**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**Пятигорский институт (филиал) СКФУ**
**Колледж Пятигорского института (филиал) СКФУ**

# Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине **«МАТЕМАТИКА»**
для студентов направления подготовки /специальности
40.02.04 ЮРИСПРУДЕНЦИЯ

Методические указания для практических работ по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО, предназначены для студентов, обучающихся по специальности 40.02.04 Юриспруденция.

## *Пояснительная записка*

Методические рекомендации призваны оказывать помощь студентам в изучении основных понятий, идей, теорий и положений дисциплины «Математика», изучаемых в ходе конкретного занятия, способствовать развитию их умений, навыков и являются одним из способов проверки знаний студентов.

Выполнение учащимися практических работ направленно на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам;

- формирование умений применять полученные знания на практике и реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач таких профессиональных качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Особое значение дисциплина имеет при формировании и развитии общих компетенций в соответствии с ФГОС:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

В рамках программы общеобразовательной дисциплины осваиваются личностные, метапредметные и предметные результаты в соответствии с требованиями ФГОС среднего общего образования.

**Планируемые результаты освоения дисциплины:** личностные (ЛР), метапредметные (МР), предметные для базового уровня изучения (ПР).

*Личностные включают:*

ЛР 05. Сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности.

ЛР 07. Навыки сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

ЛР 08. Нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей.

ЛР 09. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

ЛР 13. Осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем.

ЛР 14. Сформированность экологического мышления, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды; приобретение опыта эколого-направленной деятельности.

*Метапредметные:*

МР 01. Самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне.

МР 02. Устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения.

МР 03. Определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения.

МР 04. Выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях.

МР 06. Владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем.

МР 07. Способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

МР 08. Овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов.

МР 09. Формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами.

МР 11. Выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения.

*Предметные:*

ПР 01. Владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

ПР 02. Уметь оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений.

ПР 03. Уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы.

ПР 04. Уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях в функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; Строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения.

ПР 05. Умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами.

ПР 06. Умение решать текстовые задачи различных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученные решения и оценивать правдоподобность результатов.

ПР 07. Умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств.

ПР 08. Умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятность реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях.

ПР 09. Умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, в пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира.

ПР 10. Умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники.

ПР 11. Умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач.

ПР 12. Умение вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы.

ПР 13. Умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками.

ПР 14. Умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий Российской и мировой математической науки.

При проведении практических работ учебная группа может делиться на подгруппы численностью не меньше 8 человек.

Каждая практическая работа составлена с ведущей дидактической целью - формирование практических умений.

Содержание практических работ нацелено и на развитие профессиональных умений и навыков. Выполнение расчётов, чертежей, инструктивными материалами, справочниками, умение пользоваться современными информационно-коммуникационными технологиями. Наряду, с формированием умений и навыков, в процессе выполнения практических работ обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

В данных методических указаниях в начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения для закрепления материала.

## Практическая работа №1

**Тема 1.1** Цели и задачи математики при освоении специальности. Числа и вычисления

**Цель:** Определение основных целей и задач изучения математики при освоении профессии; актуализация и систематизация основных знаний из школьного курса математики

**Теоретическая часть**:

Главная особенность образовательной системы заключается в том, что основной целью, стоящей перед учебными заведениями системы среднего профессионального образования, является подготовка высококвалифицированного специалиста в данной области.

Цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях состоит в том, чтобы углубить знания по изученным в средней школе разделам и ознакомиться с некоторыми новыми разделами математики (аналитической геометрией, теорией дифференциальных уравнений, теорией вероятностей, и др.), которые обогащают общую культуру, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный специалист в своей деятельности. Главная цель изучения математики студентами средних профессиональных учебных заведений состоит в том, чтобы математику можно было применять. Имеются в виду применения в самом широком плане: не только на производстве, но и в других дисциплинах, при чтении специальной и популярной литературы, в быту; кроме того, основные математические понятия позволяют глубже осмысливать различные факты, видеть их общие черты; навыки разумной точности могут помочь формулировать мысли и. т. д.

- Обучения математике должно обладать свойствам фундаментальности. Цель обеспечения фундаментальной математической подготовки в среднем профессиональном образовании и специализации, по которой происходит обучение, состоит в том, что курс математики должен ознакомить студентов с основополагающими математическими понятиями и фактами, обеспечить уровень математических знаний, умений и навыков, гарантирующих овладение фундаментом специальных дисциплин.

- Вторая цель - ориентация математической подготовки на специальную подготовку студента, то есть необходимость в процессе обучения ориентироваться на глубокое и полное усвоение студентами разделов математики, являющихся базой для освоения ряда специальных дисциплин. При этом знания студентов по остальным разделам курса должны быть достаточными для освоения профессионально значимых знаний.

- Третья цель математического образования в средних профессиональных учебных заведениях - подготовка студентов к их профессиональной деятельности, направленной на умение будущих специалистов применять математические знания в своей профессиональной деятельности. Для ее реализации следует наполнить профессионально важные разделы курса «Математика» задачами профессионального содержания. Курс математики в среднем профессиональном образовании несет двойную нагрузку — как самостоятельный учебный предмет, в котором должна соблюдаться строгая логическая последовательность изложения материала, и как аппарат для широкого применения его в специальных дисциплинах. Изучение математики в среднем профессиональном образовании направлено на формирование общеучебных компетенций по четырем блокам: самоорганизации, самообучения, информационному, коммуникативному, а на их основе общих компетенций. Общие компетенции (ОК) формируются в процессе учебной и внеаудиторной самостоятельной деятельности студентов при изучении предмета. Программа учебного предмета ориентирована на достижение следующих целей: – обеспечение сформированности представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики; – обеспечение сформированности логического, алгоритмического и математического мышления; – обеспечение сформированности умений применять полученные знания при решении различных задач; – обеспечение сформированности представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления. Главной задачей образования в системе СПО является подготовка высококвалифицированных специалистов, которые должны занять свое место на конкурентном рынке труда.

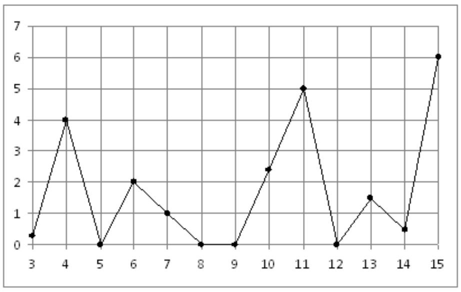
**Вопросы:**

1) Назовите цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях
2) В чем состоит главная задача образования в системе СПО?
3) Приведите примеры использования математики в вашей будущей профессии

**Решение заданий:**

**В1.** Показания счетчика электроэнергии 1 мая составлял 37192 кВт /ч, а 1 июня – 37 292 кВт /ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за май, если 1 кВт /ч электроэнергии стоит 4 руб. 17 коп.?

**В2.** На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 3 миллиметров осадков.

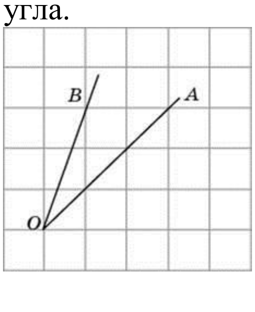



**В3.**Найдите значение выражения $\frac{c}{ab}$ при $a = 0,8$; $b = 1,5$; $c = 0,84$.

**В4.** Для транспортировки 3 тонн груза на 50 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

| **Перевозчик** | **Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 10 км)** | **Грузоподъемность автомобилей (тонн)** |
|---|---|---|
| А | 110 | 2,2 |
| Б | 140 | 2,8 |
| В | 160 | 3,2 |

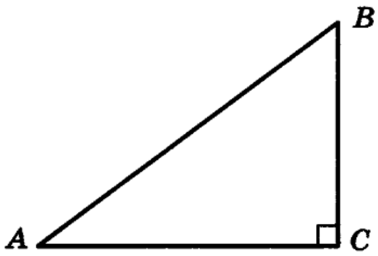
**В5.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1× 1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



**B6.** **Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+31}=9$.**

**B7.** В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

**B8.** **В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos B$.**



**B9.**. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**B10.** **Зависимость объёма спроса $q$ (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены $p$ (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц $r$ (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите цену $p$, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.**

## Практическая работа №2

**Тема 1.2** Выражения и преобразования. Процентные вычисления. Уравнения и неравенства

**Цель:** Обобщение и систематизация знаний, умений, навыков учащихся при выполнении арифметических действий над обыкновенными и десятичными дробями; повторить процентные вычисления; обобщить и систематизировать знания, умения учащихся при решении линейных и квадратичных уравнений и неравенств

**Теоретическая часть:**

Натуральные числа, получаемые при естественном счёте; множество натуральных чисел обозначается N; N = {0, 1, 2, 3, …}.

Целые числа, получаемые объединением натуральных чисел с множеством отрицательных чисел и нулём, обозначаются

Z = {–2, –1, 0, 1, 2, …}.

Рациональные числа — числа, представленные в виде дроби m/n (n ≠ 0), где m — целое число, а n — натуральное число.

Для рациональных чисел определены четыре «классические» арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на ноль).

Для обозначения рациональных чисел используется знак Q. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$.

Действительные (вещественные) числа представляют собой расширение множества рациональных чисел. Множество вещественных чисел обозначается R.

Кроме рациональных чисел, R включает множество иррациональных чисел, не представимых в виде отношения целых. Кроме подразделения на рациональные и иррациональные, действительные числа также подразделяются на алгебраические и трансцендентные. При этом каждое трансцендентное число является иррациональным, каждое рациональное число — алгебраическим.

Иррациональные числа.

1) любое рациональное число изображается бесконечной десятичной дробью;

2) всякое иррациональное число изображается бесконечной десятичной дробью;

3) любое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби;

4) всякая бесконечная десятичная дробь представляет действительное число (обратное утверждение).

| Обозначение (имя) | Что означает имя |
|---|---|
| N | Множество натуральных чисел |
| Z | Множество целых чисел |
| Q | Множество рациональных чисел |
| R | Множество действительных чисел |

**<u>Действия с дробями:</u>**

*1. Сложение.* Суммой дробей с одним и тем же знаменателем называют дробь, имеющую тот же знаменатель, а числитель равен сумме числителей данных дробей, т.е.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$$

Это определение можно сформулировать также в виде следующего правила.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Пример. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$.

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, надо привести их к наименьшему общему знаменателю, а затем сложить полученные числители и под суммой подписать общий знаменатель.

Пример. $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$

Короче записывают так: $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$

Чтобы сложить смешанные числа, нужно отдельно найти сумму целых и сумму дробных частей. Действие записывается так:

$$4\frac{7}{15}+1\frac{11}{45}+8\frac{4}{9}=13\frac{21+11+20}{45}=13\frac{52}{45}=14\frac{7}{45}$$

*2. Вычитание.* Вычитание дробей можно определить как действие, обратное сложению дробей. Вычесть из одного дробного числа второе это значит найти третье число, которое в сумме со вторым дает первое. Из этого определения следует правило:

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и оставить прежний знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Чтобы вычесть дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под их разностью подписать общий знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}$$

Если нужно вычесть одно смешанное число из другого смешанного числа, то, если можно, вычитают дробь из дроби, а целое из целого. Действие записывают так:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=3\frac{36-33}{44}=3\frac{9}{44}$$

Если же дробь вычитаемого больше дроби уменьшаемого, то берут одну единицу из целого числа уменьшаемого, раздробляют ее в надлежащие доли и прибавляют к дроби уменьшаемого, после чего поступают, как описано выше. Действие записывают так:

$$5\frac{4}{9}-1\frac{11}{12}=4\frac{16-33}{36}=3\frac{52-33}{36}=3\frac{19}{36}$$

Аналогично поступают, когда надо вычесть из целого числа дробное.

Пример. $3-2\frac{3}{5}=2\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

*3. Распространение свойств сложения и вычитания на дробные числа.* Все законы и свойства сложения и вычитания натуральных чисел справедливы и для дробных чисел. Их применение во многих случаях значительно упрощает процесс вычисления.

Пример 1.
$$4\frac{3}{4}+1\frac{7}{9}+2\frac{5}{12}+5\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+3\frac{1}{4}=\left(4\frac{3}{4}+3\frac{1}{4}\right)+\left(1\frac{7}{9}+5\frac{2}{9}\right)+$$
$$+\left(2\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)=8+7+3=18.$$

Здесь использованы переместительный и сочетательный законы сложения.

Пример 2.
$$2\frac{7}{720}+\left(3\frac{31}{144}+\frac{53}{720}\right)=\left(2\frac{7}{720}+\frac{53}{720}\right)+3\frac{31}{144}=$$
$$=2\frac{6}{72}+3\frac{31}{144}=5\frac{12+31}{144}=5\frac{43}{144}.$$

Здесь использовано правило прибавления суммы к числу.

Пример 3. $$43\frac{29}{36}-\left(15\frac{11}{36}-4\frac{1}{2}\right)=\left(43\frac{29}{36}-15\frac{11}{36}\right)+4\frac{1}{2}=28\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}=33.$$

Пример 4. $$17\frac{7}{8}-\left(2\frac{3}{5}+6\frac{7}{8}\right)=\left(17\frac{7}{8}-6\frac{7}{8}\right)-2\frac{3}{5}=11-2\frac{3}{5}=8\frac{2}{5}.$$

Здесь использованы правила вычитания из числа разности и суммы.

*4. Умножение.* Умножение дроби на целое число можно понимать так же, как и умножение целого числа на целое, т.е. как сложение одинаковых слагаемых. Например,

$$\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}.$$

Но для умножения на дробь такое толкование не подходит. Например, умножая $\frac{3}{7}$ на $\frac{2}{3}$, нельзя сказать, что здесь " $\frac{3}{7}$ надо взять $\frac{2}{3}$ раза слагаемым".

Здесь необходимо дать новое определение.

Произведением дробей называют такую дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель - произведению их знаменателей, т.е. $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}=\frac{a\cdot b}{m\cdot n}$, чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе - знаменателем: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

При умножении следует делать (если возможно) сокращение.

Пример. $\frac{12}{19}\cdot\frac{19}{30}=\frac{12\cdot 19}{19\cdot 30}=\frac{2}{5}$.

Если учесть, что целое число представляет собой дробь со знаменателем 1, то умножение дроби на целое число и целого числа на дробь можно выполнять поэтому же правилу.

$$\frac{2}{13}\cdot 7=\frac{2}{13}\cdot\frac{7}{1}=\frac{14}{13}=1\frac{1}{13};$$

Примеры. $6\cdot\frac{5}{12}=\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{12}=\frac{30}{12}=2\frac{1}{2}$

*5. Умножение смешанных чисел.* Чтобы перемножить смешанные числа, нужно предварительно обратить их в неправильные дроби и потом перемножать по правилу умножения дробей.

Пример. $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{16}{5}=\frac{80}{10}=8$.

Если же перемножают смешанное число на целое, то проще множить отдельно целую часть и дробную часть.

Пример. $2\frac{3}{5}\cdot 3=6\frac{9}{5}=7\frac{4}{5}$

*6. Распространение свойств умножения на дробные числа.* Свойства умножения натуральных чисел справедливы и для дробей. Их использование упрощает устные и письменные вычисления.

Пример 1. $7\frac{2}{15}\cdot 30=\left(7+\frac{2}{15}\right)\cdot 30=210+4=214$.

Пример 2. $9\frac{7}{8}\cdot 8=9\cdot 8+\frac{7}{8}\cdot 8=72+7=79$.

Пример 3. $\frac{3}{4}\cdot\left(7\frac{9}{31}\cdot 1\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot 7\frac{9}{31}=1\cdot 7\frac{9}{31}=7\frac{9}{31}$.

Пример 4. $\left(12\frac{2}{5}\cdot 43\frac{5}{17}\right)\cdot\frac{5}{31}=\left(\frac{62}{5}\cdot\frac{5}{31}\right)\cdot 43\frac{5}{17}=2\cdot 43\frac{5}{17}=86\frac{10}{17}$.

*7. Деление дробей.* Для деления дробей сохраняется то же определение, что и для деления целых чисел: это - действие посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается второй сомножитель. Разделить одно число на второе - значит найти такое третье число, которое при умножении на второе дает первое. Выполняют деление дробей по следующему правилу.

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй и первое произведение записать числителем, а второе - знаменателем: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Пример. $\frac{6}{7}:\frac{9}{10}=\frac{6\cdot 10}{7\cdot 9}=\frac{60}{63}=\frac{20}{21}$.

По этому же правилу можно выполнять деление дроби на целое число и целого на дробь, если представить целое число в виде дроби со знаменателем 1.

Примеры.

$$15:\frac{5}{7}=\frac{15}{1}:\frac{5}{7}=\frac{15\cdot 7}{1\cdot 5}=\frac{21}{1}=21;$$

$$\frac{8}{13}:2=\frac{8}{13}:\frac{2}{1}=\frac{8\cdot 1}{13\cdot 2}=\frac{4}{13}$$

Однако в последнем примере проще числитель разделить на целое число:

$$\frac{8}{13}:2=\frac{8:2}{13}=\frac{4}{13}$$

*8. Деление смешанных чисел.* Чтобы выполнить деление смешанных чисел, их предварительно обращают в неправильные дроби и затем делят по правилу деления дробей.

Пример. $12\frac{3}{5}:1\frac{1}{20}=\frac{63}{5}:\frac{21}{10}=\frac{63\cdot 20}{5\cdot 21}=12$.

Однако при делении смешанного числа на целое бывает удобней делить отдельно целую часть и отдельно дробную часть смешанного числа.

Пример. $30\frac{5}{7}:5=6\frac{1}{7}$.

*9. Замена деления умножением.* Если в какой-нибудь дроби поменять местами числитель и знаменатель, получится новая дробь, обратная данной. Например, для дроби $\frac{8}{7}$ обратная дробь будет $\frac{7}{8}$.

Очевидно, что произведение двух взаимно обратных дробей равно 1.

$$\frac{8}{7}\cdot\frac{7}{8}=1.$$

Учитывая это, можно деление выполнять по следующему правилу.

Чтобы разделить одно число на другое, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример 1. $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{11}{15}$.

Пример 2. $14:\frac{7}{8}=14\cdot\frac{8}{7}=\frac{14\cdot 8}{7}=16$

Пример 3. $\frac{4}{7}:5\frac{1}{3}=\frac{4}{7}:\frac{16}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{28}$.

*10. Примеры на все действия с обыкновенными дробями.* Решение примеров на все действия с дробями выполняют с помощью записи по отдельным действиям или записи цепочкой.

Пример. Вычислить:

$$\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{21}+\frac{15}{28}:\frac{5}{84}}{5\frac{1}{2}+10}+\frac{2:\frac{1}{2}+3:\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}:2+\frac{1}{3}:3}\cdot\frac{1}{36}-\frac{16}{35}$$

Решение по частям.

1) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{21}=\frac{3\cdot5}{5\cdot21}=\frac{1}{7}$; 3) $\frac{1}{7}+9=9\frac{1}{7}$;

2) $\frac{15}{28}:\frac{5}{84}=\frac{15\cdot84}{28\cdot5}=9$; 4) $5:\frac{1}{2}=10$;

5) $10+10=20$;

6) $9\frac{1}{7}:20=\frac{64}{7\cdot20}=\frac{16}{35}$; 11) $\frac{1}{3}:3=\frac{1}{9}$;

7) $2:\frac{1}{2}=4$; 12) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}$;

8) $3:\frac{1}{3}=9$; 13) $13:\frac{13}{36}=\frac{13\cdot36}{13}=36$;

9) $4+9=13$; 14) $36\cdot\frac{1}{36}=1$;

10) $\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$; 15) $\frac{16}{35}+1-\frac{16}{35}=1$

Ответ. 1.

Пример вычисления цепочкой:

$$\frac{\left(8\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right):3\frac{1}{2}}{\left(5-4\frac{2}{5}\right):10}+\frac{\left(3\frac{1}{8}-1\frac{7}{8}\right)\cdot1\frac{7}{8}}{\left(2-1\frac{3}{8}\right):3\frac{1}{8}}=\frac{7\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}:10}+\frac{1\frac{1}{4}\cdot1\frac{3}{5}}{\frac{5}{8}:3\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10}}+\frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{5}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{25}}=\frac{\frac{15}{7}}{\frac{3}{50}}\cdot\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{5}}+2\cdot5=\frac{250}{7}+10=$$

$$35\frac{5}{7}+10=45\frac{5}{7}$$

**<u>Процентные вычисления.</u>**

Когда мы описываем разные части целого, мы используем такие понятия, как половина (1/2), треть (1/3), четверть (1/4). Это удобно: отрезать половину пирога, пройти треть пути, закончить первую четверть в школе.

Чтобы называть сотые доли, придумали процент (1/100): с латинского языка — «за сто».

Процент — это одна сотая часть от любого числа. Обозначается вот так: %.

1%=1/100=0,01

Как перевести проценты в десятичную дробь? Нужно убрать знак % и разделить число на 100. Например, 18% — это 18 : 100 = 0,18.

А если нужно перевести десятичную дробь в проценты — умножаем дробь на 100 и добавляем знак %. Например:

0,18 = 0,18 · 100% = 18%.

А вот, как перевести проценты в десятичную дробь — обратным действием:

18% : 100% = 0,18.

Выразить дробь в процентах просто. Для перевода сначала превратим ее в десятичную дробь, а потом используем предыдущее правило и переведем десятичную дробь в проценты:

2/5=0,4

0,4·100%=40%

8/25=0,32

0,32·100%=32%

Типы задач на проценты

Тип 1. Нахождение процента от числа

Чтобы найти процент от числа, нужно число умножить на процент.

Задача. Блогер записал 500 видео для тиктока, но его продюсер сказал, что 20% из них — отстой. Сколько роликов придется перезаписать блогеру?

Как решаем: нужно найти 20% от общего количества снятых роликов (500).

20% = 0,2

500 * 0,2 = 100

Ответ: из общего количества снятых роликов продюсер забраковал 100 штук.

Тип 2. Нахождение числа по его проценту

Чтобы найти число по его проценту, нужно его известную часть разделить на то, сколько процентов она составляет от числа.

Задачи по поиску процента по числу и числа по его проценту очень похожи. Чтобы не перепутать — внимательно читаем условия, иначе зайдем в тупик или решим неправильно. Если в задании есть слова «который», «что составляет» и «который составляет» — перед нами задача по нахождению числа по его проценту.

Задача. Школьник решил 40 задач из учебника. Что составляет 16% числа всех задач в книге. Сколько всего задач собрано в этом учебнике?

Как решаем: мы не знаем, сколько всего задач в учебнике. Но нам известно, что 40 задач составляют 16% от общего количества. Запишем 16% в виде дроби: 0,16. Далее известную нам часть целого разделим на ту долю, которую она составляет от всего целого.

40 : 0,16 = 40 · 100 : 16 = 250

Ответ: 250 задач собрано в этом учебнике.

Тип 3. Нахождение процентного отношения двух чисел

Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно ту часть, о которой спрашивается, разделить на общее количество и умножить на 100%.

Задача. В секретном чатике 25 человек. 10 из них — девочки. Сколько процентов девочек в чате?

Как решаем: поделим 10 на 25, полученную дробь переведем в проценты.

$10/25 * 100\% = 2/5 * 100\% = 2 * 100/5 = 40\%$

Ответ: в чатике 40% девочек.

Тип 4. Увеличение числа на процент

Чтобы увеличить число на некоторое количество процентов, можно найти число, которое выражает нужное количество процентов от данного числа, и сложить его с данным числом.

А можно воспользоваться формулой:

$a = b \cdot (1 + c : 100)$,

где $a$ — число, которое нужно найти,

$b$ — первоначальное значение,

$c$ — проценты.

Задача. В прошлом месяце стикерпак стоил 110 рублей. А в этом месяце на 12% больше. Сколько стоит стикер-пак?

Как решаем: можно найти 12% от 110:

$0{,}12 \cdot 110 = 13{,}2$.

Прибавить к исходному числу:

$110 + 13{,}2 = 123{,}2$ рубля.

Или можно воспользоваться формулой, тогда:

$110 \cdot (1 + 12 : 100) = 110 \cdot 1{,}12 = 123{,}2$.

Ответ: стоимость стикерпака в этом месяце — 123 рубля 20 копеек.

Тип 5. Уменьшение числа на процент

Чтобы уменьшить число на несколько процентов, можно найти число, которое выражает нужное количество процентов данного числа, и вычесть его от данного числа.

А можно воспользоваться формулой:

$a = b \cdot (1 - c : 100)$,

где $a$ — число, которое нужно найти,

$b$ — первоначальное значение,

$c$ — проценты.

Задача. В прошлом году школу закончили 100 ребят. А в этом году выпускников на 25% меньше. Сколько выпускников в этом году?

Как решаем: можно найти 25% от 100:

$0{,}25 \cdot 100 = 25$.

Вычесть из исходного числа $100 - 25 = 75$ человек.

Или можно воспользоваться формулой, тогда:

$100 \cdot (1 - 25 : 100) = 75$/p>

Ответ: 75 выпускников в этом году.

Тип 6. Задачи на простые проценты

Простые проценты — метод расчета процентов, при котором начисления происходят на первоначальную сумму вклада или долга.

Формула расчета выглядит так:

$S = a \cdot (1 + y \cdot x : 100)$,

где $a$ — исходная сумма,

S — сумма, которая наращивается,
x — процентная ставка,
y — количество периодов начисления процента.

Задача. Марии срочно понадобились деньги и она взяла на один год в долг 70 000 рублей под 8% ежемесячно. Сколько денег она вернет через год?

Как решаем: подставим в формулу данные из условий задачи.

$70\,000 \cdot (1 + 12 \cdot 8 : 100) = 137\,200$

Ответ: 137 200 рублей вернет Мария через год.

Тип 7. Задачи на сложные проценты

Сложные проценты — это метод расчета процентов, когда проценты прибыли прибавляют к сумме на остатке каждый месяц. В следующий раз проценты начисляют на эту новую сумму.

Формула расчета выглядит так:

$S = a \cdot (1 + x : 100)^y$,

где S — наращиваемая сумма,
a — исходная,
x — процентная ставка,
y — количество периодов начисления процента.

Задача. Антон хочет оформить вклад 10 000 рублей на 5 лет в банке, который дает 10% годовых. Какую сумму снимет Антон через 5 лет хранения денег в этом банке?

Как решаем: просто подставим в формулу данные из условий задачи:

$10000 \cdot (1 + 10 : 100)3 = 13\,310$

Ответ: 13 310 рублей снимет Антон через год.

Способы нахождения процента

– Деление числа на 100

При делении на 100 получается 1% от этого числа. Это правило можно использовать по-разному. Например, чтобы узнать процент от суммы, нужно умножить их на размер 1%. А чтобы перевести известное значение, следует разделить его на размер 1%. Этот метод отлично помогает в вопросе, как перевести целое число в проценты.

Представьте, что вы пришли в магазин за шоколадом. Обычно он стоит 250 рублей, но сегодня скидка 15%. Если у вас есть дисконтная карта магазина, шоколад обойдется вам в 225 рублей. Чем будет выгоднее воспользоваться: скидкой или картой?

Как решаем:

Переведем 15% в рубли:

$250 : 100 = 2{,}5$ — это 1% от стоимости шоколада,

значит $2{,}5 \times 15 = 37{,}5$ — это 15%.

$250 - 37{,}5 = 212{,}5$.

$212{,}5 < 225$.

Ответ: выгоднее воспользоваться скидкой 15%.

– Составление пропорции

Пропорция — определенное соотношение частей между собой.

С помощью метода пропорции можно рассчитать любые %. Выглядит это так:

$a : b = c : d$.

Читается: a относится к b так, как c относится к d. Также важно помнить, что произведение крайних членов равно произведению средних. Чтобы узнать неизвестное из этого равенства, нужно решить простейшее уравнение.

Рассмотрим пример. На сколько выгодно покупать спортивную футболку за 1390 рублей при условии, что в магазине в честь дня всех влюбленных действует скидка 14%?

Как решаем:

Узнаем сколько стоит футболка сейчас в % соотношении:

100 - 14 = 86,

значит 1390 рублей это 86%.

Составим пропорцию:

1390 : 100 = x : 86,

x = 86 * (1390 : 100),

x = 1195,4.

1390 - 1195,4 = 194,6.

Ответ: купить спортивную футболку выгоднее на 194,6 рубля.

– Соотношения чисел

Есть случаи, когда найти процент от числа проще, если представить проценты в виде простых дробей. В таком случае будем искать часть числа.

10% — десятая часть целого. Чтобы найти десять %, понадобится известное разделить на 10.

20% — пятая часть целого. Чтобы вычислить двадцать % от известного, его нужно разделить на 5.

25% — четверть целого. Чтобы вычислить двадцать пять %, понадобится известное разделить на 4.

50% — половина целого. Чтобы вычислить половину, нужно известное разделить на 2.

75% — три четверти целого. Чтобы вычислить семьдесят пять %, нужно известное значение разделить на 4 и умножить на 3.

Задача для тренировки. В черную пятницу вы нашли отличный пиджак со скидкой 25%. В обычный день он стоит 8500 рублей, но сейчас с собой есть только 6400 рублей. Хватит ли средств для покупки?

Как решаем:

100 - 25 = 75,

значит нужно заплатить 75% от первоначальной цены.

Используем правило соотношения чисел:

8500 : 4 * 3 = 6375.

Ответ: средств хватит, так как пиджак стоит 6375 рублей.

Линейные уравнения

Линейным уравнением относительно переменной x называется уравнение первой степени $kx + b = 0$ (1), где k и b – произвольные вещественные числа.

В случае $k \neq 0$ уравнение (1) имеет единственное решение при любом значении b :

$$x = -\frac{b}{k}$$

В случае, когда $k = 0, b \neq 0$ уравнение (1) решений не имеет.

В случае, когда k = 0, b = 0, решением уравнения (1) является любое число $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если изначально задано уравнение, содержащее переменную в знаменателе, то перед решением необходимо указать область определения, исключить из ответа корни, при которых выражение не имеет смысла.

*Пример* 1

$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$
$$x = 2$$

*Пример* 2

$$3x = -2$$
$$x = \frac{-2}{3}$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

*Пример* 3

$$8(x-1)+2x = 2(4-2x)$$
$$8x-8+2x = 8-4x$$
$$8x+2x+4x = 8+8$$
$$8x+2x+4x = 8+8$$
$$14x = 16$$
$$x = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

*Пример* 4

$$\frac{5x+15}{x+4} = 4$$
$$D:\ x \neq -4$$
$$\frac{5x+15}{x+4} \cdot (x+4) = 4 \cdot (x+4)$$
$$5x+15 = 4x+16$$
$$x = -1$$
$$\textit{Ответ}:\ x = -1$$

*Пример* 5

$$\frac{5x+15}{x+3} = 4$$
$$D:\ x \neq -3$$
$$\frac{5x+15}{x+4} \cdot (x+3) = 4 \cdot (x+3)$$
$$5x+15 = 4x+12$$
$$x = -3$$
$$\textit{Ответ}:\ \textit{нет корней}$$

Линейные неравенства

Линейным неравенством относительно переменной x называется неравенство, принадлежащее к одному из следующих типов:

$$kx + b \geq 0,$$
$$kx + b > 0,$$
$$kx + b < 0,$$
$$kx + b \leq 0,$$

где $k$ и $b$ – произвольные вещественные числа.

Решая линейные, да и не только линейные, неравенства, следует помнить, что при умножении или делении неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, а при умножении или делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

В соответствии с этим решение линейных неравенств, в зависимости от значений коэффициентов k и b, представлено в следующей Таблице 1.

Таблица 1. – Решение неравенств первой степени

| | $kx+b\geq 0$ | kx + b > 0 | $kx+b\leq 0$ | kx + b < 0 |
|---|---|---|---|---|
| k > 0 | Знак неравенства сохраняется | | | |
| | $x\geq -\frac{b}{k}$ | $x>-\frac{b}{k}$ | $x\leq -\frac{b}{k}$ | $x<-\frac{b}{k}$ |
| k = 0, b < 0 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $x\in(-\infty;+\infty)$. | $x\in(-\infty;+\infty)$. |
| k = 0, b = 0 | $x\in(-\infty;+\infty)$. | $\varnothing$ | $x\in(-\infty;+\infty)$. | $\varnothing$ |
| k = 0, b > 0 | $x\in(-\infty;+\infty)$. | $x\in(-\infty;+\infty)$. | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| k < 0 | Знак неравенства меняется на противоположный | | | |
| | $x\leq -\frac{b}{k}$ | $x<-\frac{b}{k}$ | $x\geq -\frac{b}{k}$ | $x>-\frac{b}{k}$ |

Системы линейных неравенств

Рассмотрим решение систем линейных неравенств на примерах.

Пример 1. Решить систему неравенств $\begin{cases}2x-3\geq 0,\\ -3x+11>0\end{cases}$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases}2x-3\geq 0,\\ -3x+11>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\geq 3,\\ -3x>-11,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \frac{3}{2},\\ x<\frac{11}{3}.\end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 1) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

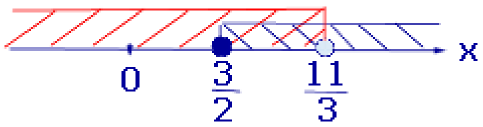



Рис.1

Ответ: $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{11}{3}\right)$

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases}5x+4<0,\\ -2x-7\geq 0.\end{cases}$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases}5x+4<0,\\ -2x-7\geq 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x<-4,\\ -2x\geq 7,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-\frac{4}{5},\\ x\leq -\frac{7}{2}.\end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 2) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 1) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

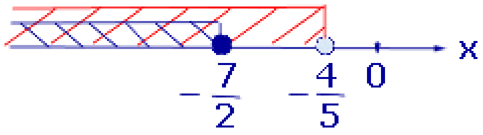



Рис.2

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right]$

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 6x - 7 > 0, \\ 4x + 13 < 0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 6x - 7 > 0, \\ 4x + 13 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > 7, \\ 4x < -13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{6}, \\ x < -\frac{13}{4}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 3) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера

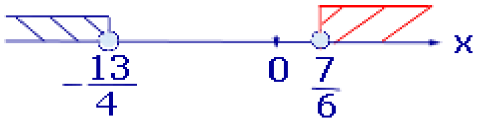



Рис.3

Ответ: $\varnothing$

Определение

*Квадратное уравнение* — это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты $a$, $b$ и $c$ — произвольные числа, причем $a \neq 0$.

Прежде, чем изучать конкретные методы решения, заметим, что все квадратные уравнения можно условно разделить на три класса:

Не имеют корней;

Имеют ровно один корень;

Имеют два различных корня.

Дискриминант

Определение

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Тогда *дискриминант* — это просто число $D = b^2 - 4ac$.

