A_{m \times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$ .

**Транспонированная матрица**

Транспонированием матрицы называется такое её преобразование, при котором строки этой матрицы становятся её столбцами с теми же номерами.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обозначается  $A'$  или  $A^T$ .

Если  $A^T = A$ , т.е.  $a_{ij} = a_{ji}$ , то матрица называется *симметрической*.

**Пример 6** Транспонируйте матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Вычисление определителей.**

**Определение 1**

Определителем матрицы называется некоторая математическая функция элементов квадратной матрицы, результатом которой является число.

**Обозначение:**

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 4 & -1 \\ 12 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

— определитель 3-го порядка (т.к. матрица размера 3 на 3) матрицы А.

### Вычисление определителей первого порядка.

Матрица размера  $1 \times 1$  это просто число. Определителем такой матрицы является само это число.

#### Пример:

$$|3| = 3$$

### Вычисление определителей второго порядка

Определитель второго порядка (матрицы размера 2 на 2) вычисляется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

#### Пример 7:

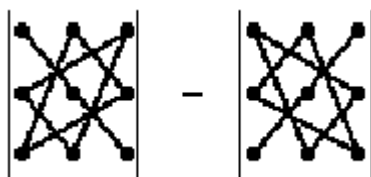
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4(-3) = 3 + 12 = 15$$

### Вычисление определителей третьего порядка

Определитель третьего порядка (матрицы размера 3 на 3) вычисляется по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Запомнить порядок сомножителей можно, используя правило треугольников



#### Пример 8.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 11 & 21 & -5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение:

Вспользуемся правилом треугольника

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} = 2 \cdot 21 \cdot 9 = 378$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = a_{12}a_{23}a_{31} = 3 \cdot (-5) \cdot 4 = -60$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = a_{13}a_{21}a_{32} = 11 \cdot (-1) \cdot 6 = -66$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{31} = (-1) \cdot 21 \cdot 4 = -84$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}a_{33} = 3 \cdot 11 \cdot 9 = 297$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}a_{32} = 2 \cdot (-5) \cdot 6 = -60$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 11 & 21 & -5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 378 - 60 - 66 - (-84 + 297 - 60) = 108$$

Ответ 108

## Нахождение обратной матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу  $A$ . Обратную матрицу  $A^{-1}$  можно найти по следующей формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T$ , где  $|A|$  – определитель матрицы  $A$ ,  $A^T$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $A$ .

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц, матриц «два на два», «три на три» и т.д.

обратная матрица обозначается надстрочным индексом  $^{-1}$

### Пример 9:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти обратную матрицу для матрицы

Решаем.

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

В том случае, если определитель матрицы равен НУЛЮ – обратной матрицы не существует.

2) Найдем матрицу миноров  $M$ .

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица  $A$ , то есть в

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

данном случае

осталось найти четыре числа и поставить их вместо звездочек.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Возвращаемся к нашей матрице

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

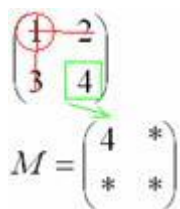
$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его минор?

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

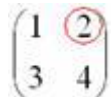
$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является минором данного элемента, которое записываем в нашу матрицу миноров:

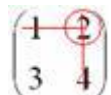


$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

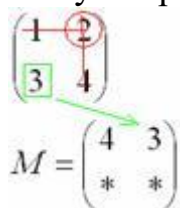
Рассматриваем следующий элемент матрицы  $A$ :



Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

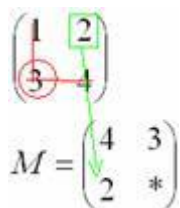


То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:

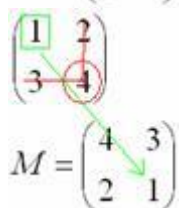


$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:



$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & * \end{pmatrix}$$

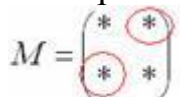


$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица миноров соответствующих элементов матрицы  $A$ .

3) Находим матрицу алгебраических дополнений  $A^*$ .

Это просто. В матрице миноров нужно поменять знаки у двух чисел:



$A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $A$ .

