Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шебзухова Татьяна Александровна
Должность: Директор Пятигорского института (филиал) Северо-Кавказского федерального университета
Дата подписания: 13.06.2024 16:08:55
Уникальный программный ключ:
d74ce93cd40e39275c3ba2f58486412a1c8ef96f

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ

УТВЕРЖДАЮ

Директор Пятигорского института
(филиал) СКФУ
Т.А.Шебзухова

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ (СЕМИНАРСКИХ) ЗАНЯТИЙ

Специальности СПО
09.02.07 Информационные системы и программирование
Квалификация специалист по информационным системам

Пятигорск 2024

Методические указания для практический занятий по дисциплине «Элементы высшей математики» составлены в соответствии с ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Пояснительная записка

Для многих студентов значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данных методических указаниях главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры надо добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения на закрепления темы.

Выполнение студентами практических работ направленно на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам;

- формирование умений применять полученные знания на практике и реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач таких профессиональных качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать:**

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Практическая работа № 1

Тема: Матрицы

Цель: Научиться вычислять операции над матрицами.

Теоретический блок Определение. Матрицей из m строк, n столбцов называется прямоугольная таблица чисел ; - элемент матрицы; i-номер строки; i=1,…,m; j-номер столбца, j=1,…,n; m, n – порядки матрицы. При m=n - квадратная матрица.

Определение. Определителем n-го порядка, соответствующим матрице, называется число.

Для вычисления определителя можно использовать элементы произвольной строки или столбца.

Определение. Алгебраическим дополнение элемента называется число, равное .

Определение. Дополнительным минором элемента матрицы называется определитель матрицы n-1-го порядка, полученный из матрицы вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Транспонирование матрицы – такое преобразование матрицы, при котором строки становятся столбцами с сохранением порядка следования.

Свойства определителей.

При транспонировании матрицы определитель не меняется.

При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет только знак.

При умножении строки (столбца) на некоторое число определитель умножается на это число.

Величина определителя не изменяется, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Определитель равен нулю, если

- все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.
- две строки (столбца) одинаковы.
- две строки (столбца) определителя пропорциональны.

Методы вычисления определителей.

1). Разложение по строке или столбцу.

2). Метод обращения в нуль всех, кроме одного, элементов строки или столбца. Метод состоит в том, что с учетом свойств определителя при помощи какого-либо столбца (строки) путём умножения его на соответствующие числа и вычитания из остальных столбцов (строк), зануляются все элементы выбранной строки (столбца) кроме одного, принадлежащего вычитаемому столбцу (строке).

3). Метод приведения к треугольному виду. Алгоритм, предложенный в предыдущем пункте, используется для последовательного зануления всех элементов первой строки (столбца) кроме одного, второй строки (столбца) – всех кроме двух и т.д. В итоге определитель преобразуется к треугольному виду. Величина такого определителя равна произведению элементов главной диагонали.

4). Вычисление с использованием теоремы Лапласа, согласно которой определитель - го порядка равен сумме произведений всех его миноров -го порядка, стоящих в выделенных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Матрицы, операции над матрицами

Определение. Суммой матриц одного порядка называется матрица с элементами , где

Определение. Произведением матрицы на число называется матрица того же порядка с элементами .

Определение. Произведением матрицы на матрицу называется матрица с элементами , где

Задания для решения на занятии

Определите тип матриц: 1¿ $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -9 & 8 & 44 \\ 12 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Найти 3A+2B, если A= $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Найти 2A+3B-C, если A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$

Найти A^2- 3A+5E, если A= $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

Найти произведение матриц:

1) A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 03 \\ 2 & 1 & -2-4 \end{pmatrix}$

2) A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & 0,5 & 3 \end{pmatrix}$ и B= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

Убедитесь, что AB ≠ BA, если:

1) A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3) A= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} a+в & a \\ a & a-в \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} a^2 & aв \\ aв & в^2 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

Домашнее задание

Найти произведение матриц: $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ и B= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

Практическая работа №2

Тема: Определители

Цель: научиться вычислению определителей, вычислять обратную матрицу

Теоретический блок Определение. Определителем n-го порядка, соответствующим матрице , называется число .

Для вычисления определителя можно использовать элементы произвольной строки или столбца.

Определение. Алгебраическим дополнение элемента называется число, равное .

Определение. Дополнительным минором элемента матрицы называется определитель матрицы n-1-го порядка, полученный из матрицы вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Транспонирование матрицы – такое преобразование матрицы, при котором строки становятся столбцами с сохранением порядка следования.

Свойства определителей.

При транспонировании матрицы определитель не меняется.

При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет только знак.

При умножении строки (столбца) на некоторое число определитель умножается на это число.

Если все соответствующие элементы квадратных матриц одного порядка одинаковы, за исключением элементов одной i-ой строки, то .

Величина определителя не изменяется, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Определитель равен нулю, если

- все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.
- две строки (столбца) одинаковы.
- две строки (столбца) определителя пропорциональны.

Методы вычисления определителей.

1). Разложение по строке или столбцу.

2). Метод обращения в нуль всех, кроме одного, элементов строки или столбца. Метод состоит в том, что с учетом свойств определителя при помощи какого-либо столбца (строки) путём умножения его на соответствующие числа и вычитания из остальных столбцов (строк), зануляются все элементы выбранной строки (столбца) кроме одного, принадлежащего вычитаемому столбцу (строке).

3). Метод приведения к треугольному виду. Алгоритм, предложенный в предыдущем пункте, используется для последовательного зануления всех элементов первой строки (столбца) кроме одного, второй строки (столбца) – всех кроме двух и т.д. В итоге определитель преобразуется к треугольному виду. Величина такого определителя равна произведению элементов главной диогонали.

4). Вычисление с использованием теоремы Лапласа, согласно которой определитель - го порядка равен сумме произведений всех его миноров -го порядка, стоящих в выделенных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Задания для решения на занятии

Транспонировать матрицы:

A= $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 2) B= $\begin{pmatrix} 15 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислить обратную матрицу, выполнить проверку:

1. A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) B= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) C= $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

4) D= $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5) F= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Домашнее задание

Вычислить обратную матрицу, выполнить проверку:

1. A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Практическая работа №3

Тема:Решение систем линейных уравнений.

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по систем n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Системы n линейных уравнений с n переменными».

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу по решению СЛАУ.

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретические сведения и методические рекомендации

по решению задач.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

xi = Δi, гдеΔ/

Δ = det A, а Δi – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов bi.

Δi =

Пример.

ΔA = ; 1Δ= ; 2Δ= ; 3= ;

x1Δ = 1/detA; x2Δ = 2/detA; x3Δ = 3/detA;

Пример. Найти решение системы уравнений:

= = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;Δ

Δ1 = = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

x1Δ = 1 = 1;Δ/

Δ2 = = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.

x2Δ = 2 = 2;Δ/

Δ3 = = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.

x3Δ = 3 = 3.Δ/

Если система однородна, т.е. bi0 система имеет единственное нулевое решение x≠Δ = 0, то при 1 = x2 = … = xn = 0.

= 0 система имеет бесконечное множество решений.ΔПри

Для самостоятельного решения:

Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.

›Контрольные вопросы:

1.Система из “m” линейных уравнений с “n” неизвестными.

Векторно-матричная форма записи.

2.Расширенная матрица системы.

3.Однородные и неоднородные системы уравнений.

Практическая работа №4

Тема:Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по систем n линейных уравнений с n переменными. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Ход практического занятия.

Выполнить самостоятельную работу по решению систем n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера.

Вариант 1

1.

$\{x+y+z=4\ x+2y+3z=7\ x+y+5z=$

2.

$\{3x-2y-z=0\ x+3y-2z=0 4x+y+2z$

Вариант 2

1.

$\{2x+y-2z=1\ x-y+3z=4 3x+y+z=$

2.

$\{x+y-2z=0 2x-3y+z=0 2x-2y-z$

›Контрольные вопросы:

1.Решение однородной и неоднородной систем методом Гаусса.

2.Однородные системы и их свойства.

3.Эквивалентные системы.

Практическое занятие № 5

Тема: Операции над векторами

Цель: Научить студента использовать свойства линейных операций с геометрическими векторами, скалярного произведения векторов для решения задач векторной алгебры

Теоретический блок

В физике, механике, химии встречаются величины, которые полностью характеризуются только числовым значением (скаляром). Например, масса тела, концентрация раствора, давление газа, температура и т. д. Такие величины называются скалярными. Вместе с тем, для задания скорости, силы, ускорения необходимо задать не только их числовое значение, но и направление действия в пространстве. Такие величины называются векторными.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА – раздел векторного исчисления, в котором изучаются простейшие операции над (свободными) векторами.

Определение 1. Геометрическим вектором называется направленный отрезок прямой, т. е. отрезок, для которого указаны ограничивающие его точка начала и точка конца вектора.

Если точка A – начало вектора, а точка B – конец вектора, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Векторы также обозначаются малыми латинскими буквами: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и т. д.

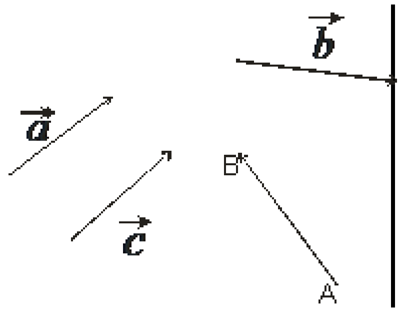


Рис. 1.

Определение 2. Число, равное длине вектора, называется его модулем.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается символом $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, модуль которого равен нулю, называется нулевым вектором и обозначается символом $\vec{o}$ ($\left|\vec{o}\right| = 0$). Нулевому вектору можно приписать любое направление. Все нулевые векторы равны друг другу.

Определение 3. Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (рис.2).

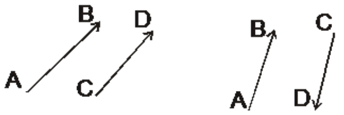


Рис. 2.а Рис. 2.б

Если два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, то это обозначается следующим образом: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Векторы, изображенные на рис. 2.а, называются сонаправленными, обозначается так $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, а векторы, изображенные на рис 2.б, называются противоположно направленными. Символически это записывается так $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Замечание. Сонаправленными и противоположно направленными могут быть только коллинеарные векторы.

Так как нулевой вектор лежит на любой прямой, то, по определению, он считается коллинеарным любому вектору и перпендикулярным любому вектору.

Определение 4. Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Определение 5. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если выполнены следующие условия:

1. модули этих векторов равны;
2. векторы сонаправлены.

Символически это определение можно записать следующим образом:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} |\overline{AB}| = |\overline{CD}| \\ \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD} \end{cases}$$

Если считать, что на рисунке 1 векторы лежат в одной плоскости, то $\vec{a}=\vec{c}$, то есть $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - разные обозначения одного и того же вектора. Векторы $\vec{b}$ и $\overline{AB}$ при равных длинах не равны друг другу, так как имеют разные направления.

Таким образом, для задания любого вектора достаточно указать его модуль и направление, не фиксируя точку приложения (начало вектора может находиться где угодно). Используя определение равенства векторов, такой вектор всегда можно переместить поступательно, с помощью параллельного переноса, в требуемую точку пространства.

Замечание. Иногда свобода вектора ограничивается, например:

а) если кроме вектора задана его точка приложения, то он называется связанным (радиус-вектор);

б) если кроме вектора задана его точка направления, то он называется скользящим (вектор угловой скорости расположен по оси вращения);

в) свободный вектор не ограничен ничем.

В дальнейшем, если это не оговорено специально, мы будем пользоваться понятием свободного вектора.

Для любого вектора $\overline{AB}$ определим противоположный ему вектор, обозначаемый $\overline{BA}$, такой, что модули этих векторов равны, они коллинеарны, но противоположно направлены. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$.

Рис. 3

Если в пространстве заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ то, используя определение равенства векторов, их можно привести к одному началу (рис. 3).

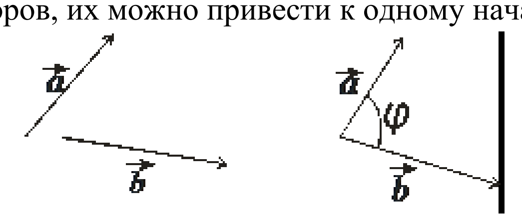


Рис. 3.

Тогда углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол j (jÎ[0,p]), на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$ до совпадения с вектором $\vec{b}$.

Геометрические векторы являются предметом так называемого векторного исчисления, подобно тому, как числа являются предметом арифметики. В векторном исчислении над векторами производятся некоторые операции, которые являются математическими абстракциями аналогичных операций, производимых с различными конкретными векторными величинами в физике.

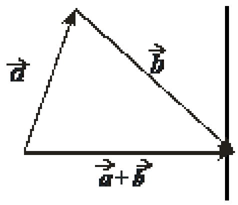
Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на число (скаляр). В основу их определения положены известные из механики законы взаимодействия векторных величин – сил, скоростей и т. д.

1. Сложение векторов.

Если даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то располагают их так, чтобы начало второго вектора совпало с концом первого вектора. Тогда суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, который соединяет начало первого вектора с концом второго (рис.4). Такое правило сложения векторов называется правилом треугольника.

Аналогичное правило сложения (правило многоугольника) действует и для нескольких векторов (рис. 5).



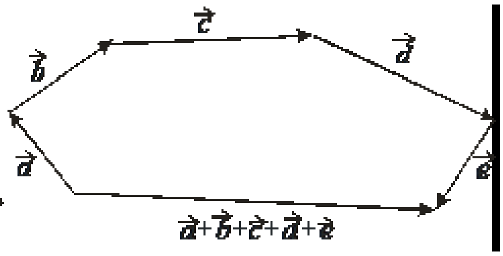


Рис.4 Рис.5

Если два вектора приведены к одному началу, то их суммой будет вектор, образованный диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах, и выходящий из общего начала (рис. 6). Это правило сложения векторов называется правилом параллелограмма.

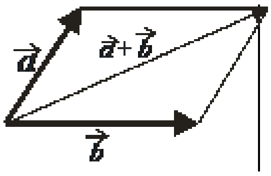


Рис. 6

Из введенных выше правил сложения векторов вытекают следующие свойства этой операции:

1. $\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$ – свойство коммутативности операции сложения;
2. $(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$ – свойство ассоциативности операции сложения;
3. $\vec a+(-\vec a)=\vec 0$ – наличие противоположного элемента;
4. $\vec a+\vec 0=\vec a$ – наличие нулевого элемента.

<u>2. Вычитание векторов.</u>

Разностью двух векторов $\vec a$ и $\vec b$ называется вектор, равный сумме вектора $\vec a$ и вектора ($-\vec b$), противоположного вектору $\vec b$:

$$\vec a-\vec b=\vec a-(-\vec b)$$

Если векторы приведены к общему началу, то вектор, равный разности $\vec a-\vec b$, является второй диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$ как на сторонах. При этом началом этого вектора является конец вектора $\vec b$ (рис. 7).

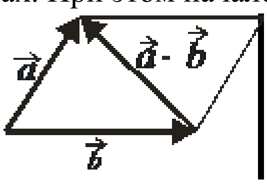


Рис.7

<u>3. Умножение вектора на скаляр</u>.

<u>Определение 6.</u> Произведением вектора $\vec a$ на действительное число l называется новый вектор, обозначаемый l$\vec a$, такой, что его модуль равен модулю вектора $\vec a$, умноженному на модуль числа l, т. е. $|\lambda\vec a|=|\lambda||\vec a|$, и векторы $\vec a$ и l$\vec a$ сонаправлены при l>0 и противоположно направлены при l<0.

Произведение вектора на число обладает свойствами, которые легко доказать геометрически. Для любых действительных чисел λ и ν и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ - умножение на единицу,
2. $\lambda(\nu\vec{a})=(\lambda\nu)\vec{a}$ - свойство ассоциативности по отношению к числам,
3. $(\lambda+\nu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\nu\vec{a}$ - свойство дистрибутивности относительно сложения чисел,
4. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ - свойство дистрибутивности относительно сложения векторов.

Из определения и свойств вытекают следующие полезные для практики равенства $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$; $0\cdot\vec{a}=\vec{o}$; $\lambda\cdot\vec{o}=\vec{o}$.

Единичный вектор. Вектор, модуль которого равен единице, называется единичным вектором.

Вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$ и модуль, равный единице, называется ортом направления вектора $\vec{a}$. Орт обозначается символом $\vec{a}^{\,0}$.

Для любого заданного вектора $\vec{a}$ легко получить его орт. Для этого необходимо вектор $\vec{a}$ разделить на его модуль: $\vec{a}^{\,0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Разложение вектора по базису

Определение 7. Множество векторов на прямой назовем одномерным векторным пространством, множество векторов на плоскости – двумерным векторным пространством, в пространстве – трехмерным векторным пространством.

Легко проверить, что если L – какое-то векторное пространство, $\vec{a},\vec{b}\in L$, β – число, то $\vec{a}+\vec{b}\in L$ и $\beta\vec{a}\in L$.

Определение 8. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_s$ с коэффициентами $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ называется вектор $\beta_1\vec{a}_1+\beta_2\vec{a}_2+\ldots+\beta_s\vec{a}_s$.

На рисунке 8 приведены примеры линейных комбинаций:

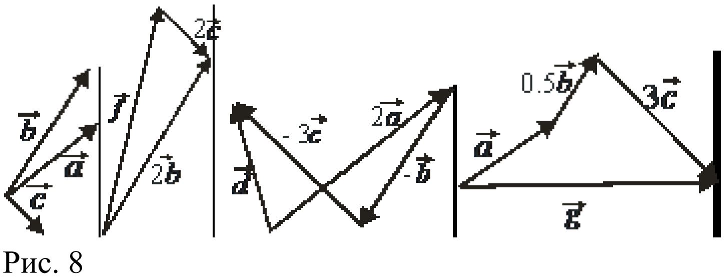


Рис. 8

Векторы $\vec{f},\vec{d},\vec{g}$ на рисунке 8 и $\vec{h}$= являются линейными комбинациями векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{f}=0\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c};\quad \vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c};\quad \vec{g}=\vec{a}+0.5\vec{b}+3\vec{c};\quad \vec{h}=0\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}$$

Говорят, что вектор $\vec{b}$ раскладывается по векторам $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_s$, если $\vec{b}$ является линейной комбинацией этих векторов, т. е. представим в виде $\vec{b}=\beta_1\vec{a}_1+\beta_2\vec{a}_2+\ldots+\beta_s\vec{a}_s$.

Замечание.

1) Если $\vec{a}\neq\vec{o}$, то любой вектор $\vec{b}$, коллинеарный $\vec{a}$, представим, и причем единственным образом, в виде $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, где λ – число

2) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два неколлинеарных вектора. Тогда любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, раскладывается по ним: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, причем единственным образом.

3) Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Тогда любой вектор $\vec{d}$ раскладывается по этим векторам: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, причем единственным образом.

Таким образом, в любом векторном пространстве любой размерности есть система векторов, по которой раскладывается каждый вектор пространства, причем единственным образом.

<u>Определение 9.</u> Базисом векторного пространства L будем называть упорядоченную систему векторов пространства, состоящую: из одного ненулевого вектора, если пространство одномерное; из двух неколлинеарных векторов, если пространство двумерное; из трех некомпланарных векторов, если пространство трехмерное.

Очевидно, что в любом векторном пространстве можно выбрать бесконечно много базисов, число векторов в каждом из них равно размерности пространства.

<u>Определение 10.</u> Координатами (или компонентами) вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_s$ называются коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ разложения $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_s\vec{e}_s$ вектора $\vec{a}$ по векторам базиса.

Для указания, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ используется запись $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

Очевидно, что в фиксированном базисе каждый вектор имеет свой, единственный, набор координат. Если же взять другой базис, то координаты вектора, в общем, изменятся. Сложение векторов и умножение их на число связаны с аналогичными действиями с их координатами.

Линейные операции над векторами

в координатной форме

Пусть в векторном пространстве L выбран базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_s$ и заданы координаты векторов $\vec{a}, \vec{b} \in L$ в этом базисе: $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_s\vec{e}_s$; $\vec{\beta} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \dots + \beta_s\vec{e}_s$.

Тогда

- при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число: $\lambda\vec{a}(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_s)$,

- при сложении векторов складываются их соответствующие координаты:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{c}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_s + \beta_s)$.

Замечание. Все координаты нулевого вектора в любом базисе равны нулю.

Замечание. Базисный вектор с номером s имеет координату с номером s, равную 1, а все остальные координаты – нулевые.

Замечание. У коллинеарных векторов координаты пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_s}{\beta_s}.$$

Система координат.

Координаты вектора в ортонормированном базисе

Рассмотрим случай трехмерного векторного пространства (на плоскости все построения аналогичны). Фиксируем некоторую точку О и возьмем произвольную точку М. Радиус-вектором точки М по отношению к точке О называется вектор $\overrightarrow{OM}$.

Если в пространстве выбран базис, то вектор $\overline{OM}$ раскладывается по этому базису. Таким образом, точке М можно сопоставить упорядоченную тройку чисел (x, y, z) – координаты ее радиус-вектора.

Определение 11. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка О носит название начала координат; прямые X/X , Y/Y , Z/Z, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Первая X/X – осью абсцисс, вторая Y/Y – осью ординат, третья Z/Z – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называют координатными плоскостями.

Определение 12. Координаты (x, y, z) радиус – вектора точки М по отношению к началу координат называются координатами точки М в рассматриваемой системе координат.

Первая координата x называется абсциссой, вторая y – ординатой, третья z – аппликатой.

Аналогично определяются декартовы координаты на плоскости: точка имеет только две координаты x и y– абсциссу и ординату.

Определение 13. Декартова система координат называется прямоугольной, если базис задается единичными и попарно ортогональными (перпендикулярными) друг другу векторами – базисными ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{i}(1,0,0)$ – орт оси OX;

$\vec{j}(0;1;0)$ – орт оси OY;

$\vec{k}(0;0;1)$ – орт оси OZ.

Базис ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) называется ортонормированным.

В дальнейшем будет использоваться декартова прямоугольная система координат.

На рис. 9 показан способ изображения точки A(-1;2;3) по ее координатам относительно ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

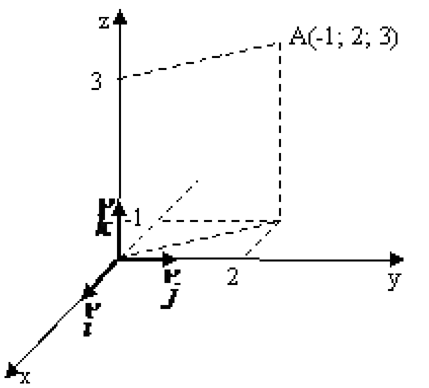


Рис. 9

Утверждение. Если точки A и B заданы своими координатами $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$, то $\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Т. е. для определения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Проекции вектора

Пусть в пространстве задана некоторая ось l, то есть прямая, на которой отмечена фиксированная точка О и заданы направление и единица длины. Тогда каждой точке оси соответствует некоторое число.

Определение 14. Проекцией точки А на ось l называется число, соответствующее основанию перпендикуляра АВ, опущенного на ось l из точки А.

Определение 15. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется разность проекций конца вектора и его начала.

Проекция обозначается $Пр_l\overline{AB}$. На рис. 10 $Пр_l\overline{AB} = \beta - \alpha$.

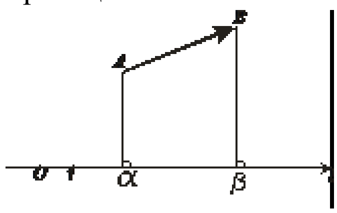
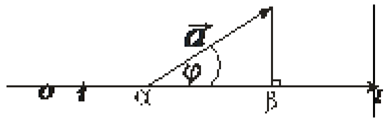


Рис. 10. Проекция вектора на ось

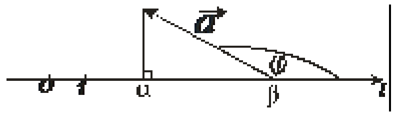
Легко проверить, что если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $Пр_l\overline{AB} = Пр_l\overline{CD}$, то есть проекция не зависит от положения начала вектора, а зависит только от самого вектора.

Утверждение. Пусть φ – угол, образованный вектором $\bar{a}$ с осью l. Тогда $Пр_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$.