Эту формулу надо знать наизусть. Откуда она берется — сейчас неважно. Важно другое: по знаку дискриминанта можно определить, сколько корней имеет квадратное уравнение. А именно:

Если $D < 0$, корней нет;

Если $D = 0$, есть ровно один корень;

Если $D > 0$, корней будет два.

Обратите внимание: дискриминант указывает на количество корней, а вовсе не на их знаки, как почему-то многие считают. Взгляните на примеры — и сами все поймете:

Задача

Сколько корней имеют квадратные уравнения:

$x^2 - 8x + 12 = 0$;

$5x^2 + 3x + 7 = 0$;

$x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение

Выпишем коэффициенты для первого уравнения и найдем дискриминант: $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$; $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$

Итак, дискриминант положительный, поэтому уравнение имеет два различных корня. Аналогично разбираем второе уравнение:

$a = 5$; $b = 3$; $c = 7$;

$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 9 - 140 = -131$.

Дискриминант отрицательный, корней нет. Осталось последнее уравнение:

$a = 1$; $b = -6$; $c = 9$;

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$.

Дискриминант равен нулю — корень будет один.

Ответ

1) 2 корня; 2) нет корней; 3) один корень.

Корни квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Когда $D = 0$, можно использовать любую из этих формул — получится одно и то же число, которое и будет ответом. Наконец, если $D < 0$, корней нет — ничего считать не надо.

Задача

Решить квадратные уравнения:

$x^2 - 2x - 3 = 0$;

$15 - 2x - x^2 = 0$;

$x^2 + 12x + 36 = 0$.

Решение

Первое уравнение:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow a = 1$; $b = -2$; $c = -3$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$.

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1$$

Второе уравнение:

$15 - 2x - x^2 = 0 \Rightarrow a = -1$; $b = -2$; $c = 15$;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 15 = 64$.

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение снова имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = -5; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = 3$$

Наконец, третье уравнение:

$x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow \mathrm{a} = 1$; $\mathrm{b} = 12$; $\mathrm{c} = 36$; $\mathrm{D} = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$.

$\mathrm{D} = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет один корень. Можно использовать любую формулу. Например, первую:

$$x = \frac{-12 + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -6$$

Ответ

1) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; 2) $x_1 = -5$; $x_2 = 3$; 3) $x = -6$.

Неполные квадратные уравнения

Бывает, что квадратное уравнение несколько отличается от того, что дано в определении. Например:

$x^2 + 9x = 0$;

$x^2 - 16 = 0$.

Несложно заметить, что в этих уравнениях отсутствует одно из слагаемых. Такие квадратные уравнения решаются даже легче, чем стандартные: в них даже не потребуется считать дискриминант.

Определение

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *неполным квадратным уравнением*, если $b = 0$ или $c = 0$, т.е. коэффициент при переменной $x$ или свободный элемент равен нулю.

Разумеется, возможен совсем тяжелый случай, когда оба этих коэффициента равны нулю: $b = c = 0$. В этом случае уравнение принимает вид $ax^2 = 0$. Очевидно, такое уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

Рассмотрим остальные случаи. Пусть $b = 0$, тогда получим неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$. Немного преобразуем его:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Поскольку арифметический квадратный корень существует только из неотрицательного числа, последнее равенство имеет смысл исключительно при $(-c/a) \geq 0$. Вывод:

Если в неполном квадратном уравнении вида $ax^2 + c = 0$ выполнено неравенство $(-c/a) \geq 0$, корней будет два. Формула дана выше;

Если же $(-c/a) < 0$, корней нет.

Как видите, дискриминант не потребовался — в неполных квадратных уравнениях вообще нет сложных вычислений. На самом деле даже необязательно помнить неравенство $(-c/a) \geq 0$. Достаточно выразить величину $x^2$ и посмотреть, что стоит с другой стороны от знака равенства. Если там положительное число — корней будет два. Если отрицательное — корней не будет вообще.

Теперь разберемся с уравнениями вида $ax^2 + bx = 0$, в которых свободный элемент равен нулю. Тут все просто: корней всегда будет два. Достаточно разложить многочлен на множители:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Отсюда находятся корни. В заключение разберем несколько таких уравнений:

Задача

Решить квадратные уравнения:

$x^2 - 7x = 0$;

$5x^2 + 30 = 0$;

$4x^2 - 9 = 0$.

Решение

$x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -(-7)/1 = 7$.

$5x^2 + 30 = 0 \Rightarrow 5x^2 = -30 \Rightarrow x^2 = -6$. Корней нет, т.к. квадрат не может быть равен отрицательному числу.

$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9/4 \Rightarrow x_1 = 3/2 = 1{,}5$; $x_2 = -1{,}5$.

Ответ

$x_1 = 0$; $x_2 = 7$; 2) корней нет; 3) $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}5$.

**Решение задач:**

1. Вода занимает $\frac{2}{3}$ поверхности Земли. Поэтому Землю называют «голубой планетой». Какую часть земной поверхности занимает суша? Ответ: $\frac{1}{3}$ суша.

2. Отцу 42 года, а возраст сына составляет $\frac{2}{7}$ возраста отца. Сколько лет сыну? Ответ: 12 лет.

3. Предельный возраст белки 6 лет, что составляет $\frac{3}{5}$ предельного возраста зайца. Сколько лет может прожить заяц? Ответ: 10 лет.

4. Длина стороны квадрата $\frac{5}{9}$ дм. Какова его площадь? Ответ: $\frac{25}{81}$ дм$^2$.

5.Рабочий может выполнить производственное задание за 5 часов, а его ученик – за 8 часов. Какую часть работы они выполнят вместе после часа работы? Ответ: $\frac{13}{40}$ ч.

6. В первый час автобус прошел $\frac{2}{5}$ всего пути, во второй $\frac{1}{3}$ пути, а в третий – остальные 28 км. Какое расстояние прошел автобус за три часа?

1) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ (ч) – за два часа.

2) $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ (ч) – прошел в третий час. 4

3) $28 : \frac{4}{15} = 105$ (км) – за три часа.

Ответ: 105 км прошел автобус за три часа.

7. Какое расстояние улитка за $\frac{5}{6}$ часа, если она будет ползти со скоростью $\frac{3}{250}$ км/ч? Ответ: $\frac{1}{100}$ км.

8**.** Из бочки с бензином вначале отлили $\frac{9}{28}$ всего имеющегося там бензина, потом $\frac{2}{7}$ всего бензина и после этого в бочке осталось 99 литров бензина. Сколько литров бензина было в бочке первоначально?

1) $\frac{9}{28} + \frac{2}{7} = \frac{17}{28}$ (ч) – отлили.

2) $1 - \frac{17}{28} = \frac{11}{28}$ (ч) – осталось.

3) $99 : \frac{11}{28} = 252$ (л) – было первоначально.

Ответ: 252 л бензина было в бочке первоначально.

Задача 1. Организм взрослого человека на 70% состоит из воды. Какова масса воды в теле человека, который весит 76 кг?

Как решаем:

$76 \cdot 0,7 = 53,2$ кг

Ответ: масса воды 53,2 кг

Задача 2. Цена товара понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной ценой?

Как решаем:

Обозначим первоначальную цену товара через х. После первого понижения цена станет равной.

х - 0,4х = 0,6х

Второе понижение цены составляет 25% от новой цены 0,6х, поэтому после второго понижения получим:

0,6х - 0,25 * 0,6х = 0,45х

После двух понижений изменение цены составит:

х - 0,45х = 0,55х

Так как величина 0,55х составляет 55% от величины х, то цена товара понизилась на 55%.

Ответ: 55%.

Задача 3. Четыре пары брюк дешевле одного пальто на 8%. На сколько процентов пять пар брюк стоят дороже, чем одно пальто?

Как решаем:

По условиям задачи стоимость четырех пар брюк — это 92% от стоимости пальто

100 - 8 = 92

Получается, что стоимость одной пары брюк — это 23% стоимости пальто.

92 : 4 = 23

Теперь умножим стоимость одной пары брюк на пять и узнаем, что пять пар брюк обойдутся в 115% стоимости пальто.

23 * 5 = 115

Ответ: пять пар брюк на 15% дороже, чем одно пальто.

Задача 4. Семья состоит из трех человек: муж, жена и дочь-студентка. Если зарплата мужа вырастет в два раза, общий доход семьи возрастет на 67%. Если дочери в три раза урежут стипендию, общий доход этой семьи уменьшится на 4%. Вычислить, какой процент в общий доход семьи приносит заработок жены.

Как решаем:

По условиям задачи общий доход семьи напрямую зависит от доходов мужа. Благодаря увеличению зарплаты общий доход семьи вырастет на 67%. Значит, зарплата мужа составляет как раз 67% от общего дохода.

Если стипендия дочери уменьшится в три раза (т.е. на 1/3), останется 2/3 — это и есть 4%, на которые уменьшился бы семейных доход.

Можно составить простую пропорцию и выяснить, что раз 2/3 стипендии — это 4% дохода, то вся стипендия — это 6%.

А теперь отнимем от всего дохода вклад мужа и дочери и узнаем, какой процент составляет заработок жены в общем доходе семьи: 100 – 67 – 6 = 27.

Ответ: заработок жены составляет 27%.

Задача 5. В свежих абрикосах 90% влаги, а в сухофрукте кураге только 5%. Сколько килограммов абрикосов нужно, чтобы получить 20 килограммов кураги?

Как решаем:

Исходя из условия, в абрикосах 10% питательного вещества, а в кураге в концентрированном виде — 95%.

Поэтому в 20 килограммах кураги 20 * 0,95 = 19 кг питательного вещества.

Значит, 19 килограммов питательного вещества в абрикосах — это 10% веса свежих абрикосов. Найдем число по проценту.

19 : 0,1 = 190

Ответ: 190 кг свежих абрикосов потребуется для изготовления 20 кг кураги.

## Решение квадратичных систем уравнений

**Пример 1.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$

Решение. Выразив x из первого уравнения системы и подставив во второе, получим равносильную систему $\begin{cases} x=y+1, \\ 2y^2+2y-40=0. \end{cases}$ ………………………………(1)

Решая второе уравнение системы (1), находим два значения переменной y: $y_1=4, y_2=-5$, подставляя эти значения в первое уравнение системы (1), получаем два значения переменной x: $x_1=5, x_2=-4$.

Ответ: (5; 4),(-4; -5).

**Пример 2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y-xy=4 \\ 3x+y+3xy=3 \end{cases}$

Решение. Сразу выразить одну переменную через другую в данном случае затруднительно, мешает слагаемое xy. Чтобы избавиться от этого слагаемого умножим первое уравнение системы на 3 и сложим со вторым уравнением. При этом получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} 2x-3y-xy=4, \\ 9x-8y=15. \end{cases}$ ……………..(2)

Из второго уравнения получаем: $x=\dfrac{15+8y}{9}$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (2) получим уравнение $2\dfrac{15+8x}{9}-3y-y\dfrac{15+8y}{9}=4$. Преобразовав его, получим квадратное уравнение относительно y: $4y^2+13y+3=0$. Корни этого уравнения $y_1=-3, y_2=-\dfrac{1}{4}$, подставим в формулу для x, и получим $x_1=-1, x_2=\dfrac{13}{9}$.

Ответ: (-1; -3),(13/9; -1/4).

**Пример 3.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2(x+y)=80, \\ x^2(2x-3y)=80. \end{cases}$

Решение. В левых частях уравнений системы стоят произведения двух сомножителей, а справа число отличное от нуля, поэтому, очевидно, ни один из сомножителей левых частей уравнений не может быть равен нулю. Таким образом, получаем, что $x \neq 0$ и $2x-3y \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{3}{2}y$. Разделим первое уравнение системы на второе почленно, в силу сделанного выше замечания, получим равносильную систему $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2x-3y}=1, \\ x^2(x+y)=80. \end{cases}$ . Выразим из первого уравнения полученной системы выразим x: $x=4y$. Подставим это значение во второе уравнение системы и найдем $y=1$, тогда $x=4$.

Ответ: (4; 1).

Квадратное неравенство – это неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, в левой – нуль.

То есть, квадратные неравенства бывают следующих видов:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Решить квадратное уравнение можно с помощью метода интервалов.

Для этого необходимо сначала найти корни квадратного неравенства (вместо знака неравенства поставить «=» и решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$). Корней может быть либо два, либо один, либо не быть вообще. Дальнейшие действия зависят от количества корней:

**1. Если уравнение имеет два корня**, необходимо нанести их на числовую прямую. Они разобьют ее на три промежутка. Нужно будет определить знаки выражения $ax^2 + bx + c$ на каждом из промежутков (конкретный пример решения вы можете посмотреть, введя в форму выше какое-либо неравенство, например $5x^2 + 2x - 7 \geq 0$):

- если $a > 0$, то знаки будут +, –, + (слева направо);
- если $a < 0$, то знаки будут –, +, – (слева направо).

В случае, если знак неравенства > или ≥, ответом будут промежутки со знаком «+». Если же знак < или ≤, то ответом будут отрицательные промежутки.

Если знак неравенства > или <, то точки-границы промежутков записываются в круглых скобках. Если же знак ≥ или ≤, то границы промежутков записываются в квадратных скобках.

**2. Если уравнение имеет один корень**, то нужно также нанести его на числовую прямую и определить знаки выражения $ax^2 + bx + c$ на каждом из промежутков. Корень разделит прямую на два промежутка, знаки в которых будут одинаковыми (в зависимости от коэффициента $a$):

- если $a > 0$, то знаки будут +, +. В этом случае, если знак неравенства >, то ответом будет вся числовая прямая, кроме точки-границы промежутка. Если же знак неравенства ≥, то ответ – вся числовая прямая. Если знак неравенства <, то ответ – пустое множество. Если знак неравенства ≤, то ответ – одна точка – граница между промежутками.
- если $a < 0$, то знаки будут –, –. В этом случае, если знак неравенства >, то ответом будет пустое множество. Если же знак неравенства ≥, то ответ – одна точка – граница промежутка. Если знак неравенства <, то ответ – вся числовая прямая, кроме точки-границы промежутка. Если знак неравенства ≤, то ответ – вся числовая прямая.

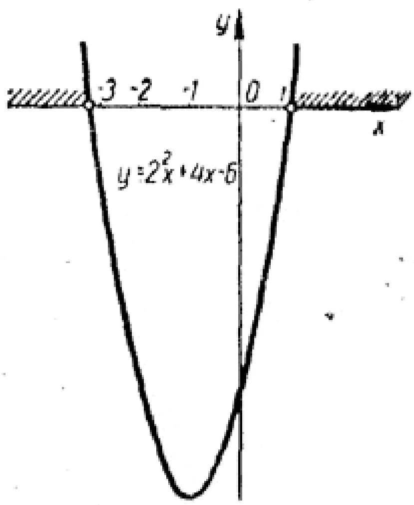
**3. Если уравнение корней не имеет**, то ничего на координатную ось и не нужно наносить: надо просто определить знак выражения $ax^2 + bx + c$ на всей числовой прямой:

- если $a > 0$, то знак будет +. В этом случае: если знак неравенства > или ≥, то ответом будет вся числовая прямая. В противном случае – если знак < или ≤ – ответом будет пустое множество.

- если $a < 0$, то знак будет –. В этом случае: если знак неравенства < или ≤, то ответом будет вся числовая прямая. В противном случае – если знак > или ≥ – ответом будет пустое множество.

<u>Пример 1.</u> Решить неравенство $2\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} - 6 > 0$.

Квадратный трехчлен $2\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} - 6$ имеет два действительных корня $\boldsymbol{x}_1 = -3$, $\boldsymbol{x}_2 = 1$. Поэтому парабола $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} - 6$ пересекает ось $\boldsymbol{x}$ в двух точках, абсциссы которых равны —3 и 1. Поскольку коэффициент при $\boldsymbol{x}^2$ больше нуля, парабола $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} - 6$ направлена вверх




Из рисунка видно, что трехчлен $2x^2 + 4x — 6$ положителен при $x < — 3$ и при $x > 1$.

<u>Пример 2.</u> Решить неравенство

$— x^2 + x — 1 > 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена $— x^2 + x — 1$ отрицателен: D = —3. Поэтому при всех $x$ значения функции $y = — x^2 + x — 1$ имеют один и тот же знак, а именно знак коэффициента при $x^2$, то есть минус. Следовательно, неравенство $— x^2 + x — 1 > 0$ не выполняется ни при каких значениях $x$.

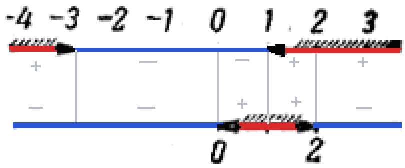
<u>Пример 3.</u> Выяснить, при каких значениях $x$ дробь

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x - x^2}$$

положительна и при каких — отрицательна.

Сначала указанным выше способом определим знаки числителя и знаменателя данной дроби, а затем сравним их.

Числитель $x^2 + 2x^2 — 3$ положителен при $x < —3$ и при $x > 1$, а отрицателен при $—3 < x < 1$ (рис. верхняя числовая ось).




Знаменатель $2x — x^2$ положителен при $0 < x < 2$ и отрицателен при $x < 0$ и при $x > 2$ (рис. , нижняя числовая ось). Из рисунка видно, что данная дробь будет положительна при $— 3 < x < 0$ (в этом случае числитель и знаменатель отрицательны) и при $1 < x < 2$ (в этом случае числитель и знаменатель положительны); отрицательной она будет при $x <. —3$ (числитель положителен, знаменатель отрицателен), при $0 < x < 1$ (числитель отрицателен, знаменатель положителен) и при $x > 2$ (числитель положителен, знаменатель отрицателен).

**Решение заданий:**

№1. Решить неравенства:

$(2x + 3) (2 — 2x) > 0$.

$(2 — \pi) (2x — 15) (x + 4) > 0$.

$$(3x-4)(5x+6)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 3x-4>0, \\ 5x+6>0; \end{cases} \atop \begin{cases} 3x-4<0, \\ 5x+6<0; \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 3x>4, \\ 5x>-6; \end{cases} \atop \begin{cases} 3x<4, \\ 5x<-6; \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x>\frac{4}{3}, \\ x>-\frac{6}{5}; \end{cases} \atop \begin{cases} x<\frac{4}{3}, \\ x<-\frac{6}{5}; \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{4}{3}, \\ x<-\frac{6}{5}. \end{array}\right.$$

№2. Решить уравнения:
1. $x^4-8x^2-9=0$
2. $x^8-15x^4-16=0$
3. $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)-4=0$

№3. Решить данные неравенства:
1. $x^2 - 4x + 3 > 0$. 5. $x^2 + x + 1 < 0$.
2. $x^2 - 6x + 5 < 0$. 6. $x^2 - x + 1 > 0$.
3. $- 5x^2 + 3x + 2 > 0$. 7. $x^2 - 6x + 10 < 0$.
4. $x(1 - x) > 0$. 8. $- 3x^2 + 2x + 1 >0$.

№4. Выполнить задания:
1. Решить неравенство:
$8x^2 - 6x + 1 > 0$
2. Найти наименьшее положительное целое решение нtравенства:
$-x^2 + 2x \geq -3$
3. Решить неравенство:
$x^2 + 3x + 8 \geq 0$
4. Решить неравенство:
$x^2 - 4x + 4 > 0$
5. Решить неравенство:
$x^2 - 4x + 4 \geq 0$
6. Найти все значения x, не являющиеся решением неравенства:
$x^2 \geq 16$

## Практическая работа №4

**Тема 1.4** Входная контрольная работа

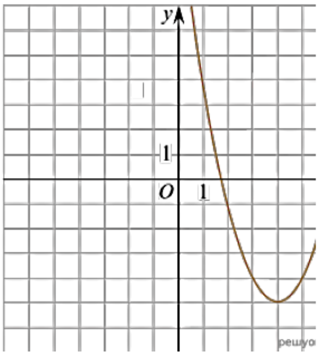
**Цель**: Проверить уровень усвоения материала по разделу 1 «Повторение курса математики основной школы»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

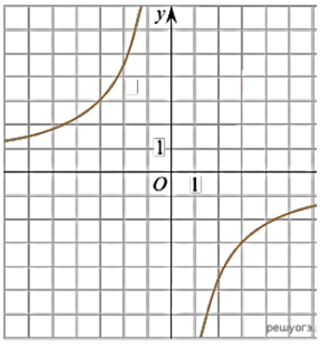
1. (1 балл) Раскройте формулу сокращенного умножения $a^2-b^2$:
А) $a^2-2ab+b^2$; Б) (a-b)(a+b); В) $a^2+2ab-b^2$; Г) (a-b)(a-b)
2. (1 балл) Площадь треугольника вычисляется по формуле:
А) S=a*b; Б) S=(a*b)/2; В) S=2a*b; Г) S=(a*b)/3.
3. (1 балл) Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{10}{17}$ и $\frac{5}{8}$?
А) 0,4; Б) 0,5; В) 0,6; Г) 0,7

4. (1 балл) Даны графики функций. Какая формула соответствует графику 3):

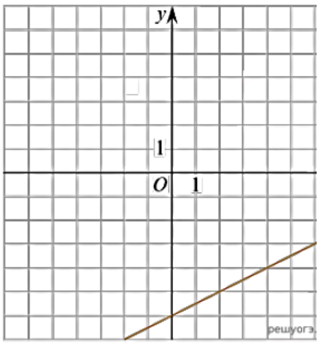
1)




2)




3)




А) $y = \frac{1}{2}x - 6$; Б) y = $x^2 - 8x + 11$; В) $y = -\frac{9}{x}$; Г) y = x + 5.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Вычислите $\frac{1}{2} + \frac{11}{5}$

6. (2 балла) Решите уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

7. (2 балла) Площадь земель крестьянского хозяйства, отведенная под посадку кустарников и цветников, составляет 24 га и распределена между ними в отношении 5:3. Сколько гектаров занимают цветники?

8. (2 балла) Высота BH параллелограмма ABCD делит его сторону AD на отрезки AH = 2 и HD = 32. Диагональ параллелограмма BD равна 40. Найдите площадь параллелограмма.

***Эталоны ответов***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | Б | В | А | 2,7 | 2 | 9 | 816 |

## Практическая работа №5

**Тема 2.2** Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения

**Цель**: Научить использовать основные тригонометрические тождества и формулы приведения при преобразовании выражений.

**Теоретическая часть:**

*<u>Формулы приведения</u>*

Сразу перечислим основные тригонометрические тождества, которые разберем в этой статье. Запишем их в таблицу, а ниже дадим вывод этих формул и приведем необходимые пояснения.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

**Связь между синусом и косинусом одного угла**

Иногда говорят не об основных тригонометрических тождествах, перечисленных в таблице выше, а об одном единственном **основном тригонометрическом тождестве** вида $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Объяснение этому факту достаточно простое: равенства $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ получаются из основного тригонометрического тождества после деления обеих его частей на $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$ соответственно, а равенства $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$ следуют из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Подробнее об этом поговорим в следующих пунктах.

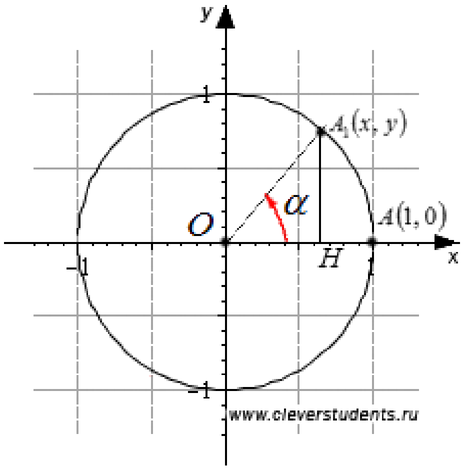
То есть, особый интерес представляет именно равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, которому и дали название основного тригонометрического тождества.

Прежде чем доказать основное тригонометрическое тождество, дадим его формулировку: сумма квадратов синуса и косинуса одного угла тождественно равна единице. Теперь докажем его.

Обратимся к единичной окружности. Пусть начальная точка $A(1, 0)$ после поворота на угол $\alpha$ переходит в точку $A_1$. В силу определений синуса и косинуса точка $A_1$ имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Более того, точка $A_1$ лежит на единичной окружности, следовательно, ее координаты должны удовлетворять уравнению единичной окружности, которое имеет вид $x^2+y^2=1$. То есть, должно быть справедливо равенство $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Этим доказано основное тригонометрическое тождество для любых углов поворота $\alpha$.

Равенство $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ часто называют теоремой Пифагора в тригонометрии. Поясним этот момент.

Возьмем единичную окружность. Повернем начальную точку $A(1, 0)$ вокруг точки $O$ на угол $\alpha$. Пусть точка $A$ после этого поворота переходит в точку $A_1(x, y)$. Опустим из точки $A_1$ перпендикуляр $A_1H$ на прямую $Ox$.




Рассмотрим прямоугольный треугольник $OA_1H$. Хорошо видно, что в нем длины катетов $A_1H$ и $OH$ равны соответственно модулю ординаты и абсциссы точки $A_1$, то есть, $|A_1H|=|y|$ и $|OH|=|x|$, а длина гипотенузы $OA_1$ равна радиусу единичной окружности, то есть, $|OA_1|=1$. *Теорема Пифагора* позволяет записать равенство $|A_1H|^2+|OH|^2=|OA1|^2$, которое мы можем переписать как $|y|^2+|x|^2=1^2$ или $y^2+x^2=1$. Но по определению $\sin\alpha = y$ и $\cos\alpha = x$, тогда от равенства $y^2+x^2=1$ мы можем перейти к равенству $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Основное тригонометрическое тождество задает связь между синусом и косинусом одного угла. Это позволяет вычислять синус угла, когда известен косинус этого угла, и вычислять косинус угла, когда известен синус угла. Для этого достаточно равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ разрешить относительно синуса и косинуса соответственно: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ и $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Знак перед корнем зависит от величины угла $\alpha$. Подробнее об этом мы поговорим в разделе вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса с использованием тригонометрических формул.

Основное тригонометрическое тождество очень часто используется при *преобразовании тригонометрических выражений*. Оно позволяет сумму квадратов синуса и косинуса одного угла заменять единицей. Не менее часто основное тригонометрическое тождество используется и в обратном порядке: единица заменяется суммой квадратов синуса и косинуса какого-либо угла.

**Тангенс и котангенс через синус и косинус**

Тождества, связывающие тангенс и котангенс с синусом и косинусом одного угла вида $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ сразу следуют из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Действительно, по определению синус есть ордината y, косинус есть абсцисса x, тангенс есть отношение ординаты к абсциссе, то есть, $tg\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а котангенс есть отношение абсциссы к ординате, то есть, $ctg\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Благодаря такой очевидности тождеств $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ часто определения тангенса и котангенса дают не через отношение абсциссы и ординаты, а через отношение синуса и косинуса. Так тангенсом угла называют отношение синуса к косинусу этого угла, а котангенсом – отношение косинуса к синусу.

В заключение этого пункта следует отметить, что тождества $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ имеют место для всех таких углов $\alpha$, при которых входящие в них тригонометрические функции имеют смысл. Так формула $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ справедлива для любых $\alpha$, отличных от $\frac{\pi}{2} + \pi \cdot z$ (иначе в знаменателе будет нуль, а деление на нуль мы не определяли), а формула $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ - для всех $\alpha$, отличных от $\pi \cdot z$, где z - любое целое число.

**Связь между тангенсом и котангенсом**

Еще более очевидным тригонометрическим тождеством, чем два предыдущих, является тождество, связывающее тангенс и котангенс одного угла вида $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$. Понятно, что оно имеет место для любых углов $\alpha$, отличных от $\frac{\pi}{2} \cdot z$, в противном случае либо тангенс, либо котангенс не определены.

Доказательство формулы $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ очень просто. По определению $tg\alpha = \frac{y}{x}$ и $ctg\alpha = \frac{x}{y}$, откуда $tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$. Можно было доказательство провести и немного иначе. Так как $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$.

Итак, тангенс и котангенс одного угла, при котором они имеют смысл, есть взаимно обратные числа.

**Тангенс и косинус, котангенс и синус**

Наконец, мы пришли к двум последним из основных тригонометрических тождеств $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. Они связывают тангенс и косинус, а также котангенс и синус одного угла.

Приведем их формулировки: сумма квадрата тангенса угла и единицы равна числу, обратному квадрату косинуса этого угла, а сумма единицы и квадрата котангенса угла равна числу, обратному квадрату синуса этого угла.

Вывод указанных формул можно провести, отталкиваясь от основного тригонометрического тождества вида $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Если разделить обе части этого равенства на $\cos^2\alpha$ (при этом, конечно, $\cos^2\alpha$ должен быть отличен от нуля), то мы получим формулу $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Если же обе части равенства $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ разделить на $\sin^2\alpha$ (при этом $\sin^2\alpha$ должен быть отличен от нуля), то мы придем к тождеству $1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Итак, тождество $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ имеет место для любых $\alpha$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi\cdot z$, а тождество $1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ - при любых $\alpha$, отличных от $\pi\cdot z$.

Формулы приведения:

***Определение.*** Формулами приведения называют формулы, которые позволяют перейти от тригонометрических функций вида $\sin(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha)$; $\cos(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha)$; $\mathrm{tg}(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha)$; $\mathrm{ctg}(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha)$ к функциям аргумента $\alpha$. С их помощью синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла можно привести к синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу угла из интервала от 0 до 90 градусов (от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиан). Таким образом, формулы приведения позволяют нам переходить к работе с углами в пределах 90 градусов, что, несомненно, очень удобно.

***Формулы приведения:***

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(270°-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(270°-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\sin(270°+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(270°+\alpha)=\sin\alpha$$

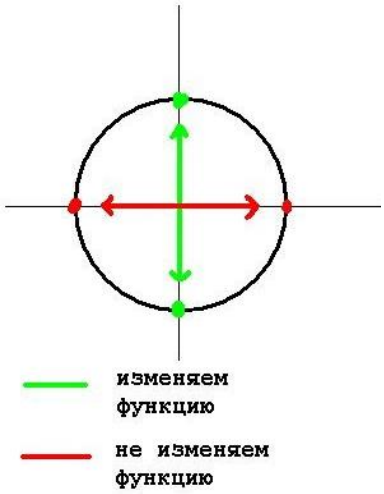
$$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin(360°+\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(360°+\alpha)=\cos\alpha$$

***Для использования формул приведения существует два правила.***

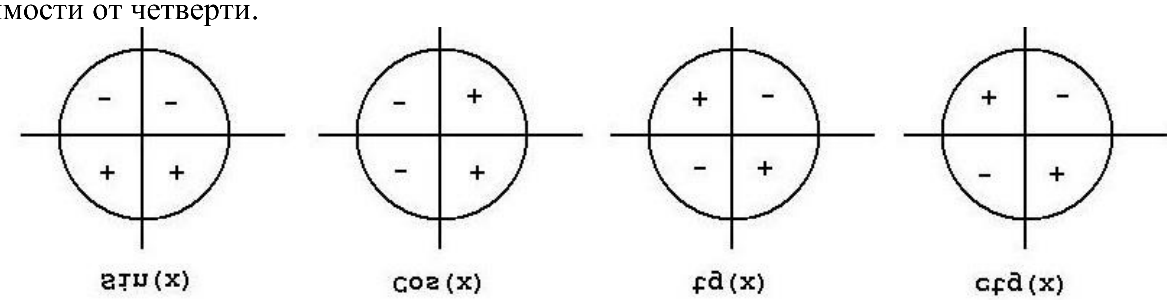
***1.*** Если угол можно представить в виде (π/2 ±a) или (3*π/2 ±a), то **название функции меняется** sin на cos, cos на sin, tg на ctg, ctg на tg. Если же угол можно представить в виде (π ±a) или (2*π ±a), то **название функции остается без изменений.**

Посмотрите на рисунок ниже, там схематично изображено, когда следует менять знак, а когда нет




**2.** ***Знак приведенной функции*** остается прежним. Если исходная функция имела знак «плюс», то и приведенная функция имеет знак «плюс». Если исходная функция имела знак «минус», то и приведенная функция имеет знак «минус».

На рисунке ниже представлены знаки основных тригонометрических функций в зависимости от четверти.




**Решение заданий:**

№1.Найдите sin $\alpha$, если известно следующее:

$$\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10};\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$$

Решение

Нам известен косинус, но неизвестен синус. Основное тригонометрическое тождество (в «чистом» виде) связывает как раз эти функции, поэтому будем работать с ним. Имеем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + 99/100 = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1/100 \Rightarrow \sin\alpha = \pm 1/10 = \pm 0{,}1$.

Для решения задачи осталось найти знак синуса. Поскольку угол $\alpha \in (\pi/2;\ \pi)$,то в градусной мере это записывается так: $\alpha \in (90°;\ 180°)$.

Следовательно, угол $\alpha$ лежит во II координатной четверти — все синусы там положительны. Поэтому $\sin\alpha = 0{,}1$.

Ответ: 0,1

№2.Найдите cos $\alpha$, если известно следующее:

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$$

Решение

Итак, нам известен синус, а надо найти косинус. Обе эти функции есть в основном тригонометрическом тождестве. Подставляем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 3/4 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1/4 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 1/2 = \pm 0{,}5$.

Осталось разобраться со знаком перед дробью. Что выбрать: плюс или минус? По условию, угол $\alpha$ принадлежит промежутку ($\pi$ $3\pi/2$). Переведем углы из радианной меры в градусную — получим: $\alpha \in (180°; 270°)$. Очевидно, это III координатная четверть, где все косинусы отрицательны. Поэтому $\cos \alpha = -0{,}5$.

Ответ:−0,5

№3.Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если известно следующее:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}};\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Решение

Тангенс и косинус связаны уравнением, следующим из основного тригонометрического тождества:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 10 - 1 = 9$$

Получаем: $\operatorname{tg} \alpha = \pm 3$. Знак тангенса определяем по углу $\alpha$. Известно,что $\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$. Переведем углы из радианной меры в градусную — получим $\alpha \in (270°; 360°)$. Очевидно, это IV координатная четверть, где все тангенсы отрицательны. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

Ответ: −3

№4.Найдите $\cos \alpha$, если известно следующее:

$$\sin \alpha = -0{,}8;\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Решение

Снова известен синус и неизвестен косинус. Запишем основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0{,}64 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 0{,}36 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0{,}6$.

Знак определяем по углу. Имеем: $\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$. Переведем углы из градусной меры в радианную: $\alpha \in (270°; 360°)$ — это IV координатная четверть, косинусы там положительны. Следовательно, $\cos \alpha = 0{,}6$.

Ответ:0,6

№5.Найдите $\sin \alpha$, если известно следующее:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{6};\ \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Решение:

Запишем формулу, которая следует из основного тригонометрического тождества и напрямую связывает синус и котангенс:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 24 + 1 = 25$$

Отсюда получаем, что $\sin^2 \alpha = 1/25$, т.е. $\sin \alpha = \pm 1/5 = \pm 0{,}2$. Известно, что угол $\alpha \in (0; \pi/2)$. В градусной мере это записывается так: $\alpha \in (0°; 90°)$ —I координатная четверть.