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений  $A^{*T}$ .

$A^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $A$ .

5) Ответ.

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Как проверить решение?

Необходимо выполнить матричное умножение  $AA^{-1}$  либо  $A^{-1}A$

Проверка:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Получаем единичную матрицу (с единицами по главной диагонали и нулями в остальных местах).

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

**Пример 10** Найти обратную матрицу для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Алгоритм точно такой же, как и для случая «два на два».

Обратную матрицу найдем по формуле:  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B^T$ , где  $B^T$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $B$ .

1) Находим определитель матрицы.

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-9 + 8) - 5 \cdot (-18 - 20) + 7 \cdot (-12 - 15) = -2 + 190 - 189 = -1 \end{aligned}$$

2) Находим матрицу миноров  $M$ .

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Матрица миноров имеет размерность «три на три», и нам нужно найти девять чисел.

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный

элемент:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и является минором данного элемента. Его нужно вычислить:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

нахождение еще одного минора

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = 8 - 42 = -34$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Окончательный результат:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

– матрица миноров соответствующих элементов матрицы  $B$ .

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений  $B^*$ .

В матрице миноров необходимо сменить знаки строго у следующих элементов:

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$B_{\bullet} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$  – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $B$ .

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений  $B_{\bullet}^T$ .

$B_{\bullet}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы  $B$ .

5) Ответ:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_{\bullet}^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} BB^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot 27 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 41 + 7 \cdot (-29) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot 24 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot 27 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 41 + 4 \cdot (-29) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-34) + 4 \cdot 24 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-38) - 3 \cdot 27 & 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 41 - 3 \cdot (-29) & 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-34) - 3 \cdot 24 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

### Задание для выполнения практической работы

Задание 1. Вычислить  $3A+2B$

Задание 2. Вычислить  $AB$

Задание 3. Найти обратную матрицу для матрицы  $A$  и  $B$

|    |                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                      |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  |
| 2. | $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  | $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |



|    |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. | $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  | $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$    |
| 4. | $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 5. | $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  | $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$   |

### Практическое занятие № 11

**Тема 2.3:** Метод Гаусса и метод Крамера при решении систем.

**Цель:** Освоить способы решения систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

Теоретическая часть

Рассмотрим систему уравнений 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = s_1 \\ a_2x + b_2y = s_2 \end{cases}$$

Вычислим определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ , его называют *главным определителем системы*.

Если  $\Delta = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$$

Корни уравнения находим по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Рассмотрим правило Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = s_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = s_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если  $D = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если  $D \neq 0$ , то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$D_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

Ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

### Пример 1

Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение:** Решим систему по формулам Крамера.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60 \neq 0$ , значит, система имеет единственное решение.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-9 + 20) + 4 \cdot (-9 - 40) = -126 + 22 - 196 = -300$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 21 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-9 + 20) - 21 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (30 - 18) = 33 - 21 + 48 = 60$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (40 + 9) - 3 \cdot (-20 + 21) + 2 \cdot (-18 - 84) = 147 - 3 - 284 = -60$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-60}{-60} = 1$$

**Ответ:**  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

## Пример 2

Решить систему с матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение:** Запишем систему в матричной форме:

$$AX = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Нужно найти обратную матрицу  $A^{-1}$  и выполнить матричное умножение  $A^{-1}b$   
Обратную матрицу найдем по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T, \text{ где } A^T - \text{транспонированная матрица алгебраических}$$

дополнений соответствующих элементов матрицы  $A$ .

Найдем определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4 - 2) + 2 \cdot (-3 + 4) + 4 \cdot (-3 - 8) = -18 + 2 - 44 = -60$$

Если  $|A| = 0$ , то обратной матрицы не существует, и решить систему матричным методом невозможно. В этом случае система решается методом исключения неизвестных (методом Гаусса).

Теперь нужно вычислить 9 миноров и записать их в матрицу миноров

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6 = 18$$

Порядок расчета миноров совершенно не важен.

$M = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -11 \\ 6 & -11 & 1 \\ -12 & -18 & 18 \end{pmatrix}$  – матрица миноров соответствующих элементов матрицы  $A$ .