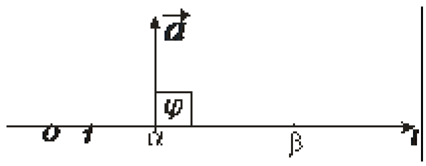
Таким образом, проекция вектора на ось есть число, которое может быть положительным, отрицательным и нулем (рис 11).



$Пр_l\bar{a} = \beta - \alpha$,



$Пр_l\bar{a} = \alpha - \beta$,



$Пр_l\bar{a} = 0$

Рис. 11

Утверждение. Проекция на ось суммы векторов равна сумме их проекций:

$Пр_l(\bar{a} + \bar{b} + \_ + \bar{c}) = Пр_l\bar{a} + Пр_l\bar{b} + \_ + Пр_l\bar{c}$

Утверждение. Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число: $Пр_l\lambda\bar{a} = \lambda Пр_l\bar{a}$. Определение 16. Проекцией вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$, $\bar{a} \neq 0$, называется проекция вектора $\bar{b}$ на любую ось, параллельную вектору $\bar{a}$ и имеющую направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$.

Проекция вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$ обозначается $Пр_{\bar{a}}\bar{b}$. Очевидно, что $Пр_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Координаты вектора являются коэффициентами его разложения по ортам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатных осей:

$$\bar{a}(a_x, a_y, a_z) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

Утверждение. Проекции вектора на координатные оси равны координатам вектора:

$Пр_{OX}\ \vec{a}=a_x$; $Пр_{OY}\ \vec{a}=a_y$; $Пр_{OZ}\ \vec{a}=a_z$.

Поместим вектор $\vec{a}$ в начало координат и обозначим через α,β,γ углы, образованные вектором $\vec{a}$ с положительным направлением осей OX, OY, OZ. Эти углы называются направляющими углами вектора $\vec{a}$.

Определение 17. Косинусы углов, образованных вектором с осями координат, называются направляющими косинусами вектора.

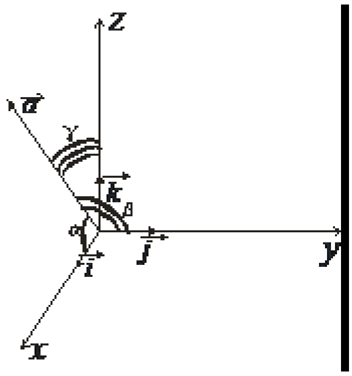


Рис. 12

В соответствии с рис. 12, направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ являются $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Отметим важное свойство направляющих косинусов:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Утверждение. Координаты вектора равны его направляющим косинусам, умноженным на длину вектора:

Если вектор единичный, то его координатами служат направляющие косинусы:

Скалярное произведение векторов и его приложение

Кроме операций сложения и умножения на число на множестве векторов определены еще несколько операций. Одна из них – скалярное произведение, позволяющее находить длины векторов и углы между векторами по координатам векторов.

Определение 18. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где

φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Замечание. Если один из векторов нулевой, то угол φ не определен. Скалярное произведение в этом случае считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$, или $(\vec{a},\vec{b})$. Скалярное произведение вектора на себя $\vec{a}\cdot\vec{a}:=\vec{a}^2$.

Таким образом, согласно определению, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Скалярное произведение обладает свойствами, которые будут сформулированы в виде теоремы.

Теорема. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполнены следующие соотношения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - свойство коммутативности;
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ - свойство дистрибутивности;

3. $(\lambda\vec a)\cdot\vec b=\lambda(\vec a\cdot\vec b)$, где λ – число;

4. $\vec a^2>0$ при $\vec a\neq\vec 0$;

5. $\vec a^2=|\vec a|^2$;

6. Если φ – угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$, то

$$\cos\varphi=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|} \quad (1)$$

7. $\vec a\cdot\vec b=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec a$ и $\vec b$ ортогональны.

8. Геометрический смысл: $\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\,Пр_{\vec a}\vec b$, если $\vec a\neq\vec 0$;

9. Механический смысл: скалярное произведение силы $\vec F$ на вектор $\vec S$ равно работе А этой силы при перемещении материальной точки по вектору $\vec S$, т. е. $A=\vec F\cdot\vec S$.

Из определения скалярного произведения вытекает следующая таблица умножения ортов $\vec i,\vec j,\vec k$ координатных осей:

$$\vec i\cdot\vec j=\vec j\cdot\vec i=0,\ \vec i\cdot\vec k=\vec k\cdot\vec i=0,\ \vec j\cdot\vec k=\vec k\cdot\vec j=0,$$
$$\vec i\cdot\vec i=\vec j\cdot\vec j=\vec k\cdot\vec k=1.$$

Если векторы $\vec a$ и $\vec b$ в ортонормированном базисе заданы своими координатами: $\vec a(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3),\ \vec b(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$, то формула для вычисления скалярного произведения векторов $\vec a$ и $\vec b$ по координатам сомножителей имеет вид

$$\vec a\cdot\vec b=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3, \quad (2)$$

т. е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных проекций.

Так как $\vec a^2=|\vec a|^2$, то, применяя равенство (2), получим формулу для определения длины вектора $\vec a$:

$$|\vec a|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}. \quad (3)$$

Выражая числитель и знаменатель формулы (1) посредством координат векторов $\vec a$ и $\vec b$, применяя формулы (2) и (3), находим

$$\cos\varphi=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\ \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}.$$

Пусть в пространстве заданы точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. Тогда $\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Длина вектора $\overline{AB}$ будет равна $|\overline{AB}|$ и из формулы (3) следует, что

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Сведем основные результаты в таблицу:

Таблица 1

Вид произведения	Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$
Обозначение	$\vec{a}\cdot\vec{b}$
Понятие	$\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos(\vec{a},\vec{b})$
Представление в координатах	$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
Приложение	1) $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ 2) $Пр_{a}b=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ 3) $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$

Контрольные вопросы

1) Определение вектора. Линейные операции над векторами, свойства этих операций.

2) Проекции вектора на ось. Свойства проекции.

3) Разложение вектора по координатным ортам. Координаты вектора.

4) Радиус-вектор точки. Модуль вектора. Расстояние между двумя точками.

Практическое занятие № 6

Тема: Скалярное произведение векторов.

Цель: Научить студента использовать свойства линейных операций с геометрическими векторами, скалярного произведения векторов для решения задач векторной алгебры

Практический блок

Решение типовых примеров

Пример № 1. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=-3\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(2;-1;0)$.

Решение.

1) Найдем координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, пользуясь тем, что при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число:

$$\vec{p}(6\cdot1-2\cdot2;6\cdot2-2\cdot(-1);6\cdot3-2\cdot0) \qquad \vec{q}(-3\cdot1+2;-3\cdot2-1;-3\cdot3+0)$$
$$\vec{p}(2;14;18) \qquad \vec{q}(-1;-7;-9)$$

2) Так как

$$\frac{2}{-1}=\frac{14}{-7}=\frac{18}{-9},$$

то координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ пропорциональны. Следовательно, векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны.

Ответ. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны.

Пример № 2. Даны вершины треугольника: $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Найдите длину стороны AB и $\angle BAC$.

Решение.

1) Вычисляем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overrightarrow{AB}(-4-(-1);-2-(-2);0-4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}(3-(-1);-2-(-2);1-4)$

$\overrightarrow{AB}(-3;0;-4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}(4;0;-3)$

2) По формулам для длины вектора и скалярного произведения векторов имеем

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-4)^2}=5\ ед.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\cdot4+0\cdot0+(-4)\cdot(-3)=0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC},$$

т. е. $\angle BAC=90^0$.

Ответ. AB=5 ед. $\angle BAC=90^0$.

Пример № 3. Определить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, где $\vec{m},\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60^0.

Решение. Сделав схематический рисунок,

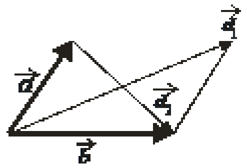


Рис. 13.

убеждаемся, что вектор $\overrightarrow{d_1}$, соответствующий одной диагонали параллелограмма, находится по формуле

$$\overrightarrow{d_1}=\vec{a}+\vec{b},$$

а другой –

$$\overrightarrow{d_2}=\vec{b}-\vec{a}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{d_1}=3\vec{m}+\vec{n},\qquad \overrightarrow{d_2}=-\vec{m}+3\vec{n}. \quad (4)$$

В силу свойства 50 (теорема 1) скалярного произведения получим

$$\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2=\overrightarrow{d_1}^2=(3\vec{m}+\vec{n})^2=9\vec{m}^2+6\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^2=9\underbrace{\left|\vec{m}\right|^2}_{1}+6\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos(\vec{m},\vec{n})+\underbrace{\left|\vec{n}\right|^2}_{1}=$$

$$=9+6\cdot1\cdot1\cdot\underbrace{\cos60^0}_{1/2}+1=13ед^2\quad\Rightarrow\quad\left|\overrightarrow{d_1}\right|=\sqrt{13}ед.$$

Аналогично,

$$\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2=\overrightarrow{d_2}^2=(-\vec{m}+3\vec{n})^2=\vec{m}^2-6\vec{m}\cdot\vec{n}+9\vec{n}^2=\underbrace{\left|\vec{m}\right|^2}_{1}-6\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos(\vec{m},\vec{n})+9\underbrace{\left|\vec{n}\right|^2}_{1}=$$

$$=1-6\cdot1\cdot1\cdot\underbrace{\cos60^0}_{1/2}+9=7\ ед^2\quad\Rightarrow\quad\left|\overrightarrow{d_2}\right|=\sqrt{7}ед.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{d_1}$ и $\overrightarrow{d_2}$. Учитывая свойство 10 коммутативности скалярного произведения и (4), имеем

$$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=(3\vec{m}+\vec{n})\cdot(-\vec{m}+3\vec{n})=-3\vec{m}^2-\vec{m}\cdot\vec{n}+9\vec{m}\cdot\vec{n}+3\vec{n}^2=$$

$$=-3\cdot\left|\vec{m}\right|^2+8\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos(\vec{n},\vec{m})+3\left|\vec{n}\right|^2=-3\cdot1+8\cdot1\cdot1\cdot1/2+3\cdot1=4.$$

Так как

$$\cos(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2})=\frac{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|\left|\overrightarrow{d_2}\right|}$$

то

$$\cos(\vec{d_1},\vec{d_2})=\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{7}}\approx 0,419 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{d_1},\vec{d_2})=\arccos(0,419)$$

Ответ. $(\vec{d_1},\vec{d_2})=\arccos(0,419)$

Пример № 4. Под действием силы в 20 Н материальная точка переместилась по прямой на 2 м. Найти работу, совершаемую этой силой, если угол между силой и направлением равен 30^0.

Решение. Работа А вычисляется по формуле

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}||\vec{S}|\cos(\vec{F},\vec{S}),$$

где $\vec{F}$ – вектор действующей силы, $\vec{S}$ – вектор пути. Получим

$$A=20\cdot 2\cdot\cos 30^0=20\sqrt{3}\,Дж.$$

Ответ. $A=20\sqrt{3}\,Дж.$

Задачи для решения

1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $\vec{a}-2\vec{b},\ \frac{1}{2}\vec{b}-3\vec{a},\ \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a}(2;-1;0),\vec{b}(2;3;1)$. Вычислить:

а) $\vec{b}^2$;

б) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

Ответ. а) 14; б) -12.

3. Определить при каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ ортогональны.

Ответ. $\alpha=-6$.

4. Вычислить какую работу производит сила $\vec{F}(3;-1;5)$, когда ее точка приложения, двигаясь по прямой, переместилась из точки $A(2;-3;-4)$ в точку $B(3;-2;1)$.

Ответ. 27 ед. раб.

5. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат острые углы α,β,γ, причем $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$. Найти его координаты, если $|\vec{a}|=3$.

Ответ. $\vec{a}(3/\sqrt{2};3/2;3/2)$.

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$, найти длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

Ответ. $|\vec{c}|\approx 14,73$ ед.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

а) $|\vec{a}|=4,\ \vec{b}=4\vec{i}-3\vec{j},$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 600;

б) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k},\ \vec{b}(1;0;-4)$

Ответ. а) 10; б) 14.

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}=3\vec{a}+6\vec{b},\ \vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$, где $\vec{a}(1;2;-3)$ и $\vec{b}(1;0;-1)$.

Ответ. Нет.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-\vec{j}+2\vec{k}$.

Ответ. $(\hat{\vec{a},\vec{b}})=0$

4. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, приложенные к общей точке. Найти орт биссектрисы угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ. $\vec{c}^{\,0}\ (-1/\sqrt{42};5/\sqrt{42};4/\sqrt{42})$.

5. Построить точки $A(4;1), B(3;5), C(-1;4), D(0;0)$. Если точки построены правильно, то получен квадрат. Чему равна длина стороны этого квадрата? Какова его площадь? Найти координаты середины сторон квадрата.

Ответ. $a=\sqrt{17}$ ед., $S=17$ кв. ед., $M_{AB}\ (3,5;3), M_{BC}\ (1;4,5), M_{CD}\ (-0,5;2), M_{AD}\ (2;0,5)$

6. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, если известно, что его проекция на вектор $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ равна 1.

Ответ. $\vec{x}$(-3/2; 3/4; 3/2).

Контрольные вопросы

1) Скалярное произведение векторов, его физическое толкование. Свойства скалярного произведения.

2) Проекция вектора на вектор. Угол между векторами. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов.

3) Скалярное произведение векторов в координатной форме.

Практическая работа № 7

Тема: Составление уравнений прямой

Цель: отработать умение составлять уравнение прямой, заданной различными способами; переходить от одного вида уравнения прямой к другому

Теоретические основы: нормальный вектор прямой, направляющий вектор прямой, способы задания прямой, виды уравнения прямой.

В декартовой прямоугольной системе координат OXY на плоскости любая прямая может быть задана уравнением в виде

$$Ax + By + C = 0$$

где коэффициенты **n** = (A,B) - координаты вектора перпендикулярного к заданной прямой. Этот вектор называют нормальным вектором прямой. Если B , то уравнение прямой на плоскости можно представить в виде

$$y = kx + b \qquad (k = tg\ )$$

Это уравнение называется уравнением прямой с главным коэффициентом.

Рассмотрим случаи взаимно расположение двух прямых на плоскости

1. Если прямые заданные общими уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

2. Если уравнение заданы с угловыми коэффициентами

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$,

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4,-3)$ и образующий с осями координат треугольник площадью 3.

Так как заданная точка лежит в IV четверти то искомая прямая должен отсекать отрицательную часть оси OY и положительную часть оси OX. Напишем уравнение на отрезках проходящую через данную точку.

Если мы подберем a=2 и $в$=-3, то получим прямую удовлетворяющей условие задачи. Такая прямая не одна.

Пример 2 . Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующий угол 45^0 с прямой y=2x+5.

Так как угол между прямыми 45^0 , то записываем два уравнения с неизвестными k_1 и k_2.

Тогда уравнения прямой проходящей через начало координат и угловыми коэффициентами k_2=-3 и k_1= будут соответственно

Плоскость

Основная теорема. *В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводиться к виду*

Уравнение называется *общим уравнением плоскости* . Коэффициенты являются координатами вектора ***n***, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением. Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды уравнения .

1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если плоскость проходит через точку и перпендикулярна к вектору

2. Уравнение плоскости в «отрезках» . Если плоскость пересекает оси координат в точках соответственно

3. Уравнение плоскости по трем точкам. Если плоскость проходит через точки , не лежащие на одной прямой

Пример 1 Составить уравнение плоскости, параллельной вектору

s = (2,1,-1) и отсекающих на осях OX и OY отрезки a =3, b= -2. (Ответ: 2x-3y+z-6=0)

Искомое уравнение плоскости находим из условия компланарности трех векторов M_1M, M_1M_2, s , а точки имеет координаты $M(x,y,z)$, $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,в,0)$. По условию задачи a=2, $в= -3$. Тогда

и окончательно получаем $2x - 3y + z = 0.$

Пример 2. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями

$3x + 3y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 3y + 2z + 13 = 0.$

Для решении задачи находим любую точку принадлежащую на одной из плоскости, например считая $y = z = 0$ из уравнения первой плоскости находим , что $x=5$ Тогда по формуле нахождения расстояния от данной точки $M_0(5,0,0)$ до второй плоскости находим $d= 4$

Аудиторные занятия:

1. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки отсекаемые ими на осях координат.

2.Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол .Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции – на оси ординат

3. Сила приложена к точке . Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила.

4. Записать уравнение прямых, которые проходят через точку и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{x}+9$. 5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки

6. Луч света направлен по прямой Найти координаты точки встречи луча с осью и уравнение отраженного луча.

7. Точка $\boldsymbol{A}(-2,3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+8=0$. Записать уравнение этой прямой.

8. Точка $\boldsymbol{A}(2,-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}-7=0$. Вычислить площадь квадрата. (*Ответ*: 5)

9. Записать уравнение и построить плоскость:

а) параллельную плоскости OXZ и проходящую через точку $M_0(7,-3,5)$

б) проходящую через ось OZ и точку A(-3,1,-2)

в) параллельную оси OX и проходящую через две точки $M_1(4,0,-2)$, $M_2(5,1,7)$

г) проходящую через точку B(2,1,-1) и имеющую нормальный вектор n=(1,-2,3)

д) проходящую через точку C(3,4,-5) параллельно двум векторам $\boldsymbol{a}=(3,1,-1)$ и $\boldsymbol{в}=(1,-2,1)$

Ответ: ***а) y+3=0; б) x+3y=0; в)9y-z-2=0; г) x-2y+3z+3=0; д) x+4y+7z+16=0.***

10. Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами. A(5,4,3), B(2,3,-2), C(3,4,2),Д(-1,2,1). Проверить правильность полученного уравнения.

11. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$ перпендикулярно к плоскости. ***2x-7y+5z+9=0,***

б) проходящей через точку $M_0(7,-5,1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки. (Ответ : а) $31\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-11\boldsymbol{z}-21=0$

б) x + y + z - 3=0)

12. Вычислить угол между плоскостями $\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}-3=0$ и $3\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}+5=0$

(Ответ : ***)***

13. Записать уравнение плоскостей, делящих двухгранные углы между плоскостями 3x-y+7z-4=0 и 5x+3y-5z+2=0 (Ответ: x+2y-6z=0, **4x+y+z-**1=0)

Домашние задания:

1.Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,3)$ и образующий с осями координат треугольник площадью 4.

2.Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующий угол 30^0 с прямой y= - 3x+1.

3.Записать уравнение прямой проходящей через точку $\boldsymbol{P}(5, 2)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат. (*Ответ*: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-7=0$.)

4.Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-52=0$ и отстоящей от нее на расстояние 2. (*Ответ*: $12\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-26=0$ или $12\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-78=0$.)

5.Вычислить величину меньшего угла между прямыми $3x+4y-2=0$ и $8x+6y+5=0$. Доказать, что точка лежит на биссектрисе этого угла, и сделать рисунок.

6. Составить уравнение плоскости через точку P(1,0,2) перпендикулярно к двум плоскостям **$2x-y+3z-1=0$** и **$3x+6y+3z=0$.**

7. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на осях OX и OY отрезки $a = -2$, $в =$ соответственно.

8. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору **s** = (5,0,-2) и отсекающих на осях OX и OY отрезки $a = -4$, $b= 1$.

9. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями

$x - 2y + 4z – 1 = 0$ и $2x -5y + 2z + 12 = 0$.

Практическая работа № 8

Тема: Составление уравнений плоскости.

Цель: отработать умение составлять уравнение прямой, заданной различными способами; переходить от одного вида уравнения прямой к другому

Теоретические основы:

Прямая и плоскость

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. Векторно-параметрическое уравнение прямой. Пусть прямая проходит через точку параллельно вектору, а любая точка этой прямой .

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение называется *векторно-параметрическим уравнением прямой*, –направляющим вектором прямой *2. Параметрические уравнения прямой.*

3. Канонические уравнения прямой. Разрешая уравнения в системе относительно ***t*** и приравнивая полученные отношения, приходим к *конечным уравнениям прямой.*

4. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.

5.Общие уравнения прямой в пространстве.

Теперь можно записать условие перпендикулярности прямых , а условие параллельности , а условия их совпадения , где $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, а s_1,s_2 – направляющие векторы.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ортогональной проекцией на плоскость.

<u>Пример 1.</u> Составить уравнение плоскости, проходящей через точку P(1,0,2) перпендикулярно к двум плоскостям

$2x – y + 3z – 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z -5 = 0$

Так как коэффициенты плоскостей не пропорциональны, то они пересекаются, тогда направляющий вектор линий пересечения находим из векторного произведения нормалей двух плоскостей т.е.

Тогда этот вектор будет нормалью искомой плоскости и по формуле (2) находим $7x – y - 5z = 0$.

<u>Пример 2.</u> Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую перпендикулярно к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

Искомая плоскость проходить через точки прямой $M_0(2,3,-1)$ и через направляющий вектор прямой ***s(5,1,2)*** и через нормали данной плоскости **n**(1,4,-3). Тогда из условия компланарности трех векторов $\mathbf{M_0M}$, **s** и **n** находим

и $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

Задания

1.Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,3)$ и образующий с осями координат треугольник площадью 4.

2.Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующий угол 30^0 с прямой $y= - 3x+1$.

3.Записать уравнение прямой проходящей через точку $\boldsymbol{P}(5, 2)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат. (*Ответ*: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 7=0$.)

4.Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-52=0$ и отстоящей от нее на расстояние 2. (*Ответ*: $12\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-26=0$ или $12\boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-78=0$.)

5.Вычислить величину меньшего угла между прямыми $3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-2=0$ и $8\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+5=0$. Доказать, что точка лежит на биссектрисе этого угла, и сделать рисунок. (*Ответ*: .)

6.Составить уравнение плоскости через точку P(1,0,2) перпендикулярно к двум плоскостям $\boldsymbol{2x-y+3z-1=0}$ и $\boldsymbol{3x+6y+3z=0}$. (Ответ: $7x-y-5x-z+3=0$)

7.Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на осях OX и OY отрезки $a = -2$, $в =$ соответственно. (Ответ: $x-3y-2z+2=0$)

8.Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\mathbf{s} = (5,0,-2)$ и отсекающих на осях OX и OY отрезки $a = -4$, $b= 1$.

9. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями

$\boldsymbol{x - 2y + 4z - 1 = 0}$ и $\boldsymbol{2x -5y + 2z + 12 = 0}$.

10. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую перпендикулярно к плоскости .

11.Вычислить расстояние между прямыми и (*Ответ*: .)

12.Пересекаются ли прямые и (*Ответ*: нет.)

Вопросы к теме:

1. Дайте определение нормального вектора прямой.
2. Дайте определение направляющего вектора прямой.
3. Каким набором элементов можно задать прямую?
4. Какой вид может иметь уравнение прямой на плоскости?
5. Как составить уравнение прямой:
   - по направляющему вектору и точке,
   - по двум точкам,
   - по нормальному вектору и точке,
   - по отрезкам, отсекаемым прямой на осях координат?
6. Что можно сказать о положении прямой на координатной плоскости, по ее уравнению:
   - каноническому
   - параметрическим
   - “в отрезках”
   - с угловым коэффициентом
7. Как перейти от одного вида уравнения прямой к другому виду?
8. Что можно рассказать по уравнению о положении прямой на плоскости?
9. Как определить взаимное расположение точки и прямой?
10. Как определить точку пересечения двух прямых?

Практическая работа №9

Тема: Нахождение пределов функций и точек разрыва.

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Теоретический блок

Чтобы вычислить предел функции в точке, надо:

1) Подставить вместо переменной x то, к чему x стремится.

2) Если после выполнения пункта 1) получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, то надо числитель и знаменатель дроби разложить на множители и сократить дробь, или числитель и знаменатель домножить на сопряженное и после этого сократить дробь. Заметим, что дробь всегда будет сокращаться, если в выражении $x \to a$ стрелку заменить на минус: (x-a).

3) Если после выполнения пункта 1) получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то надо числитель и знаменатель дроби разделить на старшую степень неизвестного, или слагаемое с самой большой степенью в числителе разделить на слагаемое с самой большой степенью в знаменателе и взять предел от результата деления.

4) Если после выполнения пункта 1) получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, связанная с значениями тригонометрических функций, надо воспользоваться первым замечательным пределом.