Итак, угол находится в I координатной четверти — все тригонометрические функции там положительны, поэтому $\sin \alpha = 0{,}2$.

Ответ: 0,2

№6.Найдите $sin\alpha$ и $tg\alpha$, если $cosa = \frac{5}{13}$

№7.Найдите $cosa$ и $tg\alpha$, еслиsin $\alpha = \frac{5}{1}$

№8.Найдите $sin\alpha$ и $tg\alpha$, если $cosa = -\frac{4}{5}$

№9.Найдите $cosa$ и $tg\alpha$, еслиsin $\alpha = -\frac{8}{17}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

№10.Найдите $cosa$ иsin $\alpha$, если $tg\alpha = -1$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

№11. Упростить выражение:

1. $\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \bullet ctg^2\alpha$

Решение:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\bullet ctg^2\alpha=\left(1+tg^2\alpha-1\right)\bullet ctg^2\alpha=1$$

2. $tg\alpha\bullet ctg\alpha-\left(tg\alpha\bullet\cos\alpha\right)^2$

Решение:

$$tg\alpha\bullet ctg\alpha-\left(tg\alpha\bullet\cos\alpha\right)^2=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

3. $\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$

Решение:

$$\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}=\frac{1-\sin^2\beta-\cos^2\beta}{\cos\beta(1+\sin\beta)}=0$$

№12. Упростите выражение

1. $1-\cos^2\alpha$
2. $\cos^2\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)$
3. $\left(\cos\alpha-1\right)\left(1+\cos\alpha\right)$
4. $\cos^2\alpha-\left(1-2\sin^2\alpha\right)$
5. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ctg\alpha-1$
6. $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-1}$
7. $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$
8. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+tg^2\alpha$
9. $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$
10 $1-\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{ctg\alpha}$

№13. Преобразовать, используя формулы приведения:

$sin\frac{13\pi}{3}=\sin\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\frac{13\pi}{3}=\cos\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$tg\frac{13\pi}{3}=\mathrm{tg}\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$ctg\frac{13\pi}{3}=c\,\mathrm{tg}\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=ctg\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

№14. Вычислите:

а) $cos105^0$; б)$sin105^0$; в) $cos75^0$ ; г)$sin75^0$ д) $tg75^0$ ; е)$sin15^0$

№15. Найдите значение выражения;

а)$sin240^0$; б)$cos300^0$; в) $tg(-225^0)$; г) $ctg\frac{4\pi}{3}$

№16. Преобразуйте выражение:

$\frac{\cos(-\alpha)\cdot cos(180^0+\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90^0+\alpha)}$

## Практическая работа №6

**Тема 2.6** Описание производственных процессов с помощью графиков функций
**Цель:** Научиться применять функции в решении профессиональных задач

**Теоретическая часть:**

Путь к появлению понятия функции заложили в 17 веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Введено было единое обозначение: неизвестных - последними буквами латинского алфавита - x, y, z, известных - начальными буквами того же алфавита - a, b, c, ... и т.д. Под каждой буквой стало возможным понимать не только конкретные данные, но и многие другие; в математику пришла идея изменения. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы.

Кроме того, у Декарта и Ферма (1601-1665) в геометрических работах появляется отчетливое представление переменной величины и прямоугольной системы координат. В своей «Геометрии» в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы; он систематически рассматривал лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения формулы.

Что такое функция? Разные ученые выдвигали разные мысли. Но мы остановимся на определении Функцией называют соответствие, при котором каждому элементу из множества Х соответствует единственное значение из множества У. При этом элемент из множества Х называют аргументом, а элемент из множества У называют зависимой переменной. Функция - одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Функция это не только математическое понятие, но и: функция это работа, производимая органом, организмом; роль, значение чего-либо; функция в математике это закон зависимости одной величины от другой; функция это возможность, опция, умение программы или прибора; функция это обязанность, круг деятельности; функция персонажа в литературном произведении; функция это вид подпрограммы в информатике социальная функция.

Каждая область знаний: физика, химия, биология, социология, лингвистика имеет свои объекты изучения, устанавливает свойства и, что особенно важно, взаимосвязи этих объектов.

В различных науках и областях человеческой деятельности возникают количественные соотношения, и математика изучает их в виде свойств чисел.

Математика создает условия для развития умения применять теоретические знания для решения практических задач, ориентироваться в окружающей нас действительности. Нам кажется, что функциональные зависимости могут касаться самых разнообразных явлений природы и окружающей среды. Каждому человеку в его повседневной практической деятельности приходится применять практические приемы геометрических измерений и построений, читать информацию, представленную в виде таблиц, диаграмм, графиков. Без конкретных математических знаний затруднено понимание и восприятие научных знаний, разнообразной социальной, экономической, технологической информации.

Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать многие задачи, а порой является естественным средством их решения. Математика является языком различных областей науки и нашей жизни.

Экологические проблемы являются глобальными проблемами человечества, всех стран независимо от размеров территории, численности населения, уровня экономического развития. С функцией мы встречаемся каждый день. Пример:

 ежедневная температура на улице есть функция от времени. В одно и то же время температура не может принимать более одного значения и быть одновременно -30 и -45.

 Поход в магазин. Стоимость покупки возрастает с ростом количества товаров.

Способы задания функции.

 Аналитический,

 Графический,

 Табличный,

 Словесный.

Аналитический. Самый распространенный способ, при котором функция задается формулой, устанавливающей, какие вычислительные операции надо произвести над x, чтобы найти y.

Графический. Графический способ состоит в проведении линии, у которой абсциссы изображают значения аргумента, а ординаты – соответствующие значения функции. Этот способ позволяет наглядно представить функциональную зависимость

Табличный. При табличном способе задания функция задается в виде таблицы, в которой для каждого значения аргумента указывается соответствующее ему значение функции

Словесный. С помощью словесного описания.

**Решение заданий:**

№1. Производственная функция фирмы имеет вид: Q=5 XY. Цена единицы ресурса X = 10 руб., единицы ресурса Y = 20 руб. Фирма располагает денежными средствами в размере 40 тыс. руб. Определите максимально возможный объем производства.

Решение: Максимизировать выпуск при данных издержках позволяет прямая равных издержек, или изокоста $C = P_X$ x X+ $P_Y$ x Y. Подставляя исходные данные, получим уравнение: 10X+20Y=40000. Находим из уравнения X=4000-2Y. Подставим это значение в заданное уравнение Q = 5XY. Получаем Q= 20000y-10y$^{2.}$ Функция совокупного продукта достигает максимума, когда функция предельного продукта равна нулю $MP_X$ = 0. Предельный продукт есть первая производная совокупного продукта по переменному фактору. $MP_X$ = Q’ (X). $MP_X$ = 20000-20Y= 0. Отсюда Y=1 000, X=2 000.

Тогда максимально возможный объем производства Q = 5 XY = 10 млн. ед. продукции.

№2. Предприниматель осуществляет промышленное производство на конкурентном рынке в районе, где достигнута полная занятость. При этом имеются следующие данные:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число работающих станков | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Выпуск продукции в тыс. шт. | 6 | 15 | 23 | 30 | 36 | 42 | 46 | 48 |

При какой степени загрузки станочного парка будет достигнут с точки зрения предпринимателя оптимальный объем производства? Будет ли он таким же с точки зрения общества?

№3. Подсчитайте средний и предельный продукт фирмы.

| Число рабочих **L** | Совокупный продукт **TP** | Средний продукт **AP** | Предельный продукт **MP** |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | | |
| 2 | 70 | | |
| 3 | 100 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 120 | | |
| 5 | 130 | | |

№4. Заполните пропуски в таблице, отражающие зависимость результативности производства от объема используемого труда.

| Объем труда **L** | Объем выпуска **Q** | Предельный продукт труда **MPL** | Средний продукт труда **APL** |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 1000 |
| 2 | | 1000 | |
| 3 | 2790 | | |
| 4 | | 610 | |
| 5 | | | 770 |

№5. Предельная норма технического замещения труда капиталом равна 2. Для обеспечения прежнего объема производства продукции при сокращении использования труда на 4 единицы на сколько единиц необходимо увеличить капитал?

№6. Заполните таблицу производственных показателей:

| **Кол-во единиц ресурса, L** | **TP** | **MP** | **AP** |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | | |
| 2 | 7 | | |
| 3 | | 8 | |
| 4 | | 1 | |
| 5 | | | 3,2 |

№7. Заполните пропуски в таблице, отражающей зависимость результатов производства от объема используемого капитала:

| **Кол-во единиц ресурса, К** | **TP** | **MP** | **AP** |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 10 |
| 2 | 22 | | |
| 3 | 36 | | |
| 4 | | | 11,5 |
| 5 | 55 | | |
| 6 | 63 | | |

№8. Пусть технология некоторого производственного процесса задана функцией Q=10KL. На производстве занято 5 человек. Требуется оценить норму замещения одного работника дополнительным количеством оборудования, чтобы объем выпуска сохранялся на уровне Q = 500 ед. продукции в день.

№9. Производственная функция фирмы имеет вид: Q=5 XY. Цена единицы ресурса X = 10 руб., единицы ресурса Y= 4 руб. Какое сочетание ресурсов обеспечит фирме максимальный объем выпуска, если затраты на приобретаемые факторы производства не должны превышать 5000 руб. в смену?

№10. Инженерной мерой эффективности машины является отношение выпуска энергии к ее затратам. Предположим, имеются две машины, первая – с эффективностью 10%, вторая – 20%. Может ли, с экономической точки зрения, первая машина быть более эффективной, чем вторая?

№11. Технология некоторой фирмы такова, что соотношение между затратами труда и капитала должно быть строго фиксированным: 1 станок - 3 работника. Ресурсы производства не являются взаимозаменяемыми, поэтому избыточное количество любого из ресурсов не повышает выпуск. Допустим, что фирма арендовала на месяц 4 станка. Месячная ставка зарплаты 900 ед., месячная арендная плата за станок 300 ед., цена единицы продукции фиксирована и равна 15 ед. За день с одного станка снимается 15 единиц продукции, а в месяце 20 рабочих дней. Определите объем производства, финансовый результат (прибыль или убытки) в данном месяце у фирмы.

№12. Двигаясь со скоростью $v$=3 м/с, трактор тащит сани с силой $F$=50 кН, направленной под острым углом $\alpha$ к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N=Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле $\alpha$ (в градусах) эта мощность будет 75 кВт.

## Практическая работа №7

**Тема 2.6** Описание производственных процессов с помощью графиков функций

**Цель:** Научиться использовать графики функций в решении прикладных задач

**Теоретическая часть:**

Применение линейной функции прослеживается практически во всех сферах нашей жизни. Примеры линейной функции в жизни:

- Расчет в магазине за купленные товары. Все мы совершаем покупки, чтобы удовлетворить свои потребности. Чем больше мы купим вещей, тем больше мы заплатим за покупку.
- Потребление электроэнергии. Абсолютно все пользуются электроприборами. Они потребляют энергию. Чем дольше мы используем электроприборы, тем больше потребляем энергии. Соответственно и платим больше. Эта зависимость выражается формулой П=к*N, где к- стоимость одного киловатт-часа, N- количество часов.)
- В Экономике. Работники получают зарплату и еще они платят подоходный налог. И чем больше начисленная зарплата, тем больше величина подоходного налога. Данные величины связаны следующей формулой: ПН=0,13*D (ПН- величина подоходного налога, D- величина дохода).
- Потребление пищи. Всем необходимо есть, чтобы у нас были силы и энергия для работы. Эту энергию мы получаем из еды. Чем больше мы съедим, тем больше энергии получим.
- Проверка знаний. Когда мы учимся, мы узнаем что- то новое. Но необходимо периодически проводить проверку того, как мы выучили материал. За эти проверочные работы нам ставят оценки. Чем больше ошибок в работе, тем ниже оценка.
- Движение физического тела с постоянной скоростью. Всем нам периодически приходится быть участниками движения. Расстояние при движении с постоянной

скоростью зависит от времени движения, чем дольше мы находимся в пути, тем большее расстояние пройдем. Данные величины связаны следующей формулой: S=vt (v- скорость движения, t- время движения).

Во всех приведенных примерах мы наблюдаем линейную функцию. Многие реальные ситуации описываются математическими моделями, представляющими линейную функцию.

Квадратичная функция является наиболее хорошо изученной функцией, она довольно часто встречается на практике. Она находит широкое применение в разных разделах математики, и других областях науки. Имеет теоретическую и практическую значимость. Ведь почти все, что окружает человека так или иначе связано с параболой.

Хорошо известно, что траектория камня, брошенного под углом к горизонту, летящего футбольного мяча, струи воды, выпущенной из шланга, парашютиста, выпрыгнувшего из горизонтально летящего самолета, артиллерийского снаряда, будет параболой (при отсутствии сопротивления воздуха). Известно также, что многие законы природы выражаются в виде квадратичной зависимости.

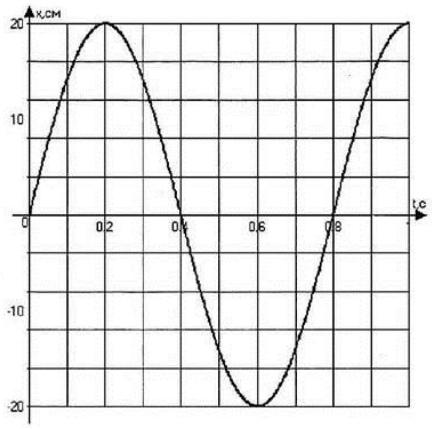
- Замечательное свойство параболы широко используется в науке и технике, например, параболическая арка; свод моста.

- В природе

Свойство параболических зеркал используют при конструировании солнечных печей, солнечных электростанций, отражательных телескопов - рефлекторов.

**Решение заданий:**

№1. На рисунке изображен график зависимости координаты от времени колеблющегося тела.



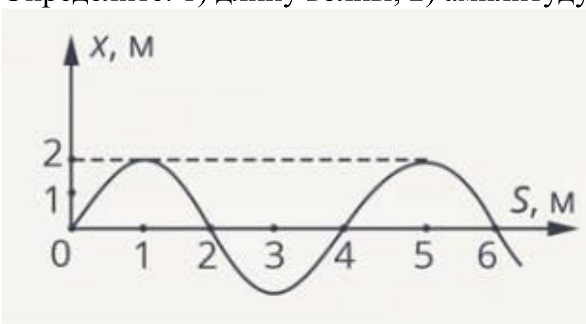

По графику определите**:** 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) частоту колебаний; 4) запишите уравнение координаты.

№2. Гармоническое колебание описывается уравнением

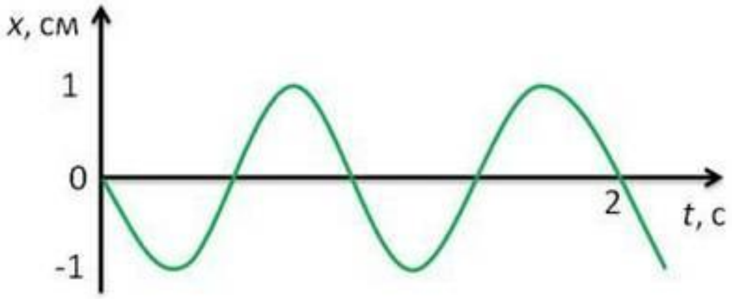
$x = 2\sin sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$. Чему равны циклическая частота колебаний, линейная частота колебаний, начальная фаза колебаний?

№3. Есть мгновенная фотография волны в резиновом шнуре.

Определите: 1) длину волны; 2) амплитуду колебаний частичек шнура.




№4. По представленному графику определите амплитуду и период колебаний нитяного маятника.




№5. По уравнению гармонических колебаний определить амплитуду, угловую скорость, период и частоту. Начертить график данного гармонического колебания.

1) $x = 15 \sin 3\pi t$

2) $x = 8 \sin \pi/3t$

3) $x = 10 \sin \pi t$

№6. Некоторая точка движется вдоль оси x по закону $x = a \sin^2 (\omega t - \pi/4)$. Найти: амплитуду и период колебаний; изобразить график x (t).

№7. Напишите уравнение гармонических колебаний, если частота равна 0,5 Гц, амплитуда 80 см. Начальная фаза колебаний равна нулю.

**Практическая работа №11**

**Тема 2.9** Простейшие тригонометрические неравенства

**Цель:** Научиться решать простейшие тригонометрические неравенства

**Теоретическая часть:**

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

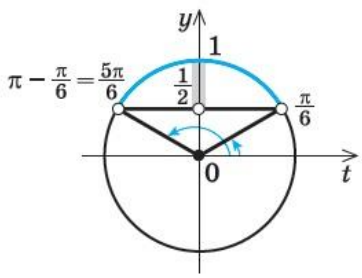
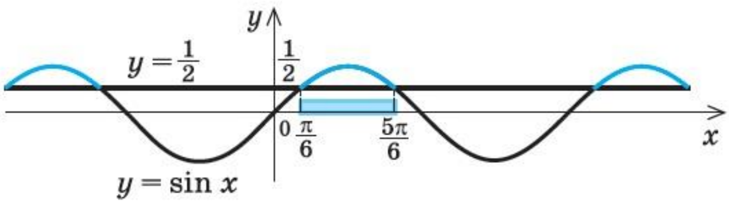
$$sinx \vee a,$$

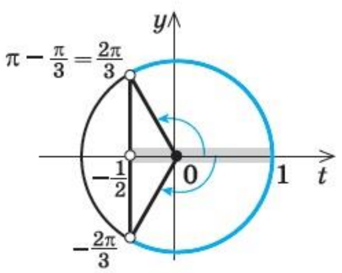
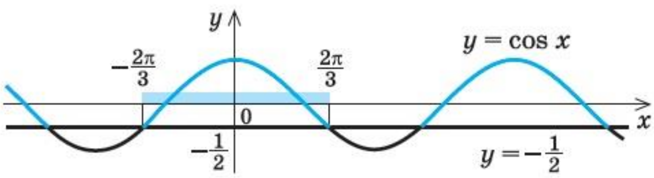
$$cosx \vee a,$$

$$tgx \vee a,$$

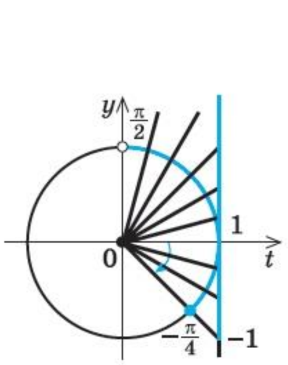
$$ctgx \vee a,$$

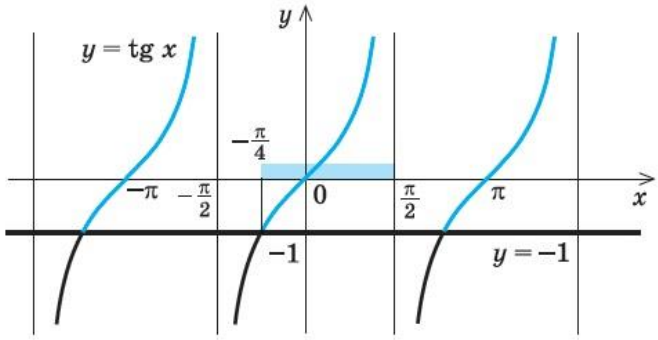
где $\vee$ – один из знаков $<,\ >,\ \le,\ \ge$, $a \in R$.

<table>
<tr><td colspan="2">1. Примеры решения простейших тригонометрических неравенств</td></tr>
<tr><td>с помощью единичной окружности</td><td>с помощью графиков</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

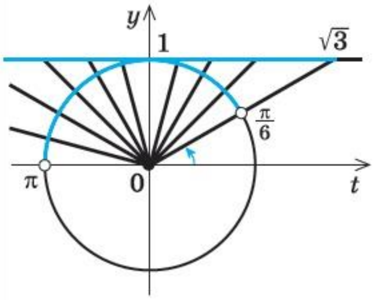
$\sin x > \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

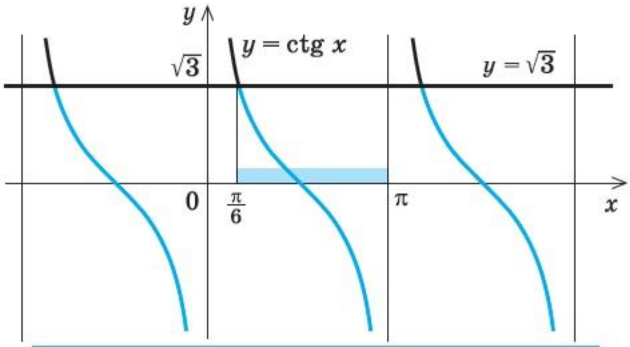
$\cos x > -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$</td></tr>
</table>




$\operatorname{tg} x \geqslant -1 \qquad -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$




$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3} \qquad \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

## Способы решения более сложных тригонометрических неравенств

а) **Использование равносильных преобразований** и, в частности, *сведение тригонометрического неравенства к алгебраическому неравенству по схеме*: 1) *к одному аргументу*, 2) *к одной функции*, 3) *замена переменной* (аналогично схеме решения тригонометрических уравнений, приведенной на с. 249) *и последующее решение полученных простейших тригонометрических неравенств.*

б) **Использование метода интервалов**

(*после сведения неравенства к виду* $f(x) \gtrless 0$) *по схеме:*

1) **Найти ОДЗ неравенства.**
2) **Найти** общий период (если он существует) для всех функций, входящих в неравенство, то есть **период функции** $f(x)$.
3) **Найти нули функции:** $f(x) = 0$.
4) **Отметить нули функции на ОДЗ на одном периоде и найти знак функции** $f(x)$ **в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ** (на одном периоде).
5) **Записать ответ**, учитывая знак заданного неравенства и период функции $f(x)$.

| Решение простейших тригонометрических неравенств в общем виде | |
|---|---|
| Значения $a$ | Решение |
| **1. Неравенство $\sin x > a$** | |
| $-1 \leqslant a < 1$ | $\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где $k$ — любое целое число ($k \in Z$). |
| $a \geqslant 1$ | Решений нет. |
| $a < -1$ | $x$ — любое действительное число. |
| **2. Неравенство $\sin x \geqslant a$** | |
| $-1 < a < 1$ | $\arcsin a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in Z$. |
| $a > 1$ | Решений нет. |
| $a = 1$ | $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , $k \in Z$. |
| $a \leqslant -1$ | $x$ – любое действительное число. |
| **3. Неравенство $\sin x < a$** | |
| $-1 < a \leqslant 1$ | $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$, $k \in Z$. |
| $a \leqslant -1$ | Решений нет. |
| $a > 1$ | $x$ — любое действительное число. |
| **4. Неравенство $\sin x \leqslant a$** | |
| $-1 < a < 1$ | $-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \arcsin a + 2\pi k$, $k \in Z$. |
| $a < -1$ | Решений нет. |
| $a = -1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. |
| $a \geqslant 1$ | $x$ — любое действительное число. |

| | |
|---|---|
| **5. Неравенство $\cos x > a$** | |
| $-1 \leqslant a < 1$ | $-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $a \geqslant 1$ | Решений нет. |
| $a < -1$ | $x$ — любое действительное число. |
| **6. Неравенство $\cos x \geqslant a$** | |
| $-1 < a < 1$ | $-\arccos a + 2\pi k \leqslant x \leqslant \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $a > 1$ | Решений нет. |
| $a = 1$ | $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $a \leqslant -1$ | $x$ — любое действительное число. |
| **7. Неравенство $\cos x < a$** | |
| $-1 < a \leqslant 1$ | $\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $a > 1$ | $x$ — любое действительное число. |
| $a \leqslant -1$ | Решений нет. |
| **8. Неравенство $\cos x \leqslant a$** | |
| $-1 < a < 1$ | $\arccos a + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $a < -1$ | Решений нет. |
| $a = -1$ | $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| $a \geqslant 1$ | $x$ — любое действительное число. |
| **9. Неравенство $\operatorname{tg} x > a$** | |
| $a$ — любое действительное число ($a \in \boldsymbol{R}$) | $\operatorname{arctg} a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **10. Неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $\operatorname{arctg} a + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **11. Неравенство $\operatorname{tg} x < a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **12. Неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **13. Неравенство $\operatorname{ctg} x > a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $\pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **14. Неравенство $\operatorname{ctg} x \geqslant a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $\pi k < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **15. Неравенство $\operatorname{ctg} x < a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $\operatorname{arcctg} a + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |
| **16. Неравенство $\operatorname{ctg} x \leqslant a$** | |
| $a \in \boldsymbol{R}$ | $\operatorname{arcctg} a + \pi k \leqslant x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. |

**Решение заданий:**

№1. Выполнить задания:

**1.** Решить неравенство: $sinx < -\frac{1}{2}$.

Ответ:

$(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n),\ n \in Z$

**2.** Решить неравенство: $cosx > -\frac{1}{2}$.

Ответ:

$(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n),\ n \in Z$

**3.** Решить неравенство: $sinx \geq -1$.

Ответ:

$(-\infty; +\infty)$

**4.** Решить неравенство: $sinx \geq 0$.

Ответ:

$[2\pi n; \pi + 2\pi n,\ n \in Z]$

**5.** Решить неравенство: $cosx \leq 0,2$.

Ответ:

$[arccos0,2 + 2\pi n; 2\pi - arccos0,2 + 2\pi n,\ n \in Z]$

№2. Выполнить задания:

**1.** Решить неравенство: $tgx \geq -1$.

Ответ:

$[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n),\ n \in Z$

**2.** Решить неравенство: $ctgx \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ:

$[\frac{2\pi}{3} + \pi n; \pi + \pi n),\ n \in Z$

**3.** Решить неравенство: $tgx < 3$.

Ответ:

$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; arctg3 + \pi n),\ n \in Z$

## Практическая работа №9

**Тема 2.10** Контрольная работа по разделу 2 «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 2 «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) В △ABC sinC = $\frac{AB}{AC}$. Какая из сторон является гипотенузой △ABC?

А) АВ; Б) АС; В) ВС; Г) СВ.

2. (1 балл) Углом какой четверти является угол α=400°?

А) I; Б) II; В) III; Г) IV.

3. (1 балл) Какие из функций являются чётными?

А) y=sin x; Б) y=cos x; В) y=tg x; Г) y= ctg x.

4. (1 балл) Какие из чисел являются корнем уравнения cos x = $\frac{1}{2}$?

А) x = $\frac{\pi}{6}$; Б) x = $\frac{\pi}{3}$; В) x = $\frac{\pi}{2}$; Г) x = $\frac{2\pi}{3}$.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Вычислите: $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}$.

6. (2 балла) Найдите значение выражения $4\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

7. (2 балла) Упростите: 2sin(π/2+α)+ cos(π – α).

8. (2 балла) Решите уравнение: $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | А | В | Б | 1 | 2π | cosα | $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$ |

## Практическая работа №10

**Тема 3.2** Преобразование иррациональных выражений

**Цель**: Научиться упрощать выражения, содержащие корни

**Теоретическая часть:**

**Что такое иррациональные выражения?**

Иррациональные выражения начинают встречаться на этапе знакомства с корнем из числа, что обычно происходит на уроках алгебры в 8 классе. Здесь интуиция подсказывает, что иррациональные выражения как-то связаны с корнями, и это действительно так. Следующее определение подтверждает нашу догадку:

**Иррациональными выражениями** называют выражения, содержащие операцию извлечения корня. Другими словами, иррациональные выражения – это выражения с радикалами (выражения, содержащие в своей записи знаки корня).

На его основе мы можем привести примеры иррациональных выражений: $\sqrt{x-1}$, $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[6]{3}-\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\sqrt{3}}}$, $\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$, $\sqrt[5]{\dfrac{4\cdot a^2}{d}}:\sqrt[5]{\dfrac{d^9}{2\cdot a^3}}$ и т.п.

Чтобы в дальнейшем не возникало путаницы, давайте обсудим один момент. Рассмотрим выражение $\dfrac{x\cdot\left(x-\sqrt{7}\right)\cdot\left(x+\sqrt{7}\right)}{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{8}{3}\right)}$ из книги *[1, с. 19]*. Из контекста понятно, что это рациональное выражение, оно подходит под соответствующее определение. Но в этом выражении присутствуют корни, значит, согласно введенному в этом пункте определению оно иррациональное. Так какое это выражение на самом деле: рациональное или иррациональное?

Это не суть важно. Этим мы хотим сказать, что не стоит фанатично подходить к разбиению выражений на виды, так как эта классификация не достаточно строгая (в отличие от классификации чисел, ведь натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа определены строго, и если данное число рациональное, то оно уж точно не иррациональное и наоборот). Выражения подразделяют на рациональные, иррациональные и т.п. по большей части для удобства представления и описания материала. Например, мы имеем дело с рациональными выражениями все время, пока учимся работать с многочленами и алгебраическими дробями. А к иррациональным выражениям мы переходим тогда, когда сталкиваемся с необходимостью провести какие-то операции с корнями. Начнем изучать логарифм – столкнемся с *логарифмическими выражениями*. И так далее. Вообще, если нет твердой уверенности в том, какого вида выражение находится перед нами, то лучше сказать просто выражение, не добавляя уточняющее определение.

Завершая информацию этого пункта, заметим, что в школе термин «иррациональные выражения» используют мало, больше говорят о выражениях, содержащих корни (возможно, это делается во избежание столкновения с оговоренными выше нюансами).

**Основные виды преобразований иррациональных выражений**

как и при преобразовании любых других выражений, надо учитывать область допустимых значений (ОДЗ) и не допускать ее сужения.

С иррациональными выражениями, как и с выражениями других видов, можно проводить любые из основных тождественных преобразований, будь то раскрытие скобок, группировка и приведение подобных слагаемых и т.п. Это и понятно, так как в основе этих преобразований лежат такие свойства действий с числами, которые являются общими для чисел разных видов. Также понятно, что при проведении преобразований иррациональных выражений сохраняется принятый порядок выполнения действий. Покажем решения нескольких примеров.

*Пример.*

Преобразуйте иррациональное выражение $9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}$.

*Решение.*

Для начала заменим корень из 81 его значением 9 (при необходимости смотрите извлечение корней), имеем
$\sqrt{81}+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}=$
$=9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}$

Очевидно, в полученном выражении присутствуют подобные слагаемые, поэтому целесообразно выполнить их приведение:
$9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}=$
$=(9-2+1)+\left(\sqrt[3]{3}+4\cdot\sqrt[3]{3}-2\cdot\sqrt[3]{3}\right)=$
$=8+3\cdot\sqrt[3]{3}$

*Ответ:*

$$9+\sqrt[3]{3}-2+4\cdot\sqrt[3]{3}+1-2\cdot\sqrt[3]{3}=8+3\cdot\sqrt[3]{3}.$$

*Пример.*

Используя формулы сокращенного умножения, представьте иррациональное выражение $\left(\left(\sqrt[5]{x+3}\right)^2-2\cdot\sqrt[5]{x+3}+1\right)-9$ в виде произведения двух иррациональных выражений.

*Решение.*

Очевидно, иррациональное выражение в скобках представляет собой квадрат разности, то есть, его можно заменить на $\left(\sqrt[5]{x+3}-1\right)^2$, поэтому
$\left(\left(\sqrt[5]{x+3}\right)^2-2\cdot\sqrt[5]{x+3}+1\right)-9=$
$=\left(\sqrt[5]{x+3}-1\right)^2-9$

А теперь девятку можно переписать как $3^2$, после чего воспользоваться формулой разность квадратов:
$\left(\sqrt[5]{x+3}-1\right)^2-9=\left(\sqrt[5]{x+3}-1\right)^2-3^2=$
$=\left(\sqrt[5]{x+3}-1-3\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x+3}-1+3\right)=$
$=\left(\sqrt[5]{x+3}-4\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x+3}+2\right)$

В результате проделанных тождественных преобразований мы пришли к нужному нам произведению двух иррациональных выражений.

*Ответ:*

$$\left(\left(\sqrt[5]{x+3}\right)^2-2\cdot\sqrt[5]{x+3}+1\right)-9=$$
$$=\left(\sqrt[5]{x+3}-4\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x+3}+2\right).$$

Существует еще ряд преобразований, относящихся именно к иррациональным выражениям. Рассмотрим основные из них.

**Преобразование подкоренного выражения**

Одно из важнейших преобразований иррациональных выражений состоит в следующем: выражение под знаком корня можно заменить тождественно равным выражением. Сначала приведем примеры его выполнения, после чего поясним, на чем оно базируется.

Это утверждение дает возможность работать с подкоренными выражениями. Например, оно позволяет сумму под корнем в выражении $\sqrt{1+6}$ заменить ее значением, то есть, перейти к корню $\sqrt{7}$. Другой пример: иррациональное выражение $\sqrt[4]{2 \cdot a^5} - 6$ можно заменить тождественно равным ему выражением $\sqrt[4]{2 \cdot a^4 \cdot a} - 6$.

Почему данное преобразование имеет место? Дело в том, что когда мы давали определение корня из числа а, то мы сказали о его единственности. То есть, не существует числа $a_1$, отличного от $a$, для которого справедливо равенство $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a_1}$, это равенство возможно лишь при $a=a_1$. Также мы знаем, что значения тождественно равных выражений $A$ и $A_1$ равны при любых допустимых значениях переменных. Из этих фактов следует разбираемое утверждение.

**Использование свойств корней**

Для тождественных преобразований иррациональных выражений широко используются свойства корней. Например, используя свойство $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, от иррационального выражения $1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ можно перейти к тождественно равному выражению $1 + \sqrt{3 \cdot 12}$. А свойство $\sqrt[n_1]{\sqrt[n_2]{\ldots \sqrt[n_k]{a}}} = \sqrt[n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k]{a}$, где $a \geq 0$, позволяет выражение $x^2 + \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{4}}}$ переписать как $x^2 + \sqrt[24]{4}$.

Преобразование иррациональных выражений, содержащих под знаками корней отрицательные числа и выражения с переменными, сопряжено с рядом нюансов. Например, мы не имеем права записать равенство $\sqrt[4]{\frac{-7}{-81}} = \frac{\sqrt[4]{-7}}{\sqrt[4]{-81}}$ на основании свойства корней, выраженного формулой $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Дело в том, что указанная формула дана для неотрицательного числа $a$ и положительного $b$, а $-7$ и $-81$ – отрицательные числа. Но если предварительно заменить дробь под знаком корня равной ей дробью 7/81, то дальше можно применять упомянутое свойство корней и переходить к выражению вида $\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{81}}$.

Подобные тонкости в деталях разобраны в статье преобразование иррациональных выражений с использованием свойств корней.

Свойства корней лежат в основе двух следующих преобразований, называемых внесением под знак корня и вынесением из-под знака корня, к рассмотрению которых мы и переходим.

**Внесение множителя под знак корня**

Внесение множителя под знак подразумевает замену выражения $B\cdot\sqrt[n]{C}$, где *B* и *C* – некоторые числа или выражения, а *n* – натуральное число, большее единицы, тождественно равным выражением, имеющим вид $\sqrt[n]{B^n\cdot C}$ или $-\sqrt[n]{B^n\cdot C}$.