$A_{\star} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{pmatrix}$  – матрица алгебраических дополнений.

$A_{\star}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений.

Теперь записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{\star}^T = \frac{1}{-60} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

Проведем матричное умножение.

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= A^{-1}b = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 6 \cdot 21 + 6 \cdot 9 + 12 \cdot 10 \\ 1 \cdot 21 + 11 \cdot 9 - 18 \cdot 10 \\ 11 \cdot 21 + 1 \cdot 9 - 18 \cdot 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$

Наиболее универсальным способом решения системы является метод исключения неизвестных – метод Гаусса. Суть метода заключается в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду, если система имеет единственное решение, то матрица приведется к треугольному виду

### Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

1) К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на  $-1$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(5)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

3) Первую строку умножили на  $-1$ , в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

5) Третью строку разделили на 3.

Получаем:

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

**Ответ:**  $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$ .

### Задание для выполнения практической работы

Решить систему уравнений тремя методами

|   |                                                                                      |    |                                                                                       |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------|----|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$   | 6  | $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$     |
| 2 | $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$   | 7  | $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$   |
| 3 | $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ | 8  | $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$         |
| 4 | $\begin{cases} x + 5y + z = -7 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$      | 9  | $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} x + 5y + z = 7 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$    | 10 | $\begin{cases} 2x - y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$    |

### Практическое занятие № 12

**Тема 2.4:** Решение систем линейных уравнений

**Цель:** Научить решать линейные уравнения

#### Теоретическая часть

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Уравнение вида  $y' + p(x) = f(x)$  (1)

где  $p(x)$  и  $f(x)$  - непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если  $f(x) = 0$ , то уравнение (1) называется *линейным однородным уравнением*.

Если  $f(x) \neq 0$ , то уравнение (1) называется *линейным неоднородным уравнением*.

Для нахождения общего решения такого уравнения сначала решают соответствующее однородное уравнение  $y' + p(x) = 0$ , а затем применяют метод вариации постоянной.

Рассмотрим на примере решение линейных дифференциальных неоднородных уравнений первого порядка.

Пример.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + y \cos x = \sin 2x$$

Решение.

Найдем общее решение однородного уравнения  $y' + y \cos x = 0$ . Разделяя переменные  $\frac{dy}{y} = -\cos x dx$

интегрируя, находим  $\ln y = -\sin x + \ln C$ ;  $y = Ce^{-\sin x}$ . Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $y = C(x)e^{-\sin x}$  методом вариации постоянной, то есть  $C$  будем считать не постоянной, а новой неизвестной функцией от  $x$ . Дифференцируя, имеем  $y' = C'e^{-\sin x} - \cos x Ce^{-\sin x}$ . Подставляя в данное уравнение выражения для  $y$  и  $y'$ , получаем

$$C'e^{-\sin x} - \cos x Ce^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x} \cos x = \sin 2x C'(x)e^{-\sin x} = \sin 2x C'(x) = e^{-\sin x} \sin 2x$$
$$dC = e^{\sin x} \sin 2x dx \quad C(x) = \int e^{\sin x} 2 \sin x \cos x$$

Применяя подстановку  $\sin x = t$  и интегрирование по частям, получим

$$C(x) = 2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C_2$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-\sin x} = (2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C_2)e^{-\sin x} = 2(\sin x - 1) + C_2 e^{-\sin x}$$

### Решение упражнений

1.  $(1 + y)dx - (x - 1)dy = 0$ ;
2.  $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$ ;
3.  $(1 + y^2)dx - xydy = 0$
4.  $y' - (2y + 1)\operatorname{ctg} x = 0$
5.  $(1 + x)ydx + (1 - y)x dy = 0$ ;
6.  $x^2 y' + y^2 = 0$
7.  $ydx - (x^2 - 4)dy = 0$
8.  $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$
9.  $(2x + 1)dy - y^2 dx = 0$ ;
10.  $2dy + (y - 6x)dx = 0$
11.  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$
12.  $xy' + y = e^x$
13.  $xy' - \frac{y}{x+1} = x$
14.  $xy' + 2y = x^2$
15.  $y' + 2y = 4x$
16.  $y' + y = \cos x$
17.  $y' = x + y$
18.  $y' + 4y = e^{2x}$

19.  $y' - y = e^x$

### Практическое занятие №13

**Тема 2.5:** Различные виды применения линейных уравнений.

**Цель:** Изучить различные виды применения линейных уравнений.

#### Теоретическая часть

Рассмотрим вначале случай, когда число уравнений равно числу переменных, т.е.  $m = n$ . Тогда матрица системы - квадратная, а ее определитель называют определителем системы.