Определение. Первым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Первый замечательный предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

5) *Определение: Вторым замечательным пределом называется предел*

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e, заданное этим пределом, играет очень большую роль как в математическом анализе, так и в других разделах математики. Число e называют основанием натуральных логарифмов ($\log_e N=\ln N$ *).*

Теорема. Второй замечательный предел существует. Его значение -- число, лежащее между и .

Более подробное изучение числа e показывает, что e -- иррациональное число, несколько первых десятичных знаков которого таковы:

$$e=2{,}7182818285\ldots$$

2. *Закрепление изученного материала.*

Пример 1

$\lim_{x\to 2}\frac{x-6}{x-1} = \frac{2-6}{2-1} = -4$

Мы воспользовались правилом 1) и подставили вместо х то, к чему х стремиться, т. е. х=2.

Пример 2

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{1} = \frac{2+3}{1} = 5$

Пример 3

$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}^2-3^2)} =$

$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{(x+4-9)} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{(x-5)} = \lim_{x\to 5}(\sqrt{x+4}+3) = 3+3=6$

Пример 4

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-6}{2x^2+7x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{7x}{x^2}-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{2+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{4+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{2+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}} = \frac{4}{2}$

Пример 5

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}{3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{6}{3} = 2$

Пример 6

а) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{7x} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{4x})^{4x\cdot\frac{7x}{4x}} = e^{\frac{7}{4}}$

б) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^2$

в) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$

г) $\lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to 2}(1+2x-4)^{\frac{1}{2x-4}\cdot\frac{2x-4}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{2(x-2)}{x-2}} = e^2$

3. Закрепление знаний, умений и навыков.

Выполнить самостоятельную работу по вычислению пределов функций.

Вариант 1

Вычислите предел функции:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-2}{x^2+6x-5}$.
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{3x^3-5x+1}$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+6x-7}$.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}$.
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg\,2x}{5x}$.

Вариант 2

Вычислите предел функции:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{6x^2+x-5}$.
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-8}{3x^4-5x^2+7}$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{tg\,5x}$.
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg\,4x}{5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}(1+\frac{1}{x})^x$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{5x}$

9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x+1}{4x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^x$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}(1+\frac{1}{x})^x$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg\, 5x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x+4}{2x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

Практическая работа №10

Тема: Частные случаи вычисления пределов функции.

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Теоретический блок.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Мы рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

<u>Пример:</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty}=\infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность** $\frac{\infty}{\infty}$ **необходимо разделить числитель и знаменатель на** x **в старшей степени**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\dfrac{5}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}+3}=\frac{2}{3}$$

Вот оно как, ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

Что принципиально важно в оформлении решения:

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

$$\frac{2-\underset{\to 0}{\dfrac{3}{x}}-\underset{\to 0}{\dfrac{5}{x^2}}}{\underset{\to 0}{\dfrac{1}{x^2}}+\underset{\to 0}{\dfrac{1}{x}}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3
Максимальная степень в знаменателе: 4
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.
Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$
$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Пример 3

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Практическая работа №11

Тема: Вычисление пределов функции методом умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по вычислению пределов функций. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Теоретический блок.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4

Решить предел $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Решаем предел

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:
$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Таким образом:
$$2x^2-3x-5 = 2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*) = \lim_{x\to -1}(2x-5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$= 2\cdot(-1)-5 = -2-5 = -7$$

В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители.
$$2x^2-3x-5=0$$
$$D = (-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5) = 9+40 = 49$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$
$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$
$$2x^2-3x-5 = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(2x-5) = -2-5 = -7$$

<u>Пример 5</u>

Вычислить предел $\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

Знаменатель:

$x^2+4x-12=0$

$D=16+48=64$

$\sqrt{D}=8$

$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6$, $x_2=\frac{-4+8}{2}=2$

$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Что важного в данном примере?
Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация**:** Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем. Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела**. Зачем?** Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.

! Важно

В ходе решения фрагмент типа $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}$ встречается очень часто. Сокращать такую дробь **нельзя**. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).

$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(-1)=-1$, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

Пример 6

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

Вспоминаем формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, **мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение**.
В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с суммой корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)} =$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте?
Примерно так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$
$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)} =$$
$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

<u>Пример 7</u>

Найти предел $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Окончательное решение примера может выглядеть так:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители:

$x^2+x-2=0$

$D=1+8=9$

$\sqrt{D}=3$

$x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$

$x_2=\frac{-1+3}{2}=1$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение

$$(*)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\overset{\to 2}{\sqrt{x+6}}+2)}{x+6-4}=4\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=$$

$$=4\lim_{x\to -2}(x-1)=4\cdot(-3)=-12$$

Практическая работа №12

Тема: Нахождение производной функции.

<u>**Цель**</u>: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, обратных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная и обратная функция, умение применять производную для исследования функций.

1.Теоретический материал и примеры нахождения производной функции.

Определение: Производной функции f(x) (f'(x)) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$$

Производные элементарных функций.

f(x)	f′(x)
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

1. $C'=0$
2. $(u+v)'=u'+v'$
3. $(uv)'=u'v+v'u$
4. $(C\cdot u)'=C\cdot u'$, где C=const
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
6. Производная сложной функции:

$f'(g(x))=f'(g)\cdot g'(x)$

2. Примеры.

1. Найти значение производной функции: $y=3x^2+2^x-4x+8$.

Решение:

По правилу нахождения производной алгебраической суммы функций (формула 2):

$y'=(3x^2+2^x-4x+8)'=(3x^2)'+(2^x)'-(4x)'+(8)'=3\cdot 2x+2^x\cdot\ln 2-4\cdot 1+0=6x+2^x\cdot\ln 2-4$

2. Найти значение производной функции: $y=x^6(\sin x+4)$.

Решение:

Функция представляет собой произведение двух множителей: $u=x^6, v=\sin x+4$. По формуле 3:

$y'=(x^6(\sin x+4))'=(x^6)'(\sin x+4)+x^6(\sin x+4)'=6x^5(\sin x+4)+x^6\cdot\cos x$.

3. Найти значение производной функции: $y=\frac{3x-5}{4e^x-3}$.

Решение:

Функция представляет собой частное двух выражений: $u=3x-5, v=4e^x-3$.

По формуле 5: $y'=\left(\frac{3x-5}{4e^x-3}\right)'=\frac{(3x-5)'\cdot(4e^x-3)-(4e^x-3)'\cdot(3x-5)}{(4e^x-3)^2}=\frac{3(4e^x-3)-4e^x(3x-5)}{(4e^x-3)^2}$

4. $y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение. Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции (формула 6):

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

5. Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $y' = (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})' = 3(x^{-1/2})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

6. y = x3 – 3x2 + 5x + 2. Найдем y '(–1).

y ' = 3x2 – 6x+ 5. Следовательно, y '(–1) = 14.

7.Если y = ln x · cos x, то y ' = (ln x) ' cos x + ln x (cos x) ' =1/x·cos x – ln x · sin x.

8. $y = \frac{x^3}{\cos x}$, $y' = \frac{(x^3)'\cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2\cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$

Пусть дана функция. Для её исследования нужно:

1) Найти её область определения. Если это не слишком сложно, то полезно найти также область значений. (Однако, во многих случаях, вопрос нахождения откладывается до нахождения экстремумов функции.)

2) Выяснить общие свойства функции, которые помогут в определении её поведения: не является ли функция чётной либо нечётной, не является ли она периодической.

3) Выяснить, как ведёт себя функция при приближении аргумента к граничным точкам области определения, если такие граничные точки имеются. Если функция имеет точки разрыва, то эти точки тоже проверить на наличие вертикальных асимптот функции. Найти наклонные асимптоты.

4) Найти точки пересечения графика с осями координат, что состоит в простом вычислении значения функции при условии:

С осью OX: y=0;

С осью OY: x=0.

Нахождение точек пересечения с осью может привести к необходимости решить сложное алгебраическое уравнение, что, быть может, удастся сделать лишь приближённо. Отыскав корни функции и точки разрыва, мы можем определить знак функции на каждом из интервалов между этими точками. Это можно сделать либо вычислив значение функции в какой-нибудь из точек интервала, либо применив метод интервалов.

5)Найти промежутки монотонности. Для этого находят производную и решают неравенство:

$f'(x) > 0$. На промежутках, где это неравенство выполнено, функция возрастает. Там, где выполнено неравенство $f'(x) < 0$, функция убывает.

Найдя интервалы монотонности, мы можем сразу определить точки локального экстремума: там, где возрастание сменяется убыванием, располагаются локальные максимумы, а там, где убывание сменяется возрастанием - локальные минимумы.

6) Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости ведётся с помощью второй производной. Найдя $f''(x)$, мы определяем знаки $f''(x)$ на интервалах:

если $f''(x) > 0$, то кривая графика функции вогнута;

если $f''(x) < 0$, то кривая графика функции выпуклая.

Заодно определяем точки перегиба как те точки, в которых функция меняет направление выпуклости (и непрерывна).

7) Нахождение точек пересечения графика с асимптотой и дополнительных точек. Этот пункт не носит обязательного характера, однако нахождение таких точек придаёт исследованию функции и построенному её графику законченность и полноту.

Заметим, что получающиеся в процессе исследования функции точки на осях координат и на графике полезно сразу же наносить на чертёж. Это помогает по ходу дела уяснять вид графика.

3. Выполните самостоятельно:

№ варианта	**Найти производную функции у:**	**№ варианта**	**Найти производную функции у:**
1	1. $y=6x^5-3\cos x+8x-9$ 2. $y=e^x(5x+7)$ 3. $y=\frac{\ln x}{\sin x}$ 4. $y=3^{x^3}$ 5. $y=\sqrt{\sin 2x}$	6	1. $y=-6x^4-7\cos x+x-11$ 2. $y=e^{x-3}(x+17)$ 3. $y=\frac{6-2\ln x}{\sin 2x}$ 4. $y=9^{10-x^5}$ 5. $y=\sqrt{\sin(6x-5)}$
2	1. $y=-7x^3-13\operatorname{ctg} x+x-5$ 2. $y=4^x(5x+7\ln x)$ 3. $y=\frac{x-9}{\sin x}$ 4. y=ln(6x-3) 5. $y=\sqrt[4]{(3x-7)^3}$	7	1. $y=-7x^3-13\operatorname{ctg} x+x-5$ 2. $y=4^x(5x+7\ln x)$ 3. $y=\frac{x-9}{\sin x}$ 4. y=ln(6x-3) 5. $y=\sqrt[4]{(3x-7)^3}$
3	1.y=4x-3tgx+6x-8 2. $y=e^x\cdot\cos x$ 3. $y=\frac{3x-4}{5-4^x}$ 4. $y=(6x-9)^{11}$ 5. $y=\sqrt[8]{(\sin x)^5}$	8	1.y=-5x+2ctgx+3x-2 2. $y=8^x\cdot\cos(-4x)$ 3. $y=\frac{5x-4}{15-2^x}$ 4. $y=(2x-7)^{14}$ 5. $y=\sqrt[9]{(\sin x)^3}$
4	1. $y=7x-9x^8+12$ 2. $y=x^5\cdot(7\cos x-8)$ 3. $y=\frac{tgx}{5lnx+7}$ 4. $y=\sqrt{\log_4(5x-8)}$ 5. $y=6^{\cos 4x}$	9	1. $y=-5x-7x^8+10$ 2. $y=\sqrt{x}\cdot(4\cos x-3)$ 3. $y=\frac{ctgx}{cosx+4}$ 4. $y=\sqrt{\sin(2x^3-4)}$ 5. $y=15^{3-2\cos 5x}$
5	1. $y=6\ln x-3{,}6\cos x+4$ 2. $y=(3x-4)\cdot 12^{x-9}$	10	1. $y=16x-0{,}6\cos x+4lnx$ 2. $y=(7x-9)\cdot 2^{4x-9}$

	3. y= $\frac{5ctgx}{e^x}$ 4. y=(x^3-7x+5)·$\cos 4x$ 5. y=$\sqrt[4]{5x-4x^3}$		3. y= $\frac{5tgx-3x+5}{e^x}$ 4. y=($-5x^3$-x)·$\cos 8x$ 5. y=$\sqrt[9]{15x-4x^{11}}$+ tgx^4

4.Выполните самостоятельно:

Вариант №1 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=x^3-3x^2+4 2. y=$\frac{5-2x}{x^2-4}$	Вариант №2 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=$\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$ 2. y=$\frac{x}{x^2-1}$
Вариант №3 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=$-x^3+3x^2-2$ 2. y=$\frac{x^2}{x^2-1}$	Вариант №4 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=$-x^3+3x^2-2$ 2. y=$\frac{x^3}{x^2-1}$
Вариант №5 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=$x^3-12x+6$ 2. y=$\frac{2x}{x^2+1}$	Вариант №6 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=x^3-12x^2-9x+1 2. y=$\frac{1}{x^2+1}$
Вариант №7 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=x^3-6x^2+9x-3 2. y=$\frac{2x}{x^2+1}$	Вариант №8 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=x^3-12x^2-9x+1 2. y=$\frac{x^2}{x^2+1}$
Вариант №9 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=$x^3+9x^2+24x+12$ 2. y=$\frac{x^2}{6x+18}$	Вариант №10 Исследовать функцию на монотонность и экстремум: 1. y=$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$-2x- $\frac{1}{3}$ 2. y=$\frac{x^2}{x-2}$

5. Контрольные вопросы:

$$r_{kk}=\frac{2r_{xy}}{1+r_{xy}}$$

Вычисление

это получение из входных данных нового знания

1. Сформулируйте правила нахождения производной суммы, произведения, частного.
2. Как найти производную сложной функции?

3. Как применяется производная функции для исследования функции на монотонность, экстремум?

Практическое занятие № 13

Тема: Нахождение производных функций. Нахождение производных сложных функций, высших порядков

Цель: Научиться вычислять производные функций, сложных функций, высших порядков

Теоретический блок

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, когда Вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в таблицу на правило дифференцирования сложной функции:

$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u называют **внешней функцией**, а функцию v **– внутренней (или вложенной) функцией**.

Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим:

<u>Пример 1</u>

Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x-5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$

В данном примере уже из моих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x-5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x-5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x-5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x-5)$ понятно, что под синус вложен многочлен $3x-5$. А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: $3 \cdot 1 - 5 = -2$, поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней функцией v:

$$y = \sin\underset{v}{(3x-5)}$$

Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией:

$$y = \underbrace{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Начинаем решать. Мы помним, что оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем выражение в скобки и ставим справа вверху штрих:

$y' = (\sin(3x-5))'$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. **Все табличные формулы применимы и в том, случае, если «икс» заменить сложным выражением**, в данном случае:

$u'(v) = \cos(3x-5)$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x-5$ <u>не изменилась, её мы не трогаем</u>.

Ну и совершенно очевидно, что $v' = (3x-5)'$

Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)'$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0)$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$
$= 3\cos(3x-5)$

Готово

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение на бумагу и еще раз прочитайте объяснения.

<u>Пример 2</u>

Найти производную функции $y = \cos 2x$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

<u>Пример 3</u>

Найти производную функции $y = (2x+1)^5$

Как всегда записываем:

$y' = ((2x+1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x = 1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y = (\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = \underbrace{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)'$$

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5 \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\text{не меняется}}{}^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' =$$
$$= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10 \cdot (2x+1)^4$$

Готово.

Пример 4

Найти производную функции $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^7}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

Пример 5

а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}} \cdot (arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Пример 6

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 7

Найти производную функции $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Интересно отметить, что иногда вместо правила дифференцирования сложной функции можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но такое решение будет выглядеть ~~как извращение~~ необычно. Вот характерный пример:

Пример 8

Найти производную функции $y = -\dfrac{1}{\cos x}$

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)'$$

Подготавливаем функцию для дифференцирования – выносим минус за знак производной, а косинус поднимаем в числитель:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция. Используем наше правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)' =$$
$$= -(-1) \cdot cos^{-2}x \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, косинус сбрасываем обратно вниз:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)' =$$
$$= -(-1) \cdot cos^{-2}x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

Пример 9

Найти производную функции $y = \frac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где, как матрешки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

Пример 10

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin^2 x}}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\boxed{\arcsin^2 x}}}$$

То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$. Единственное отличие – вместо «икс» у нас сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Легко убедиться, что внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» выражение:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x}\cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{2\ln 7\cdot 7^{\arcsin^2 x}\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Готово.

<u>Пример 11</u>

Найти производную функции $y = \ln^2(2x-1)$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

На практике правило дифференцирования сложной функции почти всегда применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования.

<u>Пример 12</u>

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u \pm v)' = u' \pm v'$, заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)'$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции e^{3x}, $\sin 7x$. Каламбур, но это простейшие из сложных функций, и при определенном опыте решения производных Вы будете легко находить их устно. А пока запишем подробно, согласно правилу $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)' =$$
$$= -2(1\cdot e^{3x} + x\cdot e^{3x}\cdot(3x)') + (2x - 4 + 0)\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)\cos 7x\cdot(7x)' =$$
$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x - 4)\sin 7x + 7(x^2 - 4x + 3)\cos 7x$$

Готово.

Примеры для самостоятельного решения

Найти производную функции $y = \sqrt{x^2 + 4}\cdot\ln(\sin x)$

Пример 2: $y' = -2\sin 2x$

Пример 4: $y' = -\dfrac{14x}{(x^2 - 1)^8}$ *Указание: перед дифференцированием необходимо перенести степень наверх, сменив у показателя знак* $\dfrac{1}{x^a} = x^{-a}$.

Пример 7: $y' = -\dfrac{1}{\sqrt[5]{(x + \ln x)^6}}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

Пример 9: $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}\cdot\arccos^3 x}$

Пример 11: $y' = \dfrac{4\ln(2x - 1)}{2x - 1}$

Пример 13: $y' = \dfrac{x\ln(\sin x)}{\sqrt{x^2 + 4}} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}\cdot\cos x}{\sin x}$

Практическая работа № 14

Тема: Нахождение дифференциалов функций. Исследование функции по общей схеме, построение графика

Цель: Научиться находить дифференциалы функций и построению графика

Теоретический блок

1. Необходимое и достаточное условие постоянства функции.
2. Монотонность функции. Достаточное условие строгой монотонности. Необходимое и достаточное условие монотонности.
3. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
4. Выпуклость функции. Достаточное условие выпуклости.
5. Точки перегиба. Необходимое условие точки перегиба. Достаточное условие точки перегиба.
6. Асимптоты графика функции.
7. Общая схема исследования функций и построения графиков.

Общая схема исследования функции и построения графика

I. Определение общего характера графика функции:

–нахождение области определения функции;

–исследование функции на чётность, нечётность, периодичность;

–исследование функции на непрерывность функции и точки разрыва,

–нахождение вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции;

–нахождение точек пересечения графика функции с осями координат;

–нахождение интервалов знакопостоянства функции;

–нахождение дополнительных точек графика функции.

II. Уточнение характера графика функции с помощью первой производной:

–нахождение интервалов монотонности функции;

–нахождение точек экстремумов функции.

III. Уточнение характера графика функции с помощью второй производной:

–нахождение интервалов выпуклости вверх, выпуклости вниз;

–нахождение точек перегиба функции.

Контрольные вопросы

1. Функция дифференцируема на промежутке и монотонна. Что можно сказать о её производной?
2. Функция имеет на отрезке положительную производную. Что можно сказать о её монотонности?
3. Функция строго монотонна на отрезке. Может ли её производная на этом отрезке обращаться в ноль?
4. Может ли функция в точке экстремума быть недифференцируемой?
5. Пусть функция в точке x_o имеет минимум. Верно ли, что её производная в этой точке равна нулю?
6. Пусть функция в точке x_o имеет минимум. Верно ли, что она дифференцируема в этой точке?
7. Пусть функция в точке x_o имеет минимум. Верно ли, что если она непрерывна в этой точке, то её производная в этой точке равна нулю?
8. Пусть функция в точке x_o имеет минимум. Верно ли, что если она дифференцируема в этой точке, то её производная в этой точке равна нулю?

Задачи для практических занятий

1. Найти асимптоты графика функции:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

2. Найти промежутки монотонности функции:

а) $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$; б) $f(x)=x^2(x-3)$; в) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}$

.3. Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=x^3-27x$; б) $f(x)=3\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+2$; в) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$.

4. Исследовать методами дифференциального исчисления следующие функции и построить графики:

а) $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$; б) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

в) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; г) $f(x)=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти асимптоты графика функции:

а) $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x+2}$; б) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

2. Найти промежутки монотонности функции:

а) $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$; б) $f(x)=x^2(x-3)$; в) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$.

3. Найти экстремумы функции:

а) $f(x)=x^3-27x$; б) $f(x)=3\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}+2$; в) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$.

4. Исследовать методами дифференциального исчисления следующие функции и построить графики:

а) $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$; б) $f(x)=\frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$;

в) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$; г) $f(x)=\frac{x^2(x-1)}{x^2+2x+1}$.

Практическая работа № 15

Тема: Понятие неопределенного интеграла и его свойства. Нахождение интегралов функций. Интегрирование заменой переменной и по частям. Интегрирование рациональных и иррациональных функций

Цель: Научиться вычислять интеграл функции и интегрированию рациональных и иррациональных функций

Теоретический блок

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство $F¢(x) = f(x)$.

Определение. Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением $F(x) + C$. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Свойства:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3) $\int dF(x) = F(x) + C;$

4) $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx,$ где u, v, w – некоторые функции от x;

5) $\int C\cdot f(x)dx = C\int f(x)dx$

В таблице 2 представлены основные значения неопределённых интегралов.

Таблица 2 – Таблица неопределённых интегралов

Интеграл	Значение	Интеграл	Значение		
1	$\int \mathrm{tg}\,dx$	-ln½cos$x$½+C	11	$\int e^x dx$	ex + C
2	$\int \mathrm{ctg}\,dx$	ln½sin$x$½+ C	12	$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	13	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$	14	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$\mathrm{tg}\, x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	15	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

Продолжение таблицы 2

Интеграл	Значение	Интеграл	Значение		
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int x^{\alpha} dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	17	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	18	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$
9	$\int \mathrm{sh}\, x\, dx$	$\mathrm{ch}\, x + C$	19	$\int \mathrm{ch}\, x\, dx$	$\mathrm{sh}\, x + C$
10	$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}dx$	$\mathrm{th}\, x + C$	20	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}dx$	$-\mathrm{cth}\, x + C$

Теорема. Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = j(t) и dx = j¢(t)dt получим

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Метод интегрирования по частям основан на известной формуле производной произведения (uv)¢ = u¢v + v¢u, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: $d(uv)=udv+vdu$.

Проинтегрировав, получаем $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$.

В соответствии со свойствами неопределенного интеграла

$\int u dv = uv - \int v du$.

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

2.1.2 Примеры решения задач

№ 000 [4]. Найти $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$

Решение

$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx = \left| \begin{matrix} x-\sin x = t \\ (1-\cos x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x-\sin x} + C$ № 000 [4]. Найти неопределённый интеграл $I = \int \frac{x^2 dx}{7x^3+1}$.

Решение

Подведем под знак дифференциала знаменатель подынтегральной дроби

$$I = \int \frac{\frac{1}{21} d(7x^3+1)}{7x^3+1} = \frac{1}{21} \int \frac{d(7x^3+1)}{7x^3+1} = \frac{1}{21} \ln\left|7x^3+1\right| + C.$$

№ 000 [4]. Найти $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$.

Решение

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$$

№ 000 [4]. Найти неопределённый интеграл $I = \int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5} dx$.

Решение

Введем подстановку $t = 1-3x^5$, откуда $dt = -15x^4 dx$. Тогда $I = -\frac{1}{15} \int \sqrt[4]{t} dt$. Находим полученный табличный интеграл и возвращаемся к старой переменой

$$I = -\frac{1}{15} \int t^{\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = -\frac{4}{75} \sqrt[4]{t^5} + C = -\frac{4}{75} \sqrt[4]{(1-3x^5)^5} + C.$$

№ 000 [4]. Найти неопределённый интеграл $\int (2x+1)^{20} dx$.

Решение

$$\int (2x+1)^{20} dx = \{2x+1 = t,\ dt = 2dx\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C =$$

$$= \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

№ 000 [4]. Найти неопределённый интеграл $I = \int x \operatorname{arctg} x dx$.

№ 000 [4]. Найти неопределённый интеграл $\int e^{2x} \cos x dx$.