Например, иррациональное выражение $2\cdot\sqrt[3]{x}$ после внесения множителя *2* под знак корня принимает вид $\sqrt[3]{2^3\cdot x}$.

**Вынесение множителя из-под знака корня**

Преобразованием, в известном смысле обратным внесению множителя под знак корня, является вынесение множителя из-под знака корня. Оно состоит в представлении корня $\sqrt[n]{B^n\cdot C}$ в виде произведения $B\cdot\sqrt[n]{C}$ при нечетных *n* или в виде произведения $|B|\cdot\sqrt[n]{|C|}$ при четных *n*, где *B* и *C* – некоторые числа или выражения.

За примером вернемся в предыдущий пункт: иррациональное выражение $\sqrt[3]{2^3\cdot x}$ после вынесения множителя из-под знака корня принимает вид $2\cdot\sqrt[3]{x}$. Другой пример: вынесение множителя из-под знака корня в выражении $\sqrt{(x+1)^2\cdot 7}$ дает произведение $|x+1|\cdot\sqrt{|7|}$, которое можно переписать в виде $|x+1|\cdot\sqrt{7}$.

**Решение заданий:**

№1.

Пример 1: Упростить выражение:

а) $\sqrt{a^2b^4}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^4}=ab^2;$

б) $\sqrt{\dfrac{16a^4}{9b^6}}=\dfrac{\sqrt{16a^4}}{\sqrt{9b^6}}=\dfrac{4a^2}{3b^3}.$

Пример 2: Вынести множитель из-под знака квадратного корня:

а) $\sqrt{81a}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{a}=9\sqrt{a};$

б) $\sqrt{32a^2}=\sqrt{16\cdot a^2\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{2}=4a\sqrt{2};$

в) $\sqrt{9a^7b^5}=\sqrt{9\cdot a^6\cdot a\cdot b^4\cdot b}=$
$=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^4}\cdot\sqrt{b}$

№2.

**Упростите выражения:**

а) $4\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$;

б) $\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$;

в) $\left(\sqrt{5}-2\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

а) $7\sqrt{3}-\sqrt{48}+\sqrt{27}$;

б) $\sqrt{2}\left(\sqrt{8}+4\sqrt{2}\right)$;

в) $\left(\sqrt{3}+5\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$.

№3. Вычислить:

| | |
|---|---|
| **1)** | $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-4\right)^2}$ |
| 2) | $\sqrt{\left(3-\sqrt{17}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{17}-5\right)^2}$ |
| 3) | $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{10}-4\right)^2}$ |
| 4) | $\sqrt{\left(\sqrt{15}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$ |
| 5) | $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}$ |

**Практическая работа №11**

**Тема 3.2** Преобразование иррациональных выражений

**Цель**: Научиться преобразовывать дробные иррациональные выражения

**Теоретическая часть:**

**Преобразование дробей, содержащих корни**

Иррациональные выражения могут содержать дроби, в числителе и знаменателе которых присутствуют корни. С такими дробями можно проводить любые из основных *тождественных преобразований дробей*.

Во-первых, ничто не мешает работать с выражениями в числителе и знаменателе. В качестве примера рассмотрим дробь $\frac{(2+3)\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+5}}}$. Иррациональное выражение в числителе, очевидно, тождественно равно $5\cdot\sqrt[4]{x}$, а, обратившись к свойствам корней, выражение в знаменателе можно заменить корнем $\sqrt[6]{x^2+5}$. В результате исходная дробь преобразуется к виду $\frac{5\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x^2+5}}$.

Во-вторых, можно изменить знак перед дробью, изменив знак числителя или знаменателя. Например, имеют место такие преобразования иррационального выражения: $-\frac{x+2\cdot\sqrt{x}}{-3\cdot x^2+\sqrt[4]{7}}=\frac{x+2\cdot\sqrt{x}}{-\left(-3\cdot x^2+\sqrt[4]{7}\right)}=\frac{x+2\cdot\sqrt{x}}{3\cdot x^2-\sqrt[4]{7}}$.

В-третьих, иногда возможно и целесообразно провести сокращение дроби. К примеру, как отказать себе в удовольствии сократить дробь $\frac{3\cdot\left(\sqrt[3]{x+4}-1\right)\cdot\sqrt{x}}{\left(\sqrt[3]{x+4}-1\right)^3}$ на иррациональное выражение $\sqrt[3]{x+4}-1$, в результате получаем $\frac{3\cdot\sqrt{x}}{\left(\sqrt[3]{x+4}-1\right)^2}$.

Понятно, что во многих случаях, прежде чем выполнить сокращение дроби, выражения в ее числителе и знаменателе приходится раскладывать на множители, чего в простых случаях позволяют добиться формулы сокращенного умножения. А иногда сократить дробь помогает замена переменной, позволяющая от исходной дроби с иррациональностью перейти к рациональной дроби, работать с которой комфортнее и привычнее.

Для примера возьмем выражение $2\cdot\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Введем новые переменные $u=\sqrt{x}$ и $v=\sqrt{x}$, в этих переменных исходное выражение имеет вид $2\cdot\frac{u^2-v^2}{u+v}$. Выполнив в числителе разложение многочлена на множители по формуле разность квадратов, получаем возможность сократить дробь на *u*+*v*, имеем $2\cdot\frac{u^2-v^2}{u+v}=2\cdot\frac{(u-v)\cdot(u+v)}{u+v}=2\cdot(u-v)$. Выполнив обратную замену, приходим к выражению $2\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$, которое тождественно равно исходному иррациональному выражению на ОДЗ.

В-четвертых, дроби с иррациональностью можно приводить к новому знаменателю, умножая ее числитель и знаменатель на дополнительный множитель. Например, приведем дробь $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{0{,}5\cdot\sqrt{x}}$ к новому знаменателю *x*. Для этого ее числитель и знаменатель следует умножить на иррациональное выражение $2\cdot\sqrt{x}$, имеем $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{0{,}5\cdot\sqrt{x}}=\frac{2\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{0{,}5\cdot\sqrt{x}\cdot2\cdot\sqrt{x}}=\frac{2\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{x}$.

Напомним, что выполнять сокращение дробей или приведение дробей к новому знаменателю необходимо на ОДЗ переменных для исходной дроби.

Умножение числителя и знаменателя дроби на некоторое иррациональное выражение часто используется для проведения преобразования, называемого избавлением от иррациональности в знаменателе. Разберем, как оно проводится.

**Избавление от иррациональности в знаменателе**

Избавлением от иррациональности в знаменателе называют преобразование, при котором дробь заменяется тождественно равной дробью, не содержащей в знаменателе знаков корней.

Например, замена дроби $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ дробью $\frac{\sqrt[3]{9}\cdot x}{3}$ есть освобождение от иррациональности в знаменателе.

**Переход от корней к степеням**

Переход от корней к степеням при преобразовании иррациональных выражений проводится на базе равенства $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, с помощью которого дается определение степени с рациональным показателем. Им безбоязненно можно пользоваться, когда *a* – положительное число, *m* – целое число, а *n* - натуральное. Например, корень $\sqrt[3]{5^{-2}}$ можно заменить степенью с дробным показателем вида $5^{-\frac{2}{3}}$.

Если же под корнем находится отрицательное число или выражение с переменными, то формулой $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ надо пользоваться аккуратно. Например, мы не имеем права сразу заменить корни $\sqrt[5]{(-8)^3}$ и $\sqrt[4]{(-16)^2}$ степенями вида $(-8)^{\frac{3}{5}}$ и $(-16)^{\frac{2}{4}}$, так как формула $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ не имеет смысла для отрицательных *a*.

**Решение заданий:**

№1. Преобразовать дробь:

$$\frac{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3a}}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right).$$

1) $a\sqrt{a}+3\sqrt{3}=\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{3}\right)^3=\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=$
$=\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)\left(a-\sqrt{3a}+3\right);$

2) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3a}=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)+\sqrt{3a}=$
$=a-\underline{2\sqrt{3a}}+3+\underline{\sqrt{3a}}=$

№2. Преобразовать выражение:

а) $\dfrac{x-10\sqrt{x}+25}{3\sqrt{x}+12}:\dfrac{2\sqrt{x}-10}{x-16};$

б) $\dfrac{1-a}{4\sqrt{a}+8\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{3-3\sqrt{a}};$

в) $\dfrac{c-25}{c+12\sqrt{c}+36}\cdot\dfrac{3\sqrt{c}+18}{2\sqrt{c}+10};$

г) $\dfrac{5\sqrt{m}-10\sqrt{n}}{\sqrt{m}-5}:\dfrac{4n-4\sqrt{mn}+m}{15-3\sqrt{m}}.$

№3. Выполнить задания:

● **1. Упростите выражение:**

а) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$; б) $(\sqrt{50}-2\sqrt{2})\sqrt{2}$; в) $(2-\sqrt{3})^2$.

● **2. Сравните** $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{45}$.

**3. Сократите дробь:**

а) $\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{15}}$; б) $\frac{a-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-6}$.

**4. Освободите дробь от знака корня в знаменателе:**

а) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

**5. Докажите, что значение выражения**

$$\frac{1}{2\sqrt{7}-1}-\frac{1}{2\sqrt{7}+1}$$

**есть число рациональное.**

**6. При каких значениях $x$ дробь $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}$ принимает наибольшее значение?**

## Практическая работа №12

**Тема 3.3** Решение иррациональных уравнений

**Цель**: Научиться решать иррациональные уравнения

**Теоретическая часть:**

**Определение. Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.**

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

1)возведение в соответствующую степень обе части уравнения;

2) введение новой переменной;

3) сведение к системе уравнений;

4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

При решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x),$$

при решении которого важную роль играет четность или нечетность ***n***.

Если ***n***- нечетное, то данное уравнение равносильно уравнению

$f(x)=(g(x))^n$.

Если ***n*** - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $f(x)\geq 0$. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

**Пример 1.**

Решить уравнение $\sqrt{x-3} = 5$.

**Решение**. Так как ***n=2*** - четное, то обе части уравнения возводим во 2ю степень: $(\sqrt{x-3})^2 = 5^2 \Leftrightarrow x - 3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$

**Ответ:** 28

**Пример 2.**

Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$.

**Решение.** Так как в данном примере ***n=3*** - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

$$x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

**Ответ:** $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}$.

**Пример 3.**

Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 2 - x$.

**Решение**. Так как ***n=2*** - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 1 = (2-x)^2 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 - 4x + x^2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}.$$

**Ответ:** $x = (5 - \sqrt{13})/2$.

Уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, решаются следующим образом:

***n*** – нечетное $\Rightarrow$ *f(x) = g(x)*

***n*** - четное $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

**Пример 4.**

Решить уравнение: $\sqrt[4]{5 - x} = \sqrt[4]{4x + 2}$

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ 4x + 2 \geq 0 \\ 5 - x = 4x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -0{,}5 \\ x = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: 0,6

**Пример 5.**

Решить уравнение: $\sqrt{2x + 6} - \sqrt{x + 1} = 0$

**Решение.** Запишем данное уравнение в виде: $\sqrt{2x + 6} = \sqrt{x + 1}$. Возводя обе части в квадрат и учитывая, что $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \end{cases}$ получим уравнение *2x+6=x+1*, решение которого есть $x = -5$ – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

**Ответ:** нет решений

Если иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

**Пример 6.**

Решить уравнение $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1$.

**Решение.** Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9}=1+\sqrt{x-3}$. Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x-9=1+x-3+2\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x-7=\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7\ge 0 \\ (x-7)^2=4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-14x+49=4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-18x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 7 \\ x=9\pm\sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=9+\sqrt{20}.$$

**Ответ:** $x=9+\sqrt{20}$.

Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

**Пример 7.**

Решить уравнение $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-5}=10$.

**Решение.** Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде $x^2+3x-5+4\sqrt{x^2+3x-5}=5$ и введем «новую» переменную:

$$y=\sqrt{x^2+3x-5},\ y\ge 0.$$

Получим

$$y^2+4y-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$$

Вернемся к «старым» переменным $\sqrt{x^2+3x-5}=1$ или $\sqrt{x^2+3x-5}=-5$. Второе из полученных уравнений решений не имеет, а решения первого есть числа $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

**Ответ:** $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2},\ x_2=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Иногда при решении иррационального уравнения возникает необходимость ввести не одну, а несколько «новых» переменных. Такая ситуация возникает, например, при решении уравнений, содержащих радикалы разных степеней.

Пример 8**.**

Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{11-x}=1$.

**Решение.** Пусть $u=\sqrt{x-2}\geq 0$ и $v=\sqrt[3]{1-x}$. Тогда $u+v=1$. С другой стороны $u^2+v^3=x-2+11-x=9$. Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ (1-v)^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ v^3+v^2-2v-8=0 \end{cases}.$$

Решим последнее уравнение системы:

$$v^3+v^2-2v-8=0 \Leftrightarrow (v^3-8)+v(v-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(v-2)(v^2+2v+4+v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow v=2.$$

Получим, что $v=2$, а тогда $u=1-v=-1<0$. По условию $u\geq 0$, следовательно исходное уравнение решений не имеет.

**Ответ:** нет решений.

При решении некоторых иррациональных уравнений нахождение области допустимых значений входящих в уравнение неизвестных может существенно облегчить решение уравнения.

При решении иррациональных уравнений бывает полезно воспользоваться монотонностью функций.

Пример 10**.**

Решить уравнение $\sqrt{2(x+6)}=6-\sqrt[3]{x+6}$.

**Решение.** Один корень данного уравнения $x=2$ легко найти подбором. Покажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}=6$.

По свойству степенных функций функции $y_1(x)=\sqrt{2(x+6)}$ и $y_2(x)=\sqrt[3]{x+6}$ являются возрастающими на промежутке $[-6;\infty)$, где они обе определены. Поэтому их сумма $y(x)=\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}$ на этом промежутке также возрастает, следовательно, она принимает каждое свое значение (в том числе и 6) только один раз. Поэтому других корней нет.

**Ответ:** $x=2$.

**Решение заданий:**

№1. Решить уравнения:

1) $\sqrt{x-2}=1$,

2) $\sqrt{x-1}=-3$,

3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$,

4) $\sqrt{\frac{1}{5-2x}}=\frac{1}{3}$

№2. Решить уравнения:

1) $\sqrt{-72-17x}=-x$,

2) $\sqrt{x^2+7x-2}=6-x$,

3) $\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{-2x}$.

№3. Решить уравнения:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}=4$,

2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{11-x}$.

№4. Решить уравнения:

1) $\frac{4}{\sqrt[5]{x}+2}+\frac{\sqrt[5]{x}+3}{5}=2$

2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$

3) $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=\frac{10}{3}$

№5. Решить уравнения:

1) $(x^2-4x+3)\sqrt{5x-2-2x^2}=0$,

2) $\sqrt{x-1}\sqrt{x-2}\sqrt{x-3}=0$.

## Практическая работа №13

**Тема 3.4** Показательная функция, ее свойства. Решение показательных уравнений и неравенств

**Цель**: Научиться решать показательные уравнения

**Теоретическая часть:**

*Определение* Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется показательным.

Примеры показательных уравнений:

1. $2^x=4$;
2. $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$;
3. $3^{2x}-3^x+1=0$;
4. $3^x+4^x=5^x$;
5. $4^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}+1=0$;
6. $9^{x+1}-43\cdot 2^{2x+3}+6^{3-x}=0$.

Выберите показательные уравнения:

$1) 2x^2 - x + 3 = 0;$

$2) 3^x - 2^x = 0;$

$3) \left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{1}{3} = 0;$

$4) 25^x - 5^x + 2 = 0;$

$5) \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 1 = x;$

$6) \left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{2};$

$7) x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2;$

$8) 5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4{,}8.$

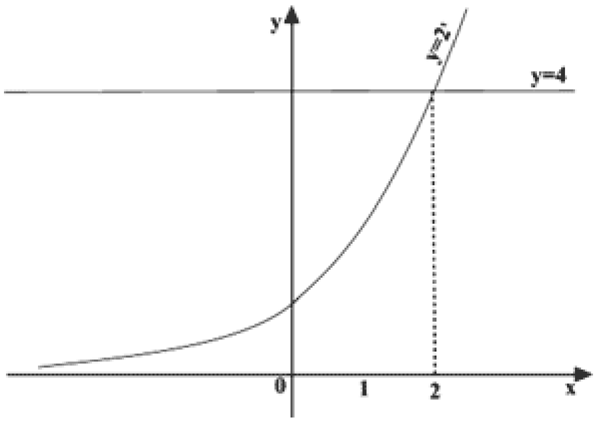
**Способы решения показательных уравнений**

Выделяют две группы способов: графический и аналитические.

Вспомним суть графического способа решения уравнений:

1. Построить графики двух функций (левая и правая части уравнения);
2. Найти абсциссы точек пересечения графиков;
3. Записать ответ.

Рассмотрим графический способ решения на примере уравнения $2^x = 4$ Построим графики функций $y = 2^x$, $y = 4$ и найдем абсциссу точки пересечения графиков: $x = 2$.




Ответ: $x = 2$

Графический способ можно применить не всегда, поэтому рассмотрим более универсальные основные аналитические способы решения показательных уравнений.

Аналитические способы:

1. Приравнивание показателей;
2. Вынесение общего множителя за скобки;
3. Введение новой переменной;
4. Использование однородности.

Рассмотрим каждый способ подробнее и разберем на примере.

1. Приравнивание показателей.

Суть метода:

1. Уединить слагаемое, содержащее переменную;
2. Привести степени к одному основанию;
3. Приравнять показатели;

4. Решить полученное уравнение;
5. Записать ответ.
Пример:
$3^x - 27 = 0.$

$3^x = 27;$

$3^x = 3^3;$

$x = 3.$
Ответ: $x = 3$
2. Вынесение общего множителя за скобки
Примечание: выносим за скобки множитель с меньшим показателем.
Пример:
$3^x - 3^{x+3} = -78.$
$3^x\left(1 - 3^3\right) = -78;$

$3^x(1 - 27) = -78;$

$3^x(-26) = -78;$

$3^x = 3;$

$x = 1.$
Ответ: $x = 1$
3. Введение новой переменной
Как правило, уравнения, решаемые этим способом, сводятся к квадратным.
Пример: $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$
Пусть $4^x = a$ тогда уравнение можно записать в виде:
$a^2 - 5a + 4 = 0;$

$D = 25 - 16 = 9;$

$a_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4;$

$a_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1.$

Сделаем обратную замену:
$4^x = 4$ или $4^x = 1;$
$x = 1$ или $x = 0$
Ответ: $x = 1$ или $x = 0$
4. Использование однородности

*Определение* Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ называются однородными.

Суть метода: Так как показательная функция не может принимать значение, равное нулю, и обе части уравнения можно делить на одно и то же не равное нулю число, разделим обе части уравнения, например, на $b^{f(x)}$.

Пример: $2^x = 3^x$

Разделим обе части уравнения на $3^x \neq 0$:

$\dfrac{2^x}{3^x} = \dfrac{3^x}{3^x};$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1;$

$x = 0.$

Ответ: $x = 0$

**Решение заданий:**

№1. Решить уравнения:

1) $2^x = 16$;

2) $0{,}5^x = 0{,}125$; 7) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$;

3) $4^x = \frac{1}{16}$; 8) $2^{x+1} = 4$;

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$; 9) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$;

5) $10^x = \sqrt[3]{100}$; 10) $6^{2x-8} = 216^x$;

6) $0{,}3^x = \frac{1000}{27}$; 11) $3^{x^2-4{,}5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$.

№2.Решите уравнение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$; г) $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$;

б) $4^x + 2^x - 20 = 0$; д) $3^x - 2 = -2x + 3$.

в) $5^x - 7 \cdot 5^{x-2} = 90$;

№3.Решите уравнение:

а) $(0{,}1)^{2x-3} = 10$; г) $3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^x$;

б) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 2x + 1$.

***1.*** в) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$;

№4. Решить уравнение:

1) $(0{,}2)^{2-3x} = 25$; 2) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

№5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ 5^{x+y} = 25. \end{cases}$

№6.Решить уравнение

1) $7^{x+1} + 5 \cdot 7^x = 588$

2) $3^{x+3} + 4 \cdot 3^x = 279$

## Практическая работа №14

**Тема 3.4** Показательная функция, ее свойства. Решение показательных уравнений и неравенств

**Цель**: Научиться решать показательные неравенства

**Теоретическая часть:**

Простейшее **показательное неравенство** имеет вид:

$a^{f(x)}$ V $a^{g(x)}$, где V - один из знаков: <,>,≤, или ≥.

Чтобы решить **показательное неравенство**, нам нужно от сравнения степеней перейти к сравнению показателей.

Как мы помним, показательная функция $y=a^{f(x)}$ возрастает при всех действительных значениях $x$, если $a>1$. Это значит, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. То есть из неравенства

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ следует неравенство $f(x)>g(x)$

Аналогично, так как показательная функция убывает, если $0<a<1$, и большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, из неравенства

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ следует неравенство $f(x)<g(x)$

То есть **при решении простейших показательных неравенств прежде чем сравнивать выражения, стоящие в показателе степени, нужно сравнить с единицей основание степеней**.

Ещё раз, **это важно**:

если **основание степени больше единицы**, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, **знак неравенства сохраняется**

если **основание степени больше нуля, но меньше единицы**, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, **знак неравенства меняется на противоположный**.

Все показательные неравенства любого уровня сложности, в конечном итоге, сводятся к решению простейших показательных неравенств.

Рассмотрим несколько примеров.

**1**. Решим неравенство:

$$(0,3)^{\frac{x}{x-2}}<(0,3)^{\frac{6}{x-1}}$$

Так как основание степеней $0,3<1$, при переходе к выражениям, стоящим в показателе, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{x}{x-2}>\frac{6}{x-1}$$

Перенесем все влево, и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-2}-\frac{6}{x-1}>0$$

$$\frac{x(x-1)-6(x-2)}{(x-1)(x-2)}>0$$

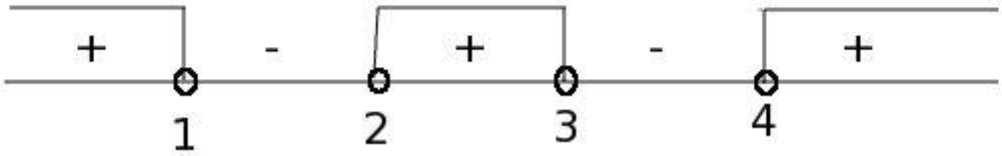
$$\frac{x^2-7x+12}{(x-1)(x-2)}>0$$

Корни числителя:

$x_1=3$, $x_2=4$

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)}>0$$

Решим неравенство методом интервалов: нанесем корни числителя и знаменателя на числовую ось и расставим знаки:




**Ответ:** $x<1$, $2<x<3$, $x>4$

**2**. Решим неравенство:

$25^{x}<6\times5^{x}-5$

Перенесем все слагаемые влево и разложим основания степеней на простые множители:

$5^{2x}-6\times5^{x}+5<0$

Если бы это было уравнение, мы решали бы его с помощью замены переменной. Поступим также.

Вообще, показательные неравенства делятся на те же типы, что и показательные уравнения, и решаются теми же способами.

**Внимание! Если мы решаем неравенство с помощью замены переменных, то нужно решать относительно замены до получения простейшего неравенства**. Поясним на этом примере.

Введем замену: $t=5^{x}$, $t>0$

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} t^{2}-6t+5<0 \\ t>0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 1<t<5 \\ t>0 \end{cases}$$

То есть $1<t<5$

Запишем двойное неравенство в виде системы:

$$\begin{cases} t>1 \\ t<5 \end{cases}$$

Вот теперь мы можем вернуться к исходной переменной:

$$\begin{cases} 5^{x}>1 \\ 5^{x}<5 \end{cases}$$

Отсюда: $x>0$, $x<1$

**Ответ:** $0<x<1$

**Решение заданий:**

№1. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}>1\frac{1}{3}$;

б) $\left(\sqrt{5}\right)^{x-6}<\frac{1}{5}$;

г) $7{,}3^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}<1$;

д) $5\cdot4^{x}+2\cdot25^{x}\leq7\cdot10^{x}$.

в) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1$;

№2. Решите неравенство:

а) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{x} < \frac{5}{6}$;

б) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x+6} > \frac{1}{9}$;

в) $\left(1\frac{2}{7}\right)^{x^2-4} \leq 1$;

г) $0{,}5^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} > 1$;

д) $2\cdot 4^{x} + 25^{x+0,5} \geq 7\cdot 10^{x}$.

№3. Решите неравенство:

а) $5^{4x+2} \geq 125$

б) $0{,}01 < 10^{2-x} < 10000$

в) $\left(\frac{5}{3}\right)^{3x-8} < \left(\frac{25}{9}\right)^{x-3}$

г) $1 \leq 6^{1-x} \leq 216$

№4.Выполнить задания

А) Сравните числа *m* и *n*, если:

1) $(9{,}8)^m > (9{,}8)^n$; 2) $(0{,}6)^m < (0{,}6)^n$.

Б) Сравните числа *a* и *b*, если:

1) $(7{,}6)^a > (7{,}6)^b$; 2) $(0{,}3)^a < (0{,}3)^b$.

№5. Найдите множество решений неравенства

1) $\left(\frac{6}{11}\right)^{5x} \geq \left(\frac{6}{11}\right)^{3x-5}$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{6x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{x+8}$

№6. Решите неравенство:

1) $0{,}2^{\frac{x^2-2x-24}{x-2}} \leq 0{,}0016$; 2) $2^{2x+1} - 5\cdot 2^{x} + 2 \geq 0$;

3) $0{,}3^{\frac{x^2+x-15}{x+3}} \geq 0{,}027$; 4) $5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x} - 75 \geq 0$.

## Практическая работа №15

**Тема 3.5** Логарифм числа. Свойства логарифмов

**Цель**: Научиться вычислять логарифмы и упрощать выражения, содержащие логарифм

**Теоретическая часть:**

**Логарифм** числа $b$ по основанию $a$ определяется как показатель степени, в которую надо возвести число $a$, чтобы получить число $b$ (Логарифм существует только у положительных чисел).

Логарифм в переводе с греческого буквально означает "число, изменяющее отношение".

**Специальные обозначения:**

1. Натуральный логарифм $\ln a$ - логарифм по основанию $e$,
2. Десятичный логарифм $\lg a$ - логарифм по основанию 10.

**Свойства логарифмов:**

1° $a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество.

2° $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$

3° $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4° $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

5° $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

6° $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ -

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.

7° $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

8° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9° $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - переход к новому основанию.

**Решение заданий:**

№1. Найдите значение выражения:

$$6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7}$$

$$6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7} = 6 \cdot \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_7 7 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 2$$

Использовали:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Ответ: 2

№2. Найдите значение выражения $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25$

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1{,}25 = \frac{1}{\log_3 0{,}8} \cdot \log_3 1{,}25 = \frac{\log_3 1{,}25}{\log_3 0{,}8} =$$

$$= \log_{0,8} 1{,}25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = \log_{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}} \frac{5}{4} = \frac{1}{-1} \cdot \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{4} = -1 \cdot 1 = -1$$

Использовали:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Ответ: −1

№3.Найдите значение выражения:

$$5^{\log_{25} 49}$$

$$5^{\log_{25} 49} = 5^{\log_{25} 7^2} = 5^{\,2 \cdot \log_{25} 7} = (5^2)^{\log_{25} 7} =$$

$$= 25^{\log_{25} 7} = 7$$

Ответ: 7

№4. Найдите значение выражения:

$$8^{2 \cdot \log_8 3}$$

$$8^{2 \cdot \log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Ответ: 9

№5.Найдите значение выражения:

$$64^{\log_8 \sqrt{3}}$$

$$64^{\log_8 \sqrt{3}} = (8 \cdot 8)^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^{\log_8 \sqrt{3}} \cdot 8^{\log_8 \sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Ответ: 3

№6. Найдите значение выражения:

$$\frac{24}{3^{\log_3 2}}$$

$$\frac{24}{3^{\log_3 2}} = \frac{24}{2} = 12$$

Ответ: 12

№7. Найдите значение выражения:

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$$

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{0,5} = \frac{1}{-1} \cdot \log_{13} 13^{0,5} = -1 \cdot 0,5 = -0,5$$

Ответ: – 0,5

№8 . Найдите значение выражения $\log_3 8,1 + \log_3 10$.

$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3(8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

Ответ: 4

№9. Найдите значение выражения:

$$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$$

$$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \log_{13} \sqrt{13} = \log_{13} 13^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

№10. Вычислите значение выражения:

$$\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$$

$$\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$$

Ответ: 3

№11. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = 1/7$.

Преобразуем данное выражение:

$$\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3\log_a b$$

Определим значение выражения $\log_a b$. Нам известно, что

$$\log_b a = \frac{1}{7}$$

Используем свойство:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{\log_a b}$$

Следовательно $\log_a b = 7$.

Таким образом:

$$1 + 3\log_a b = 1 + 3 \cdot 7 = 22$$

Ответ: 22

№12. Найдите $\log_a(a:b^3)$, если $\log_a b = 5$.

$$\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3 = 1 - 3\log_a b =$$

$$= 1 - 3 \cdot 5 = -14$$

Ответ: –14

№13. Найдите $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_a b = –2$.

$$\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2\log_a a + 3\log_a b =$$

$$= 2 \cdot 1 + 3\log_a b = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$$

Ответ: –4

№14. Найдите значение выражения $\log_a(a^4b^9)$, если $\log_b a = 1/3$.

$$\log_a(a^4b^9) = \log_a a^4 + \log_a b^9 = 4\log_a a + 9\log_a b =$$

$$= 4 \cdot 1 + 9\log_a b$$

$$\log_b a = \frac{1}{3}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{\log_a b} \qquad \log_a b = 3$$

$$4 \cdot 1 + 9\log_a b = 4 + 9 \cdot 3 = 31$$

Ответ: 31

№15. Найдите $\log_a(a^7:b^3)$, если $\log_a b = 10$.

$$\log_a \frac{a^7}{b^3} = \log_a a^7 - \log_a b^3 = 7\log_a a - 3\log_a b =$$

$$= 7 \cdot 1 - 3 \cdot 10 = -23$$

Ответ: –23

№16. Найдите $\log_a(ab^{10})$, если $\log_a b = 7$.

$$\log_a(ab^{10}) = \log_a a + \log_a b^{10} = 1 + 10\log_a b =$$

$$= 1 + 10 \cdot 7 = 71$$

Ответ: 71

## Практическая работа №16

**Тема 3.6** Логарифмическая функция, ее свойства. Логарифмические уравнения и неравенства

**Цель**: Научиться решать логарифмические уравнения и неравенства

**Теоретическая часть:**

**Теорема 1.** Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

**Пример 1.** Решите уравнение:

$$\lg(x^2 - 6) = \lg(8 + 5x).$$

**Решение.** В область допустимых значений входят только те $x$, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 6 > 0, \\ 8 + 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 6, \\ x > -1,6. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty), \\ x \in (-1,6; +\infty). \end{cases}$$

С учетом того, что

$$-1,6 = -\sqrt{2,56} > -\sqrt{6},$$

получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

$$x \in (\sqrt{6}; +\infty).$$

На основании теоремы 1, все условия которой здесь выполнены, переходим к следующему равносильному квадратичному уравнению:

$$x^2 - 6 = 8 + 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1 = 7,\ x_2 = -2.$$

В область допустимых значений входит только первый корень.

**Ответ:** x = 7.

**Пример 2.** Решите уравнение:

$$\log_{0,2}(-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2}(-x - 31).$$

**Решение.** Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 > 0, \\ -x - 31 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 5, \\ x < -31. \end{cases}$$

Очевидно, что эти два условия противоречат друг другу. То есть нет ни одного такого значения *x*, при котором одновременно выполнялись бы оба неравенства. Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит решений у данного логарифмического уравнения нет.

**Ответ:** корней нет.

Обратите внимание, что в этом задании нам вообще не пришлось искать корни уравнения. Достаточно оказалось определить, что его область допустимых значений не содержит ни одного действительно числа. Это одно из преимуществ такой последовательности решения логарифмических уравнений и неравенств (начинать с определения области допустимых значений уравнения, а затем решать его путем равносильных преобразований).

**Примет 3.** Решите уравнение:

$$3\log^2_{\frac{1}{2}} x + 5\log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0.$$

**Решение.** Область допустимых значений уравнения определяется здесь легко: $x > 0$. Используем подстановку:

$$t = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

Уравнение принимает вид:

$$3t^2 + 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{3}, \\ t_2 = -2. \end{array} \right.$$

Обратная подстановка:

$$\left[ \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{3}, \\ \log_{\frac{1}{2}} x = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x = 4. \end{array} \right.$$

Оба **ответа** входят в область допустимых значений уравнения, поскольку являются положительными числами.

**Пример 4.** Решите уравнение:

$$\log_{0,4}(x + 2) + \log_{0,4}(x + 3) = \log_{0,4}(1 - x).$$

**Решение.** Вновь начнем решение с определения области допустимых значений уравнения. Она определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+3>0, \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>-3, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;1).$$

Воспользовавшись правилом сложения логарифмов, переходим к равносильному в области допустимых значений уравнению:

$$\log_{0,4}(x+2)(x+3) = \log_{0,4}(1-x) \Rightarrow$$

Основания логарифмов одинаковы, поэтому в области допустимых значений можно перейти к следующему квадратному уравнению:

$$(x+2)(x+3) = (1-x) \Leftrightarrow x^2+6x+5=0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1=-5, \\ x_2=-1. \end{array}\right.$$

Первый корень не входит в область допустимых значений уравнения, второй — входит.

**Ответ:** $x = -1$.

**Пример 5.** Решите уравнение:

$$x^{\log_3 x} = 81.$$

**Решение.** Будем искать решения в промежутке $x > 0$, $x \neq 1$. Преобразуем уравнение к равносильному:

$$x^{\log_3 x} = x^{\log_x 81} \Leftrightarrow x^{\log_3 x} = x^{\frac{4}{\log_3 x}} \Leftrightarrow$$
$$\log_3^2 x = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2, \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=\frac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Оба **ответа** входят в область допустимых значений уравнения.

**Пример 6.** Решите уравнение:

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1.$$

**Решение.** Система неравенств, определяющая область допустимых значений уравнения, имеет на этот раз вид:

$$\begin{cases} x+12>0, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>0,\ x\neq 1.$$

Используя свойства логарифма, преобразуем уравнение к равносильному в области допустимых значений уравнению:

$$\frac{\log_2(x+12)}{2\log_2 x} = 1.$$

Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получаем:

$$\log_x(x+12) = 2 \Rightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=-3. \end{array}\right.$$

В область допустимых значений входит только один **ответ:** $x = 4$.