#### Метод обратной матрицы

Рассмотрим в общем виде систему уравнений  $AX = B$  невырожденной квадратной матрицей  $A$ . В этом случае существует обратная матрица  $A^{-1}$ . Домножим слева обе части на  $A^{-1}$ . Получим  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ . Отсюда  $EX = A^{-1}B$  и  $X = A^{-1}B$ .

Последнее равенство представляет собой матричную формулу для нахождения решения таких систем уравнений. Использование этой формулы получило название метода обратной матрицы

Например, решим этим методом следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид:  $AX = B$ .  
Найдем определитель  $|A| = 5$ . Так как  $|A| \neq 0$ ,  
то матрица  $A$  — невырожденная, и существует обратная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

В конце решения системы можно сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы. При этом они должны обратиться в верные равенства.

Для рассмотренного примера проведем проверку:

$$\begin{cases} 4 - 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 4 + 2 + 1 = 11 \\ 4 + 2 + 2 \cdot 1 = 8 \end{cases}$$

### Метод решения систем линейных уравнений с квадратной матрицей по формулам Крамера

Пусть  $n = 2$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Если обе части первого уравнения умножить на  $a_{22}$ , а обе части второго – на  $(-a_{12})$ , и затем сложить полученные уравнения, то мы исключим из системы переменную  $x_2$ . Аналогично можно исключить переменную  $x_1$  (умножив обе части первого уравнения на  $(-a_{21})$ , а обе части второго – на  $a_{11}$ ). В результате получим систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то система будет совместной и  $\Delta$  определенной. Ее единственное решение можно вычислить по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$\Delta = 0$ , а  $\Delta_1 \neq 0$  и/или  $\Delta_2 \neq 0$ , то уравнения системы примут вид  $0 \cdot x_1 \neq \Delta_1$  и/или  $0 \cdot x_2 \neq \Delta_2$ . В этом случае система будет несовместной.

$\Delta = 0$  в случае, когда  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , система будет совместной и неопределенной (будет иметь бесконечное множество решений), так как примет вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

**Теорема Крамера** (доказательство опустим). Если определитель не равен нулю, то матрицы системы уравнений система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n},$$

где  $\Delta_j$  - определитель матрицы, получаемой из матрицы  $A$  заменой  $j$ -го столбца столбцом свободных членов.

Вышеприведенные формулы называют **формулами Крамера**.

В качестве примера решим этим методом систему, которую до этого решали методом обратной матрицы:

**Найдем определитель системы  $\Delta = |A| = 5$ . Так как  $\Delta \neq 0$ , то по теореме Крамера система имеет единственное решение.**

**Вычислим определители матриц  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , полученных из матрицы  $A$ , заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

**Теперь по формулам Крамера**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

**т.е. решение системы (4; 2; 1).**

Недостатки рассмотренных методов:

- 1) существенная трудоемкость (вычисление определителей и нахождение обратной матрицы);
- 2) ограниченная область применения (для систем с квадратной матрицей).

Реальными экономическими ситуациями чаще моделируются системы, в которых число уравнений и переменных довольно значительное, причем уравнений больше, чем переменных. Поэтому на практике более распространен следующий метод.

### Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных)

Этот метод используется для решения системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными в общем виде. Его суть заключается в применении к расширенной матрице системы равносильных преобразований, с помощью которых система уравнений преобразуется к виду, когда ее решения становится легко найти (если они есть).