№ 000 [4]. Найти $\int x^2 e^{5x} dx$

В интегралах вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где n – натуральное число, функция рационализируется с помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Определение. Биноминальным дифференциалом называется выражение *xm*(*a* + *bxn*)*pdx*, где *m*, *n*, и *p* – рациональные числа. Интеграл от биноминального дифференциала может быть выражен через элементарные функции в следующих трех случаях:

1) если *p* – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t=\sqrt[l]{x}$, где l – общий знаменатель *m* и *n*;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где *s* – знаменатель дроби *p*;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то используется подстановка $t=\sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где *s* – знаменатель дроби *p*.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ путем выделения полного квадрата могут быть приведены к одному из следующих трех типов:

1) $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})du,$

2) $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})du,$

3) $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})du$

Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})du$ подстановкой $u=m\sin t$ или $u=m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin*t* или cos*t*.

Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})du$ подстановкой $u=m\,\mathrm{tg}\,t$ или $u=m\,\mathrm{ctg}\,t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin*t* и cos*t.*

Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})du$ подстановкой $u=\frac{1}{\sin t}$ или $u=\frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sin*t* или cos*t.*

Подстановки Эйлера используют при следующих условиях:

1) если *a*>0, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$;

2) если *a*<0 и *c*>0, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$;

3) если *a*<0, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители *a*(*x* – *x*1)(*x* – *x*2), то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

I $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

II $\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$

III $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$

где $P(x)$ – многочлен, n – натуральное число. Причем интегралы II и III типов могут быть приведены к виду интеграла I типа.

Выполним следующее преобразование:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

в этом выражении $Q(x)$ – некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$ на единицу, а l – некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена $Q(x)$, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют величину l и коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Примеры решения задач

№ 000 [4]. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx$.

Решение

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{\begin{matrix} \sqrt[12]{x-1}=t,\ x-1=t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= 12\left(\int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$-12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x-1}+C.$$

№ 000 [4]. Найти $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

Решение

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \{x = a\sin t,\ dx = a\cos tdt\} =$$

$$= a\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cos tdt =$$

$$= a\int a\ \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

№ 000 [4]. Найти $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

Решение

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left\{\begin{matrix} x = a\operatorname{tg} t, dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt, \\ \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t} \end{matrix}\right\} = \int \frac{a\cos tdt}{\cos^2 ta^4\operatorname{tg}^4 ta} =$$

$$= \int \frac{\cos^3 tdt}{a^4\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C =$$

$$= \left\{\sin t = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\} = -\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4 x} +$$

$$+C.$$

№ 000 [4]. Найти $\int \frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}$.

Решение

$$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left\{\begin{matrix}x=\frac{2}{\cos t};dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt,\\ \sqrt{x^2-4}=2\operatorname{tg}t\end{matrix}\right\}=\int\frac{2\sin t\cos t dt}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5\operatorname{tg}^5 t}=$$

$$=\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^4 t dt=\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^2 t d(\operatorname{ctg}t)-$$

$$-\frac{1}{32}\int\operatorname{ctg}^2 t dt=-\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t+\frac{1}{32}\operatorname{ctg}t+$$

$$+\frac{t}{32}+C=\left\{\operatorname{ctg}t=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right\}=-\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+$$

$$+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

№ 000 [4]. Найти $\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$.

№ 000 [4]. Найти $\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx$.

Практическое занятие № 16

Тема. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площадей фигур и объемов тел

Цель: Закрепить умения студентов решать задачи по вычислению интегралов

Теоретический блок

Определение. Если для функции *f*(*x*) существует предел $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, равный $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)dx$, то функция называется интегрируемой на отрезке [*a*, *b*].

Свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx=A\int\limits_a^b f(x)dx$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int\limits_a^a f(x)dx=0$;

4) если *f*(*x*) $\le$ φ(*x*) на отрезке [*a*, *b*], где *a* < *b*, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b\varphi(x)dx;$$

5) если *m* и *M* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f*(*x*) на отрезке [*a*, *b*], то

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a);$$

6) *теорема о среднем*: если функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то на этом отрезке существует точка е такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)f(\varepsilon);$$

7) для произвольных чисел *a*, *b*, *c* справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Теорема Ньютона–Лейбница. Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Приемы вычисления определенных интегралов практически не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой x=j(t). Если:

1) j(a) = a, j(b) = b;

2) j(t) и j¢(t) непрерывны на отрезке [a, b];

3) f(j(t)) определена на отрезке [a, b],

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

или

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a$, ¥). Обозначение:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится, если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится. Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Теорема. Если для всех x (x³a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ также сходится.

Теорема. Если для всех x (x^3a) выполняется условие $0\le\varphi(x)\le f(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^{\infty}f(x)dx$ также расходится.

Если в точке $x = c$ функция либо не определена, либо разрывна, то

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx.$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ сходится, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int_a^c f(x)dx$ расходится.

Если в точке $x = a$ функция терпит разрыв, то

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$. Таких точек внутри отрезка может быть несколько. Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Примеры решения задач

№ 000 [4]. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx.$

Решение

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\right|=$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4}dt$$

Разложим дробь $\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t^4)}$ на простейшие

$$\frac{2-4t-2t^2}{(1+t)^4}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t)^3}+\frac{D}{(1+t)^4}=$$

$$=\frac{A(1+t)^3+B(1+t)^2+C(1+t)+D}{(1+t)^4}.$$

$$A(1+t)^3+B(1+t)^2+C(1+t)+D=2-4t-2t^2.$$

$$D=4,\ A=0,\ B=-2,\ C=0.$$

Имеем

$$\int_0^1\left(\frac{4}{(1+t)^4}-\frac{2}{(1+t)^2}\right)dt=\left(-\frac{4}{3(1+t)^3}+\frac{2}{1+t}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{4}{3\cdot 8}+1+\frac{4}{3}-2=\frac{1}{6}.$$

№ 000 [4]. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3}\frac{dx}{(3\operatorname{tg}x+5)\sin 2x}$$

Решение

$$\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3}\frac{dx}{(3\operatorname{tg}x+5)\sin 2x}=\left|\begin{array}{ll}\operatorname{tg}x=t, & \sin 2x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}; & \end{array}\right|=$$

$$=\int_1^3\frac{dt}{(3t+5)\dfrac{2t}{1+t^2}(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{dt}{t(3t+5)}.$$

$$\frac{1}{t(3t+5)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{3t+5}=\frac{A(3t+5)+Bt}{t(3t+5)},$$

$$A(3t+5)+Bt=1,$$

$$A=\frac{1}{5};\ B=-\frac{3}{5}.$$

Имеем

$$\frac{1}{10}\int_1^3\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{3t+5}\right)dt=\frac{1}{10}\left(\ln|t|-\ln|3t+5|\right)\Big|_1^3=\frac{1}{10}(\ln 3-\ln 14-0+\ln 8)=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{24}{14}=\frac{1}{10}\ln\frac{12}{7}.$$

№ 000 [4]. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

Решение

$$\int_0^3\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}=\left|\begin{array}{l}x=3\operatorname{tg}t\\ dx=\dfrac{3dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int_0^{\pi/4}\frac{3dt}{(9+9\operatorname{tg}^2 t)^{3/2}\cos^2 t}=$$

$$=\frac{3}{27}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}dt=\frac{3}{27}\int_0^{\pi/4}\cos t\,dt=\frac{3}{27}\sin t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{18}.$$

№ 000 [4]. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l}x=\sin t,\\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2\end{array}\right\}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi=\frac{\pi}{4}.$$

№ 000 [4]. Исследовать на сходимость $\int_0^{\infty}\cos x\,dx$.

Решение

$$\int_0^{\infty}\cos x\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\cos x\,dx=\lim_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}(\sin b-\sin 0)=\lim_{b\to\infty}\sin b.$$

Так как предел не существует, то несобственный интеграл расходится.

№ 000 [4]. Исследовать на сходимость $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_b^{-1}=\lim_{b\to-\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right)=1$$

– интеграл схо-дится.

№ 000 [4]. Исследовать на сходимость $I=\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}$.

Решение

Точка $x=1$ является особой точкой, так как подынтегральная функция имеет в ней бесконечный разрыв. Поэтому

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right|-\ln 1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-\infty-0)=-\infty.$$

Так как предел бесконечный, то данный интеграл расходится.

№ 000 [4]. Задано комплексное число $z=\dfrac{\sqrt{3}+i\cdot 3}{\sqrt{3}+i}$. Найти алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи.

Решить уравнение $w^9+z=0$.

Решение

1) Домножим числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю комплексное число $\sqrt{3}-i$ и проведем алгебраические преобразования

$$z=\frac{(\sqrt{3}+i3)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i3)(\sqrt{3}-i)}=\frac{3+i3\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{3+1}=\frac{6+i2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ – алгебраическая форма.

Модуль числа $|z|=r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

Аргумент находится в первой четверти

$$\arg z=\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{3}{2}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Тригонометрическая форма числа

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Показательная форма числа

$$z=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

2) для решения уравнения $w^9+z=0$ необходимо выписать три значения корня кубического из числа.

$$-z=-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}\cdot e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{3}e^{i\frac{7}{6}\pi}.$$

Полученный аргумент числа не является главным значением, поэтому, пользуясь периодичностью функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, можем перейти к другому аргументу, удовлетворяющему условию $-\pi<\varphi\le\pi$.

$$-z=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{7}{6}\pi-2\pi\right)}=\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}};$$

$$w=\sqrt[9]{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{9}\right)}}=3^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{-5+12k}{18}\right)\pi}.$$

Три решения исходного уравнения получаются при k = 0, 1, 2:

$$w_1=3^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left(-\frac{5\pi}{18}\right)},\quad w_2=3^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left(\frac{7\pi}{18}\right)},\quad w_3=3^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left(\frac{19\pi}{18}\right)}.$$

Выписанный аргумент w_3 не является главным значением аргумента (больше π), поэтому форму числа w_3 необходимо преобразовать: $w_3=3^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left(\frac{19\pi}{18}\right)}=3^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left(\frac{19\pi}{18}-\pi\right)}=3^{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\left(-\frac{17\pi}{18}-\pi\right)}$

.

№ 000 [4]. Найти все значения корня $\sqrt[9]{27i}$.

№ 000 [4]. Найти $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$.

Практическая работа № 17

Тема: Вычисление частных производных.

Цель: Формирование практических навыков нахождения экстремумов функции многих независимых переменных.

Теоретический блок

Частные производные. Дифференциал, его связь с частными производными. Геометрический смысл частных производных и дифференциала. Достаточное условие дифференцируемости. Градиент и производная по направлению. Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.

Приращение, которое получает функция Z=f(x, y), когда изменяется только одна из переменных, называется частным приращением функции по соответствующей переменной: $\Delta_x Z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$, $\Delta_y Z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Частным дифференциалом по x функции Z=f(x, y) называется главная часть частного приращения $\Delta_x Z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$, пропорциональная приращению Δx независимой переменной x. Аналогично определяется частный дифференциал по y, т.е. $\Delta_y Z=f(y+\Delta y,x)-f(x,y)$.

Дифференциалы независимых переменных x и y просто равны их приращениям, т.е. $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. Частные дифференциалы обозначаются так: $d_x Z$ -частный дифференциал по x, $d_y Z$ - частный дифференциал по y. При этом:

$$d_x Z = \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot dx, \quad d_y Z = \frac{\partial Z}{\partial y}\cdot dy$$

Таким образом, частный дифференциал функции двух независимых переменных равен произведению соответствующей частной производной на дифференциал этой переменной.

Таким же образом, как для функции двух переменных, определяются частные приращения и частные дифференциалы функций любого числа независимых переменных.

Приращение, которое получает функция Z=f(x,y) при произвольных совместных изменениях ее обоих аргументов называется полным приращением:

$\Delta Z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полным дифференциалом функции двух переменных называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных.

Теорема. Полный дифференциал функции двух независимых переменных равен сумме произведений частных производных функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных.

$dZ=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$ или $dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy.$

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}dx=d_x Z$ и $\frac{\partial z}{\partial y}dy=d_y Z$, то $dZ=d_x Z+d_y Z$, т.е. дифференциал функции двух независимых переменных равен сумме ее частных дифференциалов.

Определение дифференциала переносится на функции любого числа независимых переменных.

Пример 7. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$ Найти dz

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})\right)'_x = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})\right)'_y = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Следовательно, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} + \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Практическая работа № 18

Тема: Вычисление дифференциалов.

Цель: Формирование практических навыков нахождения экстремумов функции многих независимых переменных.

Практический блок

Задание 1

Найти частные производные от функций.

1. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 2y + 5$.

Решение

Считая z функцией только одного аргумента x и при этом полагая $y = const$, находим по формулам

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 4$.

Аналогично, считая z функцией только y и полагая $x = const$, получим

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x + 2$.

$z = \mathrm{arctg}\frac{y}{1+x^2}$.

Решение

Считая z функцией только одного аргумента x и при этом полагая $y = const$, находим по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2}\left(\frac{y}{1+x^2}\right)'_x = \frac{-\frac{2xy}{(1+x^2)^2}}{\frac{(1+x^2)^2 + y^2}{(1+x^2)^2}} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2 + y^2}.$$

Аналогично, считая z функций только y и полагая $x = const$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2}\left(\frac{y}{1+x^2}\right)'_y = \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{\frac{(1+x^2)^2 + y^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2 + y^2}.$$

3. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$.

Решение

Считая u функцией только x и полагая $y, z = const$, затем – функцией только y и полагая $x, z = const$, и только z, полагая $x, y = const$, получим

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$.

Задание 2

Вычислить значение частных производных данных функций при указанных значениях аргументов**:**

1) $f(x, y) = \cos(mx - ny)$; $x = \frac{\pi}{2m}$; $y = 0$.

Решение

По формулам дифференцирования находим частные производные

$f'_x = -m\sin(mx-ny)$; $f'_y = n\sin(mx-ny)$.

Полагая $x=\frac{\pi}{2m}$; $y=0$, получим

$f'_x\left(\frac{\pi}{2m};0\right)=-m$; $f'_y\left(\frac{\pi}{2m};0\right)=n$.

2. $z=\ln(x^2-y^2)$; $x=2$; $y=-1$.

Решение

Находим производные, затем вычисляем их частные значения в указанной точке:

$z'_x=\frac{2x}{x^2-y^2}$; $z'_y=-\frac{2y}{x^2-y^2}$;

$z'_x(2;-1)=\frac{4}{3}$; $z'_y(2;-1)=\frac{2}{3}$.

Задание 3

1. Показать, что функция $z=y\ln(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

2. Показать, что функция $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$

Вычисление производных и дифференциалов сложных функций

Рассмотрим числовую функцию двух переменных

$z=z(x,y)$,

заданную следующим образом:

$z=f(U,V)$, где $U=U(x,y)$; $V=V(x,y)$. (1)

Говорят, что (1) определяет сложную функцию двух переменных.

В соответствии с формулами предыдущих параграфов можем записать:

$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial U}\Delta U+\frac{\partial z}{\partial V}\Delta V+0(\delta)$; $\delta=\sqrt{\Delta U^2+\Delta V^2}$. (2)

Найдем частные приращения

$\Delta_x z=\Delta z/_{\Delta y=0}$, при этом $\Delta U=\Delta_x U$; $\Delta V=\Delta_x V$.

$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial U}\Delta_x U+\frac{\partial z}{\partial V}\Delta_x V+0(\delta_x)$, $\delta_x=\sqrt{\Delta_x U^2+\Delta_x V^2}$. (3)

$0(\delta_x)$ – есть б.м. более высокого порядка, чем δ_x, представим её в виде $\alpha\delta_x$, где α – б.м.

Тогда $\left|\frac{0(\delta_x)}{\Delta x}\right|=\left|\alpha\frac{\delta_x}{\Delta x}\right|=|\alpha|\sqrt{\left(\frac{\Delta_x U}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_x V}{\Delta x}\right)^2}$, откуда видно, что эта величина стремится к нулю при $\Delta x\to 0$; так как $\alpha\to 0$, а $\frac{\Delta_x U}{\Delta x}\to\frac{\partial U}{\partial x}$; $\frac{\Delta_x V}{\Delta x}\to\frac{\partial V}{\partial x}$.

Разделим (3) на Δx и перейдём к пределу при $\Delta x\to 0$:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial U}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x U}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial V}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x V}{\Delta x}$;

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}$ (4)

Аналогично получим формулу для частной производной сложной функции по аргументу y:

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}$. (5)

С помощью этих формул запишем полный дифференциал для функции (1)

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial U}\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial z}{\partial U}dU+\frac{\partial z}{V}dV.$$

dU

Полученное равенство выражает свойство **инвариантности формы дифференциала.** Оно состоит в том, что полный дифференциал одинаково записывается в случаях, когда U и V – независимые переменные или являются функциями от x и y.

По аналогии с формулами (4) и (5) можно записать и формулы дифференцирования сложных функций другого вида.

Например: $z=f(U,V,W)$, $U=U(x,y)$, $V=V(x,y)$, $W=W(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x}$; (6)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial y}. \quad (7)$$

Рассмотрим другой пример. Пусть дана функция

$z=f(U,V,y)$, где $U=U(x,y)$, $V=V(x,y)$.

Распространив предыдущие результаты на этот случай, получим, например, частную производную по y:

$$\frac{Dz}{Dy}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}. \quad (8)$$

Запись в форме (7) была бы некорректна, поэтому изменим обозначения.

Здесь: $\frac{Dz}{Dy}$ – означает вычисление частной производной при $x=\mathrm{const}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}$ – означает вычисление частной производной при $U=\mathrm{const}$, $V=\mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь такой пример.

Рассматривается сложная функция **одной** переменной $z=z(x)$, определённая следующим образом:

$$z=f(U,V);\quad U=U(x),\quad V=V(x). \quad (9)$$

В этом случае речь должна идти о вычислении производной $\frac{dz}{dx}$, которая называется **полной производной.** Формулу для её вычисления получим из (4)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{dU}{dx}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{dV}{dx}. \quad (10)$$

Ещё один пример:

Пусть $z=f(U,V,x)$, где $U=U(x)$, $V=V(x)$, тогда имеем следующую функцию одной переменной

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{dU}{dx}+\frac{\partial z}{\partial V}\frac{dV}{dx}+\frac{\partial z}{\partial x}. \quad (11)$$

Очевидно, для следующей функции одной переменной свойство инвариантности формы дифференциала также имеет место.

Действительно, умножая на dx (10), получим выражение вида (6).

Задание 4

Найти полные дифференциалы функции.

$z=\frac{x+y}{x-y}$.

Решение

а) находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+y)'_x(x-y)-(x-y)'_x(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}=-\frac{2y}{(x-y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x+y)'_y(x-y)-(x-y)'_y(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2};$$

б) умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получим частные дифференциалы функции:

$$d_xz=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx;\quad d_yz=\frac{2x}{(x-y)^2}dy;$$

в) искомый полный дифференциал функции найдем как сумму ее частных дифференциалов:

$$dz=\frac{2xdy-2ydx}{(x-y)^2}=\frac{2(xdy-ydx)}{(x-y)^2}.$$

2. $z=\sin(xy)$.

Решение

Следуя указанному плану, находим

а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\cos(xy)\cdot x;$

б) $d_xz=y\cdot\cos(xy)dx;\ d_yz=x\cdot\cos(xy)dy;$

в) $dz=y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy=\cos xy(ydx+xdy)$.

3. $z=\mathrm{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}$.

Решение

Следуя указанному плану, находим

а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x=\frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2}\cdot\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=$

$=\frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}=\frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y=\frac{(1-xy)+x(x+y)}{(1-xy)^2}\cdot\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=\frac{1+x^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}=\frac{1+x^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$

б) $d_x z=\frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}dx$; $d_y z=\frac{1+x^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}dy$;

в) $dz=\frac{(1+y^2)dx+(1+x^2)dy}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$.

Задание 5

Вычислить значения полного дифференциала функции

$z=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$ при $x=1$; $y=3$; $dx=0{,}01$; $dy=-0{,}05$.

Решение

Находим частные производные, затем частные дифференциалы и полный дифференциал данной функции:

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$; $dz=\frac{x\,dx-y\,dy}{x^2+y^2}$.

Подставляя заданные значения независимых переменных x, y, dx, dy, функцией которых является полный дифференциал dz, получим

$dz=\frac{1\cdot(-0{,}05)-3\cdot 0{,}01}{1+9}=-0{,}008$.

Задание 6

Вычислить приближенное значение:

1) $1{,}08^{3{,}96}$; 2) $\frac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arctg}0{,}07}{2^{2{,}95}}$.

Решение

Если требуется вычислить значение функции $f(x,y,\ldots\ldots\ldots,t)$ в точке $M(x_1,y_1,\ldots\ldots\ldots,t_1)$ (и при этом проще рассчитать значения этой функции и ее частных производных в точке $M_0(x_0,y_0,\ldots\ldots\ldots,t_0)$), то при достаточно малых по абсолютной величине значениях разностей $x_1-x_0=dx$, $y_1-y_0=dy$, ………, $t_1-t_0=dt$ можно заменить полное приращение функции ее полным дифференциалом

$f(M_1)-f(M_0)\approx f'_x(M_0)dx+f'_y(M_0)dy+\ldots\ldots\ldots+f'_t(M_0)dt$

и *отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле*

$f(M_1)\approx f(M_0)+f'_x(M_0)dx+f'_y(M_0)dy+\ldots\ldots\ldots+f'_t(M_0)dt$. (1)

1. Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x,y)=x^y$ в точке $M_1(1{,}08;3{,}96)$ и что вспомогательная точка будет $M_0(1;4)$, получим

$f(M_0)=1^4=1$; $f'_x(M_0)=yx^{y-1}/_{x=1,y=4}=4$; $f'_y=x^y\ln x/_{x=1,y=4}=0$;

$dx=1{,}08-1=0{,}08$; $dy=3{,}96-4=-0{,}04$.

Подставляя в формулу (1), найдем

$1{,}08^{3{,}96}\approx f(M_0)+f'_x(M_0)dx+f'_y(M_0)dy=1+4\cdot 0{,}08=1{,}32$.

2. Пусть $\frac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arctg}0{,}07}{2^{2{,}95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x,y,z)=2^x\sin y\cdot\operatorname{arctg}z$ в точке $M_1(-2{,}95;1{,}49;0{,}07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3;\frac{\pi}{2};0\right)$.

Тогда $dx=-2{,}95-(-3)=0{,}05$; $dy=1{,}49-1{,}57=-0{,}08$; $dz=0{,}07$;

$\varphi(M_0)=2^{-3}\sin\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}0=0$; $\varphi'_x(M_0)=2^x\ln 2\sin y\cdot\operatorname{arctg}z/_{M_0}=0$;

$\varphi'_y(M_0)=2^x\cos y\cdot\operatorname{arctg}z/_{M_0}=0$; $\varphi'_z(M_0)=\frac{2^x\sin y}{1+z^2}=2^{-3}$.

Подставляя в формулу (1), получим

$\frac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arctg}0{,}07}{2^{2{,}95}}\approx 2^{-3}\cdot 0{,}97\approx 0{,}01$.

Задание 7

Найти производные $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z=f(x,y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

1. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$, $x=tg^2t$, $y=ctg^2t$.

Решение

Здесь z есть сложная функция одной независимой переменной t. Получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\frac{x}{y}}\frac{1}{y}=\frac{1}{2x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{-1}{2y};$$

$$\frac{dx}{dt}=2\mathrm{tg}t\frac{1}{\cos^2 t};\quad \frac{dy}{dt}=2\mathrm{ctg}t\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right);$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2x}\cdot\frac{2\mathrm{tg}t}{\cos^2 t}+\frac{1}{2y}\cdot\frac{2\mathrm{ctg}t}{\sin^2 t}=\frac{\mathrm{tg}t}{\mathrm{tg}^2 t\cos^2 t}+\frac{\mathrm{ctg}t}{\mathrm{ctg}^2 t\sin^2 t}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}t\cos^2 t}+\frac{1}{\mathrm{ctg}t\sin^2 t}=\frac{1}{\sin t\cos t}+\frac{1}{\sin t\cos t}=$$

$$=\frac{2}{\sin t\cos t}=\frac{4}{\sin 2t}.$$

2. $z=e^{x-2y}$, $x=\sin t$; $y=t^3$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-2y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2e^{x-2y};\quad \frac{dx}{dt}=\cos t;\quad \frac{dy}{dt}=3t^2.$$

$$\frac{dz}{dt}=e^{x-2y}\cos t-2e^{x-2y}3t^2=e^{x-2y}\left(\cos t-6t^2\right)=e^{\sin t-2t^3}\left(\cos t-6t^2\right).$$

3. $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t$, $y=4t^3$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}};\quad \frac{dx}{dt}=3;\quad \frac{dy}{dt}=12t^2.$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}.$$

Задание 8

Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=f(x,y)$, где $y=\varphi(x)$.