Перейдем теперь к ***логарифмическим неравенствам***. Это как раз то, с чем вам придется иметь дело на ЕГЭ по математике. Для решения дальнейших примеров нам потребуется следующая теорема:

**Теорема 2.**

Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:

при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;

при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

**Пример 7.** Решите неравенство:

$$\log_{0,5}(x^2 + x - 6) \geqslant \log_{0,5}(x + 4).$$

**Решение.** Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty), \\ x > -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup (2; +\infty).$$

Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

$$x^2 + x - 6 \leqslant x + 4 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 10 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}].$$

Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем **ответ:**

$$x \in [-\sqrt{10}; -3) \cup (2; \sqrt{10}].$$

**Пример 8.** Решите неравенство:

$$11 \cdot \log_9(x^2 - 12x + 27) \leqslant 12 + \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3}.$$

**Решение.** Вновь начнем с определения области допустимых значений:

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 27 > 0, \\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty).$$

На множестве допустимых значений неравенства проводим равносильные преобразования:

$$11 \cdot \log_9(x-9)(x-3) - \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} \leqslant 12$$

$$\log_9 \left[(x-9)^{11}(x-3)^{11}\right] - \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} \leqslant 12$$

$$\log_9 \frac{(x-3)^{12}(x-9)^{11}}{(x-9)^{11}} \leqslant \log_9 9^{12}.$$

После сокращения и перехода к равносильному по теореме 2 неравенству получаем:

$$(x-3)^{12} \leqslant 9^{12} \Leftrightarrow -9 \leqslant x - 3 \leqslant 9 \Leftrightarrow x \in [-6; 12].$$

С учетом области допустимых значений получаем окончательный **ответ:**

$$x \in [-6; 3) \cup (9; 12].$$

**Пример 9.** Решите логарифмическое неравенство:

$$\log_{x+1}(x^3 + 3x^2 + 2x) < 2.$$

**Решение.** Область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ x(x+1)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;+\infty).$$

Видно, что в области допустимых значений выражение, стоящее в основании логарифма, всегда больше единицы, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему неравенству:

$$x^3+3x^2+2x<x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^3+2x^2-1<0 \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(x^2+x-1)<0 \Leftrightarrow$$
$$x\in\left(-\infty;-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(-1;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

С учетом области допустимых значений получаем окончательный ответ:

$$x\in\left(0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

**Пример 10.** Решите неравенство:

$$\frac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2}\leqslant 1.$$

**Решение.**

Область допустимых значений неравенства определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x>0, \\ x^2>0, \\ x^2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(4;+\infty).$$

**I способ.** Воспользуемся формулой перехода к новому основанию логарифма и перейдем к равносильному в области допустимых значений неравенству:

$$\log_{x^2}(x^2-4x)^2\leqslant 1.$$

Неравенство будет равносильно двум системам. Первой:

$$\begin{cases} x\in(-1;0), \\ (x^2-4x)^2\geqslant x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1;0), \\ x^2(x-5)(x-3)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$x\in(-1;0).$$

И второй:

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty), \\ x^2(x-5)(x-3)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;5].$$

Итак, окончательный **ответ:**

$$x\in(-1;0)\cup(4;5].$$

**II способ.** Решаем методом интервалов. Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{2\log_3(x^2-4x)-\log_3 x^2}{\log_3 x^2}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

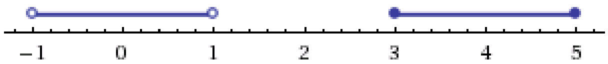
Вычтем из знаменателя $\log_3 1$. Это ничего не изменит, поскольку $\log_3 1 = 0$.

$$\frac{\log_3(x^2-4x)^2-\log_3 x^2}{\log_3 x^2-\log_3 1} \leqslant 0$$

С учетом того, что выражения $\log_3 f - \log_3 g$ и $f - g$ — одного знака при $f,\ g > 0$, в области допустимых значений имеет место следующий равносильный переход:

$$\frac{(x^2-4x)^2-x^2}{x^2-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-5x)(x^2-3x)}{x^2-1} \leqslant 0.$$




Множество решений данного неравенства

Итак, $x \in (-1;1) \cup [3;5]$, а с учетом области допустимых значений получаем тот же **результат**: $x \in (-1;0) \cup (4;5]$.

**Решение заданий:**

№1. Решить уравнения:

1. $\log_2(2x+1) = \log_2 3 + 1$;
2. $\log_7 2 - 1 = -\log_7(5-x)$;
3. $\frac{1}{2}\log_2(3x-2) = 3$;
4. $\log_{0,5}(3x-1) = -3$;
5. $2\log_3 2 - \log_3(x-1) = 1 + \log_3 5$;
6. $\log_7(x-1) = \log_7 2 + \log_7 3$;
7. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) - \log_{\frac{1}{2}} 16 = 5$;
8. $\lg(5x+2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;
9. $log_4^2 x - 5\log_4 x + 4 = 0$;
10. $lg^2 x = 3 - 2\lg x$.

№2. Решить уравнения:

1) $\lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8$;
2) $\lg(x+2) - \lg 5 = \lg(x-6)$;
3) $\lg(x-2) + \lg x = \lg 8$;
4) $\lg\sqrt{x-7} + \lg\sqrt{3x-8} = 1$;
5) $\log_5(x+10) = 2$;
6) $\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{3}$.

№3. Решить неравенства:

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-6) < \log_{\frac{1}{3}} x$

2. $\lg(2x-5) > 1$`

3. $\log_3 \dfrac{1+x}{2-x} < 2$

4. $\log_{\frac{1}{18}}(18x-2) \ge 0$

5. $\log_{20} x + \log_{20}(x-19) < 1$

**Практическая работа №17**

**Тема 3.7** Логарифмы в природе и технике

**Цель**: Научиться выявлять проявление логарифмической спирали в природе.

**Теоретическая часть:**

На протяжении 16 века быстро возрастало количество приближенных вычислений, прежде всего, в астрономии. Многие работы требовали колоссальных, иногда многолетних, расчетов. Астрономам грозила реальная опасность утонуть в невыполненных расчетах. Тогда математики для облегчения вычислений придумали логарифмы. И в 1614 году были опубликованы первые логарифмические таблицы, составленные шотландским математиком Джоном Непером (1550–1617), они верой и правдой служили астрономам и инженерам, геодезистам и морякам, сокращая время на вычисления.

Ряд явлений природы помогает описать именно логарифмическая зависимость. Для составления математической модели того или иного явления часто обращаются к логарифмической функции. Одним из наиболее наглядных примеров такого обращения является логарифмическая спираль. Логарифмическая спираль – это плоская кривая линия многократно обходящая одну из точек на плоскости.

**Где же применяются логарифмы?**

**Применение в астрономии.**

В астрономии логарифмы имеют очень обширное распространение. В этой науке задействованы очень большие масштабы. По логарифмическим спиралям закручены многие галактики, в частности Галактика, которой принадлежит солнечная система. Астрономы распределяют звезды по степеням видимой яркости на светила первой величины, второй величины, третьей и т.д. Последовательные звездные величины воспринимаются глазом, как члены арифметической прогрессии. Но физическая яркость их изменяется по иному закону: объективные яркости составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собой не что иное, как логарифм ее физической яркости. Практически каждая вторая формула в астрономии, астрофизике и других перекрестных науках не обходятся без логарифма.

**Применение в биологии.**

Раковины многих моллюсков, улиток, а также рога архаров (горные козлы), закручены по логарифмической спирали. По логарифмической спирали очерчены не только раковины. Паук эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмическим спиралям.

**Применение в музыке**

Когда музыкант играет на рояле, собственно говоря, он играет на логарифмах. Так называемые «ступени» темперированной хроматической гаммы представляют собой логарифмы этих величин. Основание этих логарифмов равно 2. Номера клавишей рояля представляют собой логарифмы чисел – колебаний соответствующих звуков (умноженные на 12). Мы даже можем сказать, что номер октавы представляет собой целую часть (характеристику) логарифма числа колебаний этого тона, а номер звука в данной октаве, деленный на 12 – дробную часть (мантиссу) этого логарифма.

**Применение в психологии.**

Громкость звука измеряют в децибелах, которые пропорциональны логарифму мощности звука, воздействующего на ухо. Употребление логарифмических шкал продиктовано особенностями наших органов чувств: зрения, слуха и т.д. Человеческий мозг воспринимает раздражения от органов чувств не пропорционально силе раздражителя, а лишь пропорционально ее логарифму. Именно поэтому ухо одинаково способно слышать шорох листьев и не оглохнуть от громкого удара станка на заводе. А глаз может заметить, как блестит снег на свету и не ослепнуть, если посмотрит на Солнце, которое в миллиарды раз ярче. Описанные выше сведения объединяются законом психофизики, установленным Фехнером, который говорит, что мера ощущения пропорциональная логарифму величины раздражения.

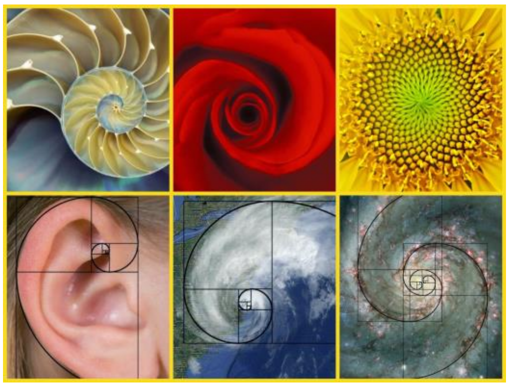
**Применение в сельском хозяйстве**

Как оказалось, и в сельском хозяйстве не обошлось без логарифмов. Например, исследовав рождение телят, оказалось, что их вес можно вычислять и с помощью логарифмов.

Область применения логарифмов не ограничивается лишь рассмотренными науками, также она играет важную роль в литературе, информатике, истории, рисовании и многих других. Логарифмическая функция дает нам возможность по-другому взглянуть на масштабные процессы, происходящие в огромных пространствах и временных интервалах для понимания и осмысления общей картины.

**Решение заданий:**

№1. Приведите примеры проявления логарифмической спирали в окружающем мире.



№2. В начальный момент времени было 8 бактерий. Через 2 часа после помещения бактерий в питательную среду, их число возросло до 100. Через сколько времени с момента размещения в питательную среду следует ожидать появления 500 бактерий?

**Решение.**

Для решения данной задачи, необходимо вспомнить понятия скорости и ускорения.

1 изменение: Было -8 Стало- 100 $\} => 8^x = 100 => x = log_8 100$

=> $log_8 100$ — конечное значение скорости распространения бактерий при первом изменении - $V_{кон.1}$.

2 изменение: Было -8 Стало- 500 $\} => 8^y = 500 => y = log_8 500$

=> $log_8 100$ —конечное значение скорости распространения бактерий при втором изменении - $V_{кон.2}$.

Перейдем к натуральному основанию логарифмов, для того, чтобы можно было воспользоваться табличными значениями:

$$\frac{ln\,100 - ln\,8}{2 * ln\,8} = \frac{ln\,500 - ln\,8}{t_1 * ln\,8}$$

$$t_1 = \frac{2 * (ln\,500 - ln\,8)}{\ln\left(\frac{100}{8}\right)}$$

**Ответ**: приблизительно 3 часа 15 минут.

## Практическая работа №18

**Тема 3.7** Логарифмы в природе и технике

**Цель**: Научиться использовать логарифмы в решении прикладных задач.

**Теоретическая часть:**

Логарифмические функции распространены чрезвычайно широко как в математике, так и в естественных науках. Приведём несколько примеров использования логарифмов в разнообразных науках.

В статистике и теории вероятностей логарифм входит в ряд практически важных вероятностных распределений. Например, логарифмическое распределение используется в генетике и физике. Логнормальное распределение часто встречается в ситуациях, когда исследуемая величина есть произведение нескольких независимых положительных случайных переменных.

Закон Бенфорда («закон первой цифры») описывает вероятность появления определённой первой значащей цифры при измерении реальных величин.

Для оценки неизвестного параметра широко применяются метод максимального правдоподобия и связанная с ним логарифмическая функция правдоподобия.

Флуктуации при случайном блуждании описывает закон Хинчина-Колмогорова.

В информатике: единица измерения информации (бит). Например, для хранения в компьютере натурального числа N (в обычном для компьютера двоичном формате) понадобится $\log_2 N + 1$ битов.

Информационная энтропия — мера количества информации.

Оценка асимптотической сложности рекурсивных алгоритмов, основанных на принципе «разделяй и властвуй» — таких как быстрая сортировка, быстрое преобразование Фурье и т. п.

Обычно числовые значения хранятся в памяти компьютера или специализированного процессора в формате с плавающей запятой. Если, однако, сложение и вычитание для группы данных выполняются редко, а умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня — гораздо чаще, тогда имеет смысл рассмотреть возможность хранения таких данных в логарифмическом формате. В этом случае вместо числа хранится логарифм его модуля и знак, и скорость вычислений благодаря свойствам логарифма значительно повышается. Логарифмический формат хранения был использован в нескольких системах, где доказал свою эффективность

Принцип Больцмана в статистической термодинамике — одна из важнейших функций состояния термодинамической системы, характеризующая степень её хаотичности.

Формула Циолковского применяется для расчёта скорости ракеты.

Уравнение Нернста связывает окислительно-восстановительный потенциал системы с активностями веществ, входящих в электрохимическое уравнение, а также со стандартными электродными потенциалами окислительно-восстановительных пар.

Логарифм используется в определениях таких величин, как показатель константы автопротолиза (самоионизации молекулы) и водородный показатель (кислотности раствора).

Логарифмическая спираль пересекает свои радиус-векторы под постоянным углом. На основании этого ее называют равноугольной. Это свойство находит свое применение в технике. Дело в том, что в технике часто применяются вращающиеся ножи. Сила с которой они давят на разрезаемый материал, зависит от угла резания, т.е. угла между лезвием ножа и направлением скорости вращения. Для постоянного давления нужно, чтобы угол резания сохранял постоянное значение, а это будет в том случае, если лезвия ножей очерчены по дуге логарифмической спирали. Величина угла резания зависит от обрабатываемого материала.

В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, проводящую поток воды к лопастям турбины. Благодаря такой форме трубы потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными и напор воды используется с максимальной производительностью.

Нажимая на клавиши современного рояля, мы, можно сказать, играем на логарифмах.

**Решение заданий:**

№1. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 20^0$С, через радиатор отопления, пропускают горячую воду температурой $T_в = 100^0$С. Расход проходящей через трубу воды m = 0,2 кг/с. Проходя по трубе расстояние *x* (м), вода охлаждается до температуры $T^0$С, при чём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$$

где c = 4200Дж/кг*С — теплоемкость воды

γ = 42 Вт/м $^*$ $^0$С— коэффициент теплообмена

*a* = 1,4 — постоянная.

До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м? (Ответ: 60°)

№2. Определить информацию, которую несет в себе один символ в кодировках ASCII и Unicode.

Решение.

1) В алфавите ASCII предусмотрено 256 различных символов, т.е.

M = 256, а I = $\log_2$ 256 = 8 бит = 1 байт

Ответ: 1 байт.

2) В современной кодировке Unicode заложено гораздо большее количество символов. В ней определено 256 алфавитных страниц по 256 символов в каждой.

Таким образом:
I = $\log_2$ (256 * 256) = 8 + 8 = 16 бит = 2 байта
Ответ: 2 байта.

## Практическая работа №19

**Тема 3.8** Контрольная работа по разделу 3 «Степени и корни. Степенная, показательная и логарифмическая функции»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 3 «Степени и корни. Степенная, показательная и логарифмическая функции»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. Между какими двумя натуральными числами находится число $\sqrt[3]{19}$?

а) 19 и 20; в) 18 и 19;

б) 2 и 3; г) 3 и 4.

2. Определите корень уравнения $x^3 = 125$.

а) 3; в) –5;

б) –3; г) 5.

3. Расположите в порядке возрастания числа: 2; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{17}$.

а) 2; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{17}$; в) $\sqrt[3]{5}$; 2; $\sqrt[4]{17}$;

б) 2; $\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[3]{5}$; г) $\sqrt[4]{17}$; 2; $\sqrt[3]{5}$.

4. Умножая числа с одинаковым основанием, их степени:

а) делят; в) складывают;

б) умножают; г) вычитают.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. Найдите корень уравнения: $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 12$.

6. Определите значение выражения $\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4}$.

7. Укажите наименьшее целое решение неравенства: $\log_3(6x - 4) > 2$.

8. Найдите точку максимума функции $y = 8\ln(x + 7) - 8x + 3$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | Б | Г | В | В | 1 | 5 | $x > 2\frac{1}{6}$ | |

## Практическая работа №20

**Тема 4.1** Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения

**Цель**: Научиться определять равносильность уравнений.

**Теоретическая часть:**

**Определение.** Два уравнения с одной переменной f(x) = g(x) и p(x) = h(x) называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

**Примеры**

1) Уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, т.к. каждое из них имеет только один корень x=3.

2) Уравнения $(x-2)(x+5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, т.к. у них одни и те же корни $x_1 = 2, x_2 = -5$.

3) А вот уравнения $3x = 6$ и $4x^2 = 16$ не равносильны, потому что у первого уравнения корень x=2, а у второго уравнения два корня x=2 и x=-2.

Из определения равносильности следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и наоборот.

**Решение уравнения осуществляется в три этапа.**

Первый этап — технический. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3)→ (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — анализ решения. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — проверка. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

**Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.**

- Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?
- Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?
- Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?
- В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Из курса средней школы мы знаем, что можно сделать следующие преобразования уравнений: любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одной и то же число, не равное нулю.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называет следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнения называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1. если ва уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;
2. если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное- не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Стоит отметить, что посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное; а вот потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, сформулируем основные теоремы, которые используются при решении равносильных уравнений:

**Определение.** Областью определения уравнения **f(x) = g(x)** или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной **x,** при которых одновременно имеют смысл выражения **f(x)** и **g(x).**

**Теорема 1**. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

**Теорема 2**. Если обе части уравнения возвести в одну и туже нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

**Теорема 3**. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a > 0, a≠1) равносильно уравнению f(x) = g(x).

**Теорема 4.** Если обе части уравнения f(x) = g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения f(x) = g(x)

б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение f(x)h(x) = g(x)h(x), равносильное данному в его ОДЗ.

**Следствием теоремы 4:** если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному**.**

**Теорема 5.** Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n = (g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.

**Краткая запись теорем 4, 5.**

**4.** f(x) = g(x) ⇔h(x)f(x) = h(x)g(x), где h(x) ≠0
и h(x) имеет смысл в ОДЗ данного уравнения.

**5.** f(x) = g(x) ⇔ $(f(x))^n = (g(x))^n$ , где f(x)≥0, g(x)≥0
и n=2k (чётное число).

**Например,** x – 1 = 3; x = 4

Умножим обе части на (x – 2):

(x – 2)(x – 1) = 3(x – 2); x = 4 и x = 2 – посторонний корень⇒ **проверка!**

**Равносильность неравенств** с неизвестным определяется аналогично.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

**Решение заданий:**

**Пример 1.**

Решим уравнение: $\sqrt{x} = x - 2$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$x = (x - 2)^2$, которое не будет равносильно исходному уравнению, потому что у этого уравнения два корня $x_1 = 1, x_2 = 4$, а у первоначального уравнения только один корень x=4.

**Пример 2.**

1. Неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и x-3<0 равносильны, так как имеют одно и то же множество решений x<3.

2. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и 2x>x-1 не равносильны, так как решениями первого являются числа x<-1 и x>1, а решениями второго- числа x>-1. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.

№1.

**Выбери равносильные уравнения.**

а) $3x - 6 = 9$ и $7 - 1,2x = 1$

б) $-1\frac{1}{7}x = 4$ и $-\frac{x}{7} = -\frac{1}{2}$

в) $(x-1)(x+2) = 0$ и $(x+1)(x-2) = 0$

г) $(2x - 18)(4,2 + 0,7x) = 0$ и $(5x + 30)(54 - 6x) = 0$

д) $(2x - 1) - (x + 3) = x$ и $\frac{7}{x+1} = 0$

е) $(2x - 1) - (x + 3) = x - 4$ и $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 1$

№2. Найти функцию, обратную к данной: а) $y = -3x + 2$; б) $y = 2 - x^3$

№3. Выяснить равносильны ли уравнения:

а) $2x^2 - 9x - 5 = 0$ и $x(6x - 13) = 14x + 15$

б) $5x^2 + 4x - 1 = 0$ и $x(2x + 11) = -6 - x^2$

№4. Решить уравнение:

а) $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1}$

б) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{3+4x}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{x+2}$

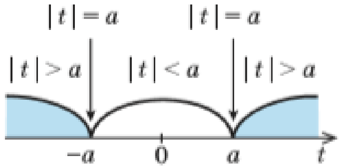
**Практическая работа №21**

**Тема 4.2** Уравнения и неравенства с модулем

**Цель**: Научиться решать уравнения и неравенства, содержащие знак модуля.

**Теоретическая часть:**

2. Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)




1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **или** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **или** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **или** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Обобщение

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **или** $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

3. Использование специальных соотношений

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0.$
2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0.$
3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2.$
4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$. **Тогда** $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0;$

***знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов.***

5. $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geqslant 0.$
8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leqslant 0.$
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, **где** $a < b$.

Объяснение и обоснование

Решать любое уравнение или неравенство, содержащее знак модуля, можно одним из трех основных способов: по определению модуля, исходя из геометрического смысла модуля или по общей схеме. Некоторые уравнения или неравенства с модулем могут быть также решены с использованием специальных соотношений.

В зависимости от выбранного способа решения получаем разные записи решения.

*Пример* 1. Решите уравнение $|2x - 4| = 6$.

I способ (по определению модуля)

| Решение | Комментарий |
| --- | --- |
| **1) Если $2x - 4 \geq 0$, (1)**<br>то получаем уравнение $2x - 4 = 6$. Тогда $x = 5$, что удовлетворяет и условию (1).<br>**2) Если $2x - 4 < 0$, (2)**<br>то получаем уравнение $-(2x - 4) = 6$. Тогда $x = -1$, что удовлетворяет и условию (2).<br>**Ответ: 5; –1.** | Чтобы раскрыть знак модуля по определению, рассмотрим два случая:<br>**$2x - 4 \geq 0$ и $2x - 4 < 0$**<br>По определению модулем положительного (неотрицательного) числа является само это число, а модулем отрицательного числа является противоположное ему число. Поэтому<br>**при $2x - 4 \geq 0$, $\lvert 2x - 4\rvert = 2x - 4$, а**<br>**при $2x - 4 < 0$, $\lvert 2x - 4\rvert = -(2x - 4)$.**<br>В каждом случае решаем полученное уравнение и выясняем, удовлетворяет ли каждый из найденных корней тому условию, при котором мы его находили. |

<u>II способ (использование геометрического смысла модуля)</u>

| Решение | Комментарий |
| --- | --- |
| $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$,<br>$2x = 10$ или $2x = -2$,<br>$x = 5$ или $x = -1$.<br>**Ответ: 5; –1.** | С геометрической точки зрения $\lvert 2x - 4\rvert$ — это расстояние от точки 0 до точки $2x - 4$.<br>По условию уравнения оно равно 6, но расстояние 6 может быть отложено от 0 как вправо (получаем число 6), так и влево (получаем число –6).<br>Таким образом, равенство<br>$\lvert 2x - 4 \rvert = 6$ возможно тогда и только тогда, когда $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$. |

**Замечание.** При решении уравнения с использованием геометрического смысла модуля знак модуля раскрывается неявно, то есть определение модуля в явном виде не применяется.

Общая схема решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля — это фактически немного измененный метод интервалов. Поясним содержание этой схемы на примере уравнения с двумя модулями вида

$|f(x)| + |g(x)| = a \quad (a > 0).$

Чтобы решить это уравнение, необходимо раскрыть знаки модулей, а для этого необходимо знать, где функции $f(x)$ и $g(x)$ будут положительными, а где — отрицательными. То есть фактически мы должны решить неравенства

$f(x) \geq$ или $\leq 0$, (1)

$g(x) \geq$ или $\leq 0$. (2)

Каждое из этих неравенств мы умеем решать методом интервалов. Перестроим прием решения неравенств методом интервалов таким образом, чтобы он давал возможность одновременно решать каждое из последних неравенств. Как известно, решение неравенства (1) методом интервалов начинается с нахождения его ОДЗ (то есть области определения функции f (x)), а решение неравенства (2) — с нахождения его ОДЗ (то есть области определения функции g (x)). Чтобы начать одновременно решать оба неравенства, необходимо найти общую область определения для функций f (x) и g (x), то есть **найти ОДЗ данного уравнения** (это и есть *первый из ориентиров* необходимой схемы).

Чтобы продолжить решение неравенств f (x) ≥или≤0 и g (x) ≥или≤ 0 методом интервалов, необходимо найти нули функций f (x) и g (x), то есть **найти нули всех подмодульных функций** (это и есть *второй ориентир*).

Если далее применить схему метода интервалов одновременно для двух неравенств, необходимо **на ОДЗ отметить нули подмодульных функций и разбить ОДЗ на промежутки** (это *третий ориентир*).

В каждом из полученных промежутков знаки функций f (x) и g (x) не могут измениться. Тогда мы можем **найти знаки подмодульных функций на каждом промежутке** (в любой точке этого промежутка), **раскрыть знаки модулей и найти решение данного уравнения в каждом из этих промежутков** (это и есть *четвертый ориентир общей схемы*).

Обоснование возможности применения приведенной схемы к решению неравенств с модулями проводится аналогично.

**Задача 2*** Решите уравнение $|x-5|+|2x+5|=3x$.

Решение

Поскольку $3x=(x-5)+(2x+5)$, то данное уравнение имеет вид $|u|+|v|=u+v$, но это равенство может выполняться тогда и только тогда, когда числа $u$ и $v$ — оба неотрицательные. Следовательно, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-5\geqslant 0,\\ 2x+5\geqslant 0.\end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x\geqslant 5,\\ x\geqslant -\frac{5}{2}.\end{cases}$

Таким образом, $x\geqslant 5$.

*Ответ:* $[5;+\infty)$. ◁

Комментарий

Если обозначить $x-5=u$ и $2x+5=v$, то $u+v=3x$ и данное уравнение имеет вид $|u|+|v|=u+v$, а по соотношению 5 такое уравнение равносильно системе $\begin{cases} u\geqslant 0,\\ v\geqslant 0.\end{cases}$

Заметим, что данное уравнение можно решать и по общей схеме, но тогда решение будет более громоздким.

**Задача 3** Решите неравенство $|2x-5|\leqslant 7$.

Решение

Учитывая геометрический смысл модуля, получаем, что заданное неравенство равносильно неравенству

$$-7\leqslant 2x-5\leqslant 7. \qquad (1)$$

Тогда $-2\leqslant 2x\leqslant 12$, таким образом,

$$-1\leqslant x\leqslant 6.$$

*Ответ:* $[-1;6]$. ◁

Комментарий

Неравенство вида $|f(x)|\leqslant a$ (где $a>0$) удобно решать, используя геометрический смысл модуля. Поскольку заданное неравенство — это неравенство вида $|t|\leqslant 7$, а модуль числа — это расстояние на координатной прямой от точки, изображающей данное число, до точки 0, то заданному неравенству удовлетворяют все точки, находящиеся в промежутке $[-7;7]$. Таким образом, $-7\leqslant t\leqslant 7$. Если возникают затруднения с решением двойного неравенства (1), то его заменяют на равносильную систему $\begin{cases} 2x-5\geqslant -7,\\ 2x-5\leqslant 7.\end{cases}$

**Решение заданий:**
Решите уравнения и неравенства, содержащие знак модуля (1–15).

**1.** 1) $|3x-5|=7$; 2) $|8-4x|=6$; 3) $|x^2-5x|=6$.

**2.** 1) $|2x-3|>5$; 2) $|3-5x|<7$; 3) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right|<1$.

**3.** 1) $|x-2|-2x-1=0$; 2) $x^2+3x+|x+3|=0$.

**4.** 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 2) $|x+1|+|x-5|=20$; 3) $|x+5|+|x-8|=13$.

**5.** 1) $|x+3|<x-2$; 2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$; 3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.

**6.** 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.

**7.** 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

**8.** 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

**9.** 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

**10.** 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

**11.** 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

**12.** 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

**13.** 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

**14.** 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

**15.** 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

## Практическая работа №22

**Тема 4.3** Уравнения и неравенства с параметрами
**Цель**: Научиться решать уравнения и неравенства, содержащие параметр.

**Теоретическая часть:**

Напомним смысл выражения «решить с параметром» – можно решать уравнения, неравенства, системы с параметром.

Решить задачу, например уравнение $f(x,a)=0$ или неравенство $f(x,a)\leq 0$ с параметром а – означает «перебрать» все значения параметра и для каждого из них указать ответ.

1. Решение уравнений с параметром

Поясним на простейших примерах.

Пример 1 – решить уравнение с параметром:

$\mathrm{ax}=1$

Задача состоит в том, чтобы для каждого значения параметра $\mathrm{a}$ решить уравнение относительно $\mathrm{x}$.

Пусть $\mathrm{a}=2$, тогда имеем простейшее линейное уравнение:

$2\mathrm{x}=1\leftrightarrow\mathrm{x}=\frac{1}{2}$

В общем случае в данном уравнении возможны два варианта решения – когда можно делить на коэффициент а и когда нельзя, необходимо перебрать все допустимые значения параметра а ($a \in R$)

Рассмотрим два случая. При $a = 0$ мы не имеем права разделить единицу на коэффициент а, поэтому подставляем значение ноль в заданное уравнение и изучаем его. При любых других значениях а имеем право выполнить деление:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ ax = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ ax = 1 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ 0 * x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = \frac{1}{a} \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = \frac{1}{a} \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = \frac{1}{a} \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0$ решений нет, при $a \neq 0 \; x = \frac{1}{a}$

Рассмотрим решение простейшего неравенства с параметром.

2. Решение неравенства с параметром

Рассмотрим решение простейшего неравенства с параметром.

Пример 2 – решить неравенство с параметром:

$ax > 1$

Если а – конкретное число, мы можем легко решить заданное неравенство, например:

$$a = 2{:}\, 2x > 1 \leftrightarrow x > \frac{1}{2};\, a = -2{:}\, -2x > 1 \leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

у нас же есть коэффициент а в общем виде. Рассмотрим три случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ ax > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ ax > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ ax > 1 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ 0 > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x < \frac{1}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ x > \frac{1}{a} \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x < \frac{1}{a} \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ x > \frac{1}{a} \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0$ решений нет; при $a < 0 \; x < \frac{1}{a}$; при $a > 0 \; x > \frac{1}{a}$

Пример 3 – решить уравнение с параметром:

$$\frac{x - a}{x - 5} = 0$$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель ее равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Значение параметра может быть любым. Рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 5 \\ \frac{x - 5}{x - 5} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 5 \\ \frac{x - a}{x - 5} = 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

При этом получаем в первом случае: x с одной стороны равен пяти, т. к. $x = a$, а с другой стороны не равен пяти, т. к. знаменатель дроби не может быть равен нулю, кроме того получаем выражение $\frac{0}{0} = 0$, а такого выражения не существует.

Когда $a \neq 5$ $x = a$, противоречий не возникает

Ответ: при $a = 5$ решений нет, при $a \neq 5$ $x = a$

Пример 4 – решить уравнение с параметром:

$\sqrt{x} = a$

Значение a может быть любым, но квадратный корень – это строго неотрицательное число. Следовательно, рассматриваем два случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{x} = a \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \sqrt{x} = a \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a \geq 0 \\ x = a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x \in \emptyset \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a \geq 0$ $x = a^2$; при $a < 0$ $x \in \emptyset$

3. Решение иррационального уравнения с параметром

Решим иррациональное неравенство с параметром.

Пример 5 – решить неравенство с параметром:

$\sqrt{x} \geq a$

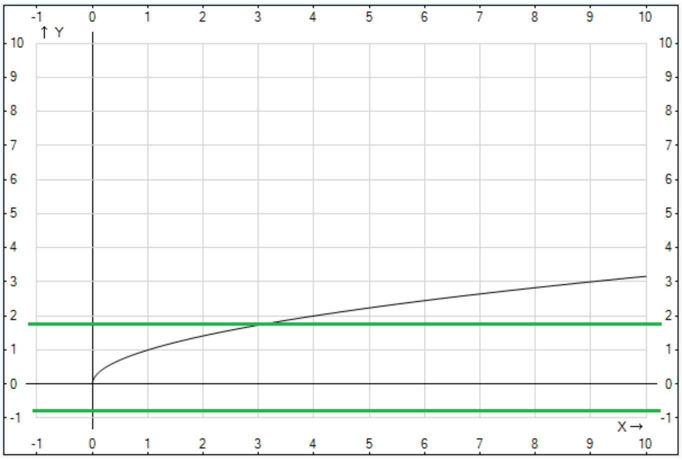
Исследуем данное неравенство.

x стоит под знаком квадратного корня, значит допустимые значения по x - все неотрицательные значения. a может принимать любые значения. рассмотрим три случая. Если $a$ меньше нуля и корень существует, то неравенство выполняется. Если $a = 0$, любой неотрицательный x удовлетворяет неравенству. Если же $a$ больше нуля, имеем право возвести в квадрат:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a < 0 \\ \sqrt{x} \geq a \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ \sqrt{x} \geq a \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \sqrt{x} \geq a \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ x \geq a^2 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a \leq 0$ $x \geq 0$; при $a > 0$ $x \geq a^2$

Рассмотрим решение данного неравенства графическим методом. Для этого сначала строим график функции, стоящей в левой части: $y = \sqrt{x}$, область определения данной функции $x \geq 0$. Рассекаем полученную кривую семейством прямых $y = a$ и находим точки пересечения.




По рисунку очевидно, что когда $a < 0$, кривая находится над прямой при всех допустимых x, то есть при всех допустимых x неравенство выполняется.

Если а положительно, кривая имеет единственную точку пересечения с прямой и кривая находится выше прямой правее точки пересечения, абсцисса точки пересечения $x = a^2$, поэтому решением неравенства является $x \geq a^2$

Очевидно, что ответ совпадает с ответом при решении аналитическим способом.

Пример 6 – решить уравнение с параметром:

$a\sqrt{x} = 0$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом существует.

Рассматриваем два варианта – либо $a = 0$, но корень при этом должен существовать, либо $x = 0$, в таком случае а – любое число:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0\\ x \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ a \in R\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0\ x \in [0; +\infty)$; при $a \neq 0\ x = 0$

**Решение заданий:**

№1. Решить уравнение с параметром:

а) $ax + 2 = -5$;

б) $-3ax = 4$;

в) $a\sqrt[3]{x} - 5 = 0$;

г) $\frac{2x+a}{x-4} = 0$;

№2. Решить неравенство с параметром:

а) $-4ax \leq 5$;

б) $a\sqrt{x} > \frac{2}{7}$;

в) $\frac{ax+1}{x+3} \geq 0$;

г) $a + \sqrt[3]{x} = 1$;

## Практическая работа №23

**Тема 4.4** Контрольная работа по разделу 4 «Уравнения и неравенства»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 6 «Уравнения и неравенства»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных:***

1. (1 балл) Какое из чисел является корнем уравнения $\log_2(x + 1) = 1$

А) –1; Б) 2; В) 1; Г) 0.