Это такой вид, в котором левая верхняя часть матрицы системы будет представлять собой ступенчатую матрицу. Этого добиваются с помощью тех же приемов, с помощью которых получали ступенчатую матрицу с целью определения ранга. При этом применяют к расширенной матрице элементарные преобразования, которые позволят получить равносильную систему уравнений. После этого расширенная матрица примет вид:

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array} \right)$$

Получение такой матрицы называют **прямым ходом** метода Гаусса.

Нахождение из соответствующей системы уравнений значений переменных называют **обратным ходом** метода Гаусса. Рассмотрим его.

Отметим, что последние  $(m - r)$  уравнений примут вид:

$$\left\{ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i, \quad i = \overline{r+1, m} \right.$$

Если хотя бы одно из чисел  $b_i, \quad i = \overline{r+1, m}$  не равно нулю, то соответствующее равенство будет ложным, а вся система несовместной.

Поэтому для любой совместной системы  $b_i = 0, \quad i = \overline{r+1, m}$ . В этом случае последние  $(m - r)$  уравнений при любых значениях переменных будут тождествами  $0 = 0$ , и их можно не принимать во внимание при решении системы (просто отбросить соответствующие строки).

После этого система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1r} * x_r + a_{1r+1} * x_{r+1} + \dots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ a_{22} * x_2 + \dots + a_{2r} * x_r + a_{2r+1} * x_{r+1} + \dots + a_{2n} * x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{rr} * x_r + a_{rr+1} * x_{r+1} + \dots + a_{rn} * x_n = b_r \end{cases}$$

Рассмотрим вначале случай, когда  $r=n$ . Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1r} * x_r = b_1 \\ a_{22} * x_2 + \dots + a_{2r} * x_r = b_2 \\ \dots \\ a_{rr} * x_r = b_r \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы можно однозначно найти  $x_r$ .

Предпоследнее уравнение будет иметь вид:

$$a_{r-1r-1} * x_{r-1} + a_{r-1r} * x_r = b_{r-1}$$

Зная  $x_r$ , из него можно однозначно выразить  $x_{r-1}$ . Затем из предыдущего уравнения, зная  $x_r$  и  $x_{r-1}$ , можно выразить  $x_{r-2}$  и т.д. до  $x_1$ .

Итак, в этом случае система будет совместной и определенной.

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

**Расширенная матрица системы имеет вид:**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

Так как  $a_{11} \neq 0$ , то умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа  $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-2)$  и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную  $x_1$  из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице  $a_{22} = 0$ , поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right)$$

Так как теперь  $a_{22} = -4 \neq 0$ , то умножая вторую строку на  $(-7/4)$  и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную  $x_2$  из всех строк, начиная с третьей:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array} \right)$$

Учитывая, что  $a_{33} = -8 \neq 0$ , умножаем третью строку на  $13,5/8 = 27/16$ , и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную  $x_3$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right)$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14 \\ -8x_3 + x_4 = 6 \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8} \end{cases}$$

используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения  $x_4 = -2$ ; из третьего  $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$ ; из второго  $x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$  и из первого уравнения  $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$ , т.е. решение системы  $(1; 2; -1; 2)$ .

Теперь рассмотрим случай, когда  $r < n$ . Первые  $r$  переменных будем называть **базисными** (основными), а все остальные – **небазисными** (неосновными, свободными). Последнее уравнение системы будет иметь вид:

$$a_{r1} * x_1 + a_{r2} * x_2 + \dots + a_{rn} * x_n = b_r$$

Из этого уравнения можно выразить базисную переменную  $x_r$  через небазисные:

$$x_r = \frac{b_r - (a_{r1} * x_1 + \dots + a_{rn} * x_n)}{a_{rr}}$$

Предпоследнее уравнение будет иметь вид:

$$a_{(r-1)1} * x_1 + a_{(r-1)r} * x_r + a_{(r-1)(r+1)} * x_{r+1} + \dots + a_{(r-1)n} * x_n = b_{r-1}$$

Подставив в него вместо  $x_r$  полученное выражение, можно будет выразить базисную переменную  $x_{r-1}$  через небазисные. И т.д. до переменной  $x_1$ . Чтобы получить решение системы, можно приравнять небазисные переменные к произвольным значениям и после этого вычислить базисные переменные по полученным формулам. Таким образом, в этом случае система будет совместной и неопределенной (иметь бесконечное множество решений).

Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при  $x_1$  равен 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Оставляем в левой части переменные  $x_1, x_2$ ,

которые берем за основные. Остальные неосновные

переменные  $x_3, x_4$  переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \quad \text{и}$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения  $x_3 = c_1$ ,  $x_4 = c_2$ , найдем бесконечное множество решений систе-

$$\text{мы } \left( x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2; x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2; x_3 = c_1; x_4 = c_2 \right).$$

#### Практическое занятие №14

Тема 3.2: Свойства вероятности.

Цель: Изучить свойства вероятности.

#### Теоретическая часть

Совокупность базисных переменных будем называть **базисом** системы. Совокупность столбцов коэффициентов при них тоже будем называть **базисом** (базисными столбцами), или **базисным минором** матрицы системы. То решение системы, в котором все небазисные переменные равны нулю, будем называть **базисным решением**.

В предыдущем примере базисным решением будет  $(4/5; -17/5; 0; 0)$  (переменные  $x_3$  и  $x_4$  ( $c_1$  и  $c_2$ ) приравнены к нулю, а базисные переменные  $x_1$  и  $x_2$  рассчитаны через них). Чтобы привести пример небазисного решения, надо приравнять  $x_3$  и  $x_4$  ( $c_1$  и  $c_2$ ) к произвольным числам, неравным одновременно нулю, и рассчитать через них остальные переменные. Например, при  $c_1 = 1$  и  $c_2 = 0$  получим небазисное решение  $-(4/5; -12/5; 1; 0)$ .

Подстановкой легко убедиться, что оба решения – верные.

Очевидно, что в неопределенной системе небазисных решений может быть бесконечно много. Сколько может быть базисных решений? Каждой строке преобразованной матрицы должна соответствовать одна базисная переменная. Всего в задаче  $n$  переменных, а базисных строк –  $r$ . Поэтому число всевозможных наборов базисных переменных не может

превысить число сочетаний из  $n$  по  $r$ . Оно может быть меньше, чем  $C_n^r$ , потому что не

всегда можно преобразовать систему к такому виду, чтобы именно этот набор переменных был базисным.

Что это за вид? Это такой вид, когда матрица, образованная из столбцов коэффициентов при этих переменных, будет ступенчатой, и при этом будет состоять из  $r$  строк. Т.е. ранг матрицы коэффициентов при этих переменных должен быть равен  $r$ . Большого быть не может, так как число столбцов равно  $r$ . Если он окажется меньше, то это говорит о линейной зависимости столбцов при переменных. Такие столбцы не могут составить базис.

Рассмотрим, какие еще базисные решения могут быть найдены в рассмотренном выше примере. Для этого рассмотрим всевозможные сочетания из четырех переменных по две

базисных. Таких сочетаний будет  $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2*3*4}{2*2} = 6$ , причем одно из них ( $x_1$  и  $x_2$ ) уже было рассмотрено.

Возьмем переменные  $x_1$  и  $x_3$ . Найдем ранг матрицы коэффициентов при них:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2,5 \\ 0 & -2,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2,5 \end{pmatrix}$$

Так как он равен двум, они могут быть базисными. Приравняем небазисные переменные  $x_2$  и  $x_4$  к нулю:  $x_2 = x_4 = 0$ . Тогда из формулы  $x_1 = 4/5 - (1/5)*x_4$  следует, что  $x_1 = 4/5$ , а из формулы  $x_2 = -17/5 + x_3 - (7/5)*x_4 = -17/5 + x_3$  следует, что  $x_3 = x_2 + 17/5 = 17/5$ . Таким образом, мы получим базисное решение  $(4/5; 0; 17/5; 0)$ .

Аналогично можно получить базисные решения для базисных переменных  $x_1$  и  $x_4$  —  $(9/7; 0; 0; -17/7)$ ;  $x_2$  и  $x_4$  —  $(0; -9; 0; 4)$ ;  $x_3$  и  $x_4$  —  $(0; 0; 9; 4)$ .