1. $z=\frac{x^2-y}{x^2+y}$, где $y=3x+1$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\left(x^2+y\right)-2x\left(x^2-y\right)}{\left(x^2+y\right)^2}=\frac{4xy}{\left(x^2+y\right)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\left(x^2+y\right)-\left(x^2-y\right)}{\left(x^2+y\right)^2}=-\frac{2x^2}{\left(x^2+y\right)^2};\quad \frac{dy}{dx}=3.$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{4xy}{\left(x^2+y\right)^2}-\frac{2x^2}{\left(x^2+y\right)^2}3=\frac{4xy-6x^2}{\left(x^2+y\right)^2}=\frac{2x(2y-3x)}{\left(x^2+y\right)^2}=$$

$$=\frac{2x(6x+2-3x)}{\left(x^2+3x+1\right)^2}=\frac{2x(3x+2)}{\left(x^2+3x+1\right)^2}.$$

2. $z=x^2y$, где $y=\cos x$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2;\quad \frac{dy}{dx}=-\sin x;$$

$$\frac{dz}{dx}=2xy-x^2\sin x=2x\cos x-x^2\sin x.$$

3. $z=x^y$, где $y=\ln x$.

Задание 9

Найти частные производные сложной функции

$z=f(x,y)$, где $x=\varphi(\xi,\eta)$, $y=\psi(\xi,\eta)$.

1. $z=x^2y-xy^2$, где $x=\xi\cos\eta$, $y=\xi\sin\eta$

2. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, где $x=\xi\eta$; $y=\frac{\xi}{\eta}$.

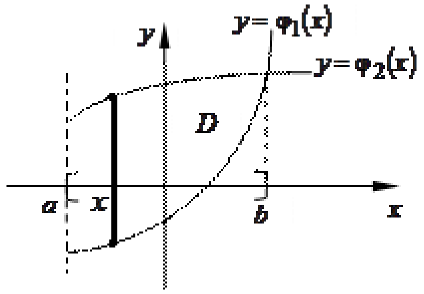
Практическая работа 19

Тема: Вычисление повторных интегралов. Сведение двойных интегралов к повторным. Вычисление двойных интегралов

Цель: Научиться вычислять повторные интегралы и сводить двойные интегралы к повторным

Теоретический блок

Вычисление двойных интегралов базируется на понятии повторного интеграла



Пусть $f(x, y)$ рассматривается на плоской области D и она правильная в направлении оси Oy, т.е. всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области D не более чем в двух точках. Тогда область D удобно спроектировать на ось Ox. Пусть проекция D на Ox есть $[a, b]$.

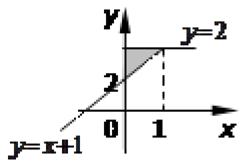
Если $y = \phi_1(x)$ – уравнение нижней границы, а $y = \phi_2(x)$ – уравнение верхней границы, то любому $x \in [a, b]$ области D принадлежат те точки (x, y) вертикального отрезка, которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x). \end{cases} \quad (*)$$

Выражение вида $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\,dy$ называется **повторным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области D. Он вычисляется следующим образом:

сначала находится внутренний интеграл (y – переменная интегрирования, x – фиксированная), а затем полученную функцию аргумента x интегрируем на $[a, b]$.

Значение повторного интеграла – число.



Пример 1. Вычислить повторный интеграл $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x+1}^{2} (x + 2y)\,dy$, восстановив область D.

Решение. Интеграл вычисляется по D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x + 1 \le y \le 2 \end{cases}$ (см. рисунок).

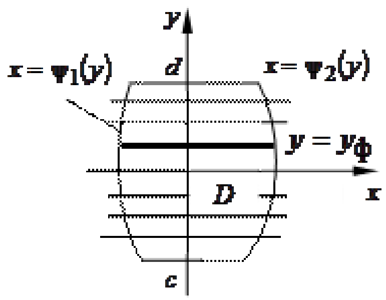
$$J = \int\limits_0^1 \left(\left[xy + y^2 \right]_{x+1}^{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left[2x + 4 - x(x+1) - (x+1)^2 \right] dx =$$

$$=\left[x^2+4x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{(x+1)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1=\left[1+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{8}{3}\right]-\left[-\frac{1}{3}\right]=$$

$$=4\frac{1}{2}-\frac{8}{3}=\frac{9}{2}-\frac{8}{3}=\frac{1}{6}(27-16)=\frac{11}{6}.$$

Аналогично:

если область D – *правильная* в направлении оси Ox, то ее удобно проектировать на ось Oy. Пусть проекция области D на ось Oy есть отрезок $[c, d]$, уравнение левой границы области $x=\psi_1(y)$, а правой границы – $x=\psi_2(y)$. Тогда для всякого $y_\Phi \in [c, d]$ значение x точек (x, y) прямой $y = y_\Phi$, принадлежащих области D, удовлетворяет неравенствам $\psi_1(y_\Phi)\le x\le\psi_2(y_\Phi)$. Поэтому область D можно задать в виде



$$\begin{cases} c\le y\le d, \\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y) \end{cases}$$

(см. рисунок).

Такому заданию области соответствует *повторный* интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$. Для его вычисления находится сначала внутренний интеграл, а затем внешний. Результат – число!

Пример 2. Зададим область D примера 1, проектируя ее на ось Oy, $D:\begin{cases}1\le y\le 2,\\ 0\le x\le y-1\end{cases}$. Вычислить повторный интеграл $J=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{y-1}(x+2y)\,dx$.

Решение. $$J=\int\limits_1^2\left[\frac{x^2}{2}+2yx\right]\Bigg|_0^{y-1}dy=\int\limits_1^2\left[\frac{(y-1)^2}{2}+2y(y-1)\right]dy=$$

$$=\left[\frac{(y-1)^3}{6}+\frac{2}{3}y^3-y^2\right]\Bigg|_1^2=\left(\frac{1}{6}+\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{33}{6}-4+\frac{1}{3}=\frac{35}{6}-4=\frac{11}{6}.$$

Замечаем, что значения различных повторных интегралов функции по области оказались равными.

Доказано (см. [1]) **утверждение**:

если $f(x,y)$ непрерывна на D, $D\subset R^2$; область D является правильной в направлении осей координат, то значение двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ совпадает со значением соответствующего повторного интеграла, причем результат *не зависит от порядка интегрирования*, т.е.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Примеры:

Вычислить интегралы.

$\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)\,dy$. ∫01dx∫01(x+y)dy.

Решение.

$\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)\,dy=\int_0^1 \left(\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1\right)dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-0\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1.$ ∫01dx∫01(x+y)dy=∫01((xy+y22)|01)dx=∫01(x+12−0)dx=(x22+12x)|01=12+12−0=1.

Ответ: 1.

$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\,dr$. ∫02πdφ∫0ar2sin2φdr.

Решение.

$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\,dr=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^2\sin^2\varphi\,dr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi\frac{r^3}{3}\Big|_0^a\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\left(\frac{a^3}{3}-0\right)d\varphi=$ ∫02πdφ∫0ar2sin2φdr=∫02π(∫0ar2sin2φdr)dφ=∫02π(sin2φr33|0a)dφ=∫02πsin2φ(a33−0)dφ=

$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{2}2\pi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi-0\right)=\frac{a^3\pi}{3}.$ =a33∫02π1−cos2φ2dφ=a33(12φ−14sin2φ)|02π=a33(122π−14sin4φ−0)=a3π3.

Ответ: $\frac{a^3\pi}{3}$. a3π3.

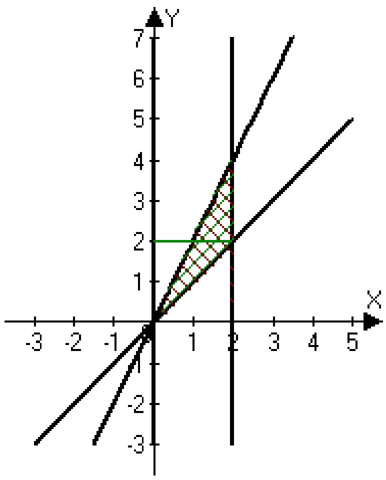
Какой знак имеет интеграл $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$; ∬|x|+|y|≤1ln(x2+y2)dxdy;

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$. ∫02dx∫x2xf(x,y)dy.

Решение.

Сделаем рисунок интегрируемой области:



Область интегрирования ограничена прямыми $y=x, y=2x$ y=x,y=2x и $x=2.$ x=2. Заметим, что в этой области если y y меняется от 0 0 до $2,$ 2, то координата x x меняется от прямой $y=2x$ y=2x (или $x=\frac{y}{2}$ x=y2) до $y=x.$ y=x. Если же y y меняется от 2 2 до $4,$ 4, то координата x x меняется от прямой $y=2x$ y=2x ($x=\frac{y}{2}$ x=y2) до $x=2.$ x=2. Таким образом,

$\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy=\int_0^2 dy\int_{y/2}^{x} dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} dx.$ ∫02dx∫x2xf(x,y)dy=∫02dy∫y2xdx+∫24dy∫y22dx.

Ответ: $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy=\int_0^2 dy\int_{y/2}^{x} dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} dx.$ ∫02dx∫x2xf(x,y)dy=∫02dy∫y2xdx+∫24dy∫y22dx.

1. $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$. ∫12dx∫2−x2x−x2f(x,y)dy.

2. Вычислить интеграл $\iint_\Omega xy^2dxdy,$ ∬Ωxy2dxdy, если область ΩΩ ограничена параболой $y^2=2px$y2=2px и прямой $x=p/2(p>0).$x=p/2(p>0).

3. В двойном интеграле $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$∬Ωf(x,y)dxdy перейти к полярным координатам rr и $\varphi,$φ, полагая $x=r\cos\varphi$x=rcosφ и $y=r\sin\varphi,$y=rsinφ, расставить пределы интегрирования, если $\Omega-$Ω− кольцо $a^2\le x^2+y^2\le b^2.$a2≤x2+y2≤b2.

4. Перейти к полярным координатам, rr и $\varphi,$φ, полагая $x=r\cos\varphi$x=rcosφ и $y=r\sin\varphi,$y=rsinφ, и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующем интеграле: $\int_0^1dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy.$∫01dx∫1−x1−x2f(x,y)dy.

5. Предполагая, что rr и $\varphi,$φ, - полярные координаты, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}f(\varphi,r)dt(a>0).$∫−π/2π/2dφ∫0acosφf(φ,r)dt(a>0).

6. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$∬x2+y2≤a2x2+y2dxdy.

7. Вместо xx и yy ввести новые переменные uu и vv определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах $\int_0^2dx\int_{-x}^{2-x}f(x,y)dy,$∫02dx∫1−x2−xf(x,y)dy, если $u=x+y,v=x-y.$u=x+y,v=x−y.

8. Произведя соответствующие замены переменных, свести двойные интегралы к однократным: $\iint_\Omega f(xy)dxdy,$∬Ωf(xy)dxdy, где область ΩΩ ограничена кривыми $xy=1,xy=2,y=x,y=4x(x>0,y>0).$xy=1,xy=2,y=x,y=4x(x>0,y>0).

Практическая работа № 20

Тема: Вычисление тройных интегралов. Решение задач на приложение двойных, тройных интегралов

Цель: Научиться вычислять тройные интегралы

Теоретический блок отработаем технику решения произвольных тройных интегралов $\iiint_T f(x;y;z)dxdydz$, у которых подынтегральная функция трёх переменных $u=f(x;y;z)$ в общем случае отлична от константы и непрерывна в области T; а также познакомимся с физическими приложениями тройного интеграла

$u=f(x;y;z)$.

Пример 13

Вычислить тройной интеграл

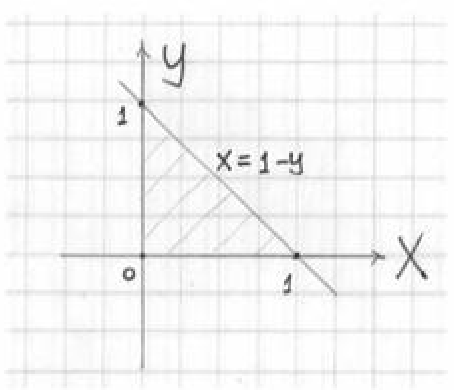
$$\iiint_T 15(y^2+z^2)dxdydz$$

$$T: z=x+y;\ x+y=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$$

На практике тело также обозначают буквой V, но это всё-таки не очень хороший вариант, ввиду того, она «зарезервирована» под обозначение объёма.

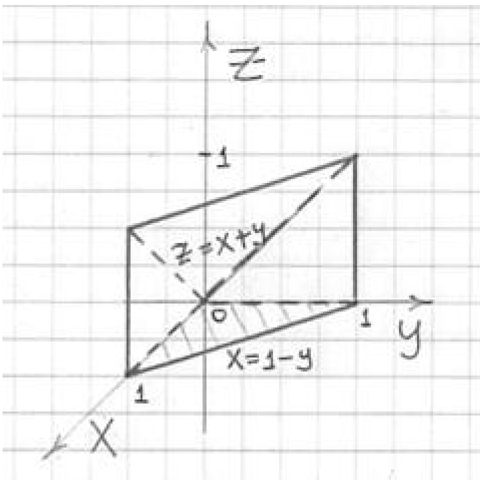
Не нужно представлять интеграл в виде $\iiint_T 15(y^2+z^2)dxdydz=15\iiint_T y^2dxdydz+15\iiint_T z^2dxdydz$. Хотя если очень хочется, то можно. В конце концов, есть и небольшой плюс – запись будет хоть и длинной, но зато менее загромождённой. Но такой подход всё-таки не стандартен.

В алгоритме **решения** новизны будет немного. Сначала нужно разобраться с областью интегрирования. Проекция тела на плоскость XOY представляет собой до боли знакомый треугольник:



Сверху тело ограничено плоскостью $z = x + y$, которая проходит через начало координат. Предварительно, к слову, нужно **обязательно проверить** *(мысленно либо на черновике)*, не «срезает» ли эта плоскость часть треугольника. Для этого находим её линию пересечения с координатной плоскостью XOY, т.е. решаем простейшую систему: $\begin{cases} z = x + y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ – нет, данная прямая *(на чертеже отсутствует)* «проходит мимо», и проекция тела на плоскость XOY действительно представляет собой треугольник.

Не сложен здесь и пространственный чертёж:



В действительности можно было ограничиться только им, поскольку проекция очень простая. …Ну, или только чертежом проекции, так как тело тоже простое =) Однако совсем ничего не чертить, напоминаю – плохой выбор.

Выберем следующий порядок обхода тела:

$$\begin{aligned} &0 \le z \le x + y \\ &0 \le x \le 1 - y \\ &0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

И перейдём к повторным интегралам:

$$\iiint_T 15(y^2 + z^2)\,dxdydz = 15\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} (y^2 + z^2)\,dz$$

Актуализируем следующее элементарное правило:

Когда функция $u = f(x;y;z)$ интегрируется по какой-либо переменной, то два других аргумента считаются константами. То есть принцип точно такой же, как и при нахождении частных производных от функции трёх переменных, что естественно.

Разбираемся с интегралами:

1)

$$\int\limits_0^{x+y}(y^2+z^2)dz \overset{(1)}{=} \left(y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x+y} \overset{(2)}{=} y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}-\left(y^2\cdot 0+\frac{0^3}{3}\right)=y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}$$

(1) При интегрировании по «зет» x и y считаются константами. В данном случае присутствует только «игрек», но это не меняет дела. Советую всегда мысленно либо на черновике выполнять проверку. Найдём частную производную по «зет»:

$$\left(y^2z+\frac{z^3}{3}\right)'_z = y^2\cdot(z)'_z+\frac{1}{3}\cdot(z^3)'_z = y^2\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 3z^2 = y^2+z^2$$

, что и требовалось проверить.

(2) Теперь используем формулу Ньютона-Лейбница: сначала ВМЕСТО «зет» подставляем верхний предел интегрирования $(x+y)$, затем – нижний предел (ноль). В результате буквы «зет» остаться не должно!

Сносим трофей в следующий интеграл. По существу, решение свелось к двум переменным и к двойному интегралу:

2) $$\int\limits_0^{1-y}\left(y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}\right)dx \overset{(1)}{=} y^2\int\limits_0^{1-y}(x+y)dx+\frac{1}{3}\int\limits_0^{1-y}(x+y)^3dx \overset{(2)}{=}$$

$$= y^2\int\limits_0^{1-y}(x+y)d(x+y)+\frac{1}{3}\int\limits_0^{1-y}(x+y)^3d(x+y) \overset{(3)}{=} y^2\cdot\frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_0^{1-y}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(x+y)^4\Big|_0^{1-y} \overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{y^2}{2}((1-y+y)^2-(0+y)^2)+\frac{1}{12}((1-y+y)^4-(0+y)^4)=\frac{y^2}{2}(1-y^2)+\frac{1}{12}(1-y^4)=$$

$$=\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2}+\frac{1}{12}-\frac{y^4}{12}=\frac{1}{12}+\frac{y^2}{2}-\frac{7y^4}{12}$$

(1) Используем свойства линейности интеграла, принимая во внимание тот факт, что «игрек» считается константой. Следует отметить, что не возбраняется оставить интеграл единым, раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, но это менее рациональный способ (можете попробовать).

(2) Используем метод подведения под знак дифференциала. Если рассуждения воспринимаются совсем тяжело, мысленно замените «игрек» каким-нибудь конкретным числом, например, «пятёркой».

(3) Интегрируем по «икс» и выполняем проверку:

$$\left(\frac{y^2}{2}(x+y)^2+\frac{1}{12}(x+y)^4\right)'_x=\frac{y^2}{2}((x+y)^2)'_x+\frac{1}{12}((x+y)^4)'_x=$$

$$=\frac{y^2}{2}\cdot 2(x+y)\cdot(x+y)'_x+\frac{1}{12}\cdot 4(x+y)^3\cdot(x+y)'_x=y^2(x+y)(1+0)+\frac{1}{3}(x+y)^3(1+0)=y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}$$

(4) Используем формулу Ньютона-Лейбница. Сначала вместо «икс» *(переменной, по которой проводилось интегрирование)* подставляем $1-y$, затем – ноль. После подстановок буквы «икс» остаться не должно!

Причёсываем результат и сносим его в последний интеграл, не теряя находящуюся там константу:

3) $$15\int\limits_0^1\left(\frac{1}{12}+\frac{y^2}{2}-\frac{7y^4}{12}\right)dy=15\left(\frac{y}{12}+\frac{y^3}{2\cdot 3}-\frac{7y^5}{12\cdot 5}\right)\Bigg|_0^1=15\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-\frac{7}{12\cdot 5}-(0+0-0)\right)=$$

$$=15\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12\cdot 5}\right)=\frac{15}{4}-\frac{7}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Ответ: $\iiint\limits_T 15(y^2+z^2)dxdydz=2$

Результат безразмерен – просто число и всё.

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 14

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_T (3x+4y)\,dxdydz$$

$$T: y = x;\ y = 0;\ x = 1;\ z = 5(x^2+y^2);\ z = 0$$

Примерный образец оформления задачи в конце урока.

До сих пор мы рассматривали два способа решения – это проецирование на плоскость XOY и выбор порядка обхода проекции. Но на самом деле комбинаций больше – тело можно спроецировать на любую из 3-х координатных плоскостей и каждую проекцию обойти 2-мя путями. Таким образом, получается 6 способов решения. И логично предположить, что в общем случае некоторые из них проще, а некоторые – труднее.

Наверняка многие обратили внимание, что в Примере №13 я выбрал более редкий порядок обхода проекции, хотя ничто не мешало пойти «обычным» путём. Это не случайность.

В результате нахождения интеграла $\int_0^{x+y}(y^2+z^2)dz$ получена сумма $y^2(x+y)+\frac{(x+y)^3}{3}$, в которой чуть выгоднее считать константой именно «игрек», что при прочих равных условиях *(из уравнения прямой* $x+y=1$ *одинаково легко выразить* $y=1-x,\ x=1-y$*)* упрощает решение. А в некоторых задачах выбор порядка интегрирования и вовсе становится ОЧЕНЬ важным:

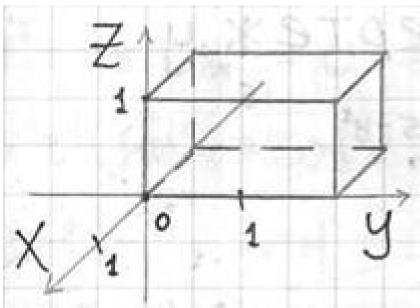
Пример 15

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_T 8y^2ze^{2xyz}\,dxdydz$$

$$T: \begin{array}{lll} x=-1; & y=0; & z=0; \\ x=0; & y=2; & z=1 \end{array}$$

Решение: область интегрирования ограничена шестью плоскостями и представляет собой *прямоугольный параллелепипед*:



У незамысловатых областей можно не обращать внимания на проекцию и придерживаться следующего правила: **обход тела осуществляется в направлениях координатных осей**. Пределы интегрирования здесь очевидны

$$0\le z\le 1,\quad 0\le y\le 2,\quad -1\le x\le 0$$

Но вот с порядком обхода не всё так просто. Если выбрать традиционный путь и сначала интегрировать по «зет», то получается неприятный интеграл

$\int_0^1 8y^2 z e^{2xyz}dz = 8y^2\int_0^1 z e^{2xyz}dz$, который нужно брать по частям. Аналогичная история, если интегрировать по «игрек»: $\int_0^2 8y^2 z e^{2xyz}dy = 8z\int_0^2 y^2 e^{2xyz}dy$, тут даже дважды по частям.

Наиболее выгодным путём является первоочередное интегрирование по «икс», в этом случае переменные z, y, а значит, и множитель $8y^2 z$ считаются константами:

$$\int_{-1}^0 8y^2 z e^{2xyz}dx = 8y^2 z\int_{-1}^0 e^{2xyz}dx = 8y^2 z\cdot\frac{1}{2yz}\int_{-1}^0 e^{2xyz}d(2xyz) = 4y(e^{2xyz})\Big|_{-1}^0 = (*)$$

Перед тем, как подставить пределы интегрирования, не помешает проверка: $(4ye^{2xyz})'_x = 4y(e^{2xyz})'_x = 4ye^{2xyz}\cdot(2xyz)'_x = 4ye^{2xyz}\cdot 2yz\cdot(x)'_x = 8y^2 z e^{2xyz}$ – получена исходная подынтегральная функция.

$$(*) = 4y(e^{2\cdot 0\cdot yz} - e^{2\cdot(-1)\cdot yz}) = 4y(1 - e^{-2yz})$$

Буква «икс» испарилась, как оно и должно быть.

Осталось 2 направления обхода $0\le z\le 1,\ 0\le y\le 2$, и следующий интеграл рациональнее взять по «зет» чтобы множитель $4y$ считался константой:

$$\int_0^1 4y(1-e^{-2yz})dz = 4y\int_0^1(1-e^{-2yz})dz = 4y\left(z + \frac{1}{2y}e^{-2yz}\right)\Big|_0^1 = (*)$$

Промежуточная проверка:

$$\left(4y\left(z+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\right)\right)'_z = 4y\left((z)'_z + \frac{1}{2y}(e^{-2yz})'_z\right) = 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\cdot(-2yz)'_z\right) =$$
$$= 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\cdot(-2y\cdot 1)\right) = 4y(1-e^{-2yz})$$

Гуд.

$$(*) = 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2y\cdot 1} - \left(0+\frac{1}{2y}e^{-2y\cdot 0}\right)\right) = 4y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2y} - \frac{1}{2y}\right) = 4y + 2e^{-2y} - 2$$

В качестве дополнительного контроля снова смотрим, исчезла ли после подстановки переменная, по которой интегрировали («зет»).