2. (1 балл) Какие из уравнений имеют более одного корня?

А) $x^2$-6x+5=0; Б) $3^{x+2}$=9; В) (x-4)(x+3)(x-8)=0; Г) 2x-7=0.

3. (1 балл) Определите вид уравнения $\sqrt{-32 - x} = 2$

А) линейное; Б) квадратное; В) иррациональное; Г) рациональное.

4. (1 балл) Определите наименьшее целое решение неравенства $5^{x+2}$<1?

А) -3; Б) 0; В) 3; Г) -4.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Найдите корень уравнения $|x-3| = 2$
6. (2 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$
7. (2 балла) Решите неравенство $\frac{2x^2-5x}{x-3} \le x$
8. (2 балла) Решите уравнение $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = 0$

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | В | В | А | 1; 5 | (10; 2) | (-∞; 0]; [2; 3) | -1; 6 |

## Практическая работа №24

**Тема 5.2** Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования функции

**Цель**: Определить сущность понятия производная, научиться вычислять производную, используя пределы.

**Теоретическая часть:**

Производная - главнейшее понятие математического анализа. Она характеризует изменение функции аргумента *x* в некоторой точке. При этом и сама производная является функцией от аргумента *x*

*Производной функции* $y = f(x)$ в точке $x$ называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

То есть,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Наиболее употребительны следующие ***обозначения производной***:

$y'$; $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df(x)}{dx}$.

<u>Алгоритм нахождения производной</u>

Для того чтобы найти $f'(x_0)$ нужно:

1) Задать приращение $\Delta x$ – это приращение аргумента и вычислить соответствующее приращение функции $\Delta y$ или $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2) Найти разностное соотношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, упростить его и сократить на $\Delta x$.

3) Если отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к какому-то числу, то это число будет $f'(x_0)$.

**Решение заданий:**

**Пример 1.** Пользуясь **определением производной**, найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$.

Решение. Из определения производной вытекает следующая схема её вычисления.

Дадим аргументу приращение (дельта) и найдём приращение функции:

$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}$.

Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{x+\Delta x+1-(x+1)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}}.$$

Вычислим предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, то есть требуемую в условии задачи производную:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

**Пример 2.** Найти производную функции

$y = f(x) = 2x^2 + 1.$

Решение. Из определения производной вытекает следующая схема для её вычисления.

Шаг 1. Дадим аргументу приращение $\Delta x$ и найдём

$y + \Delta y = f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^2 + 1 =$

$= 2x^2 + 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1.$

Шаг 2. Найдём приращение функции:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$

$= \left[2x^2 + 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1\right] - \left(2x^2 + 1\right) =$

$= 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2.$

Шаг 3. Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} =$$

$= 4x + 2\Delta x.$

Шаг 4. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то есть производную:

$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x) = 4x.$

**Пример 3.** Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ и значение этой производной при $x = 9$.

Решение. Воспользуемся схемой, приведённой в примере 1.

Шаг 1.

$y+\Delta y = f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}.$

Шаг 2.

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}.$

Шаг 3.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Шаг 4.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Выражение под знаком предела не определено при $\Delta x = 0$ (неопределённость вида 0/0), поэтому преобразуем его, избавившись от иррациональности в числителе и затем сократив дробь:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Найдём значение производной при $x = 9$:

$y'_{x=9} = f'(9) = 1/(2\sqrt{9}) = 1/6.$

## Практическая работа №25

**Тема 5.2** Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования функции

**Цель**: Научиться вычислять производную функции, используя формулы и правила дифференцирования.

**Теоретическая часть:**

Формулы дифференцирования

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
18. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
19. $(\operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования. **Правило дифференцирования суммы** двух функций**.**

Производная суммы равна сумме производных: (f(x) + g(x))' = f '(x) + g'(x).

Подробно это свойство производной формулируется так: Если каждая из функции *f(x)* и g(x) имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула.

Производная суммы нескольких функции равна сумме производных этих функции: (f(x) +…+ g(x))' = f '(x) +…+ g'(x).

Производная разности равна разности производных: (f(x) - g(x))' = f '(x) - g'(x).

А теперь рассмотрим пример применения данного правила дифференцирования.

Рассмотрим **второе правило** дифференцирования:

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

(cf(x))'=cf ' (x)

Переходим к **третьему правилу** дифференцирования. Производная произведения равна произведению первого множителя на второй плюс первый множитель, умноженный на производную второго. (f(x)·g(x)) '=f' (x)·g(x)+f(x)·g' (x)

**Четвертое правило дифференцирования:** производная частного равна производной числителя умноженного на знаменатель минус числитель умноженный на производную знаменателя и все это деленное на квадрат знаменателя.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**Решение заданий:**

**Пример 1.**

Найдем производную функции: $f(x) = 2x^2 + 4x$

Решение:

производная суммы равна сумме производных. Найдем производную каждого слагаемого

$f'(x) = (2x^2 + 4x)' = (2x^2)' + (4x)'$

$f'(x) = 4x + 4$

Ответ: $f'(x) = 4x + 4$

**Пример 2.**

Найти производную функции f(x)=8x$^3$+3x$^2$-x.

Решение:

f(x)=8x$^3$+3x$^2$-x

f’(x)=(8x$^3$)’+(3x$^2$)’-x’

Рассмотрим каждый член многочлена по отдельности

(8x$^3$) '=8(x$^3$) '=8·3x$^2$=24x$^2$

(3x$^2$) '=3(x$^2$) '=3·x=6x

(-x) '=-(x) = -1

f' (x)=(8x$^3$) '+(3x$^2$) '-x'=24x$^2$+6x-1.

Ответ: f' (x)=24x$^2$+6x-1.

**Пример 3.**

Найти производную функции f(x)=(3x-4)(4-5x).

Решение:

Воспользуемся формулой производной произведения:

f' (x)=(3x-4) ' (4-5x) + (3x-4)(4-5x) '=3(4-5x)-5(3x-4)=12-15x-15x+20= 32

Ответ: f' (x)=32

**Пример 4.**

Найти производную функции $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$

Решение:
Воспользуемся формулой производной частного:
$$f'(x) = \frac{(3x-2)'(x+3)-(3x-2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{3(x+3)-(3x+2)}{(x+3)^2} = \frac{3x+9-3x-2}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$$
Ответ: $f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2}$

**Практическая работа №26**

**Тема 5.4** Физический и геометрический смысл производной

**Цель**: Определить физический и геометрический смысл производной, научиться решать задачи на применение физического и геометрического смысла.

**Теоретическая часть:**

**Геометрический смысл производной**


Если мы рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$, то заметим, что $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ есть $tgBAC$.

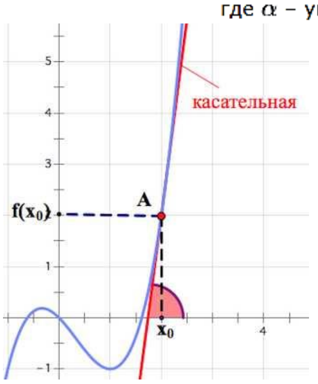
А при стремлении $\Delta x$ к нулю, точка $B$ будет приближаться к точке $A$ и секущая $AB$ «превратится» в касательную к графику функции $f(x)$ в точке $A(x_0; f(x_0))$.

Поэтому **геометрический смысл производной** таков:

Производная в точке $x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке:

$$f'(x_0) = tg\alpha,$$

где $\alpha$ – угол наклона касательной (проведенной к $f(x)$ в т. $x_0$)



**Физический смысл производной**

Если точка движется вдоль оси $x$ и ее координаты изменяются по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t),$$

а ускорение:

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

Пример. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$.

$$v(t) = x'(t) = 12t - 48;$$

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60 \text{ м/с}$$

Ответ: 60.

**Решение заданий:**

№1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f(x) = 14x - x2 + 5 в точке с абсциссой x0 = 3.

№2. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функцииf(x) = + 12x -3 в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

№3. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $S(t) = -4t^2 + 15t + 2$ (t - время движения в секундах). Найти скорость (м/с) тела через 3 секунды после начала движения.

№ 4. Выполнить задания

| вариант № 1 | вариант № 2 |
|---|---|
| 1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 7$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$. | 1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. |
| 2. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции f(x) = 4 - sin x точке с абсциссой $x_0 = 6\pi$. | 2. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции f(x) = 10 - cos x в точке с абсциссой $x_0$ = . |
| 3. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $S(t) = t^2 - 3t + 1$ (t - время движения в секундах). Найти скорость (м/с) тела через 6 секунд после начала движения. | 3. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $S(t) = t^2 + 15t + 2$ (t - время движения в секундах). Найти скорость (м/с) тела через 8 секунд после начала движения. |

№5. Найдите абсциссу точки графика функции $y = x^2 + 7x - 9$, в которой касательная, проведенная к этому графику, параллельна прямой $y = -5x$.

№6. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 1{,}5t^2 + 7t - 11$, где x(t) - координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 13?

№7. Выбрать верный ответ:

Вариант № 1

1. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 - 2t^2$ Выберите, какой из формул задается скорость движения этой точки в момент времени t.

1) $3t^2 - 2$ 2) $t^2 - 4t$ 3) - 4) $3t^2 - 4t$

2. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x(x - 2)$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

1) 8 2) 6 3) 4 4) 0

3. При прямолинейном движении тела путь S(t) (в метрах) изменяется по закону $S(t) = 5t^3 - 15t^2 + 12$. В какой момент времени ускорение тела будет равно нулю?

1) 1с 2) 0с 3) 2с 4) 0,5с

4. Под каким углом к положительному направлению оси абсцисс наклонена касательная, проведенная в любой точке кривой $y = -2x^5 - x^3 - 4x + 1000$?

1) острым 2) тупым

3) прямым 4) параллельна оси Ox

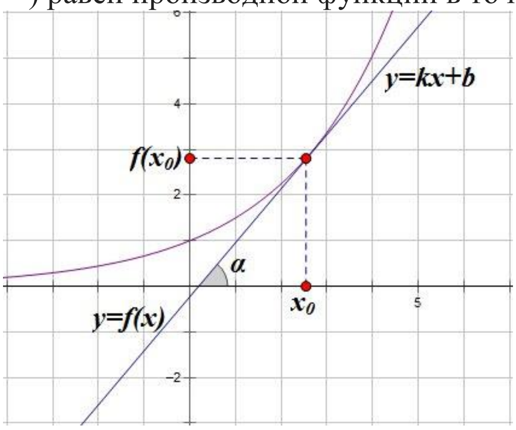
## Практическая работа №27

**Тема 5.5** Уравнение касательной к графику функции

**Цель**: Научиться составлять уравнение касательной к графику функции и применять формулу для приближенных вычислений значений выражений.

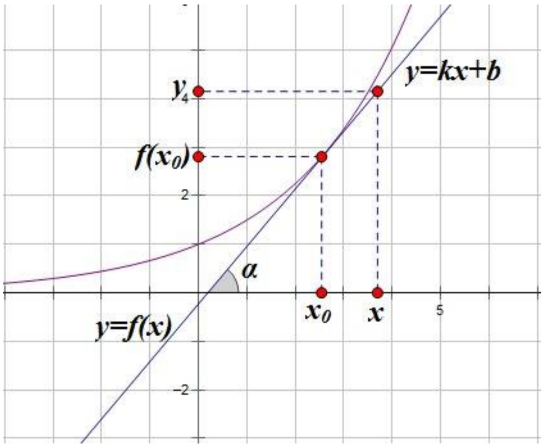
**Теоретическая часть:**

Вспомним **геометрический смысл производной**: если к графику функции $y=f\left(x\right)$ в точке $x_0$ проведена касательная, то коэффициент наклона касательной (равный тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси $OX$) равен производной функции в точке $x_0$.

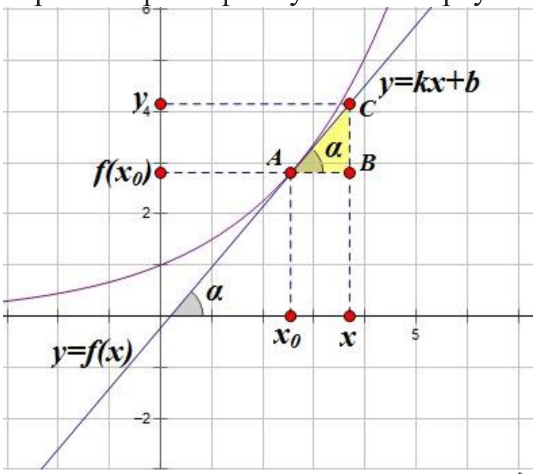



$$k = tg\alpha = f'\left(x_0\right)$$

Возьмем на касательной произвольную точку с координатами $\left(x;y\right)$:




И рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$:




В этом треугольнике $tg\,\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{y - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = f'\left(x_0\right)$

Отсюда $y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

Или

$$y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

Это и есть уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f\left(x\right)$ в точке $x_0$.

Алгоритм построения касательной

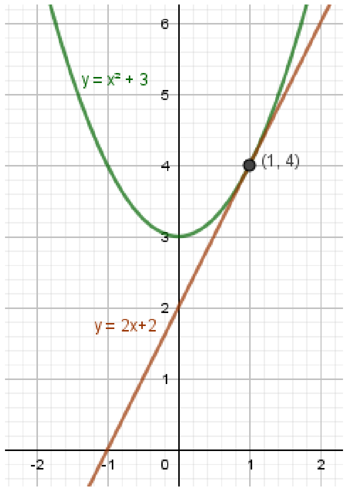
**Шаг 1.** Найти значение функции в точке касания $f(x_0)$

**Шаг 2.** Найти общее уравнение производной $f'(x)$

**Шаг 3.** Найти значение производной в точке касания $f'(x_0)$

**Шаг 4.** Записать уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, привести его к виду $y = kx + b$

**На выходе:** уравнение касательной в виде $y = kx + b$




Пусть $f(x) = x^2 + 3$.

Найдем касательную к этой параболе в точке $x_0 = 1$.

$f(x_0) = 1^2 + 3 = 4$

$f'(x) = 2x$

$f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$

Уравнение касательной:

$y = 2(x-1) + 4 = 2x - 2 + 4 = 2x + 2$

*Ответ:* $y = 2x + 2$

| **Алгоритм** | **Пример:** $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x_0 = 3$ |
|---|---|
| 1. Вычислим $f(x_0)$ | $f(x_0) = f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 6$ |
| 2. Найдём формулу производной функции $f'(x)$ | $f'(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right)' = 2x - 2$ |
| 3. Вычислим $f'(x_0)$ | $f'(x_0) = f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ |
| 4. Подставим $x_0$, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в формулу уравнения касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ | $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) =$ $= 4(x-3) + 6 = 4x - 12 + 6 =$ $= 4x - 6$ |

**Решение заданий:**

№1. Выполнить задание

| 1 вариант | 2 вариант |
|---|---|
| **1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке графика с $x_0$.** | |
| а) $f(x) = x^3$; $x_0 = 1$<br>б) $f(x) = \frac{x^2}{4} - x$; $x_0 = 2$<br>в) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$; $x_0 = 2$ | а) $f(x) = x^4$; $x_0 = 2$<br>б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$; $x_0 = -1$<br>в) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$; $x_0 = 1$ |

№2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0$ = 3.

№3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-3x$ в точке с абсциссой $x_0$ = 4.

№4.Запишите уравнение касательной к графику функции f(x) = sin x -3x + 2 в точке $x_0 = 0$.

№5.Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ в точке $x_0 = 2$.

№6.Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x$ в точке $x_0 = -2$.

№7. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=x^2-x\sqrt{3}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 30°.

№8. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=x^2+4x\sqrt{3}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 60°.

№9. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+3x-8$, если эта касательная параллельна прямой $y=5x+1$ .

№10. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-4x+6$, если эта касательная параллельна прямой $y=2x-8$ .

№11.Найдите точки графика функции f(x)=x $^3$ - 4x $^2$ , в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.

**Практическая работа №28**

**Тема 5.6** Монотонность функции. Точки экстремума

**Цель**: Научиться исследовать функции на монотонность и экстремумы.

**Теоретическая часть:**

Определение «Монотонные функции»

Монотонно возрастающая функция – это функция, у которой большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Монотонно убывающая функция – это функция, у которой большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Связь производной и промежутков монотонности функции

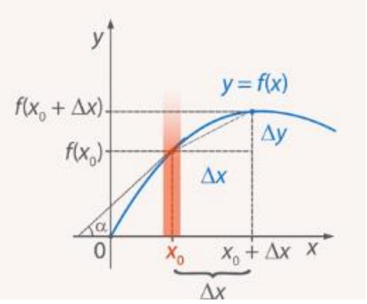
Если $\Delta x > 0$, то знак приращения $\Delta y$ и знак производной в точке $x_0$ совпадает со знаком $f'(x_0)$. То есть если производная $f'(x_0)$ в этой точке больше нуля, то $\Delta y > 0$ и понятно, что функция в окрестности этой точки будет возрастать. А если производная меньше нуля, значит, $\Delta y < 0$ и понятно, что в окрестности этой точки функция будет убывать.

Далее, производная в точке $x_0$ есть тангенс угла наклона касательной. Касательная описывается линейной функцией. В окрестности точки $x_0$ кривая и линейная функция почти совпадают. Если угол наклона острый, тангенс будет положительным, угловой коэффициент – величина положительная, и линейная функция возрастает, а значит, в окрестности этой точки и сама функция возрастает:

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$

И наоборот, если линейная функция убывает, угол тупой, тангенс – величина отрицательная, значит, линейная функция убывает, а с ней убывает функция $y = f(x)$.

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)\downarrow$



Угол наклона касательной в точке $x_0$

Так события развиваются в окрестностях точки $x_0$. Эти события подчиняются геометрическому смыслу производной (ее физическому смыслу, соотношению $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$).

Исследование промежутков монотонности функции с помощью производной

Рассмотрим функцию и ее поведение на всей ОДЗ. Предположим, что это график исследуемой функции.

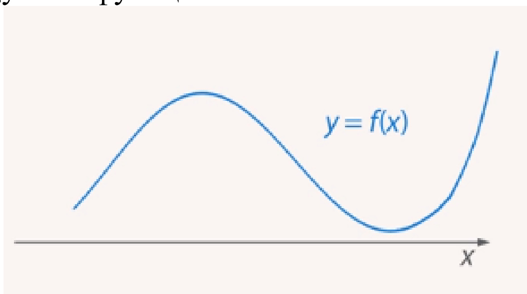
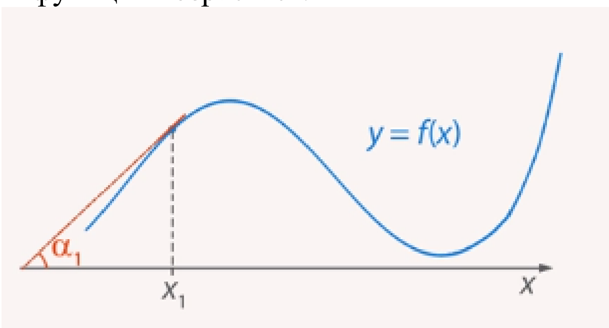


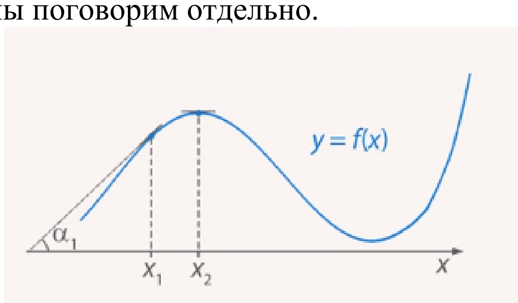

График функции $y = f(x)$

Есть точка $x_1$. Касательная наклонена под острым углом $\alpha_1$ . Значит, в точке $x_1$ функция возрастает.



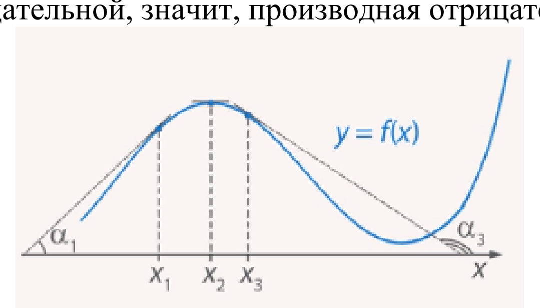

Угол наклона касательной в точке $x_1$

В точке $x_2$ касательная параллельна оси $Ox$, значит точка $x_2$ – точка экстремума. Об этом мы поговорим отдельно.



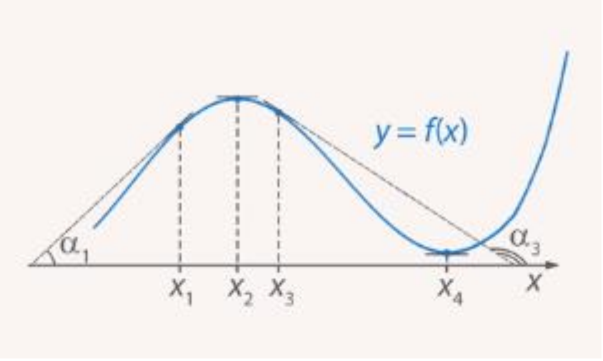

$x_2$ – точка экстремума

В точке $x_3$ угол $\alpha_3$ наклона касательной будет тупым, тангенс будет величиной отрицательной, значит, производная отрицательная и функция здесь убывает.



Угол наклона касательной в точке $x_3$

И, наконец, в точке $x_4$ производная равно нулю и дальше функция возрастает.




Угол наклона касательной в точке $x_4$ – точке экстремума

Выясняется, что функция возрастает на интервалах, где производная больше нуля:

$f'(x_1) = tg\alpha_1 > 0 \Rightarrow f(x_1)\uparrow$

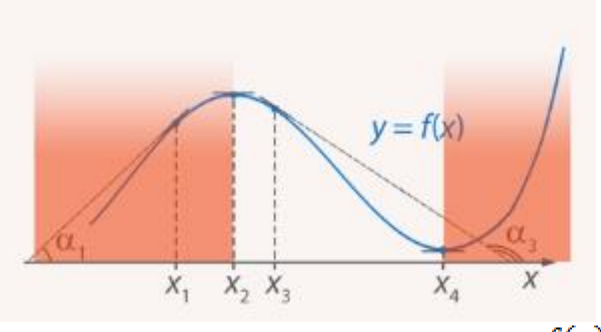
Если же значение производной отрицательное, то функция убывает:

$f'(x_3) = tg\alpha_3 < 0 \Rightarrow f(x_3)\downarrow$

Вся ОДЗ состоит из отдельных точек, значит, надо выделить те интервалы, на которых производная меньше нуля, на которых производная больше нуля, и они определят те участки ОДЗ, на которых функция либо возрастает, либо убывает. Этот же вывод мы получим, рассматривая соотношение $\Delta y \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$. На тех областях, на которых производная $f'(x_0)$ меньше нуля, $\Delta y < 0$ функция убывает. Соответственно, на тех областях ОДЗ, где производная $f'(x_0)$ больше нуля, $\Delta y < 0$ функция возрастает.

Теперь мы готовы написать, где убывает, а где возрастает данная нам функция:

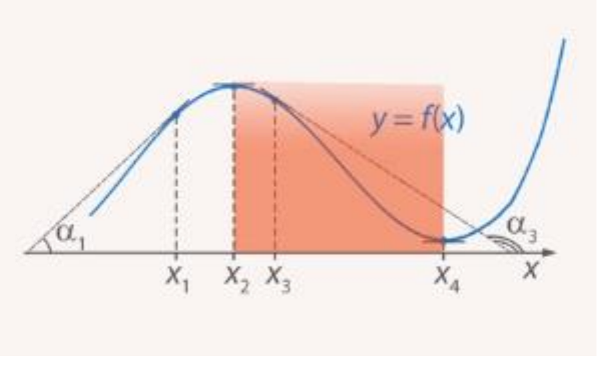
$y = f(x)\uparrow$ при $x \in (-\infty; x_2], [x_4 + \infty)$




Промежутки возрастания функции $y = f(x)$

Теперь выясним, где данная функция убывает:

$y = f(x)\downarrow$ при $x \in [x_2; x_4]$




Промежутки убывания функции $y = f(x)$

Тонкий момент: включать ли значения в точках $x_2$ и $x_4$?

$f'(x) < 0, x \in (x_2, x_4)$

$x_2$ и $x_4$ не включаем, потому что в них производная равна нулю, а мы рассматриваем тот случай, когда производная меньше нуля. Но функция убывает, когда $x$ принадлежит отрезку $[x_2; x_4]$.

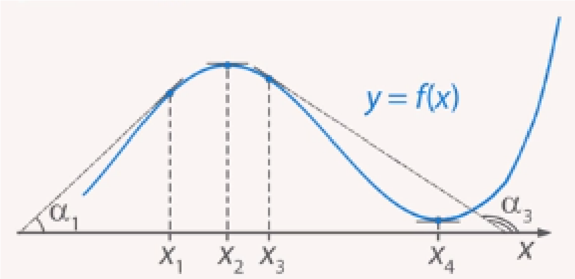
При этом эти точки включены также в интервалы, когда функция возрастает.

Приходим к важному выводу: интервалы знакопостоянства $f'(x)$ являются интервалами монотонности $f(x)$.

Цель урока: научиться находить промежутки возрастания и убывания функции с помощью производной. Выясняется, что надо найти производную, выделить ее интервалы знакопостоянства и тем самым мы узнаем, где эта функция монотонно убывает и где она монотонно возрастает.

Далее нас интересуют точки экстремумов функции. Мы рассмотрели случаи, когда производная меньше нуля, когда она больше нуля, также важный случай, когда производная равна нулю.

Вспомним, что такое точка максимума и точка минимума функции.




Точки экстремумов функции $y = f(x)$

Рассмотрим рисунок. Точка $x_2$ – точка максимума функции (max), если существует окрестность точки $x_2$, для которой $f(x_2) > f(x)$, то есть если значение функции в этой точке больше, чем значение функции в любой точке ее окрестности.

Аналогичное определение для точки минимума. Точка $x_4$ – точка минимума функции (min), если существует окрестность точки $x_4$, для которой $f(x_4) < f(x)$, то есть если значение функции в этой точке меньше, чем значение функции в любой точке ее окрестности.

При поиске наибольшего и наименьшего значения функции на всей ОДЗ, то есть ее глобальных экстремумов, следует понимать, что они могут не совпадать с ее локальными экстремумами, точками, где производная меняет знак.

Пример локального и глобального экстремума

Рассмотрим функцию $y = 2x^2(x^2 - 1), x \in [-2; 2]$.

Здесь точка $x = 0$ – точка локального максимума. Функция здесь равна нулю.

Точка $x = \pm 2$ – точка глобального максимума, в них функция равняется 24.

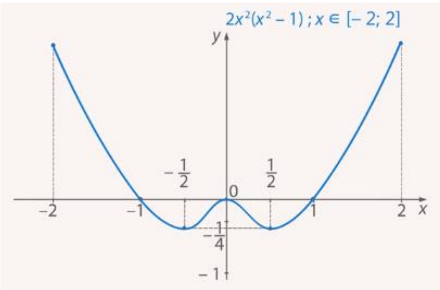


График функции $y = 2x^2(x^2 - 1), x \in [-2; 2]$

На данном уроке, когда говорится об экстремумах, подразумеваются локальные экстремумы.

Как узнать, где точка максимума, а где точка минимума, подскажет производная. Вернемся к точке $x_2$. На рисунке наглядно показано, что до этой точки функция возрастает, производная $f'(x) > 0$, а после этой точки функция убывает, производная $f'(x) < 0$. А значение производной в точке $x_2$: $f'(x_2) = 0$. Мы получили достаточный признак максимума: производная равна нулю и при этом знак производной меняется с плюса на минус при переходе аргумента через точку $x_2$.

Рассмотрим точку $x_4$. Производная в этой точке $f(x_4) = 0$. Но является ли данная точка точкой экстремума? Производная слева от этой точки отрицательна, касательная наклонена под тупым углом. Производная справа положительная, значит, производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x_4$, значит, точка $x_4$ – точка минимума.

Итак, мы рассмотрели точку минимума и точку максимума и достаточный признак точки минимума и точки максимума.

Как узнать, является ли точка точкой минимума или точкой максимума? Нужно взять производную и приравнять ее к нулю. Тогда мы найдем точки $x_2$, $x_4$ и т. д. Это внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю.

Критическая точка функции – это внутренняя точка области определения, в которой производная равна нулю или не существует. То есть точки $x_2$ и $x_4$ – критические точки.

$x_2$ – т. max.

$x_4$ – т. min.

Но так происходит не всегда.

Точка перегиба

Рассмотрим следующую функцию:

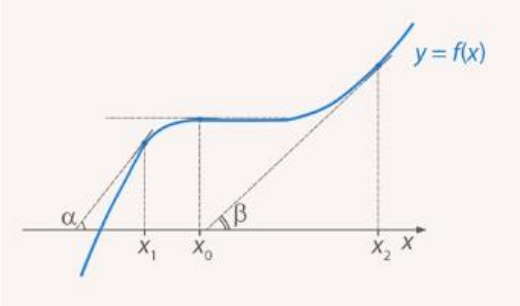
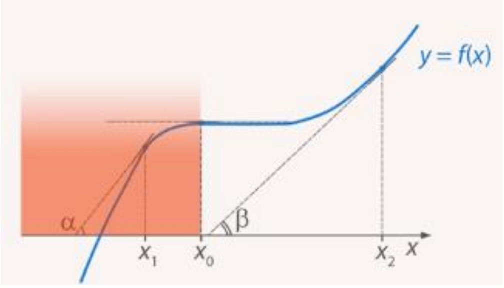


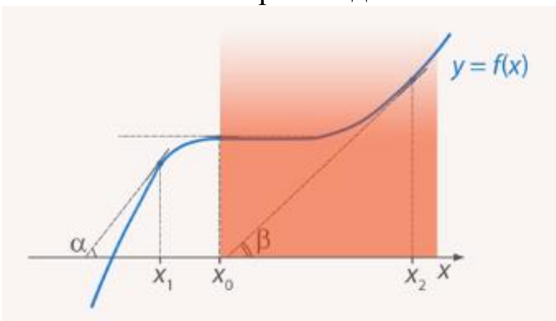

Иллюстрация точки перегиба

Производная в точке $x_0$ равна нулю: $f'(x_0) = 0$, касательная параллельна оси $Ox$. Является ли она точкой экстремума? Нет. Почему? Потому что до точки $x_0$ производная положительна, функция возрастает:



Возрастание функции до точки перегиба

После этой точки производная также положительна:




Возрастание функции после точки перегиба

Функция возрастает и слева, и справа от точки, значит, $x_0$ не является точкой экстремума.

Лемма Ферма

Если функция $f(x)$ имеет производную и в точке $x_0$ имеет экстремум, то значение производной в этой точке равно 0.

Это необходимый мощный признак, из него мы выясняем, какие точки нам нужны для исследования. Все остальные отметаем.

Еще раз подчеркнем, что нам иллюстрирует данный рисунок: равенство нулю – это лишь необходимый признак экстремума, но не достаточный.

Точка перегиба, локальный характер точек экстремума

Рассмотрим в качестве примера функцию, график которой изображен на рисунке.

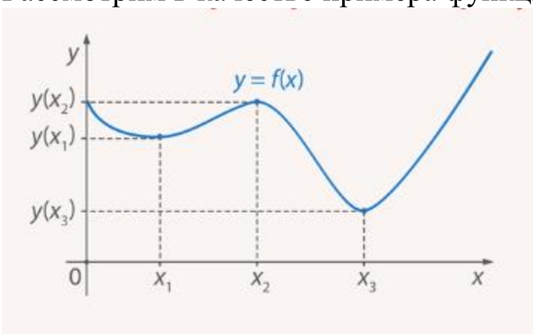



График функции с несколькими локальными экстремумами

$x_1$ – точкаминимума,$x_2$ – точкамаксимума, $x_3$ – такжеточкаминимума.

$x_1$– точкаминимума, значит, существует некая окрестность, где значение функции является наименьшим, но существует также вторая точка минимума.

$y(x_1) > y(x_3)$, таким образом, глобально, наименьшим значением функции на всей ОДЗ является значение функции в точке $x_3$.

$x_2$ – точкамаксимума, но наибольшего значения данной функции не существует, потому что есть точки, в которых значение функции значительно больше, чем в точке $x_2$.

Таким образом, данным рисунком мы подчеркиваем локальный характер точек экстремума. Можем записать:

$y_{\text{наим}} = y(x_3); y(x_3) \le y(x)$

То есть значение функции в точке $x_3$ меньше либо равно значению функции в любой другой точке ОДЗ.

Алгоритм

Мы знаем, как по знаку производной найти интервалы монотонного возрастания или убывания функции, знаем, каким образом определить точки максимума и точки минимума функции. Пусть теперь есть задача исследовать функцию на экстремумы и на монотонность с помощью производной.

Алгоритм таков:

1. Найти $f'(x)$.

2. Выделить интервалы знакопостоянства $f'(x)$. Они определят интервалы монотонности $f(x)$.

3. Найти критические точки (внутренние точки ОДЗ, в которых $f' = 0$ или не существует).

4. Выделить из критических точек и концов отрезка точки экстремума и исследовать их.

Задача

Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = x^2$ с помощью $y'$.

Найдем производную:

$y' = 2x$

Приравниваем ее к нулю и находим единственное решение:

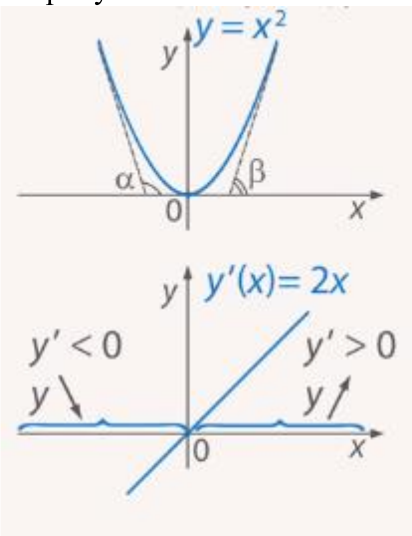
$y' = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

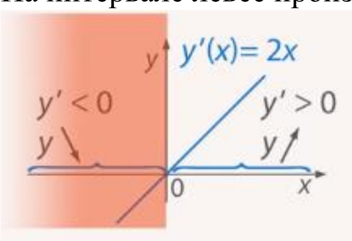
$x = 0$ – единственная критическая точка.