Переменные  $x_2$  и  $x_3$  в этом примере нельзя взять в качестве базисных, так как ранг соответствующей матрицы равен единице, т.е. меньше двух:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (2 \quad 1)$$

Возможен и другой подход к определению того, можно или нет составить базис из некоторых переменных. При решении примера в итоге преобразования матрицы системы к ступенчатому виду она приняла вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Выбирая пары переменных, можно было рассчитать соответствующие миноры этой матрицы. Легко убедиться, что для всех пар, кроме  $x_2$  и  $x_3$ , они не равны нулю, т.е. столбцы линейно независимы. И только для столбцов при переменных  $x_2$  и  $x_3$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

, что говорит об их линейной зависимости.

Рассмотрим еще один пример. Решим систему уравнений



$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

**Преобразуем расширенную матрицу системы**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво - оно привелось к неверному равенству  $0 = -1$ , следовательно, данная система несовместна.

**Выполнить упражнения.**

## Практическое занятие № 15

**Тема 3.3:**Классификация событий. Операции над событиями.

**Цель:**Научиться проводить операции над событиями.

**Теоретическая часть**

**Закон равномерного распределения вероятностей.**

Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция имеет постоянное значение.

Пусть  $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq a, \\ C, a < x < b, \\ 0, b \leq x, \end{cases}$  т.к.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$  то  $C = \frac{1}{b-a},$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x < b, \\ 1, x \geq b. \end{cases}$$

**Пример.** Показательное распределение.

**Решение.** Показательное распределение задается своей дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } \lambda > 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{+\infty} \lambda^{-\lambda} dx = (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Проверим, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0. \end{cases}$$

Продолжительность существования радиоактивных частиц описывается показательным распределением.

Характеристиками положения н.с.в., так же как и дискретной, являются математическое ожидание, мода и медиана.

**Математическим ожиданием** н.с.в. называют число

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

где  $f(x)$  - плотность вероятности, и предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

**Модой** н.с.в. называется значение с.в., при котором плотность вероятности максимальна.

**Медианой** н.с.в.  $X$  называется такое ее значение  $M$ , что

$$P\{X \leq M\} = P\{X > M\}.$$

Основными характеристиками рассеивания н.с.в. являются дисперсия, асимметрия и эксцесс.

**Дисперсия** н.с.в.  $D[X]$  находится следующим образом:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \quad D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2[X].$$

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M[(X - \bar{x})^3]}{\sigma^3},$$

**Асимметрия** - это число  $A_S$  где  $\sigma$  - среднее квадратичное отклонение с.в.  $X$ . Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то  $A_S = 0$ .

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M[(X - \bar{x})^4]}{\sigma^4} - 3.$$

**Эксцессом** с.в.  $X$  называется число  $E_k$  Число  $E_k$  характеризует "крутость" кривой плотности вероятности по сравнению с кривой Гаусса.

Для нормального закона распределения  $E \frac{k}{k} = 0$ , для островершинных  $E \frac{k}{k} > 0$ , для пологих  $E \frac{k}{k} < 0$

1) **Выполнить упражнения**

2) Дано следующее распределение дискретной случайной величины:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 1   | 2   | 4   | 5   |
| p | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

1. Найти ее дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

2. В пяти торговых точках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой точке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

3) Случайная величина X задана плотностью вероятности  $2x$  в интервале  $(0, 1)$ , «вне этого интервала»  $f(x) = 0$ . Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

1. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 12, а среднее квадратичное отклонение равно 3, Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале  $(9, 11)$ .

2. Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 15, а вероятность ее попадания в интервал  $(16, 21)$  равна 0,98. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины

## Практическое занятие № 16.

**Тема 3.4:** Числовые характеристики дискретной случайной величины.

**Цель:** Научить определять числовые характеристики дискретной случайной величины.

Теоретическая часть.