И, наконец, оставшееся направление обхода $0\le y\le 2$ и оставшийся интеграл:

$$\int_0^2 (4y + 2e^{-2y} - 2)dy = (2y^2 - e^{-2y} - 2y)\Big|_0^2 = (*)$$

Проверка: $(2y^2 - e^{-2y} - 2y)'_y = 2\cdot 2y - e^{-2y}\cdot(-2y)'_y - 2 = 4y + 2e^{-2y} - 2$

$$(*) = 2\cdot 2^2 - e^{-2\cdot 2} - 2\cdot 2 - (0 - e^0 - 0) = 8 - e^{-4} - 4 + 1 = 5 - e^{-4}$$

При подстановках следует проявлять повышенное внимание, так, например, при подстановке нуля в выражение $2y^2 - e^{-2y} - 2y$ второе слагаемое можно машинально счесть за ноль.

На чистовике, конечно же, не нужно всё расписывать так подробно, анализ порядка интегрирования и промежуточные проверки осуществляются мысленно либо на черновике. Решение оформляется стандартно в 3 пункта, но читатели с хорошим уровнем подготовки могут записать его и «одной строкой»:

$$\iiint\limits_T 8y^2 z e^{2xyz}dxdydz = 8\int_0^2 y^2dy\int_0^1 zdz\int_{-1}^0 e^{2xyz}dx = 8\int_0^2 y^2dy\int_0^1 \frac{1}{2yz}\cdot zdz\int_{-1}^0 e^{2xyz}d(2xyz) =$$

$$= 4\int_0^2 ydy\int_0^1 (e^{2xyz})\Big|_{-1}^0\cdot dz = 4\int_0^2 ydy\int_0^1 (1-e^{-2yz})dz = 4\int_0^2 y\left(z+\frac{1}{2y}e^{-2yz}\right)\Big|_0^1 dy =$$

$$= 4\int_0^2 y\left(1+\frac{1}{2y}e^{-2y}-0-\frac{1}{2y}\right)dy = \int_0^2 (4y+2e^{-2y}-2)dy = (2y^2-e^{-2y}-2y)\Big|_0^2 =$$

$$= 8-e^{-4}-4-(0-1-0) = 5-e^{-4}$$

Ответ: $\iiint\limits_T 8y^2 z e^{2xyz}dxdydz = 5-e^{-4}$

Наверное, это понятно, но на всякий случай закомментирую: буквенные множители-константы следует перемещать справа налево последовательно и без «перескоков» – до тех пор, пока каждая буква «не встретит свой интеграл». Условный пример:

$$\iiint\limits_T xe^y\cos zdxdydz = \int_{\bullet}^{\bullet}dx\int_{\bullet\bullet}^{\bullet\bullet}dy\int_{\bullet\bullet\bullet}^{\bullet\bullet\bullet}xe^y\cos zdz = \int_{\bullet}^{\bullet}dx\int_{\bullet\bullet}^{\bullet\bullet}xe^ydy\int_{\bullet\bullet\bullet}^{\bullet\bullet\bullet}\cos zdz = \int_{\bullet}^{\bullet}xdx\int_{\bullet\bullet}^{\bullet\bullet}e^ydy\int_{\bullet\bullet\bullet}^{\bullet\bullet\bullet}\cos zdz$$

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Пример 16

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_T x^2 z\sin(xyz)dxdydz$$

$$T:\begin{matrix} x=0; & y=0; & z=0; \\ x=2; & y=\pi; & z=1 \end{matrix}$$

Физические приложения тройного интеграла

Рассмотрим неоднородное *(переменной плотности)* тело T. Если известна непрерывная в области T функция $\rho(x;y;z)$ плотности тела, то его масса равна следующему тройному интегралу:

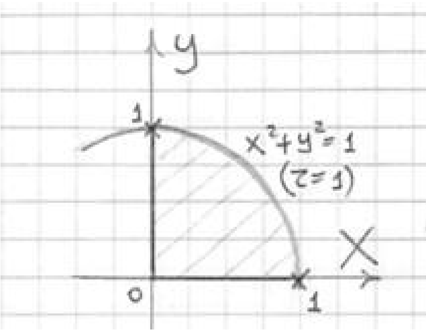
$$m = \iiint\limits_T \rho(x;y;z)dxdydz$$

Возможно, не всем понятен смысл функции плотности. Поясняю: если взять произвольную точку $(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащую телу T, то значение функции $\rho_0 = \rho(x_0;y_0;z_0)$ будет равно плотности тела в данной точке.

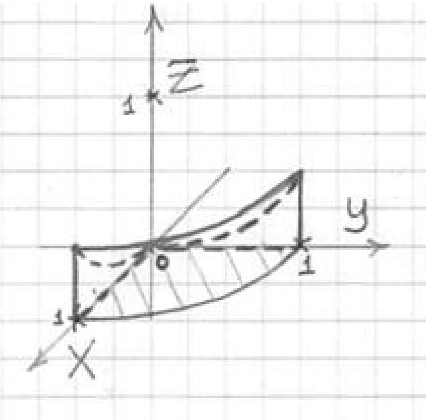
Пример 17

Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=2z;\ z=0;\ x\ge 0;\ y\ge 0$, если известна функция его плотности $\rho(x;y;z)=10x$.

Решение: искомое тело ограничено цилиндром $x^2+y^2=1$ сбоку, эллиптическим параболоидом $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ – сверху и плоскостью $z=0$ – снизу. Дополнительные условия $x\ge 0, y\ge 0$ «загоняют нас» в 1-й октант, и проекция тела на плоскость XOY представляет собой соответствующую «четвертинку» единичного круга:



Аналитическим методом уточним высоту, на которой параболоид пересекает цилиндр: $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow 2z=1 \Rightarrow z=\dfrac{1}{2}$ и выполним пространственный чертёж:



Проекция сразу же наводит на мысль о переходе к цилиндрической системе координат:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$
$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow z = \frac{r^2}{2}$$
$$\rho(x;y;z) = 10x \Rightarrow \rho(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = 10r\cos\varphi$$

Порядок обхода тела очевиден:

$$0 \le z \le \frac{r^2}{2}$$
$$0 \le r \le 1$$
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Таким образом:

$$m = \iiint\limits_T \rho(x;y;z)\,dxdydz = \iiint\limits_T 10r\cos\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = 10\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{r^2}{2}} dz$$

Вычисления элементарны:

1) $\int\limits_0^{\frac{r^2}{2}} dz = (z)\Big|_0^{\frac{r^2}{2}} = \frac{r^2}{2} - 0 = \frac{r^2}{2}$

2) $\int\limits_0^1 \frac{r^2}{2} \cdot r^2 dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 r^4 dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(r^5)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}(1-0) = \frac{1}{10}$

3) $10 \cdot \frac{1}{10}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = (\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

Ответ: $m = 1$ *ед. массы*

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 18

Вычислить массу неоднородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2;\ z^2 = x^2 + y^2;\ y \ge 0$, если известна функция его плотности $\rho(x;y;z) = 70yz$.

Краткое решение в конце урока

И старая песня о главном:

Центр тяжести тела

Подобно тому, как задача о вычислении центра тяжести плоской фигуры вычислялась с помощью двойного интеграла, задача об отыскании *центра тяжести* тела решается аналогичным способом с помощью тройного интеграла.

Что такое центр тяжести тела, довольно удачно объяснил ещё Архимед. Если тело подвесить на нить за центр тяжести, то оно будет сохранять равновесие в любом положении (как бы мы его предварительно ни повернули). В известной степени не реализуемо (таки центр тяжести внутри тела), но зато очень понятно. И вполне в стиле древнегреческого учёного, который просил дать ему точку опоры, чтобы с помощью рычага перевернуть Землю.

Центр тяжести $M(x_0;y_0;z_0)$ неоднородного тела T рассчитывается по формулам:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_T x\rho(x;y;z)dxdydz}{m},\quad y_0 = \frac{\iiint\limits_T y\rho(x;y;z)dxdydz}{m},\quad z_0 = \frac{\iiint\limits_T z\rho(x;y;z)dxdydz}{m},$$

где $\rho(x;y;z)$ – функция плотности тела, а $m = \iiint\limits_T \rho(x;y;z)dxdydz$ – масса тела.

Если тело однородно (золотое, серебряное, платиновое и т.д.), то формулы упрощаются. Так как плотность $\rho = const$ постоянна, и масса $m = \rho V$ – есть произведение плотности на объём, получаем:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_T xdxdydz}{V},\quad y_0 = \frac{\iiint\limits_T ydxdydz}{V},\quad z_0 = \frac{\iiint\limits_T zdxdydz}{V}$$

, а объём тела рассчитывается *(ещё не забыли? =))* с помощью тройного интеграла $V = \iiint\limits_T dxdydz$.

Для центра тяжести однородного тела справедливы следующие утверждения:

– если у тела есть центр симметрии, то он является центром тяжести *(простейший пример – центр шара)*;

– если у тела существует линия симметрии, то центр тяжести обязательно принадлежит данной линии;

– если у тела есть плоскость симметрии, то центр тяжести непременно лежит в этой плоскости.

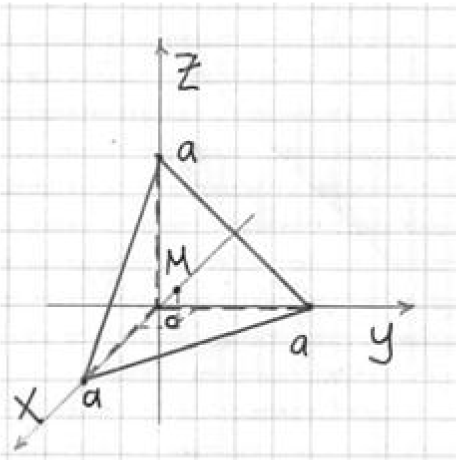
Как видите, практически полная аналогия с центром тяжести плоской фигуры.

Ну и, само собой, не могу не порадовать вас заключительной задачей:

Пример 19

Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=a\ (a>0)$, $x=0,\ y=0,\ z=0$. Выполнить чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY.

Решение: искомое тело ограничено координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=a$, которую в целях последующего построения удобно представить в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Выберем «а» за единицу масштаба и выполним трёхмерный чертёж:

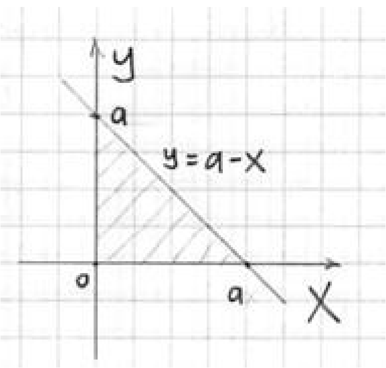


На чертеже уже поставлена готовая точка центра тяжести, однако, пока мы её не знаем.

Проекция тела на плоскость XOY очевидна, но, тем не менее, напомню, как её найти аналитически – ведь такие простые случаи встречаются далеко не всегда. Чтобы найти прямую, по которой пересекаются плоскости $x+y+z=a,\ XOY\ (z=0)$ нужно решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ z=0 \end{cases}$$

Подставляем значение $z=0$ в 1-ое уравнение: $x+y+0=a$ и получаем уравнение $x+y=a$ «плоской» прямой:



Координаты $x_0; y_0; z_0$ центра тяжести M тела T вычислим по формулам $x_0 = \dfrac{\iiint\limits_T x dxdydz}{V}$, $y_0 = \dfrac{\iiint\limits_T y dxdydz}{V}$, $z_0 = \dfrac{\iiint\limits_T z dxdydz}{V}$, где $V = \iiint\limits_T dxdydz$ – объём тела.

Выберем «классический» порядок обхода:

$$\begin{aligned} &0 \le z \le a - x - y \\ &0 \le y \le a - x \\ &0 \le x \le a \end{aligned}$$

1) Сначала вычислим объём тела. Его, кстати, можно узнать заранее, пользуясь известной задачей геометрии об объёме тетраэдра. Объём тетраэдра равен 1/6-ой объёма прямоугольного параллелепипеда, построенного на его 3-х смежных рёбрах. В нашем случае параллелепипед представляет собой куб с ребром «а», и соответственно: $V_{тетраэдра} = \frac{1}{6}a^3$

Осталось аккуратно провести чистовые вычисления (желающие могут потренироваться и выполнить их самостоятельно). В примерах с громоздкими преобразованиями рекомендую записывать решение столбиком – меньше шансов запутаться:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y) dy =$$

$$= \int_0^a \left(ay - xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{a-x} dx =$$

$$= \int_0^a \left(a(a-x) - x(a-x) - \frac{(a-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= a\int_0^a (a-x)dx - \int_0^a (ax - x^2)dx - \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2 dx =$$

$$= -\frac{a}{2}(a-x)^2\Big|_0^a - \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a + \frac{1}{6}(a-x)^3\Big|_0^a =$$

$$= -\frac{a}{2}(0 - a^2) - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} - 0 \right) + \frac{1}{6}(0 - a^3) =$$

$$= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{6}$$

Дело за тремя тройными интегралами. ...А вы, наверное, не так давно и представить себе не могли, что окажетесь в эпицентре такого кошмара =)

2) Вычислим «иксовый» интеграл:

$$\iiint\limits_V x\,dxdydz = \int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz =$$

$$= \int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} (a-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^a x\left(ay - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a-x} dx =$$

$$= \int_0^a x\left(a(a-x) - x(a-x) - \frac{(a-x)^2}{2}\right) dx =$$

$$= a\int_0^a (ax - x^2)\,dx - \int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3)\,dx =$$

$$= a\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a - \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4}\right) =$$

$$= \frac{a^4}{6} - \frac{a^4}{12} - \frac{a^4}{24} = \frac{a^4}{24}$$

Таким образом, «иксовая» координата центра тяжести:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_T x\,dxdydz}{V} = \frac{\frac{a^4}{24}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{a}{4}$$

Ну что же, выглядит правдоподобно, по крайне мере, мы «попали внутрь тела».

Ввиду симметрии тетраэдра две другие координаты должны получиться такими же. Теперь ошибочный ответ практически исключён!

3) Следующая «простыня»:

$$\iiint\limits_V y\,dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} y\,dy \int_0^{a-x-y} dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{a-x} y(a-x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^{a-x} (ay - xy - y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{ay^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{a-x} dx =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{a(a-x)^2}{2} - \frac{x(a-x)^2}{2} - \frac{(a-x)^3}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3)\,dx - \frac{1}{3}\int_0^a (a-x)^3\,dx =$$

$$= -\frac{a}{6}(a-x)^3\Big|_0^a - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a + \frac{1}{12}(a-x)^4\Big|_0^a =$$

$$= -\frac{a}{6}(0 - a^3) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4}\right) + \frac{1}{12}(0 - a^4) =$$

$$= \frac{a^4}{6} - \frac{a^4}{24} - \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{24}$$

В результате:

$$y_0 = \frac{\iiint\limits_T ydxdydz}{V} = \frac{\frac{a^4}{24}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{a}{4}$$

4) И заключительный, более короткий интеграл:

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} (z^2)\Big|_0^{a-x-y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} (a-x-y)^2 dy =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^a (a-x-y)^3\Big|_0^{a-x} dx = -\frac{1}{6}\int\limits_0^a (0-(a-x)^3)dx = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\Big|_0^a = -\frac{1}{24}(0-a^4) = \frac{a^4}{24}$$

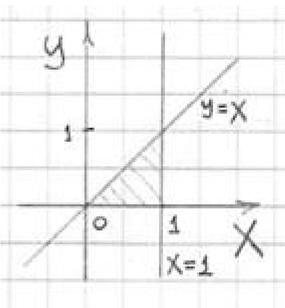
$$z_0 = \frac{\iiint\limits_T zdxdydz}{V} = \frac{\frac{a^4}{24}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{a}{4}$$

Отмечаем на чертеже найденную точку центра тяжести и её же записываем в **ответ**: $M\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right)$

В сферических координатах положение любой точки пространства однозначно определяется одним расстоянием и двумя углами. Более подробную информацию и соответствующие примеры можно найти в учебной литературе.

Решения и ответы:

Пример 14: ***Решение***: *изобразим проекцию данного тела на плоскость* XOY *:*



Сверху тело ограничено эллиптическим параболоидом $z = 5(x^2 + y^2)$. *Выберем следующий порядок обхода:*

$$0 \le z \le 5(x^2 + y^2)$$
$$0 \le y \le x$$
$$0 \le x \le 1$$

Таким образом:

$$\iiint\limits_T (3x+4y)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{5(x^2+y^2)} (3x+4y)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (3x+4y)dy \int\limits_0^{5(x^2+y^2)} dz$$

Примечание: *в «зетовом» интеграле сумма* $(3x+4y)$ *считается константой, поэтому её удобно сразу вынести в следующий интеграл.*

$$1)\quad \int_0^{5(x^2+y^2)} dz = (z)\Big|_0^{5(x^2+y^2)} = 5(x^2+y^2) - 0 = 5(x^2+y^2)$$

$$2)\quad 5\int_0^x (3x+4y)(x^2+y^2)dy = 5\int_0^x (3x^3+4yx^2+3xy^2+4y^3)dy = 5(3x^3y+2y^2x^2+xy^3+y^4)\Big|_0^x =$$

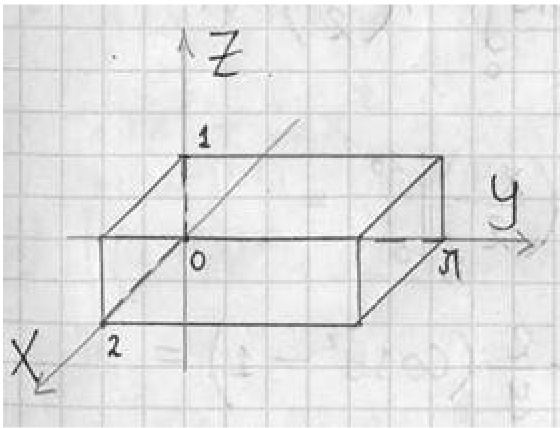
$$= 5(3x^3\cdot x + 2x^2\cdot x^2 + x\cdot x^3 + x^4 - (3x^3\cdot 0 + 2\cdot 0^2\cdot x^2 + x\cdot 0^3 + 0^4)) =$$

$$5(3x^4+2x^4+x^4+x^4) = 5\cdot 7x^4 = 35x^4$$

$$3)\quad 35\int_0^1 x^4dx = 35\cdot\frac{1}{5}(x^5)\Big|_0^1 = 7(1^5-0^5) = 7$$

Ответ: $\iiint\limits_T (3x+4y)dxdydz = 7$

Пример 16: ***Решение***: *выполним чертёж:*



Выберем следующий порядок обхода тела:

$0 \le y \le \pi$

$0 \le z \le 1$

$0 \le x \le 2$

Таким образом:

$$\iiint\limits_T x^2z\sin(xyz)dxdydz = \int_0^2 x^2dx\int_0^1 zdz\int_0^\pi \sin(xyz)dy$$

$$1)\quad \int_0^\pi \sin(xyz)dy = \frac{1}{xz}\int_0^\pi \sin(xyz)d(xyz) = -\frac{1}{xz}\cos(xyz)\Big|_0^\pi = -\frac{1}{xz}(\cos(\pi xz)-1) = \frac{1}{xz}(1-\cos(\pi xz))$$

$$2)\quad \int_0^1 z\cdot\frac{1}{xz}(1-\cos(\pi xz))dz = \frac{1}{x}\int_0^1(1-\cos(\pi xz))dz = \frac{1}{x}\left(z - \frac{1}{\pi x}\sin(\pi xz)\right)\Big|_0^1 =$$

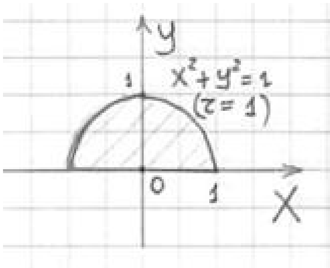
$$= \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\pi x}\sin(\pi x) - (0-0)\right) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\pi x}\sin(\pi x)\right)$$

$$3)\quad \int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\pi x}\sin(\pi x)\right)dx = \int_0^2\left(x-\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2+\frac{1}{\pi^2}\cos 2\pi - \left(0+\frac{1}{\pi^2}\cos 0\right) = 2+\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2} = 2$$

Ответ: $\iiint\limits_T x^2z\sin(xyz)dxdydz = 2$

Пример 18: ***Решение***: *искомое тело ограничено эллиптическим параболоидом* $z = x^2 + y^2$ *снизу и конической поверхностью* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *– сверху; параболоид и конус пересекаются в плоскости* $z = 1$ *по окружности* $x^2 + y^2 = 1$ *(выкладки и чертёж – см. в Примере №9 Поскольку* $y \geq 0$*, то речь идёт о правом (относительно плоскости* XOZ *) полупространстве, и проекцией тела на плоскость* XOY *является верхний полукруг единичного радиуса:*



Массу тела вычислим с помощью тройного интеграла, используя цилиндрическую систему координат:

$$
\begin{aligned}
&x = r\cos\varphi \\
&y = r\sin\varphi \\
&z = z \\
&x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1 \\
&z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2 \\
&z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{r^2} = r \\
&\rho(x; y; z) = 70yz \Rightarrow \rho(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = 70rz\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Порядок обхода тела:

$$
\begin{aligned}
&r^2 \leq z \leq r \\
&0 \leq r \leq 1 \\
&0 \leq \varphi \leq \pi
\end{aligned}
$$

Таким образом:

$$m = \iiint_T \rho(x; y; z)dxdydz = \iiint_T 70rz\sin\varphi \cdot rdrd\varphi dz = 70\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr\int_{r^2}^r zdz$$

1) $\int_{r^2}^r zdz = \frac{1}{2}(z^2)\Big|_{r^2}^r = \frac{1}{2}(r^2 - (r^2)^2) = \frac{1}{2}(r^2 - r^4)$

2) $\frac{1}{2}\int_0^1 (r^2 - r^4)r^2dr = \frac{1}{2}\int_0^1 (r^4 - r^6)dr = \frac{1}{2}\left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} - (0 - 0)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{35} = \frac{1}{35}$

3) $70\cdot\frac{1}{35}\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = -2(\cos\varphi)\Big|_0^\pi = -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = -2\cdot(-2) = 4$

Ответ: $m = 4$ *ед. массы*

Практическое занятие № 21

Тема: Исследование сходимости рядов

Цель: Закрепить у студентов умения находить сходимость рядов

Теоретический блок

Числовые ряды.

Определение. Выражение называется числовым рядом или просто рядом, элементы называются членами данного ряда.

Определение. Сумма конечного числа первых членов ряда называется ой частичной суммой ряда. Обозначим

Рассмотрим последовательность частичных сумм

Определение. Ряд называется сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм этого ряда, т.е. если существует конечный предел последовательности частичных сумм. При этом предел (конечный или бесконечный) последовательности частичных сумм называется суммой ряда.

Примеры.

Задание 1.1. Числовые ряды заданы своими первыми пятью членами. Составить формулу общего члена для каждого ряда.

а) $1+2-3+4-5+\dots$;

б) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\dots$;

в) $-1+4-9+16-25+\dots$;

г) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}$;

д) $1+4+7+10+13+\dots$;

е) $2+6+12+20+30+\dots$.

Задание 1.2. Числовые ряды заданы формулами своих общих членов. Для каждого ряда найти первые пять членов и частичную сумму S_5.

а) $a_n=\frac{n}{2n-1}$;

б) $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$;

в) $a_n=\sin\frac{\pi n}{2}$;

г) $a_n=(-1)^n tg\frac{\pi n}{4}$;

д) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-3}}$.

Задание 1.3. Для данных рядов проверить выполнение необходимого признака сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{12n-3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}6^n$.

<u>Задание на дом.</u>

1. Числовые ряды заданы своими первыми пятью членами. Составить формулу общего члена для каждого ряда.

а) $-3+5-7+9-11+\ldots$;

б) $1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\ldots$;

в) $-1+2-6+24-120+\ldots$.

2. Числовые ряды заданы формулами своих общих членов. Для каждого ряда найти первые пять членов и частичную сумму S_5.

а) $a_n=\frac{n^2}{2n-1}$;

б) $a_n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

3. Для данных рядов проверить выполнение необходимого признака сходимости.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{2n+1}}$.

<u>Занятие 2.</u> Признаки сходимости знакоположительных рядов. Признаки сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши.

Задание 2.1. Исследовать ряды на сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-4}{2n+6}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+1}{2n^2+n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+3}}{2n+5}$.

Задание 2.2. Исследовать ряды на сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^n$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{(n+1)(n+2)}\right)^{n}$.