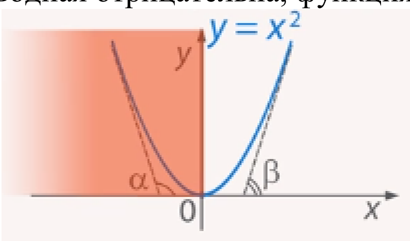
На рисунке в нижней части изображен график производной.




Графики функций $y = x^2$ и $y' = 2x$

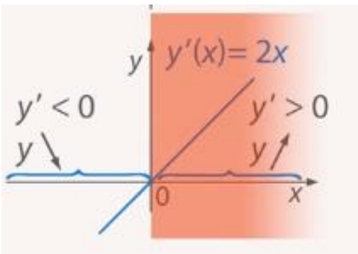
На интервале левее производная отрицательна, функция убывает.

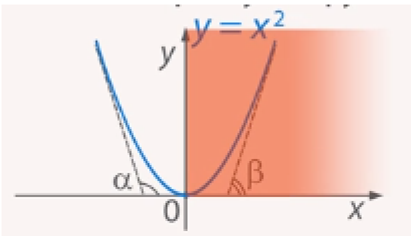



| | |
|---|---|
| Левый интервал производной | Левый интервал функции |

На интервале правее производная положительна , функция возрастает.






| | |
|---|---|
| Правый интервал производной | Правый интервал функции |

Ответ:
1. $y = x^2 \downarrow$ при $x \in (-\infty; 0]$
2. $y = x^2 \uparrow$ при $x \in [0; +\infty)$
3. $x = 0$ – т. min. $y(0) = 0$

Итак, мы решили задачу, исследовали функцию с помощью производной, но мы знали свойства этой функции, знали, где она возрастает, где убывает, и знали точку экстремума.

Видим, что результаты, которые получены с помощью производной, совпадают с результатами, найденными ранее.

***Задача.***

**Найти экстремумы функции $y = x^3 \cdot (x - 1)$.**

***Решение.***

Экстремумы функции - это её максимумы и минимумы. Прежде чем находить экстремальные значения функции, нужно найти значения аргумента, в которых они достигаются, т.е. точки экстремумов.

В точке экстремума производная функции равна нулю.

Находим производную:

1) по правилу дифференцирования произведения:

$y' = (x^3)' \cdot (x - 1) + x^3 \cdot (x - 1)'$;

2) по таблице производных:

$(x^3)' = 3x^2$,

$(x - 1)' = 1 - 0$;

3) преобразуем:

$y' = 3x^2 \cdot (x - 1) + x^3 \cdot (1 - 0) = 3x^3 - 3x^2 + x^3 = 4x^3 - 3x^2$.

Приравниваем производную к нулю и решаем уравнение относительно $x$:

$4x^3 - 3x^2 = 0$;

$x^2 \cdot (4x - 3) = 0$.

Здесь корни легко определяются разложением на множители - произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

$x_1 = 0$ и $x_2 = 3/4 = 0{,}75$.

На числовой прямой отмечаем найденные значения аргумента $x$. В этих точках производная функции равна нулю. Между ними (на интервалах) она сохраняет знак "+" или "–". Чтобы определить положительна или отрицательна производная функции на конкретном интервале, подставляем в формулу для производной произвольное значение из этого интервала.

$y' = 4x^3 - 3x^2$;

$y'(-1) = 4(-1)^3 - 3(-1)^2 = -4 - 3 < 0$;

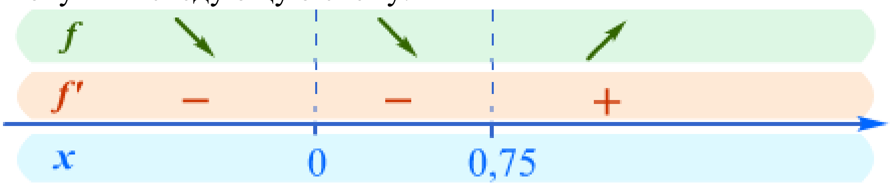
$y'(0{,}5) = 4 \cdot (0{,}5)^3 - 3 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}5 - 0{,}75 < 0$;

$y'(1) = 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 = 4 - 3 > 0$.

Таким образом, точки, в которых производная равняется нулю, разбили числовую прямую на три интервала. В первом и втором из них производная отрицательна, в третьем положительна. Отмечаем это на числовой прямой.

Функция возрастает на интервале, если её производная на этом интервале положительна, и убывает, если производная отрицательна. Отметим это стрелочками с соответствующим наклоном, соотнося их со знаками производной.

Получили следующую схему:




По схеме видно, что в точке $x_1 = 0$ экстремума нет, функция убывает и правее, и левее этой точки. В точке $x_2 = 0{,}75$ функция меняет характер монотонности с убывания на возрастание, значит эта точка является точкой минимума.

Определяем минимальное значение функции:

$y = x^3 \cdot (x - 1)$;

$y(0{,}75) = (0{,}75)^3 \cdot (0{,}75 - 1) = -0{,}10546875 \approx -0{,}11$.

**Ответ:** $y_{\min} \approx -0{,}11$.

**Решение задание:**

**№1.** Найти экстремумы функции $y = \ln\left(x^2 - 6x + 10\right)$.

**№2.** Найти экстремумы функции $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$

**№3.** Найти экстремумы функции $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

**№4.** Найти экстремумы функции $y = 1 - x^4$.

**№5.** Найти экстремумы функции $y = (x - 1)^3$.

**№6.** Найти экстремумы функции $y = x\sqrt{2 - x^2}$.

**№7.** Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.

**№8.** Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^2 - \ln x$

**№9.** Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

**№10**. Исследовать на монотонность и экстремумы следующие функции:

1) $f(x) = 2x + x^{-2}$

2) $f(x) = x^{-3}$

3) $f(x) = x^3 + x^2 + 16$

4) $f(x) = x^4 - 8x^2$

**Практическая работа №29**

**Тема 5.7** Исследование функций и построение их графиков

**Цель**: Научиться исследовать функции и строить их графики.

**Теоретическая часть:**

Исследование функций занимает немало времени при решении контрольных, домашних заданий и чтобы научиться быстро решать нужна инструкция объясняющая порядок действий и для чего это нужно. Такая инструкция разработана математиками и обобщена на все типы функций уже давно, а мы ее называем – общая схема исследования функции.

Чтобы исследовать функцию $y=f(x)$ и построить ее график необходимо:

1) найти область определения функции, то есть множество всех точек для которых существует значение функции;

2) найти (если они существуют) точки пересечения графика с координатными осями. Для этого нужно в уравнение $y=f(x)$ подставить аргумент $x=0$ а также решить уравнение $f(x)=0$ для отыскания точек пересечения с осью $Ox$;

3) исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность. В некоторых случаях это можно сделать визуально по самому виду функции, если нет, то провести проверку:

1. $f(-x)=f(x)$ – функция четная;
2. $f(-x)=-f(x)$ – функция нечетная;
3. $f(x+T)=f(x)$ – функция периодическая, $T$ – период функци.

Таким образом, если имеем парную функцию $y=f(x)$ то достаточно построить ее для положительных значений $x>0$, после чего отразить ее симметрично относительно оси абсцисс на другую часть. В случае нечетной функции график будет симметричен относительно начала координат. Например, если имеет нечетную функцию график которой принадлежит первой четверти вторую половину получим поворотом первой четверти на 180 градусов (третья четверть).

Периодическими являются преимущественно функции составленные из простых тригонометрических и некоторые параметрически заданные функции.

4) найти точки разрыва и исследовать их (такими точками являются края интервалов определения функции);

5) найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках;

6) найти интервалы выпуклости, вмятины и точки перегиба;

7) найти асимптоты кривой;

8) построить график функции.

Большинство из этих пунктов было рассмотрено на практике в предыдущих статьях, поэтому подробно расписывать мы их не будем. Также не переживайте, если найдете план в литературе или интернете, который содержит более или менее пунктов. Помните, что цель их всех - помочь при построении графика функции. Перейдем к практической части и исследуем по схеме функцию.

---------------------------------------

**Пример.**

Исследовать функцию и построить ее график

$$y=\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Решение:

1) Функция определена по всюду кроме точки в которой знаменатель превращается в ноль ( $x=1$ ). Область определения состоит из двух интервалов

$$D(y):(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$$

2) При подстановке значения $x=0$ получим

$$y(0)=\frac{0}{2(0-1)}=0.$$

Такую же точку получим если приравняем функцию к нулю. Точка $x=0$ - единственная точка пересечения с осями координат.

3) Проверяем функцию на четность

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)};$$

$$y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

4) В данном случае имеем одну точку разрыва $x=1$. Вычислим границы слева и справа от этой точки

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2(x-1)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2(x-1)}=+\infty.$$

Итак $x=1$ – точка разрыва второго рода.

5) Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$$

Приравнивая ее к нулю получим точки подозрительные на экстремум $x=0, x=2$. Они разбивают область определения на следующие интервалы монотонности

$$(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$$

Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения

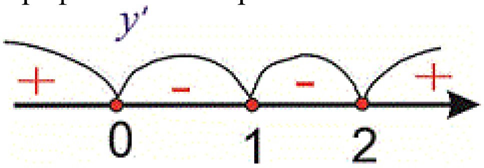
$$y'(-1)=\frac{-1(-1-2)}{2(-1-1)^2}=\frac{1}{4}>0;$$

$$y'(0,5)=\frac{0,5(0,5-2)}{2(0,5-1)^2}=-1,5<0;$$

$$y'(1,5)=\frac{1,5(1,5-2)}{2(1,5-1)^2}=-1,5<0;$$

$$y'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}>0.$$

Графически интервалы монотонности будут иметь вид




Исследуемая функция возрастает на интервалах $(-\infty;0),(2;+\infty)$ и убывает $(0;1),(1;2)$.

Точка $x=0$ – точка локального максимума, $x=2$ – локального минимума. Найдем значение функции

$$y_{\max}=0,\ y_{\min}=\frac{2^2}{2(2-1)}=2.$$

6) Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Таких интервалов нет, поскольку вторая производная не принимает нулевых значений в области определения.

7) Точка $x=1$ – вертикальная асимптота функции. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид

$$y=kx+b$$

где $k,b$ - границы которые вычисляются по правилу

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Находим нужные границы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

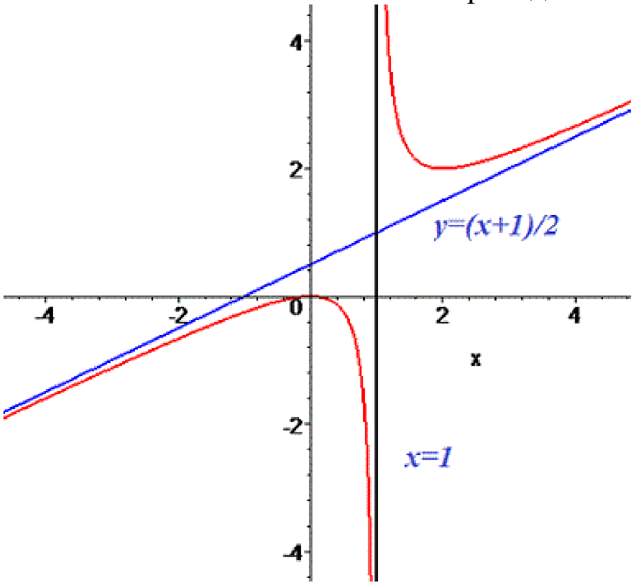
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}=$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Конечный вид прямой следующий

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

8) На основе проведенного анализа выполняем построение графика функции. Для этого сначала строим вертикальные и наклонные асимптоты, затем находим значение функции в нескольких точках и по них проводим построение.




**Решение заданий:**

1.Исследуйте функцию и постройте её график: $y = x^2 (x - 2)(x + 2)$.

2. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = x^4 - 2x^3 - 1$.

3. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = (x^2 + 1)^{-1}$.

4. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = 0{,}125(x^3 - 12x)$.

5. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = (x^2 + 4x - 3)^2$.

6. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = \sin(2x + 3)$.

7. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = 3x^2 + 5x - 2$.

8. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = x + x^{-1}$.

9. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = 8x^2 - 2x + 1$.

10. Исследуйте функцию и постройте её график: $y = 2x^3 - 6x + 3$.

## Практическая работа №30

**Тема 5.8** Наибольшее и наименьшее значения функции

**Цель**: Научиться находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

**Теоретическая часть:**

**Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.**

1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значения.
2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.
3. Если наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Найти стационарные и критические точки функции, принадлежащие интервалу $(a; b)$.
4. Найти $f(a)$, $f(b)$ и значения функции в стационарных точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$.
5. Среди полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**№1.**Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ на отрезке $[0; 3]$

Решение. Действуем в соответствии с алгоритмом.

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

3) Стационарные точки: $x = 1$; $x = 2$.

$1 \in (0; 3)$; $2 \in (0; 3)$

4) $f(0) = -2$

$f(3) = 7$

$f(1) = 3$

$f(2) = 2$

5) $f_{наим.} = f(0) = -2$

$f_{наиб.} = f(3) = 7$.

Ответ: $f_{наим} = -2$

$f_{наиб.} = 7$.

**№2.**Найдите два положительных числа, сумма которых равна 16, а произведение наибольшее.

Решение.

Пусть первое число равно x, $x > 0$

Тогда второе число - $(16 - x), 16 - x > 0$

Следовательно, $0 < x < 16$

Произведение этих чисел равно $x(16 - x)$.

Составим функцию:

$f(x) = x(16 - x)$

$f'(x) = -2x + 16$

$x = 8$ – единственная стационарная точка на интервале $(0; 16)$, она является точкой максимума.

Следовательно, в этой точке функция $F(x) = x(16 - x)$ принимает наибольшее значение.

Следовательно, два положительных числа, сумма которых равна 16, а произведение наибольшее, это 8 и 8.

Ответ: 8 и 8

**Решение заданий:**

№ 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке [-1, 2].

№ 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке [-3, 3].

№ 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + \sqrt{x}$ на отрезке [0, 4].

№ 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}$ на отрезке [-1, 3].

№ 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $\left[-3;\ \dfrac{3}{2}\right]$.

№ 6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на отрезке $[0;\ 1]$.

№ 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$.

№ 8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 \ln x$ на отрезке $[1, e]$.

№9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x + \cos 2x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

## Практическая работа №31

**Тема 5.9** Нахождение оптимального результата с помощью производной

**Цель**: Научиться находить оптимальный результат в производственных процессах с помощью производной.

**Теоретическая часть:**

Каждый человек время от времени оказывается в ситуации, когда надо отыскать наилучший способ решения какой-либо задачи, и математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений. Важным условием повышения эффективности производства и улучшения качества продукции является широкое внедрение математических методов в технику. Среди задач математики большую роль отводят задачам на экстремумы, т. е. задачам на отыскание наибольшего и наименьшего значения, наилучшего, наиболее выгодного, наиболее экономного. С такими задачами приходиться иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы получилось как можно больше продукции, конструкторы хотят так спланировать прибор на космическом корабле, чтобы масса прибора была наименьшей, экономисты стараются спланировать прикрепление заводов к источникам сырья так, чтобы транспортные расходы оказывались минимальными. Можно сказать, что задачи на отыскание наименьшего и наибольшего значения, имеют большое практическое применение.

Задача на изготовление бака наибольшего объема

Представьте себе, что вам поступил заказ: Из квадратного листа железа необходимо изготовить бак в форме прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом. Давайте практическим путем определим, какие параметры должен иметь этот бак?

*На каждый стол (2 студента) выдан бумажный квадрат со стороной 24х24 см и различной разметкой (вырезка по краям квадратов со сторонами 1х1, 2х2, 3х3, 4х4х, 5х5, 6х6, 7х7, 8х8, 9х9, 10х10, 11х11см). Необходимо склеить «бак» и подсчитать его объем эмпирическим путем. Ответ фиксируется на доске и выбирается наибольший объем.*

Итак, наибольший объем имеет бак высотой 4 см и основанием 16х16 см. Для того, чтобы прийти к этому результату, нам пришлось практическим путем выполнить построение 12 «баков». В жизни это – непозволительная роскошь. Т.е. необходимо проблему решить другим путем. Для этого мы применим знания и принцип **математического моделирования**

Задачи на оптимизацию решают, используя принцип математического моделирования, который состоит из трех этапов:

1. Составление математической модели
2. Работа с составленной моделью
3. Ответ на вопрос задачи

Используя принцип математического моделирования, решим задачу на изготовление бака наибольшего объема.

1 этап: Составление математической модели:

1) Проанализировав условия задачи, выделим оптимизируемую величину, т.е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой необходимо найти. В данном случае это объем бака, обозначим его V

2) Одну из участвующих в задаче величин обозначить за независимую переменную x. Постараться выразить через эту переменную остальные величины. В нашей задаче логично за независимую переменную x принять высоту бака, тогда основание бака – квадрат со стороной (24-2x). Определим реальные границы переменной x. Логично, что высота бака –положительная величина, меньшая 12.

3) Исходя из условия задач, выразим V через x:

$V(x)=(24-2x)^2x$, $0<x<12$. Математическая модель построена

2 этап. Работа с составленной моделью

Найдем наибольшее значение функции V(x) на интервале (0;12)

$V(x)=576x-96x^2+4x^3$

Находим производную и стационарные точки

$V'(x)=576-192x+12x^2$, $576-192x+12x^2=0$, $x_1=12$,$x_2=4$.

Только одна точка x=4 принадлежит интервалу (0;12), причем при $0<x<4$ $V'(x)>0$, а при $4<x<12$ $V'(x)<0$, т.е. x=4 точка максимума, а значит, в этой точке функция V(x) принимает наибольшее значение.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

X – это высота бака, т.е. высота равна 4, стороны основания бака – 16.

Итак, бак с наибольшим объемом имеет параметры: 16х16х4.

Задача 2.

Дан бак без крышки в форме прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат и объем которого равен 108 дм$^3$. При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

1. Составляем математическую модель

| Вопрос | Ответ |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Что является оптимизируемой величиной? | *Площадь деталей, из которых сварен бак* |
| Сколько таких деталей? | *Одно основание и 4 боковых грани* |
| Что представляет собой дно бака? | *квадрат* |
| Его площадь? | $x^2$, *приняв сторону основания за x* |
| Что представляют собой боковые грани? | *4 равных прямоугольника* |
| Их площадь? | *4xh, где h – высота бака* |
| Сколько неизвестных величин, от которых зависит оптимизируемая величина? можно ли свести к одной? | *Сторона основания бака и высота* |
| Выразим высоту h через x | $V=hx^2$ $108=hx^2$ $h=108/x^2$ |
| Выразим площадь через x | $S(x)=x^2+4x$ |
| Каковы параметры x? | $0<x<108$ |
| Итак, математическая модель задачи | $S(x)=x^2+4x$ $0<x<108$ |

2. Работа с математической моделью. Найти наименьшее значение функции S(x) на интервале (0;108) по алгоритму

| Вопрос | *Ответ* |
|---|---|
| Найти стационарные точки | $S'(x)=2x-4$<br>$2x-4=0$<br>$2x^3=432$<br>$x^3=216$ $x=6$ |
| Стационарная точка является точкой экстремума? (точкой максимума или минимума) | *Да, x=6 точка минимума* |
| Наименьшее значение функции S(x) достигается в точке минимума? | *Да, т.к. на интервале (0;108) функция непрерывна* |

3. Ответ на вопрос задачи.

| Вопрос | *Ответ* |
|---|---|
| В данной задаче какой смысл имеет найденная величина x? | *Сторона основания бака* |
| Какие еще параметры имеет бак? | *Высота* |
| Каково ее значение? | *H=3* |
| Ответ на вопрос задачи | *Наименьшее количество материала на изготовление бака при ширине основания 6 дм и высоте 3 дм* |

**Решение заданий:**

№1. Сварщику поступил заказ выполнить ограждение участка площадью 2400м$^2$, разбив его на два участка прямоугольной формы так, чтобы длина ограждения была наименьшей. Найти размеры участков.

№2. Требуется сварить ящик с крышкой объёмом 576 дм$^3$, стороны основания ящика должны относиться как 1:2. Какой должна быть величина его сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

№3. Участок прямоугольной формы одной стороной прилегает к зданию. У сварщика есть 20 метров изгороди. Надо огородить участок так, чтобы площадь его была наибольшая

№4. Требуется изготовить открытый жестяной короб в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, с наименьшим объемом, если на его изготовление можно потратить жести 300см$^2$

## Практическая работа №32

**Тема 5.9** Нахождение оптимального результата с помощью производной

**Цель**: Научиться находить оптимальный результат в практических задачах с помощью производной.

**Теоретическая часть:**

Прежде чем решать какую - либо жизненную задачу, человек старается взвесить имеющуюся у него информацию, выбрать из нее существенную. И только потом, когда станет более или менее ясно, из чего исходить и на какой результат рассчитывать, он приступает к решению задачи. Часто описанный процесс называют условием задачи, фактически же это замена исходной жизненной задачи ее моделью. В осмыслении простейшей жизненной ситуации присутствует модельный подход, хотя человек обычно не замечает своей деятельности по созданию моделей - настолько она для него естественна. Иное дело, если возникающая задача затрагивает ключевые моменты жизни одного человека или какого - либо сообщества людей. Разнообразие информационных аспектов в каждой такой задаче настолько велико, что бывает сложно из всего многообразия информации об изучаемом явлении или объекте выбрать наиболее существенные. В таких случаях необходимо сделать упрощающее предположение, чтобы выделить исходные данные, определить, что будет служить результатом и какова связь между исходными данными и результатом. Все это - предположения, исходные данные, результаты, связи между ними - их называют моделью задачи.

Если построенная модель дает удовлетворительные результаты при решении жизненных задач, то говорят, что модель адекватна рассматриваемому объекту, процессу или явлению. Нередко для решения модельной задачи требуется некоторый инструментарий. Этот инструментарий обычно организуется в виде единого объекта, называемого исполнителем. Чтобы исполнитель мог получить ответ, ему нужны указания, что и как делать. Такие указания часто представляются в виде алгоритма, в котором задаются математические соотношения, связывающие исходные данные и результат.

В этом случае говорят о построении математической модели задачи.

Рассмотрим примеры использования математических моделей в оптимизационных практических задачах, решение которых требует нахождение производной функции.

Задача 1. Расстояние между двумя шахтами А и В по шоссейной дороге 60 км. На шахте А добывается 200 т руды в сутки, на шахте В - 100 т в сутки. Где нужно построить завод по переработке руды, чтобы для ее перевозки количество тонно-километров было наименьшим?

Решение. Выясняем, что суммарное количество тонно-километров изменяется в зависимости от места нахождения завода, вычислив его, например, для случаев, когда завод находится от пункта А на расстоянии 30 км, 20 км, 10 км.

Далее приступаем к решению задачи, обозначив расстояние от завода С до шахты А через x: AC = x и BC = 60 – x.

Количество тонно-километров, пройденных транспортом от А до С за каждый день, составляет 200 х т/км, от В до С - 100 (60 - х) т/км. Суммарное количество тонно-километров выразится функцией у = 200х + 100 (60 - х) = 100х + 6000, которая определена на сегменте [0; 60].

Ясно, что это уравнение может иметь бесконечно много решений. Вопрос - найти дешевый вариант перевозок.

Исследуя функцию у = 100х + 6000 на сегменте [0; 60], получим $y_{min}$ = 6000. Эта линейная функция будет иметь минимальное значение при х = 0, $y_{min}$ = 6000 т/км. Завод надо строить возле шахты А.

Для лучшего понимания этой задачи целесообразно дополнительно выяснить вопрос, где нужно бы построить завод, если бы:

а) в шахте А добывалось 100 т, а в шахте В - 200 т руды;

б) в шахте А - 200 т, а в шахте В - 190 т;

в) в шахте А и шахте В - по 200 т руды;

Чтобы решить этот вопрос, нужно найти на сегменте [0; 60] минимум функции:

а) у = 100х + 200(60 - х) = - 100х + 12000;

б) у = 200х + 190(60 - х) = 10х + 11400;

в) у = 200х + 200(60 - х) = 12000.

Ответ: Из всего этого можно сделать такой вывод: если в шахте А добывается руды больше, чем в шахте В, то завод надо строить возле шахты А; если же количество руды в этих шахтах одинаковое, то завод можно строить в любом месте вблизи шоссейной дороги между шахтами А и В.

Задача 2. На колхозной ферме нужно провести водопровод длиной 167 м. Имеются трубы длиной 5 м и 7 м. Сколько нужно использовать тех и других труб, чтобы сделать наименьшее количество соединений трубы не резать)?

Решение. Учитывая, что количество как одних, так и других труб может изменяться,

количество 7 - метровых труб обозначим через х,

количество 5 - метровых – через у,

тогда 7х - длина 7 - метровых труб,

5у - длина 5 - метровых труб.

Получаем уравнение 7х + 5у = 167. Так как х, у Є Z, то методом перебора легко найти соответствующие пары значений х и у, которые удовлетворяют уравнение 7х + 5у = 167.

(1; 32), (6; 25), (11; 18), (16; 11), (21; 4).

Ответ: Из этих решений наиболее выгодное последнее, т.е. х = 21, у = 4.

**Решение заданий:**

№1. Требуется огородить прямоугольный участок земли, используя в качестве одной из сторон забора часть стены дома. Участок должен иметь определенную площадь. Как следует выбрать соотношение между длинами его сторон, чтобы на постройку забора пошло наименьшее количество материала?

Ответ: Сторона забора, параллельная стене дома, должна быть в два раза длиннее боковой стороны.

№2. Требуется огородить сеткой длиной 600 м зону отдыха прямоугольной формы, прилегающую к реке. Определите, каковы должны быть длина и ширина участка, чтобы он имел наибольшую площадь.

Ответ: наибольшая площадь участка, если ширина150 м, длина 300 м.

№ 3. Определить размеры открытого бассейна объемом 256 $м^3$, имеющего дно в виде квадрата, так чтобы на облицовку его стен и дна было израсходовано наименьшее количество материала.

Ответ: 8 м. 8 м, 4 м.

№ 4. Прилегающую к дому прямоугольную площадку нужно оградить решеткой длиной 120 м. Определить размеры площадки, так чтобы она имела наибольшую площадь.

Ответ: 30 м, 60 м.

## Практическая работа №33

**Тема 5.10** Первообразная функция. Правила нахождения первообразных

**Цель:** Научить находить первообразные

**Теоретическая часть:**

**Понятие первообразной**

Легко догадаться, что термин “первообразная” происходит от двух слов: *первый* и *образ*. Первым образом у автомобиля была повозка, а у пюре — картофель.

Вернемся к математике.

Давайте быстро вспомним, что нахождение производной или **дифференцирование** — это совершение математической операции над функцией. То есть, следуя определенным правилам, любая функция может быть преобразована в новую функцию, которая и будет производной.

В обычной жизни, совершая несколько действий, мы можем преобразовать муку в тесто, а затем и в пирожки. Но разобрать готовый пирожок на муку у нас уже не получится. Зато в математике всегда можно вернуться на шаг назад: сложили два числа — вычтем обратно, возвели в степень — извлечем корень.

Похожим образом мы можем поступить с функцией.

Возьмем любую функцию, например, $f(x) = x^2$ и найдем для нее производную $f'(x) = 2x$ — получилась новая функция. Теперь для того, чтобы вернуться на шаг назад, нам нужно найти первообразную от новой функции ($f'(x) = 2x$).

**Первообразной** для функции f(x) называется такая функция F(x), для которой выполняется равенство: **F'(x) = f(x).**

То есть, если взять производную от первообразной какой-либо функции, получится сама эта функция. Процесс нахождения множества первообразных называется **интегрированием**.

**F'(x) = f(x)**

Для нахождения первообразных существует специальная таблица. В ней приведены первообразные для каждой функции. А чтобы убедиться в этом, можно найти производную от первообразной и сравнить с функцией. Они будут одинаковые.

**Таблица первообразных**

**Таблица первообразных:**

| **Функция f(x)** | **Первообразная F(x)** |
|---|---|
| $0$ | $C = const$ |
| $1$ | $x + C$ |
| $x^n, n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}, x > 0$ | $ln\, lnx + C$ |
| $cos\, x$ | $sin\, x + C$ |
| $sin\, x$ | $-cos\, x + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |

Где C — произвольное число

**Решение заданий:**

**№1.** Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t)=8t–4$. Найдите закон движения точки, если в момент времени t=2с пройденный путь составил 4 м.

Решение:

Воспользуемся определением первообразной, т.к. $S(t)=v_0t+at^2/2$

$S'(t) = v(t)$.

Найдем все первообразные $S(t)= -4t+4t^2 +c$.

Подставим t=2с и пройденный путь S=4 м.

$4= -8+16+c$

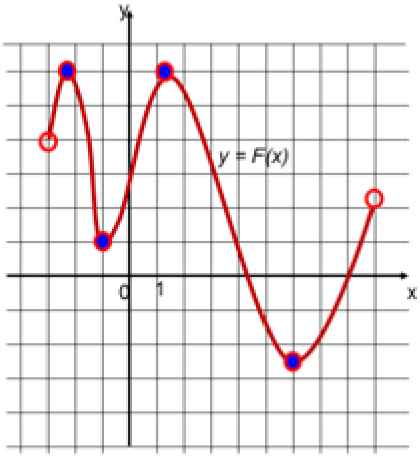
$C= -4$.

Следовательно, закон движения будет выглядеть следующим образом:

$s(t)=4t^2–4t–4$

Ответ: $s(t)=4t^2–4t–4$

**№2.** По графику первообразной функции y = F(x) определите количество точек, в которых функция y = f(x) равна нулю.

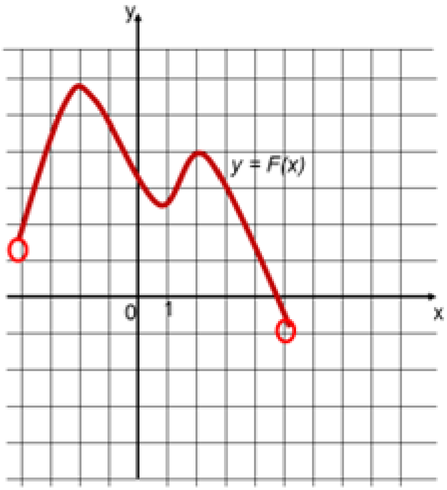



Решение:

Так как F'(x) = f(x) -по определению первообразной, то точки, в которых функция f(x) (производная функции F(x)) – это точки экстремума функции F(x). А таких точек на графике 4.

Ответ: 4.

**№3.** По графику первообразной функции y = F(x) определите числовые промежутки, на которых функция y = f(x) имеет отрицательный знак.




Решение:

Так как F'(x) = f(x)- по определению первообразной, то числовые промежутки, на которых функция f(x) (производная функции F(x)) имеет отрицательный знак – это промежутки убывания функции F(x). Таких промежутков на данном графике 2. Это (-2; 1) и (2; 5).

Ответ: (-2; 1); (2; 5).

**№4**. Докажите, что функция y = F(x) является первообразной для функции y = f(x).

$F(x) = x^2 - e^{2x} + 2, f(x) = 2x - 2e^{2x}$

Решение:

Доказательство.

$F'(x)=(x^2-e^{2x}+2)'=2x-2e^{2x}$

По определению первообразной, F'(x)=f(x), следовательно, F'(x) и есть первообразная для функции f(x)

**№5.** Для функции $f(x) = x^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку (-3; 10).

Решение:

Найдем все первообразные функции $f(x)$ : $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

Найдем число С, такое, чтобы график функции $f(x) = x^2$ проходил через точку (-3; 10). Подставим x = – 3, y = 10, получим:

$10 = (-3)^3/3 + c$

C=19

Следовательно, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 19$

Ответ: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 19$

## Практическая работа №34

**Тема 5.11** Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница

**Цель:** Научить решать интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница

**Теоретическая часть**

***Формула Ньютона-Лейбница***

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на$[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Решение заданий:**

Пример 1

Вычислить интеграл $\int_0^2 (x^3 - x^2)dx$.

*Решение.*

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 (x^3 - x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right) dt$.

*Решение.*

$$\int\limits_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right) dt = \int\limits_0^1 \left(t^{1/3} - t^{1/2}\right) dt = \left(\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3t^{4/3}}{4} - \frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

Пример 3

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

*Решение.*

Сначала определим точки пересечения двух кривых (рисунок 3).

$x^2 = \sqrt{x}$,

$\Rightarrow \quad x^2 - \sqrt{x} = 0,$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x}\left(x^{3/2} - 1\right) = 0,$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \;\; x_2 = 1.$

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках (0,0) и (1,1). Следовательно, площадь фигуры равна

$$S = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^3} - x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

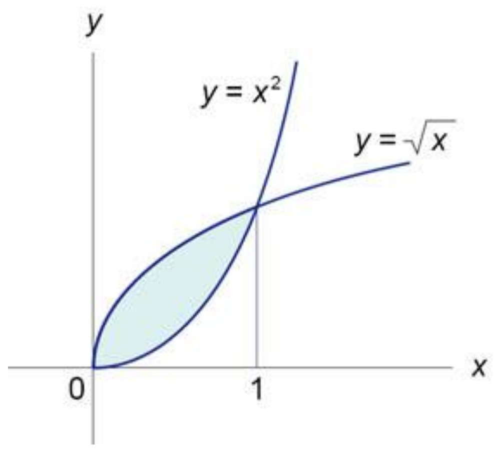



**Рис.3**

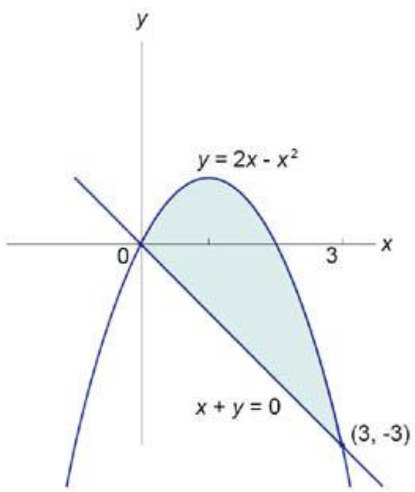



**Рис.4**

Пример 4

Найти площадь фигуры, ограниченную графиками функций $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0$.

*Решение.*

Найдем координаты точек пересечения кривых (рисунок 4).