**Определение:** Математическим ожиданием  $M(X)$  дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:  

$$M(X) = \sum x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1)  $M(C) = C$ , где C-постоянная величина;

2)  $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ ,

3)  $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ ;

4)  $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ , где  $X, Y$  - независимые случайные величины;

5)  $M(X \pm C) = M(X) \pm C$ , где  $C$  - постоянная величина;

Определение: Дисперсией  $D(X)$  случайной величины  $X$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Свойства дисперсии:

1)  $D(C) = 0$ , где  $C$  - постоянная величина;

2)  $D(X) > 0$ , где  $X$  - случайная величина;

3)  $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$ , где  $C$  - постоянная величина;

4)  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ , где  $X, Y$  - независимые случайные величины;

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \text{ где } M(X) = \sum x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n$$

Определение: Средним квадратическим отклонением  $\sigma(X)$  случайной величины  $X$  называется квадратный корень из дисперсии:

Задача 2. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения:

$x$  -1

$p$  0,1  $P_2$  0,3 0,2 0,3

Найти  $P_2$ , функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график, а также  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

Решение: Так как сумма вероятностей возможных значений случайной величины  $X$  равна 1, то

$$P_2 = 1 - (0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,3) = 0,1$$

Найдем функцию распределения  $F(x) = P(X \leq x)$ .

Геометрически это равенство можно истолковать так:  $F(x)$  есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки  $x$ .

Если  $x \leq -1$ , то  $F(x) = 0$ , т.к. на  $(-\infty; x)$  нет ни одного значения данной случайной величины;

если  $-1 < x \leq 0$ , то  $F(x) = P(X = -1) = 0,1$ , т.к. в промежуток  $(-\infty; x)$  попадает только одно значение  $x_1 = -1$ ;

если  $0 < x \leq 1$ , то  $F(x) = P(X=-1) + P(X=0) = 0,1 + 0,1 = 0,2$ , т.к. в промежутке

$(-\infty; x)$  попадают два значения  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 0$ ;

если  $1 < x \leq 2$ , то  $F(x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = 0,1 + 0,1 + 0,3 = 0,5$ , т.к. в промежутке  $(-\infty; x)$  попадают три значения  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 1$ ;

если  $2 < x \leq 3$ , то  $F(x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,7$ , т.к. в промежутке  $(-\infty; x)$  попадают четыре значения  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$  и  $x_4 = 2$ ;

если  $x > 3$ , то  $F(x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,3 = 1$ , т.к. в промежутке  $(-\infty; x)$  попадают четыре значения  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 2$  и  $x_5 = 3$ .

Итак,

0 при  $x \leq -1$ ,

0,1 при  $-1 < x \leq 0$ ,

0,2 при  $0 < x \leq 1$ ,

$F(x) = 0,5$  при  $1 < x \leq 2$ ,

0,7 при  $2 < x \leq 3$ ,

1 при  $x > 3$

Найдем числовые характеристики случайной величины:

$$M(X) = \sum x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

$$M(X) = -1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$D(X) = \sum x_k^2 p_k - (M(X))^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n - (M(X))^2$$

$$D(X) = (-1)^2 \cdot 0,1 + 12 \cdot 3 + 22 \cdot 0,2 + 32 \cdot 0,3 - (1,5)^2 = 1,65.$$

## **Рекомендуемая литература**

### **Основная литература:**

1. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2019. — 96 с. — ISBN 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/65731.html>

2. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие для СПО / Г. А. Сикорская. — Саратов : Профобразование, 2020. — 303 с. — ISBN 978-5-4488-0612-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/91847.html>

3. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие для СПО / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязановой. — 2-е изд. — Саратов, Екатеринбург : Профобразование, Уральский федеральный университет, 2019. — 115 с. — ISBN 978-5-4488-0484-7, 978-5-7996-2821-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87795.html>.

### **Дополнительная литература:**

1. Лисичкин, В.Т. Математика в задачах с решениями : учебное пособие / В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 464 с. — ISBN 978-5-8114-1179-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/112074>

### **Интернет-ресурсы:**

• Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября» <http://www.mat/septemba.ru>

- Математика в открытом колледже <http://www.mathematics.ru>
- Образовательный математический сайт Exponenta.mh <http://www/exponenta.ru>
- Общероссийский математический портал Mati-Net/Ru [http://www/mathnet.ru](http://www.mathnet.ru)
- Портал Allnath.ni – вся математика в одном месте.