<u>Задание на дом.</u>

Исследовать ряды на сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3}{(n+1)^2(n+2)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{\cos n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$.

<u>Занятие 3.</u> Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Достаточный признак сходимости. Абсолютная и условная сходимость.

Задание 3.1. Исследовать данные знакопеременные ряды на сходимость. В случае сходимости ряда выяснить её характер.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^2+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+4}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{n^3}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{n(n-3)}{n^2}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}9^{n}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}1^n$.

Задание на дом.

Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot 0{,}5^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 0{,}3^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$.

Занятие 4. **Степенные ряды. Радиус, интервал, и область сходимости степенного ряда.**

Задание 4.1. Найти радиус, интервал и область сходимости степенных рядов.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 5^n}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$.

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^{2n-1}}{2n}$.

Задание на дом.

Найти радиус, интервал и область сходимости степенных рядов.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$.

Занятие 5. **Разложение элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена.**

Рабочие формулы:

Формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},0<\xi<1.$$

где $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ - остаточный член в форме Лагранжа.

Формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Задание 5.1. Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням $x-a$ (до пятого члена разложения включительно).

а) $f(x)=\cos x,\ a=\frac{\pi}{3}$

б) $f(x)=\ln(x+2),\ a=1$

в) $f(x)=e^{2x},\ a=2$

Задание 5.2. Разложить данные функции в ряд Маклорена (до пятого члена разложения включительно).

а) $f(x)=\sin x$

б) $f(x)=e^{x+1}$

в) $f(x)=\sqrt{x+1}$

Практическая работа № 22

Тема: Нахождение области сходимости степенных рядов

Цель: Научиться находить область сходимости степенных рядов

Теоретический блок

Следует хорошо понимать, что такое ряд, уметь применять признаки сравнения для исследования ряда на сходимость. Таким образом, если Вы только-только приступили к изучению темы или являетесь чайником в высшей математике, необходимо последовательно проработать три урока: Ряды для чайников, Признак Даламбера. Признаки Коши и Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Обязательно все три! Если есть элементарные знания и навыки решения задач с числовыми рядами, то справиться с функциональными рядами будет довольно просто, поскольку нового материала не очень и много.

На данном уроке мы рассмотрим понятие функционального ряда (что это вообще такое), познакомимся со степенными рядами, которые встречаются в 99%-х практических заданий, и научимся решать распространенную типовую задачу на нахождение радиуса сходимости, интервала сходимости и области сходимости степенного ряда. Далее можно будет рассмотреть материал о сумме степенного ряда и разложении функций в степенные ряды.

Понятие функционального ряда и степенного ряда

Обычный числовой ряд, вспоминаем, состоит из чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots$$

Все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это ЧИСЛА.

Функциональный же ряд состоит из ФУНКЦИЙ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_4(x)+u_5(x)+\ldots$$

В общий член ряда $u_n(x)$ помимо многочленов, факториалов и других подарков непременно входит буковка «икс». Выглядит это, например, так: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$. Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно расписать в развернутом виде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}=\frac{\sin x}{2\cdot 2^1}+\frac{\sin x}{3\cdot 2^2}+\frac{\sin x}{4\cdot 2^3}+\frac{\sin x}{5\cdot 2^4}+\frac{\sin x}{6\cdot 2^5}+\ldots$

Как видите, все члены функционального ряда $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), u_5(x), \ldots$ – это функции.

Наиболее популярной разновидностью функционального ряда является степенной ряд.

Определение:

Степенной ряд – это ряд, в общий член $u_n(x)$ которого входят целые положительные степени независимой переменной x. Упрощенно степенной ряд во многих учебниках записывают так: $\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$, где c_n – это старая знакомая «начинка» числовых рядов (многочлены, степени, факториалы, зависящие только от «эн»). Простейший пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

Посмотрим на это разложение и еще раз осмыслим определение: члены степенного ряда содержат «иксы» в *целых положительных* (*натуральных*) степенях.

Очень часто степенной ряд можно встретить в следующих «модификациях»: $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-a)^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x+a)^n$, где a – константа. Например: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{n^2}=2(x+2)+\frac{2^2(x+2)^2}{2^2}+\frac{2^3(x+2)^3}{3^2}+\frac{2^4(x+2)^4}{4^2}+\frac{2^5(x+2)^5}{5^2}+\ldots$

Строго говоря, упрощенные записи степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-a)^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x+a)^n$ не совсем корректны. В показателе степени вместо одинокой буквы «эн» может располагаться более сложное выражение, например: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}}{5!}+\ldots$

Или такой степенной ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(x-1)^{3n-2}}{3^n}=\frac{(x-1)}{3}+\frac{\sqrt{2}\cdot(x-1)^4}{3^2}+\frac{\sqrt{3}\cdot(x-1)^7}{3^3}+\frac{\sqrt{4}\cdot(x-1)^{10}}{3^4}+\frac{\sqrt{5}\cdot(x-1)^{13}}{3^5}+\ldots$

Лишь бы показатели степеней при «иксах» были натуральными.

Сходимость степенного ряда.

Интервал сходимости, радиус сходимости и область сходимости

Не нужно пугаться такого обилия терминов, они идут «рядом друг с другом» и не представляют особых сложностей для понимания. Лучше выберем какой-нибудь простой подопытный ряд и сразу начнём разбираться.

Прошу любить и жаловать степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Переменная x может принимать любое действительное значение от «минус бесконечности» до «плюс бесконечности». Подставим в общий член ряда несколько произвольных значений «икс»:

Если $x = 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Если $x = -1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

Если $x = 3$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

Если $x = -\frac{1}{5}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{5^n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 5^n}$

И так далее.

Очевидно, что, подставляя в $\frac{x^n}{n^2}$ то или иное значение «икс», мы получаем различные числовые ряды. Некоторые числовые ряды будут сходиться, а некоторые расходиться. И наша задача найти множество значений «икс», при котором степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ будет сходиться. Такое множество и называется областью сходимости ряда.

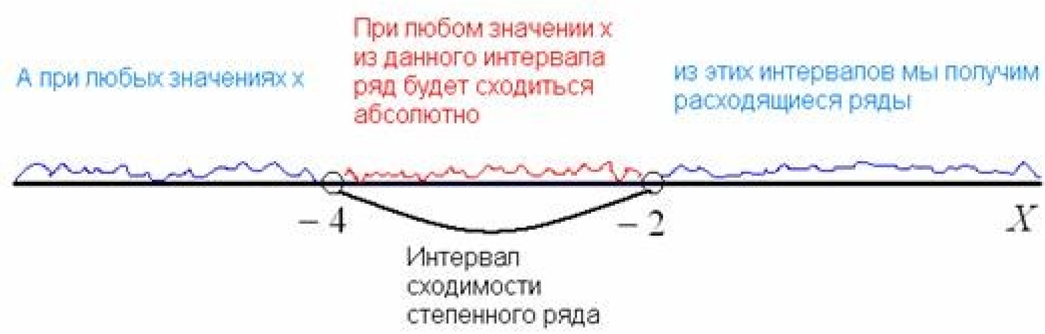
Для любого степенного ряда (временно отвлекаемся от конкретного примера) возможны три случая:

1) Степенной ряд *сходится абсолютно* на некотором интервале $(a;b)$. Иными словами, если мы выбираем любое значение «икс» из интервала $(a;b)$ и подставляем его в общий член степенного ряда, то у нас получается *абсолютно сходящийся* числовой ряд. Такой интервал $(a;b)$ и называется интервалом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости, если совсем просто, это половина длины интервала сходимости:

$$R=\frac{b-a}{2}$$

Геометрически ситуация выглядит так:



В данном случае, интервал сходимости ряда: $(-4;-2)$, радиус сходимости ряда: $R=\frac{-2-(-4)}{2}=\frac{-2+4}{2}=1$

Широко распространен тривиальный случай, когда интервал сходимости симметричен относительно нуля:

Здесь интервал сходимости ряда: $(-3;3)$, радиус сходимости ряда: $R=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$

А что будет происходить на концах интервала $(a;b)$? В точках $x=a$, $x=b$ степенной ряд может, как сходиться, так и расходится, и для выяснения этого необходимо проводить дополнительное исследование. После такого исследования речь идёт уже об области сходимости ряда:

– Если установлено, что степенной ряд расходится на обоих концах интервала, то область сходимости ряда совпадает с интервалом сходимости: $(a;b)$

– Если установлено, что степенной ряд сходится на одном конце интервала и расходится на другом, то область сходимости ряда представляет собой полуинтервал: $[a;b)$ или $(a;b]$.

– Если установлено, что степенной ряд сходится на обоих концах интервала, то область сходимости ряда представляет собой отрезок: $[a;b]$

Термины очень похожи, область сходимости ряда – это чуть более детализированный интервал сходимости ряда.

С двумя оставшимися случаями всё короче и проще:

2) Степенной ряд *сходится абсолютно* при любом значении x. То есть, какое бы значение «икс» мы не подставили в общий член степенного ряда – в любом случае у нас получится *абсолютно сходящийся* числовой ряд. Интервал сходимости и область сходимости в данном случае совпадают: $(-\infty;+\infty)$. Радиус сходимости: $R=+\infty$. Рисунок приводить не буду, думаю, нет необходимости.

3) Степенной ряд сходится в единственной точке. Если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, то он будет сходиться в единственной точке $x=0$. В этом случае интервал сходимости и область сходимости ряда тоже совпадают и равны единственному числу – нулю: $x=0$.

Если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$, то он будет сходиться в единственной точке $x=a$, если ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+a)^n$, то, понятно, – в точке «минус а». Радиус сходимости ряда во всех случаях, естественно, нулевой: $R=0$.

Других вариантов нет. Область сходимости степенного ряда – это всегда либо единственная точка, либо любое «икс», либо интервал $(a;b)$ (возможно полуинтервал, отрезок). Подчеркиваю, что данная классификация справедлива для степенных рядов. Для произвольного функционального ряда она в общем случае является неверной.

Исследование степенного ряда на сходимость

После небольшой порции теоретического материала переходим к рассмотрению типового задания, которое практически всегда встречается на зачетах и экзаменах по высшей математике.

Пример 1

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Задание часто формулируют эквивалентно: Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала.

Алгоритм решения довольно прозрачен и трафаретен.

На первом этапе находим интервал сходимости ряда. В большинстве заданий используется схема, основанная на признаке Даламбера. Технически нам нужно вычислить предел $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$, и с формальной техникой его решения вы уже знакомы:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot x^n}\right| \overset{(3)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2\cdot x\cdot x^n}{(n^2+2n+1)\cdot x^n}\right| \overset{(4)}{=}$$

$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} \overset{(5)}{=} \frac{\infty}{\infty} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n+1}{n^2}} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}} = |x|\cdot 1 = |x|$$

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) В числителе по правилу действий со степенями «отщипываем» один «икс». В знаменателе возводим двучлен в квадрат.

(4) Выносим оставшийся «икс» за знак предела, причем, выносим его вместе со знаком модуля. Почему со знаком модуля? Дело в том, что наш предел $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}$ и так будет неотрицательным, а вот «икс» вполне может принимать отрицательные значения. Поэтому модуль относится именно к нему.

Кстати, почему $|x|$ можно вообще вынести за знак предела? Потому что «динамической» переменной в пределе у нас является «эн», и от этого нашему «иксу» ни жарко ни холодно.

(5) Устраняем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ стандартным способом.

После того, как предел найден, нужно проанализировать, что у нас получилось. Внимание! Вычисленный предел и интерпретацию его результатов *(см. Ниже)* НЕЛЬЗЯ считать или называть «признаком Даламбера». Подчеркну ещё раз, что рассматриваемая схема лишь основана *(не вдаюсь в подробности)* на признаке Даламбера для числовых рядов.

Итак:

Если в пределе получается ноль, то алгоритм решения заканчивает свою работу, и мы даём окончательный ответ задания: «Область сходимости степенного ряда: $-\infty < x < +\infty$» (любое действительное число – случай №2 предыдущего параграфа). То есть, степенной ряд сходится при любом значении «икс». Ответ можно записать эквивалентно: «Ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$» (значок $\in$ в математике обозначает принадлежность).

Если в пределе получается бесконечность, то алгоритм решения также заканчивает свою работу, и мы даём окончательный ответ задания: «Ряд сходится при $x = 0$» (или при $x = 4$ либо $x = -4$»). Смотрите случай №3 предыдущего параграфа.

Если в пределе получается не ноль и не бесконечность, то у нас самый распространенный на практике случае №1 – ряд сходится на некотором интервале.

В данном случае предел равен $|x|$. Как найти интервал сходимости ряда? Составляем неравенство: $|x| < 1$

В ЛЮБОМ задании данного типа в левой части неравенства должен находиться результат вычисления предела, а в правой части неравенства – строго единица. Не буду объяснять, почему именно такое неравенство и почему справа единица. Уроки носят практическую направленность, и уже очень хорошо, что от моих рассказов ~~не повесился профессорско-преподавательский состав~~ стали понятнее некоторые теоремы.

Техника работы с модулем и решения двойных неравенств подробно рассматривалась на первом курсе в статье Область определения функции, но для удобства я постараюсь максимально подробно закомментировать все действия. Раскрываем неравенство с модулем по школьному правилу $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$. В данном случае:

$-1 < x < 1$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Половина пути позади.

На втором этапе необходимо исследовать сходимость ряда на концах найденного интервала.

Сначала берём левый конец интервала $x = -1$ и подставляем его в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$:

При $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Получен числовой ряд, и нам нужно исследовать его на сходимость (уже знакомая из предыдущих уроков задача).

Используем признак Лейбница:
1) Ряд является знакочередующимся.
2) $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится (случай обобщенного гармонического ряда).

Таким образом, полученный числовой ряд сходится абсолютно.

Далее рассматриваем правый конец интервала $x = 1$, подставляем это значение в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$:

При $x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится.

Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится на обоих концах найденного интервала.

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-1 \le x \le 1$

Имеет право на жизнь и другое оформление ответа: Ряд сходится, если $x \in [-1; 1]$

Иногда в условии задачи требуют указать радиус сходимости. Очевидно, что в рассмотренном примере $R=1$.

Пример 2

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot \sqrt{n+1}}$

Решение: интервал сходимости ряда найдём с помощью признака Даламбера *(но не ПО признаку! – для функциональных рядов такого признака не существует)*:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+1+1}}}{\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+1}}{x^n\cdot 3\cdot 3^n\cdot\sqrt{n+2}}\right| = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}} = \frac{|x|}{3}$$

Составляем стандартное неравенство:

Ряд сходится при $\frac{|x|}{3} < 1$

Слева нам нужно оставить только $|x|$, поэтому умножаем обе части неравенства на 3:

$|x| < 3$

И раскрываем неравенство с модулем по правилу $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$:

$-3 < x < 3$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость степенного ряда на концах найденного интервала.

1) При $x=-3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Обратите внимание, что при подстановке значения $x=-3$ в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}$ у нас сократилась степень 3^n. Это верный признак того, что мы правильно нашли интервал сходимости ряда.

Исследуем полученный числовой ряд на сходимость.

Используем признак Лейбница.

– Ряд является знакочередующимся.

– $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно. Вывод: Ряд сходится.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость: $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Сравним данный ряд с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}\right) = 1$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ сходится только условно.

2) При $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – расходится (по доказанному).

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-3 \le x < 3$. При $x = -3$ ряд сходится только условно.

В рассмотренном примере областью сходимости степенного ряда является полуинтервал, причем во всех точках интервала $(-3; 3)$ степенной ряд *сходится абсолютно* (см. Предыдущий параграф), а в точке $x = -3$, как выяснилось – *сходится только условно*.

Пример 3

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{7^n\cdot(n+1)}$

Это пример для самостоятельного решения.

Рассмотрим пару примеров, которые встречаются редко, но встречаются.

Пример 4

Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}$

Решение: с помощью признака Даламбера найдем интервал сходимости данного ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \stackrel{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^3\cdot(x+4)^{2n+3}}{(n+1+1)!}}{\frac{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}}{(n+1)!}}\right| \stackrel{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^3\cdot(x+4)^{2n+3}\cdot(n+1)!}{n^3\cdot(x+4)^{2n+1}\cdot(n+2)!}\right| \stackrel{(3)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{(x+4)^2(x+4)^{2n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{(x+4)^{2n+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)}\right| \stackrel{(4)}{=}$$

$$= (x+4)^2\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)^3\cdot\frac{1}{(n+2)}\right) = (x+4)^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}^{\to 0} = (x+4)^2\cdot 0 = 0$$

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) Кубы $(n+1)^3$ и n^3 по правилу действий со степенями подводим под единую степень. В числителе хитро раскладываем степень $(x+4)^{2n+3}=(x+4)^{2n+1+2}=(x+4)^2\cdot(x+4)^{2n+1}$, т.е. Раскладываем таким образом, чтобы на следующем шаге сократить дробь на $(x+4)^{2n+1}$. Факториалы расписываем подробно.

(4) Под кубом почленно делим числитель на знаменатель, указывая, что $\frac{1}{n}^{\to 0}$. В дроби сокращаем всё, что можно сократить. Множитель $(x+4)^2$ выносим за знак предела, его можно вынести, поскольку в нём нет ничего, зависящего от «динамической» переменной «эн». Обратите внимание, что знак модуля не нарисован – по той причине, что $(x+4)^2$ принимает неотрицательные значения при любом «икс».

В пределе получен ноль, а значит, можно давать окончательный ответ:

Ответ: Ряд сходится при $x\in(-\infty;+\infty)$

А сначала-то казалось, что этот ряд со «страшной начинкой» будет трудно решить. Ноль или бесконечность в пределе – почти подарок, ведь решение заметно сокращается!

Пример 5

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!(x-2)^{n+1}}{10^n}$

Это пример для самостоятельного решения. Будьте внимательны ;-) Полное решение ответ в конце урока.

Рассмотрим еще несколько примеров, содержащих элемент новизны в плане использования технических приемов.

Пример 6

Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$

Решение: В общий член степенного ряда входит множитель $(-1)^{n-1}$, обеспечивающий знакочередование. Алгоритм решения полностью сохраняется, но при составлении предела $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ мы игнорируем (не пишем) этот множитель, поскольку модуль уничтожает все «минусы».

Интервал сходимости ряда найдём с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(3(n+1)-1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+2)(x+2)^n\cdot 5^n(3n-1)}{(x+2)^n\cdot 5\cdot 5^n(3n+2)}\right|=$$

$$=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{3n+2}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n-1}{n}}{\frac{3n+2}{n}}=\frac{|x+2|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{n}^{\to 0}}{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\frac{|x+2|}{5}$$

Составляем стандартное неравенство:

Ряд сходится при $\frac{|x+2|}{5}<1$

Слева нам нужно оставить только модуль, поэтому умножаем обе части неравенства на 5: $|x+2|<5$

Теперь раскрываем модуль уже знакомым способом: $-5<x+2<5$

В середине двойного неравенства нужно оставить только «икс», в этих целях из каждой части неравенства вычитаем 2: $-5-2<x+2-2<5-2$

$-7<x<3$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:

1) Подставляем значение $x=-7$ в наш степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(x+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-7+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-5)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot 5^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1+n}}{(3n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(3n-1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)}$$

Будьте предельно внимательны, множитель $(-1)^{2n-1}$ не обеспечивает знакочередование, при любом натуральном «эн» $(-1)^{2n-1}=-1$. Полученный минус выносим за пределы ряда и забываем про него, поскольку он (как и любая константа-множитель) никак не влияет на сходимость или расходимость числового ряда.

Еще раз заметьте, что в ходе подстановки значения $x=-7$ в общий член степенного ряда у нас сократился множитель 5^n. Если бы этого не произошло, то это бы значило, что мы либо неверно вычислили предел, либо неправильно раскрыли модуль.

Итак, требуется исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)}$. Здесь проще всего использовать предельный признак сравнения и сравнить данный ряд с расходящимся гармоническим рядом. Но, если честно, предельный признак сравнения до ужаса мне надоел, поэтому внесу некоторое разнообразие в решение.

Используем интегральный признак. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{3x-1}=(*)$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$$(*)=\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\frac{d(3x-1)}{3x-1}=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(3x-1)\right)\Big|_1^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(3b-1)^{\to+\infty}-\ln 2\right)=+\infty$$

Таким образом, полученный числовой ряд расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

2) Исследуем второй конец интервала сходимости. При $x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(3+2)^n}{(3n-1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

Используем признак Лейбница:

– Ряд является знакочередующимся.

– $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n-1}=0$ – члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно. Вывод: ряд сходится

Рассматриваемый числовой ряд не является абсолютно сходящимся поскольку $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ – расходится (по доказанному).

Ответ: $-7<x\le 3$ – область сходимости исследуемого степенного ряда, при $x=3$ ряд сходится только условно.

Пример 7

Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Кто утомился, может сходить покурить, а мы рассмотрим еще два примера.

Пример 8

Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах найденного интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}$

Решение: Найдем интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)(x-1)^{2(n+1)}}{9^{n+1}\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}}{\dfrac{n(x-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{2n+2}\cdot 9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}{n(x-1)^{2n}\cdot 9^{n+1}\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)\cdot\frac{(x-1)^2\cdot(x-1)^{2n}\cdot 9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}{(x-1)^{2n}\cdot 9\cdot 9^n\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-1)^2\cdot\sqrt{n^5+3}}{9\cdot\sqrt{(n+1)^5+3}}\right|=\frac{(x-1)^2}{9}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{(n+1)^5+3}}\right)^{\to 1}=\frac{(x-1)^2}{9}$$

Предел $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{(n+1)^5+3}}\right)=1$ по той причине, что числитель и знаменатель *одного порядка роста*. Более подробно об этом моменте и «турбо»-методе решения читайте в статье Признак Даламбера. Признаки Коши.

Итак, ряд сходится при $\frac{(x-1)^2}{9}<1$

Умножаем обе части неравенства на 9: $(x-1)^2<9$

Извлекаем из обеих частей корень, при этом помним старый школьный прикол $\sqrt{a^2}=|a|$:
$\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{9}$
$|x-1|<3$

Раскрываем модуль: $-3<x-1<3$

И прибавляем ко всем частям единицу: $-3+1<x-1+1<3+1$

$-2<x<4$ – интервал сходимости исследуемого степенного ряда.

Исследуем сходимость степенного ряда на концах найденного интервала:

1) Если $x=-2$, то получается следующий числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-2-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{2n}\cdot(3)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(3^2)^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 9^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$$

Множитель $(-1)^{2n}$ бесследно пропал, поскольку при любом натуральном значении «эн» $(-1)^{2n}=1$.

И в третий раз обращаю внимание на то, что в результате подстановки сократились степени 9^n, а значит, интервал сходимости найден правильно.

По всем признакам для полученного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ следует применить предельный признак сравнения. Какой ряд подобрать для сравнения? Об этой методике я уже рассказывал на уроке Ряды для чайников. Повторим.

Определяем старшую степень знаменателя, для этого мысленно или на черновике отбрасываем под корнем всё, кроме самого старшего слагаемого: $\sqrt{n^5}=n^{\frac{5}{2}}$. Таким образом, старшая степень знаменателя равна $\frac{5}{2}$. Старшая степень числителя, очевидно, равна 1. Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя: $\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$.

Таким образом, наш ряд нужно сравнить со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.
Используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3}}{n\cdot\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+3}}{\sqrt{n^2\cdot n^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^5+3}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n^5}^{\to 0}}=1$$

Получено конечное, отличное от нуля число, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

2) Что происходит на другом конце интервала? При $x=4\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(4-1)^{2n}}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3^2)^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 9^n}{9^n\cdot\sqrt{n^5+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$ – сходится.

А вот и вознаграждение за мучения в предыдущем пункте! Получился точно такой же числовой ряд, сходимость которого мы только что доказали.

Ответ: область сходимости исследуемого степенного ряда: $-2\le x\le 4$

Чуть менее сложный пример для самостоятельного решения:

Пример 9

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^{2n}}{n+1}$

Достаточно для начала =)

В заключение остановлюсь на одном моменте. Во всех примерах мы опирались на признак Даламбера и составляли предел $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$. Но всегда ли нужно делать именно так? Почти всегда. Однако в некоторых случаях бывает невероятно выгодно привлечь на помощь радикальный признак Коши и составить предел $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$, при этом алгоритм решения задачи остаётся прежним! Что это за случаи? Это те случаи, когда из общего члена степенного ряда «хорошо» (полностью) извлекается корень «энной» степени.

Следующий урок по теме – Разложение функций в степенные ряды. Примеры решений.

Желаю успехов!

Решения и ответы:

Пример 3: Решение: интервал сходимости ряда найдём с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2x^{n+1}}{7^{n+1}\cdot(n+2)}}{\frac{n^2x^n}{7^n\cdot(n+1)}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x\cdot x^n\cdot 7^n\cdot(n^2+2n+1)(n+1)}{x^n\cdot 7\cdot 7^n\cdot n^2\cdot(n+2)}\right|=$$

$$=\frac{|x|}{7}\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}\right)\cdot\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}}\right)=\frac{|x|}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\frac{|x|}{7}$$

Ряд сходится при $\frac{|x|}{7}<1$

Слева нужно оставить только модуль, поэтому умножаем обе части неравенства на 7 $|x| < 7$

$-7 < x < 7$ *– интервал сходимости исследуемого степенного ряда.*

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.

1) *При* $x = -7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot (-1)^n}{(n+1)}$

2) *Используем признак Лейбница.*

3) *– Ряд является знакочередующимся.*

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n+1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}^{\to 0} + \frac{1}{n^2}^{\to 0}} = \frac{1}{0} = \infty \neq 0$$

– члены ряда не убывают

По модулю.

Вывод: Ряд расходится

2) *При* $x = 7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)}$

Ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Ответ: $-7 < x < 7$ *– область сходимости исследуемого степенного ряда*

Пример 5: Решение: с помощью признака Даламбера найдём интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(2(n+1))! (x-2)^{n+1+1}}{10^{n+1}}}{\frac{(2n)! (x-2)^{n+1}}{10^n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{10^n \cdot (x-2)^{n+2} \cdot (2n+2)!}{10^{n+1} \cdot (x-2)^{n+1} \cdot (2n)!} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{10^n \cdot (x-2)(x-2)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{10 \cdot 10^n \cdot (x-2)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(x-2) \cdot (2n+1)(2n+2)}{10} \right| = \frac{|x-2|}{10} \lim_{n \to +\infty} (4n^2 + 6n + 2)^{\to +\infty} = \frac{|x-2|}{10} \cdot (+\infty) = +\infty$$

Ответ: Ряд сходится при $x = 2$

Почему получилась двойка, а не ноль? Перечитайте классификацию области сходимости степенного ряда. Хотя, наверное, многие уже понимают, почему.

Пример 7: Решение: найдем интервал сходимости данного ряда:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (x+3)^{n+1}}{\sqrt[3]{2(n+1)+1}}}{\frac{2^n \cdot (x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(x+3)(x+3)^n \cdot 2 \cdot 2^n \cdot \sqrt[3]{2n+1}}{(x+3)^n \cdot 2^n \cdot \sqrt[3]{2n+3}} \right| =$$

$$= 2|x+3| \lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n+3}} = \frac{\infty}{\infty} = 2|x+3| \lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{2n+3}{n}}} = 2|x+3| \lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{2 + \frac{1}{n}^{\to 0}}{2 + \frac{3}{n}^{\to 0}}} = 2|x+3|$$

Ряд сходится при $2|x+3|<1$

Слева нужно оставить только модуль, умножаем обе части неравенства на $\frac{1}{2}$*:*

$$|x+3|<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}<x+3<\frac{1}{2}$$

В середине нужно оставить только «икс», вычитаем из каждой части неравенства 3:

$$-\frac{1}{2}-3<x+3-3<\frac{1}{2}-3$$

$-\frac{7}{2}<x<-\frac{5}{2}$ *– интервал сходимости исследуемого степенного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала:*

1) При $x=-\frac{7}{2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{7}{2}+3\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$

Степень 2^n *сократилась, значит, мы на верном пути.*

Используем признак Лейбница.

Ряд является знакочередующимся.

$\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}=0$ *– члены ряда убывают по модулю. Каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, значит, убывание монотонно.*

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$$

Используем интегральный признак.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$$(*)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}d(2x+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)\Big|_1^b=\frac{3}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt[3]{(2b+1)^2}}_{\to+\infty}-\sqrt[3]{9}\right)=+\infty$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$ *сходится только условно.*

2) При $x=-\frac{5}{2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{5}{2}+3\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ *– расходится (по доказанному).*

Ответ: Область сходимости исследуемого степенного ряда: $-\frac{7}{2}<x<-\frac{5}{2}$, *при* $x=-3\frac{1}{2}$ *ряд сходится только условно.*

Область сходимости окончательно можно записать так: $-3\frac{1}{2}\le x<-2\frac{1}{2}$, *или даже так:* $-3{,}5\le x<-2{,}5$.

Примечание: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ *можно было исследовать на сходимость с помощью предельного признака сравнения.*

Пример 9: Решение: Найдем интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}\cdot x^{2(n+1)}}{n+2}}{\frac{2^n\cdot x^{2n}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^2\cdot x^{2n}\cdot 2\cdot 2^n\cdot(n+1)}{x^{2n}\cdot 2^n\cdot(n+2)}\right|=$$

$$=2x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}}=2x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}^{\to 0}}{1+\frac{2}{n}^{\to 0}}=2x^2$$

Ряд сходится при $2x^2<1$

$x^2<\frac{1}{2}$

$|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ *– интервал сходимости исследуемого степенного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала.*

1) При $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(-1)^{2n}\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. *Используем предельный признак сравнения.*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}^{\to 0}\right)=1$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, полученный числовой ряд расходится вместе с гармоническим рядом.

2) При $x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ – *расходится (по доказанному).*

Ответ: область сходимости исследуемого степенного ряда: $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Практическая работа № 23

Тема: Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель работы: Проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения I порядка, находить общее и частное решение.

Теоретическая часть

1. Дифференциальное уравнение *первого порядка*, **содержит**:

1) независимую переменную x;

2) зависимую переменную y (функцию);

3) первую производную функции: y'.

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций** $y=f(x)+C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy'=y$

$y'=\frac{dy}{dx}$.

$x\cdot\frac{dy}{dx}=y$

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения.** Интегрируем обе части:

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$

$\ln|y|=\ln|x|+C$

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y|=\ln|x|+C$ – это общий интеграл.

Вместо записи $\ln|y|=\ln|x|+C$ обычно пишут $\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|$.

В данном случае: $\ln|y|=\ln|Cx|$

$y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций $y = Cx,\ \text{где}\ C = const$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' = y$.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения.

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

$$y = e^{-2x+C^*}$$

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x},\ \text{где}\ C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$: $y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgx dx$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

Решение распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{|\sin x|}\right|$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C,$ где $C = const$

Примечание: общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается.

Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy - 2xdx = 0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2}dy = 2xdx$$

$$e^y dy = \frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2\int xe^{x^2}dx$$

$$\int e^y dy = \int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

общее решение:

$y = \ln(e^{x^2} + C),$ где $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0)=\ln 2$

$$\left.\begin{array}{l}\ln 2=\ln(e^0+C)\\ \ln 2=\ln(1+C)\Rightarrow C=1\end{array}\right|$$

$$y(0)=\ln(e^0+C)=\ln(1+C)=\ln 2\Rightarrow C=1$$

Подставляем найденное значение константы $C=1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y=\ln(e^{x^2}+1)$

Записать вывод

Практическая работа № 24

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка

Цель работы: Проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения II –го порядка, находить общее и частное решение.

Теоретическая часть

2.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$y''+py'+qy=0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y''+py'+qy=f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, *отличным от нуля*.

Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения **необходимо** уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка: $y''+py'+qy=0$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*: $\lambda^2+p\lambda+q=0$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

вместо второй производной записываем λ^2;
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;
вместо функции y ничего не записываем.

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будет использовать готовые формулы.

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных** действительных корня λ_1, λ_2 (т.е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так: $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2e^{\lambda_2 x}$

Пример 5

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \quad \lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **кратных** (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид: $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы. Вместо λ_1 в формуле можно было нарисовать λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2xe^{0\cdot x} = C_1 + C_2x$. Кстати, $y = C_1 + C_2x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$, о котором я упоминал в начале урока. Почему? Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 = 0$ – действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Пример 6

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения: $(\lambda - 3)^2 = 0$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.

Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается: $y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 7

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$D = 4 - 40 = -36$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x),\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 8

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$y'' - 4y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Алгоритм нахождения частного решения следующий:

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$: $y(0) = C_1 e^{-2 \cdot 0} + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2$

Согласно начальному условию, получаем <u>первое уравнение</u>: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$

Далее берём наше общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ и находим производную: $y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x})' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$: $y'(0) = -2C_1 e^{-2 \cdot 0} + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$

Согласно второму начальному условию, получаем <u>второе уравнение</u>: $y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2C_2 = 2$$

$C_2 = 1; C_1 = 0$

Подставим найденные значения констант $C_1 = 0; C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$:

$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Практическое задание:

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$xy' - y = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$tg\, x * y' = 1 + y, \quad если$

$x = \frac{П}{6}; y = -\frac{1}{2}$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$yy' = 2y - x$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' - 4y' + 13y = 0$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' + y' - 2y = 0$

$если \;\; x = 0; y = 1; \; y' = 3$

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$xy' + y = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$(1 - x^2)\frac{dx}{dy} + xy = 0, если \; x = 0, y = 4$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$x^2 + y^2 - 2xy * y' = 0$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' - 4y' + 4y = 0$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' + 4y' - 5y = 0$

$если \;\; x = 0; y = 4; \; y' = 2$

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$yy' + x = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$dy + y\,dyx\,dx = 0, если\ x = 0, y = 1$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$x^2y' = y^2 + xy$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' - 4y = 0$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' - 4y' = 0, x = 0; y = 2;\ y' = 8$

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$x^2y' + y = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$\frac{2x-1}{y+1} = \frac{dx}{dy}, если\ x = 5; y = 0$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$x^2y^2y' + yx^3 = 1$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' + 3y' - 4y = 0$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' - 2y' + y = 0, x = 0; y = 3;\ y' = 7$

Вариант 5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$y' = y$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$(1 + y)dx - (1 - x) = 0, если\ x = 0, y = 1$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' + 4y' = 0$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' + 3y' + 2y = 0, x = 0; y = 1;\ y' = 4$

Вариант 6

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$x^2y' + y = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$2y' = y, если\ x = 0; y = 1$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$(x^2 - 2y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' + 4y = 0$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$y'' - 2y' = 0, x = 0; y = 2;\ y' = 6$

Записать вывод.

Практическая работа № 25

Тема: Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.

Цель работы: научить студентов правилам работы с комплексными числами

Теоретическая часть

1.1.1. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа

Число вида: $z = \alpha + i\beta$ называют комплексными, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, при этом $i^2 = -1$.

α – действительная часть комплексного числа z. Ее обозначают: $\alpha = \mathrm{Re}Z$;

β – количество мнимых единиц, или мнимая часть комплексного числа:

$\beta = \mathrm{Im}Z$

Два комплексных числа считаются равными, если равны в отдельности их действительные и мнимые части, т.е.

$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1;\ \ z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$

$z_1 = z_2,\ если\ \alpha_1 = \alpha_2\ и\ \beta_1 = \beta_2$.

Комплексное число будет равным нулю тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Комплексные числа $z = \alpha + i\beta\ и\ \bar{z} = \alpha - i\beta$, отличающиеся только знаком мнимой части, называют *сопряженными.*

Запись комплексного числа в виде $z = \alpha + i\beta$ принято считать его алгебраической формой.

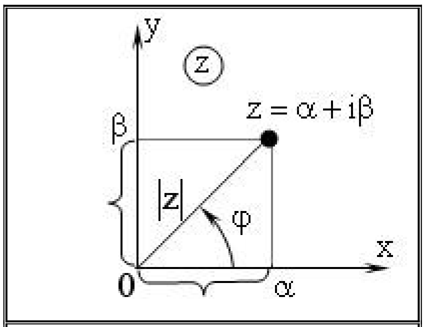


Рис. 1.1.1

Комплексные числа геометрически изображаются точками на плоскости.

Отложим на оси $\overline{Ox}$ отрезок, равный действительной части комплексного числа – α. На оси $\overline{Oy}$ - отрезок, равный числу мнимых единиц β. Точка на плоскости xOy с координатами (α,β) является геометрическим изображением комплексного числа $z = \alpha + i\beta$ (рис. 1.1.1).

При этом ось $\overline{Ox}$ называют действительной осью, так как точки, лежащие на ней, соответствуют действительным числам. Последние можно рассматривать как часть комплексных, у которых β = 0.

Точки, лежащие на оси $\overline{Oy}$, соответствуют чисто мнимым числам $z = i\beta$ у которых α = 0. Поэтому ось $\overline{Oy}$ получила название мнимой оси.

Соединим начало координат на комплексной плоскости с точкой $z = \alpha + i\beta$ (рис. 1.1.1). Получим радиус-вектор $\overline{Oz}\{\alpha, \beta\}$. Модуль радиус-вектора или *длина отрезка*, соединяющего начало координат с точкой $z = \alpha + i\beta$, называют модулем комплексного числа. Он равен:

$$|z| = \sqrt{\alpha_2 + \beta_2}.$$

Модуль комплексного числа является *действительным числом.*

Угол, на который нужно повернуть ось $\overline{Ox}$ в положительном направлении (против часовой стрелки) до совпадения с радиус-вектором $\overline{Oz}$, называют *аргументом* комплексного числа, обозначают:

$$\arg z = \varphi$$

Очевидно, что у одного и того же комплексного числа будет бесчисленное множество аргументов. В самом деле, если к углу φ прибавить целое число оборотов, то положение точки на комплексной плоскости не изменится. Угол φ получил название *главного значения* аргумента комплексного числа. Его обозначают с маленькой буквы:

$$\arg z = \varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha}.$$

Все значения аргумента комплексного числа обозначают с большой буквы:

$Argz = \varphi + 2\pi k$ где k = 0, 1, 2…

Выразим действительную и мнимую части числа $z = \alpha + i\beta$ через его модуль и аргумент

$$\alpha = |z|\cos(\varphi + 2\pi k)$$
$$\beta = |z|\sin(\varphi + 2\pi k)$$

Подставляя значения α и β в алгебраическую форму комплексного числа, получим:

$$z = |z|[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)].$$

Последняя формула является тригонометрической формой комплексного числа

Выражение вида

$$z = |z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}.$$

называют показательной формой комплексного числа.

Итак, комплексное число можно представить в трех формах:

алгебраической $z = \alpha + i\beta$

тригонометрической $z = |z|[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)]$

показательной $z = |z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}$

Пример 1. Представить в алгебраической форме комплексное число

$z = e^{\frac{\pi}{4}}$.

Решение. Комплексное число дано в показательной форме, его модуль $|z| = 1$, аргумент $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Найдем действительную и мнимую части:

$$\alpha = |z|\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta = |z|\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом $e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2. Перейти от алгебраической к показательной форме комплексного числа $z = -i$.

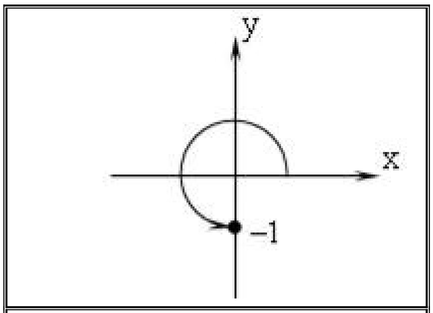


Рис. 1.1.2

Решение. Для данного числа $\alpha = 0$; $\beta = -1$, найдем его модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ (рис. 1.1.2)

Следовательно $-i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$.

Практическая работа № 26

Тема: Действия над комплексными числами

Цель работы: научить студентов правилам работы с комплексными числами

Задачи для самостоятельного решения.

Представить в алгебраической форме комплексные числа:

1. $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 4. $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. $z = e^{i\pi}$ 5. $z = e^{i\frac{3}{2}\pi}$

3. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 6. $z = e^{i}$

Перейти от алгебраической к триногометрической и показательной формам:

7. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ 10. $z = -3\sqrt{3} - 3i$

8. $z = -2\sqrt{3} + 2i$ 11. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

9. $z = 3 - 3\sqrt{3}i$ 12. $z = -3 - 4i$

1.1.2. Действия над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел удобнее проводить, когда они записаны в алгебраической форме, при этом их действительные и мнимые части складываются или вычитаются.

Пример 3. Найти $z_1 - z_2$, если $z_1 = 3 + 5i$; $z_2 = 5 - 3i$

$$z_1 - z_2 = (3 - 5) + i(5 - (-3)) = -2 + 8i.$$

Рассмотрим умножение комплексных чисел в алгебраической форме.

Даны два числа:

$$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$$
$$z_2 = \alpha_2 + i\beta_2.$$

Нужно найти произведение $z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)$.

Перемножим двухчлены по правилам алгебры:

$$z_1 \cdot z_2 = \alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\beta_1\alpha_2 + i^2\beta_1\beta_2,$$

если учесть, что $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$, то получим:

$$z_1 \cdot z_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).$$

Таким образом, умножение комплексных чисел в алгебраической форме проводится по обычным алгебраическим правилам.

Следует отметить, что произведение сопряженных комплексных чисел является действительным числом, в самом деле

$$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 - i^2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Пусть комплексные числа даны в показательной форме

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}; \quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}.$$

Найдем их произведение

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Результат перемножения двух комплексных чисел можно записать в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Итак, при умножении комплексных чисел в показательной и тригонометрической формах модули перемножаются, а аргументы складываются.

Деление комплексных чисел, так же как и умножение, удобнее проводить, когда они записаны в показательной или тригонометрической формах.

Найдем частное от деления двух комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\varphi_1}}{|z_2|e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$ или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Таким образом, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Деление комплексных чисел можно проводить и в алгебраической форме.

Рассмотрим это на примере.

Пример 4. Вычислить $W = \frac{1-i}{1+i}$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное число знаменателю 1 – i:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1^2-i^2} = -\frac{2i}{2} = -i.$$

Такой же результат получается при переходе к показательной форме

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = e^{\frac{6}{4}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}.$$

$$e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ = -i.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить:

1. (2 + 3i) (3 – 5i);
2. (1 + 3 i) (2 + i);
3. (3 + 5 i) (3 – 5 i);
4. $\frac{2+i}{3-5i}$;

При возведении комплексного числа в целую положительную степень в показательной или тригонометрической формах его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на данную степень.

Пусть $z = |z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}$ тогда

$$z^n = \left[|z| \cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}\right]^n = |z|^n \cdot e^{i(n\varphi+2\pi kn)}$$ или

$$z^n = |z|^n \cdot e^{i(n\varphi+2\pi k)}.$$

Запишем результат возведения в целую степень в тригонометрической форме

$$z^n = |z|^n\left[\cos(n\varphi+2\pi k) + i\sin(n\varphi+2\pi k)\right].$$

Эту формулу называют формулой Муавра.

Пример 5. Вычислить $W = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$

Решение. Перейдем к показательной форме. Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1; \quad \varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha} = arctg\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1}$$

$$\varphi = arctg\sqrt{3} = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$$

$$W = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Задачи для самостоятельного решения. Вычислить

1. $(1 - i\sqrt{3})^5$;
2. $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;
3. $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^5}$;
4. $\dfrac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^3}$.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа можно рассматривать как операцию возведения комплексного числа в дробную степень $\dfrac{1}{n}$ т.е. $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

Если комплексное число в тригонометрической форме, то

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right].$$

Придавая k – значения от 0 до n – 1 получим n – различных комплексных чисел, у которых модули одинаковые, а аргументы разные:

При $k = 0$ $\quad \arg\sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi\cdot 0}{n} = \dfrac{\varphi}{n}$

При $k = 1$ $\quad \arg\sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi\cdot 1}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\cdot 1$

При $k = 2$ $\quad \arg\sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\cdot 2$

…………..

При $k = n - 1$ $\quad \arg\sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi\cdot(n-1)}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\cdot(n-1)$

При $k = n$ $\quad \arg\sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi\cdot n}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$

Последнее значение аргумента числа $\sqrt[n]{z}$ совпадает с первым при $k = 0$.

Итак, корень n-ой степени из комплексного числа имеем n – различных значений. При вычислении значений $\sqrt[n]{z}$ пользуются формулами приведения:

$\sin(90^{\circ} + x) = \cos x$;	$\sin(180^{\circ} \pm x) = \pm\sin x$;	$\sin(270^{\circ} \pm x) = -\cos x$;
$\cos(90^{\circ} + x) = -\sin x$;	$\cos(180^{\circ} \pm x) = -\cos x$;	$\cos(270^{\circ} \pm x) = \pm\sin x$;

и таблицей:

Таблица

Радиан		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Градус		30º	45º	60º	90º
sin *x*		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
cos *x*		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	
tg x		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{3}$	-
ctg x	-	$\sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

Пример 6. Найти все значения корня $\sqrt[6]{-1}$.

Действительное число –1 можно рассматривать как комплексное, у которого действительная часть: α = –1, а мнимая β = 0, т.е.:

$z = -1 = -1 + i \cdot 0$

Запишем это число в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент.

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2};\ |-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1.$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha};\ \arg(-1) = \varphi = \mathrm{arctg}\frac{0}{-1} = \mathrm{arctg}0.$$

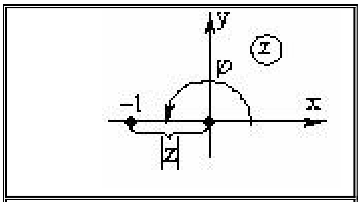


Рис. 1.1.3

Так как tgφ = 0 при φ = 0 и φ = π, построим число «–1» на комплексной плоскости (рис. 1.1.3), его аргумент равен

arg(–1) = φ = π = 180º

следовательно, тригонометрическая форма числа «–1» следующая:

$$-1 = 1\left[\cos(180^\circ + 2\pi k) + i\sin(180^\circ + 2\pi k)\right].$$

Согласно формуле вычисления корня имеем:

$$\sqrt[6]{-1} = 1^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{180^\circ + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{180^\circ + 2\pi k}{6}\right].$$

Корень шестой степени имеет шесть значений, которые можно найти, если положить к равным 0, 1, 2, 3, 4, 5.

При $k = 0$ $\quad \sqrt[6]{-1} = 1(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

При $k = 1$ $\sqrt[6]{-1} = 1(\cos(30° + 60°) + i\sin(30° + 60°)) = i$

При $k = 2$ $$\sqrt[6]{-1} = 1(\cos\underbrace{(30° + 120°)}_{90°+60°} + i\sin\underbrace{(30° + 120°)}_{90°+60°}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

При $k = 3$ $$\sqrt[6]{-1} = 1(\underbrace{\cos(30° + 180°)}_{-\cos 30°} + \underbrace{i\sin(30° + 180°)}_{-\sin 30°}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

При $k = 4$ $$\sqrt[6]{-1} = 1(\cos\underbrace{(30° + 240°)}_{270°} + i\sin\underbrace{(30° + 240°)}_{270°}) = -i$$

При $k = 5$ $$\sqrt[6]{-1} = 1(\cos\underbrace{(30° + 300°)}_{270°+60°} + i\sin\underbrace{(30° + 300°)}_{270°-60°}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

Все шесть значений корня $\sqrt[6]{-1}$ имеют одинаковые модули и отличаются друг от друга только значением аргумента. На комплексной плоскости они расположены в вершинах правильного шестиугольника с центром в начале координат.

Задачи для самостоятельного решения. Найти все значения корня.

1. $\sqrt[3]{-1}$
2. $\sqrt[3]{-1 - i}$
3. $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$
4. $\sqrt{2 - 2i}$
5. $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$
6. $\sqrt[3]{-9}$
7. $\sqrt[3]{1 + i}$
8. $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$

Практическое занятие 1.2. Неопределенный интеграл. Метод подведения под знак дифференциала. Метод замены переменной

Основная литература:

1. Кочеткова, И. А. Математика. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. А. Кочеткова, Ж. И. Тимошко, С. Л. Селезень. — Электрон. текстовые данные. — Минск : Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2018. — 505 c. — 978-985-503-773-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/84874.html
2. Растопчина О.М. Высшая математика [Электронный ресурс] : практикум / О.М. Растопчина. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский педагогический государственный университет, 2017. — 138 c. — 978-5-4263-0534-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72486.html

Дополнительная литература:

1. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html

2. Григорьев В.П. Элементы высшей математики. –М.: ОИЦ «Академия», 2016.