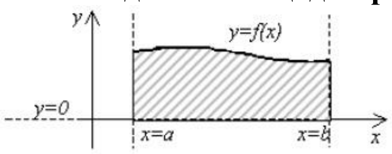
$$2x - x^2 = -x,$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0,$$
$$\Rightarrow \quad x(x-3) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \; x_2 = 3.$$

Данная область ограничивается сверху параболой $y = 2x - x^2$, а снизу - прямой линией $y = -x$. Следовательно, площадь этой области равна

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^3 \left(2x - x^2 + x\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

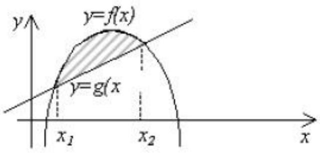
**Применение определённого интеграла:**

**1. Нахождение площади криволинейной трапеции**




Площадь фигуры, ограниченной линиями: ***x=a; x=b; y=0 и y=f(x)***

$S = \int_a^b f(x)dx$




Площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=f(x)$ и $y=g(x)$.
Найти точки пересечения $x_1$ и $x_2$ из условия: $f(x)=g(x)$

$S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx$

**2. Нахождение величины скорости v по заданному закону ускорения a(t) за промежуток времени [t1;t2], т.е** $\boldsymbol{v = \int_{t1}^{t2} a(t)dt}$

**Пример: Точка движется по закону ускорения a(t)=t+1. Найти величину ее скорости за промежуток времени [2;4] секунд.**

**Решение:** $v(t) = \int_2^4 (t+1)dt = \frac{(4+1)^2}{2} - \frac{(2+1)^2}{2} = 8$ м/с

**3. Нахождение пути S по закону изменения скорости v(t) за промежуток времени [t1;t2], т.е.** $\boldsymbol{S = \int_{t1}^{t2} v(t)dt}$

**Пример:** Найти путь, который проделала материальная точка за промежуток времени [2;4], двигаясь со скоростью, которая изменялась по закону: v(t)=2t+2.

**Решение:** $S = \int_2^4 (2t+2)dt = 22$ (ед. длины)

## Практическая работа №35

**Тема 5.12** Определенный интеграл в жизни

**Цель:** Научиться использовать интеграл для нахождения физических величин

**Теоретическая часть:**

Интеграл – это математический объект, который возник исторически на основе потребности решения различных прикладных задач физики и техники. Те физические величины, которые определяются с помощью интеграла – как правило, называются интегральными, а те величины, через которые выражаются интегральные величины – дифференциальными.

Интегралы нашли свое применение в астрономии (интегралы энергии и площадей; движение звезд); медицине (компьютерная томография); биологии (устанавливают прирост численности популяций; биомассу популяций и среднюю длину пути (полета) при прохождении некоторого фиксированного участка).

На сегодня невозможно изучение гемодинамики – движения крови по сосудам без применения интегралов. В течение длительного времени катетеризация правых отделов сердца являлась единственным методом исследования, позволявшим оценивать состояния правых отделов сердца и легочной артерии. С помощью интегралов в медицине вычисляют интегральную скорость для целого сосуда (артерии или вены), зная линейную скорость кровотока; так же рассчитывается ударный объем (объем крови).

Представленные выше факты демонстрируют широкое применение интегралов в различных научных областях, что доказывает неотъемлемую важность интегралов в нашей жизни. Применение определенного интеграла во многом облегчает решение прикладных задач геометрии, физики и других наук.

**Решение задач:**

**1. Задача о вычислении пути**

Согласно физическому смыслу первой производной, производная функции в точке есть мгновенная скорость точки, т.е. $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$. Отсюда, $ds = v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от $t_1$ до $t_2$ получаем

$$\int ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью υ(е) за отрезок времени $[t_1,t_2]$выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \qquad (1)$$

**Пример 1.** Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t+3t^2$(м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение.

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 =150(\text{м}).$$

**Пример 2.** Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью v =($6t^2$+2t) м/с, второе – со скоростью $v^2$=(4t+5) м/с. На каком расстояния друг от друга они окажутся через 5 с?

**2. Задача о вычислении работы переменной силы**

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постояна, а пройденный путь равен s, то как известно из курса физики, работа A этой F вычисляется по формуле:

$$A = F*s$$

Работу переменной силы f(x) при перемещении по оси Ox материальной точки от x=a до x=b, находим по формуле (3):

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

Решении задач на вычисление работы силы упругости, связанных с растяжением и сжатием пружин, основывается на законе Гука. По закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину, пропорциональная этому растяжению или сжатию, т.е. F=kx, где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

**Пример 1.** Сила упругости F пружины, растянутой на $1^1$ = 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на $1_2$ =0,1 м?

Решение. Подставив данные в формулу закона Гука, получим: 3=k*0.05, т.е. k=60, следовательно, сила упругости выражается соотношением F=60x. Найдем работу переменной силы по формуле (2), полагая, что a=0; b=0,1:

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3\text{Дж}$$

**3. Задача о силе давления жидкости**

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле P=gphS, (4)

Где g – ускорение свободного падения в м/с$^2$;

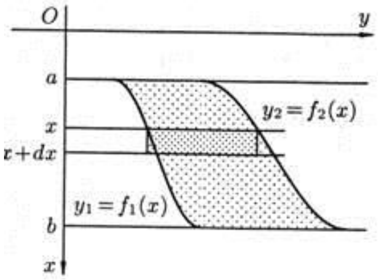
p– плотность жидкости в кг/м$^3$;

h – глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м$^2$.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями x = a, x = b, y1 = $f$1(x) и y2=$f$2(x); система координат выбрана так, как указано на рисунке.



Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонт альных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т.е. параллельными оси OY). На глубине x выделим одну из них и обозначим через f(x) ее длину, а через $\Delta x$ ее ширину. Приняв полоску за прямоугольник, находим ее площадь $S = f(x)\cdot \Delta x$.

$$P = g\rho f(x)\cdot \Delta x\cdot x$$

Найдем дифференциал dp этой функции.

$$dp = g\rho f(x)\cdot x dx$$

Тогда по закону Паскаля интегрируя полученное равенство в пределах от x = a до x = b, получим

$$P=g\int_a^b p x f(x) dx \quad (3)$$

**Пример**

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м$^3$), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м х 0,7 м.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Оу и Ох соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3). Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x)=0{,}7x$, $x\in[0;0{,}4]$. Так как пределы интегрирования a=0 и b=0,4, то получим:

$$P=g\int_0^{0,4} 1000*0{,}7*x dx = 700\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,4} = 56g \approx 549H$$

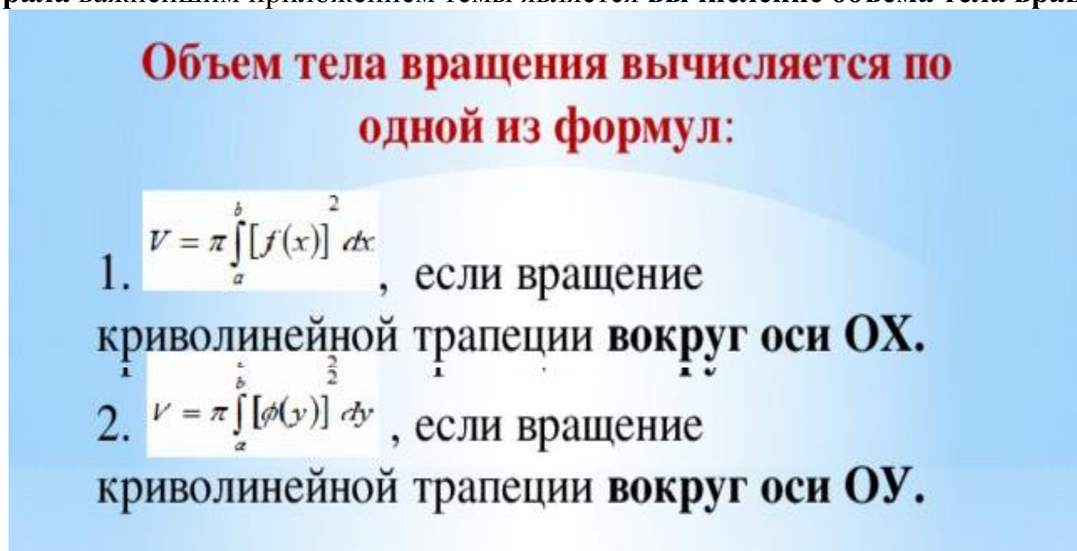
**Практическая работа №36**

**Тема 5.12** Определенный интеграл в жизни

**Цель:** Научиться использовать интеграл для нахождения объемов

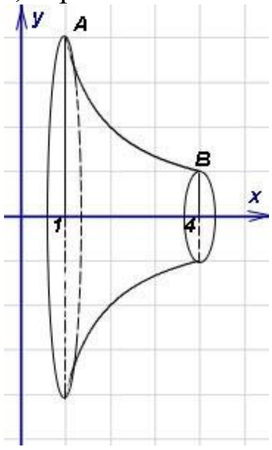
**Теоретическая часть:**

Помимо **нахождения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла** важнейшим приложением темы является **вычисление объема тела вращения**.



**Решение заданий:**

**Пример 1.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс ($Ox$) фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{4}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$, $x=4$.

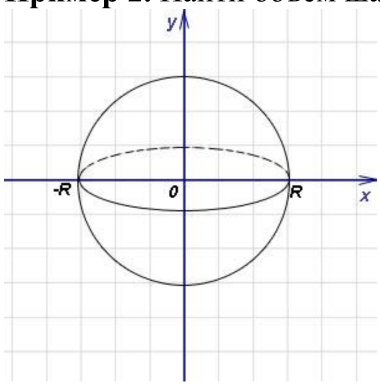



Решение. Объём тела вращения найдём по формуле (1), в которой $f(x)=\frac{4}{x}$, а пределы интегрирования $a$ = 1, $b$ = 4. Применяем **табличный интеграл**. Постоянный множитель $4^2$=16 выносим за знак интеграла. Получаем:

$$v=\pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=16\pi\int_1^4\frac{dx}{x^2}=16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=12\pi \text{ куб.ед.}$$

**Пример 2.** Найти объём шара радиуса $R$.

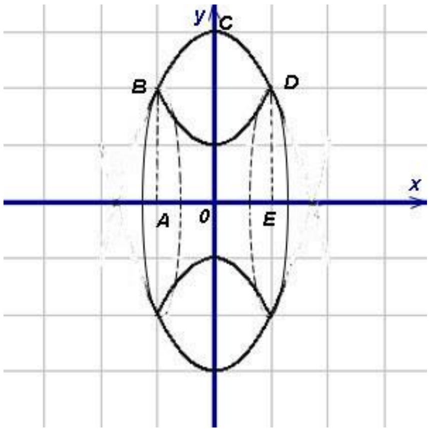



Решение. Рассмотрим шар как тело, получащееся при вращении вокруг оси абсцисс полукруга радиуса $R$ с центром в начале координат. Тогда в формуле (1) подынтегральная функция запишется в виде $y^2=R^2-x^2$, а пределами интегрирования служат $-R$ и $R$. В вычислениях радиус $R$ считается константой (вместо него можно подставить любое значение для шара с любым радиусом). Применяем **табличный интеграл** . Следовательно,

$$v=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Пример 3.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс ($Ox$) фигуры, заключённой между параболами $y=3-x^2$ и $y=x^2+1$.




Решение. Представим искомый объём как разность объёмов тел, полученных вращением вокруг оси абсцисс криволинейных трапеций *ABCDE* и *ABFDE*. Объёмы этих тел найдём по формуле (1). В ней пределы интегрирования равны $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ - абсциссам точек *B* и *D* пересечения парабол. Эти точки и их абсциссы видны на графике. Точно также - на графике - можно определить координаты точек пересечения линий из ваших задач. Только для этого нужно построить график. Теперь можем найти объём тела, применяя всё тот же табличный интеграл 7:

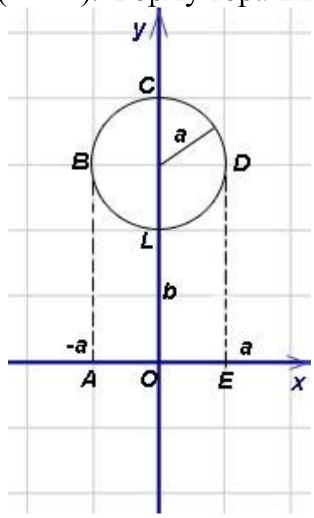
$$v = \pi\int_{-1}^{1}\left(3-x^2\right)^2 dx - \pi\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(3-x^2\right)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right]dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\left(8-8x^2\right)dx = 8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{32}{3}\pi \text{ куб.ед.}$$

**Пример 4.** Вычислить объём тора (тором называется тело, получающееся при вращении круга радиуса *a* вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии *b* от центра круга ($b \geq a$). Форму тора имеет, например, баранка).




Решение. Пусть круг вращается вокруг оси *Ox* (рис. 20). Объём тора можно представить как разности объёмов тел, полученных от вращения криволинейных трапеций *ABCDE* и *ABLDE* вокруг оси *Ox*.

Уравнение окружности *LBCD* имеет вид

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2,$$

причём уравнение кривой *BCD*

$$y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

а уравнение кривой *BLD*

$$y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

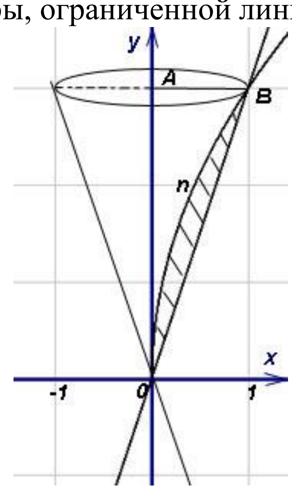
Используя разность объёмов тел, получаем для объёма тора *v* выражение и вычисляем интеграл:

$$v = 2\pi\int_0^a y_1^2dx - 2\pi\int_0^a y_2^2dx = 2\pi\int_0^a (y_1^2 - y_2^2)dx =$$

$$= 2\pi\int_0^a\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - \left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx =$$

$$= 8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ dx = 2\pi^2a^2b.$$

**Пример 5.** Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ординат (*Oy*) фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$ и $y = 3x$.




Решение. Представим искомый объём как разность объёмов тел, полученных вращением вокруг оси ординат треугольника *OBA* и криволинейной трапеции *OnBA*. Пределами интегрирования служат $y_1 = 0$ и $y_2 = 3$ - ординаты точек *O* и *B* пересечения параболы и прямой, что видно на графике к этому примеру. Таким образом, получаем объём тела:

$$v = \pi\int_0^3\left(\frac{y}{3}\right)^2 dy - \pi\int_0^3\left(\frac{y^2}{9}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{\pi}{9}\int_0^3 y^2dy - \frac{\pi}{81}\int_0^3 y^4dy =$$

$$= \frac{\pi}{27}y^3\Big|_0^3 - \frac{\pi}{405}y^5\Big|_0^3 = \frac{2}{5}\pi \text{ куб.ед.}$$

**Практическая работа №37**

**Тема 5.13** Контрольная работа по разделу 5 «Производная и первообразная функции»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 5 «Производная и первообразная функции»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. Чему равна производная функции $y = cos^2 x$?

а) $y' = -sin^2 x$; в) $y' = -2\sin x \cos x$;
б) $y' = -2sin^2 x$; г) $y' = 2\cos x$.

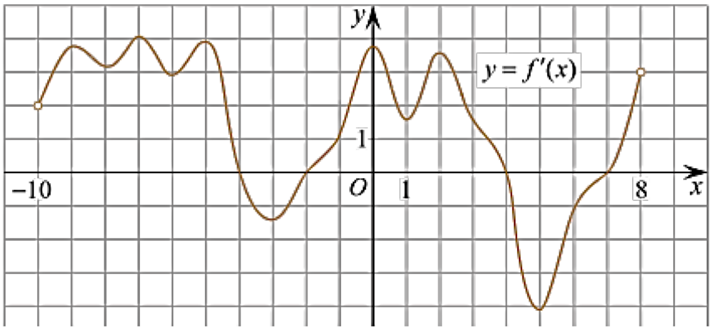
2. По какой из формул вычисляется производная произведения?

а) $(u+v)' = u' + v'$; в) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$;
б) $(uv)' = u'v + uv'$; г) $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.

3. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

а) 1; в) 4;
б) –1; г) –4.

4. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-9;6]$.

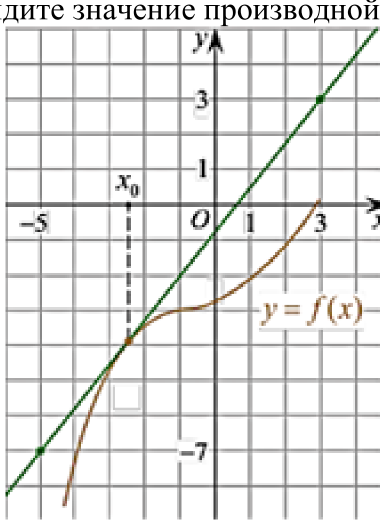



а) 5; в) 2;
б) 4; г) 3.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ (верный ответ – 2 балла)***

5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 - 4t^2 + 5t - 5$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$



7. Является ли $F(x) = x^3 - 3x + 1$ первообразной для функции $f(x) = 3(x^2 - 1)$?

8. Задайте первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 3x^2 - 2x$, если известны координаты точки М (1; 4) графика $F(x)$.

***Эталоны ответов***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | Б | А | Г | 83 | -3 | да | $x^3 - x^2 + 4$ |

## Практическая работа №38

**Тема 6.2** Вероятность в профессиональных задачах

**Цель:** Научиться решать практические задачи на вероятность

**Теоретическая часть:**

**1. Теория вероятностей** – раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними. Рассмотрим некоторые ключевые понятия, которые используются в теории вероятностей.

**Определение.**

**Испытанием** называется осуществление определенных действий.

Под **событием** понимают любой факт, который может произойти в результате испытания.

Любой результат испытания называется **исходом**.

**Достоверным** называют событие, которое в результате испытания **обязательно произойдёт**.

**Невозможным** называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания.

События обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (A, B, C, D,…).

Рассматривая приведенный пример, мы можем сформулировать следующие заключения.

1. Процесс доставания предмета из коробки является испытанием.
2. Результат доставания предмета из корзины является событием.
3. Событие «вынутый предмет окажется клубком» является достоверным событием.
4. События «вынутый предмет не окажется клубком» или «вынутый предмет окажется красным клубком» являются невозможными событиями.
5. Событие «вынутый предмет окажется зеленым клубком» является вероятным событием.

A = {вынутый предмет оказался клубком}.

B = {вынутый предмет не оказался клубком.

C = {вынутый предмет оказался зеленым клубком}.

D = {вынутый предмет оказался красным клубком}.

**2.** Определим еще несколько важных понятий теории вероятностей

**Определение**

**Пространство элементарных событий Ω**— множество всех различных исходов произвольного испытания.

Например, при броске одной игральной кости пространство элементарных событий $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, где $w_i$- выпадение i очков.

Если события **не** могут произойти одновременно в одном испытании, то события называются **несовместными**.

Например, при бросании монеты не могут одновременно выпасть «Орёл» и «Решка».

Простейшим примером несовместных событий является пара **противоположных** событий.

**Противоположное событие** происходит тогда, когда исходное событие А **не** происходит.

Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой сверху.

Например:

• А – сдал экзамен по математике;

• $\bar{A}$ – не сдал экзамен по математике.

**Определение.**

**Полной группой событий** называется такая система событий, что в результате испытания непременно произойдет одно и только одно из них.

**Пример .**

Монету подбросили дважды. Укажите все элементарные события полной группы событий.

Элементарными событиями являются:

- Выпало два «орла»
- Выпало две «решки»
- Выпал один «орел» и одна «рещка».

**3.** Чтобы выяснить, насколько вероятно то или иное случайное событие, нужно подсчитать, как часто оно происходит.

**Определение.**

Число испытаний, в которых событие наступило, назовем **абсолютной частотой и обозначим n.** Общее число произведенных испытаний обозначим **N.**

Отношение абсолютной частоты к числу испытаний **n/N называется относительной частотой события.**

Относительная частота показывает, какая доля испытаний завершилась наступлением данного события. Эта относительная частота и определяет **вероятность случайного события.** Ее еще называют статистической вероятностью события.

Статистическая вероятность события рассчитывается опытным путем.

**Пример.**

Еще со времен Древнего Китая за 2238 лет до нашей эры на основании метрик демографы обнаружили, что на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков.

Это означает, что Вероятность рождения мальчика составляет 0,514.

**1.** Классическое определение вероятности применяется для **равновозможных событий**.

К равновозможным (равновероятностным) относятся такие события, для которых нет никаких объективных оснований считать, что одно является более возможным, чем другие.

Например, при бросании игрального кубика события выпадения любого из очков равно возможны.

Рассмотрим произвольный эксперимент.

Пусть **n-** число всех исходов эксперимента, которые образуют полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, **m** – число благоприятных событию А исходов. Тогда **вероятностью события А** называется число $P(A) = \frac{m}{n}$

Согласно определению вероятности наименьшее значение вероятности принимает невозможное событие, так как оно не может наступить и для него m=0, значит и вероятность равна 0.

Наибольшее значение принимает достоверное событие. В силу того, что оно гарантированно произойдет, для него m=n, P=m/n=n/n=1.

**2 .Суммой** событий А и В называется событие А+В, которое состоит в том, что наступит **или** событие А, **или** событие В, **или** оба события одновременно.

**Произведением** событий А и В называется событие **А•В**, состоящее в совместном осуществлении событий А **и** В.

Например:

1. Пусть А - идет дождь, В - идет снег, тогда А + В – «идет снег или дождь»

2. При 3-х выстрелах по мишени события: $A_0$ – «попаданий нет», $A_1$ – «одно попадание», $A_2$ – «два попадания», тогда $A=A_0+A_1+A_2$ - «произошло не больше двух попаданий»

3. Пусть С - из урны вынули белый шар, D - из урны вынули белый шар, тогда C·D - из урны вынули два белых шара

4. Пусть С - из урны вынули белый шар, D - из урны вынули белый шар, тогда $C\overline{D}$ ·- из урны вынули два шара: белый и не белый

**Теорема сложения вероятностей несовместных событий**: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий А или В равна сумме вероятностей этих событий:

**Р(А+В)=Р(А)+Р(В)**

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**Пример 1.**

Известна история о том, как однажды к Г. Галилею явился солдат и попросил помочь ему в решении насущного вопроса: какая сумма 9 или 10 очков при бросании трех костей выпадает чаще?

Может показаться, что шансы равны, так как каждая сумма из 9 и 10 очков может быть получена одним их шести способов:

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3;$

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$

Однако с учетом перестановок для суммы 9 очков получается 25 различными способами (по 6 способов для первого, второго, пятого вариантов суммы, по 3 способа для третьего и четвертого вариантов, 1 способ для последнего варианта 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1), а для суммы 10 очков – 27 различными способами (6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3). Как видно, шансы этих случайных событий довольно близки между собой и относятся друг к другу как 25:27, что и вызвало затруднения солдата.

Таким образом, чаще выпадает сумма 10.

**Пример 2.** В средние века среди феодальной знати были широко распространены азартные игры. Большим любителем таких игра был француз шевалье де Мере. Страстного игрока в кости, придворного французского короля шевалье де Мере можно отнести к числу «основателей» теории вероятностей. Заслуга его состоит в том, что он настойчиво заставлял математиков решать различные задачи, на которые наталкивался сам во время своей практики игры. Он хотел разбогатеть при помощи игры в кости. Для этого шевалье придумывал различные усложненные правила игры. Страстному игроку, но плохому математику, де Мере посчастливилось иметь такого друга, как Паскаль. В 1654 г. шевалье де Мере обратился к Блезу Паскалю за помощью в разрешении проблем, связанных с вероятностью благоприятных результатов при бросании игральных костей.

Одна из задач была поставлена следующим образом: Игральная кость бросается четыре раза. Шевалье бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадет шесть очков. Какова вероятность выигрыша для шевалье? Ответ округлите до десятых.

**Решение:**

Так как при каждом бросании игральной кости имеется 6 различных возможностей, то при четырех бросаниях кости число различных возможных случаев будет $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

Среди этих 1296 случаев будет $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ таких, где шестерка не выпадет ни разу.

В 1296 – 625 = 671 случае хотя бы один раз из четырех выпадает шестерка. Следовательно, вероятность выпадения хотя бы одной шестерки при четырех бросаниях кости равна 671/1296, что чуть больше 0,5.

**Решение заданий:**

**1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованных. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.**

*Решение. При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию А «выбранный телевизор — бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности Р(А) = 5÷1000 = 0,005. Ответ: 0,005.*

**2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?**

*Решение. Общее число исходов равно числу шаров: 9 + 6 + 5 = 20. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна 6÷20 = 0,3. Ответ: 0,3.*

**3. Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.**

*Решение. Вероятность события равна отношению количества благоприятных случаев к количеству всех случаев. Благоприятными случаями являются 3 случая, когда игру начинает Петя, Игорь или Антон, а количество всех случаев 6. Поэтому искомое отношение равно 3:6=0,5. Ответ: 0,5.*

**4. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?**

*Решение: Обозначим через А событие «команда России во второй группе». Тогда количество благоприятных событий $m = 4$ (четыре карточки с номером 2), а общее число равновозможных событий $n = 16$ (16 карточек) по определению вероятности Р= 4: 16 = 0,25. Ответ:0,25*

**5. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?**

*Решение. На каждые 1000 лампочек приходится 5 бракованных, всего их 1005. Вероятность купить исправную лампочку будет равна доле исправных лампочек на каждые 1005 лампочек, то есть 1000:1005=0,995.Ответ: 0,995.*

**7. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?** *6 : 8=0,75.*

**8. В чемпионате по футболу участвуют 16 команд, которые жеребьевкой распределяются на 4 группы: A, B, C и D. Какова вероятность того, что команда России не попадает в группу А?**

*Решение. Каждая команда попадет в группу с вероятностью 0,25. Таким образом, вероятность того, что команда не попадает в группу равна 1-0,25=0,75. Ответ:0,75*

**9. На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что Коля и Толя попадут в разные группы.**

*Решение. Всего 26 мест. Пусть Коля займет случайное место в любой группе. Останется 25 мест, из них в другой группе 13. Исходом считаем выбор места для Толи. Благоприятных исходов 13. Р=13/25 = 0,52. Ответ:0,52*

**10. В классе 16 учащихся, среди них два друга —Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.**

*Решение. Если Сергею первому досталось некоторое место, то Олегу остаётся 15 мест. Из них 3 — в той же группе, где Сергей. Искомая вероятность равна 3/15. Ответ:0,2*

## Практическая работа №39

**Тема 6.2** Вероятность в профессиональных задачах

**Цель:** Научиться решать задачи на использование вероятности в профессиональной деятельности

**Теоретическая часть:**

Основы теории вероятностей нужно знать каждому человеку для формирования правильного мировоззрения, для осознания того, что мы живем в случайном, вероятностном мире.

Психология человека такова, что ему неуютно среди случайностей. Он жаждет определенности и справедливости, ищет причин и объяснений. Часто таким образом возникают суеверия: например, среди африканских племен распространено поверье о том, что бывают просто львы и львы, в которых переселились души умерших. Последние на людей не нападают. Это объяснение не несет полезной информации, поскольку нет признаков, по которым заранее можно было бы определить, из какой категории лев, но оно успокаивает психологически. Точно так же появляются известные всем суеверия при сдаче экзаменов. Некоторые суеверия, кстати, основаны на частотных совпадениях (например, мелких неприятностей и встреч с черной кошкой). Это относится и к приметам, которые порой подмечают вероятностные закономерности. Так, поговоркам «Беда никогда не приходит одна» или «Жизнь, она полосатая» соответствует в теории вероятностей закон серий.

Следует помнить и то, что мы живем в мире, где происходят случайные события, и то, что закономерности пробиваются через массу случайностей. Чем сложнее система, тем труднее обнаружить закономерности. Именно в этих случаях и используют вероятностные методы.

Таким образом, теория вероятности актуальна в наши дни как в математике и точных науках, так и в нашей повседневной жизни.

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений. Путем наблюдений (испытаний, экспериментов), т.е. опыта в широком смысле слова, происходит познание явлений действительного мира.

**Решение заданий:**

**1. В гостинице три администратора. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три администратора заняты одновременно.**

*Решение. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три администратора заняты равна $(0,3)^3 = 0,027$. Ответ: 0,027.*

**2. В гостинице «Интурист» стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.**

*Решение. Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,0025 = 0,9975$. Ответ: 0,9975.*

**3. В центре туризма два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.**

*Решение. Рассмотрим событие$A$ = кофе закончится в первом автомате, $B$ = кофе закончится во втором автомате.*

*Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$. Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1 - 0,12 = 0,88$. Поскольку $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, имеем: $0,88 = 0,7 + 0,7 - x$, откуда искомая вероятность $x = 0,52$. Ответ: 0,9975.*

**4. Две фабрики выпускают одинаковую посуду для гостиниц Черноморского побережья. Первая фабрика выпускает 45% этой посуды, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованной посуды, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине посуда окажется бракованной.**

*Решение. Вероятность того, что посуда куплена на первой фабрике и она бракованная: $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$. Вероятность того, что посуда куплена на второй фабрике и она бракованная: $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$. Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленная в магазине посуда окажется бракованной, равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$. Ответ: 0,019.*

## Практическая работа №40

**Тема 6.4** Задачи математической статистики

**Цель:** Научиться решать задачи математической статистики

**Теоретическая часть:**

**Математической статистикой** называется наука, занимающаяся методами обработки экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями. Первая задача математической статистики: указать способы сбора и группировки статистических данных, полученных в результате экспериментов. Вторая задача математической статистики: разработать методы анализа статистических данных.

Ко второй задаче относятся:

1. Оценка неизвестных параметров (вероятности события, функции распределения и её параметров и т.д.) с построением доверительных интервалов (методы оценивания).

2. Проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения и параметров распределения (методы проверки гипотез).

При этом решаются следующие в порядке сложности и важности задачи:

- Описание явлений, то есть, упорядочение поступившего статистического материала, представление его в наиболее удобном для обозрения и анализа виде (таблицы, графики).

- Анализ и прогноз, то есть приближённая оценка характеристик на основании статистических данных. Например, приближённая оценка математического ожидания и дисперсии наблюдаемой случайной величины и определение погрешностей этих оценок.
- Выработка оптимальных решений. Например, определение числа опытов n, достаточного для того, чтобы ошибка от замены теоретических числовых характеристик их экспериментальными оценками не превышала заданного значения. В связи с этим возникает задача проверки правдоподобия гипотез о параметрах распределения и о законах распределения случайной величины, решением которой является возможность сделать один из выводов:

– отбросить гипотезу, как противоречащую опытным данным;

– принять гипотезу, считать ее приемлемой.

Математическая статистика помогает экспериментатору лучше разобраться в опытных данных, полученных в результате наблюдений над случайными явлениями; оценить, значимы или не значимы наблюдаемые факты; принять или отбросить те или иные гипотезы о природе случайных явлений.

**Решение задач:**

**Задача 1.**

На экзамене по истории студенты получили оценки:

3 4 4 4 3 4

3 4 3 5 4 4

5 5 2 3 2 3

3 4 4 5 3 3

5 4 5 4 4 4

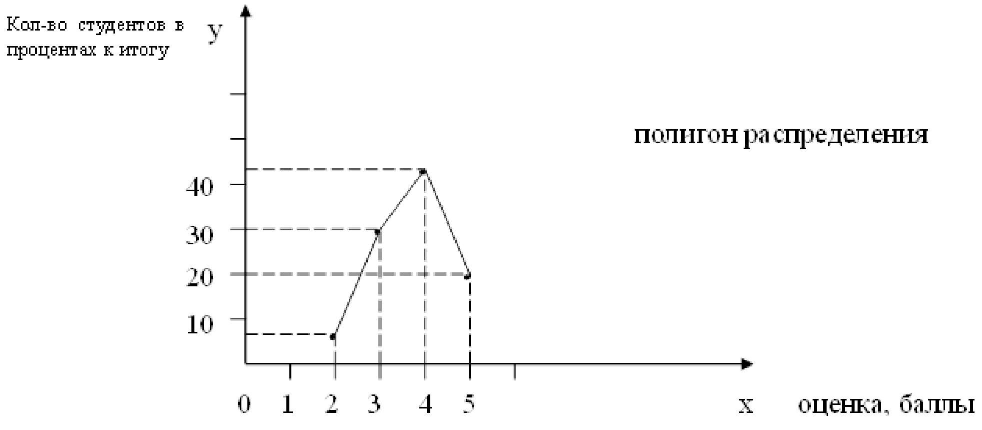
Построить дискретный вариационный ряд распределения студентов по баллам и изобразить его графически.

**Ход решения задачи:**

Определяем элементы ряда распределения: варианты, частоты, частоты.

| Оценка, баллы | Кол-во студентов с такой оценкой, человек | В процентах к итогу |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 6,7 |
| 3 | 9 | 30 |
| 4 | 13 | 43,3 |
| 5 | 6 | 20 |
| Итого | 30 | 100 |

Теперь графически изобразим дискретный ряд распределения в виде помпона распределения.




Можно сделать вывод о том, что преобладающее большинство студентов получило «4» (43,3 %).

**Задача 2.**

Во время выборочной проверки было установлено, что продолжительность одной покупки в кондитерском отделе магазина была такой: (секунды).

77 70 82 81 81
82 75 80 71 80
81 89 75 67 78
73 76 78 73 76
82 69 61 66 84
72 74 82 82 76

Построить интервальный вариационный ряд распределения покупок по продолжительности, создав 4 группы с одинаковыми интервалами. Обозначить элементы ряда. Изобразить его графически, сделать вывод.

**Ход решения задачи по статистике:**

Определяем элементы ряда распределения: варианты, частоты, частости, накопленные частоты.

Но прежде рассчитаем границы 4 заданных групп с одинаковыми интервалами:

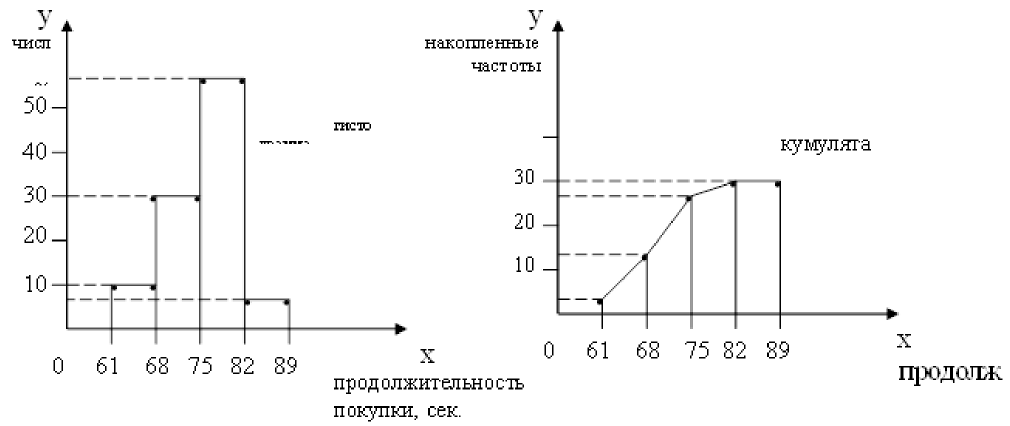
Величину интервала определим по формуле $i = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$.

В нашем случае $i = \frac{89-61}{4} = 7$

Границы групп соответственно равны:
I 61+7=68 (61-68)
II 68+7=75 (68-75)
III 75+7=82 (75-82)
IV 82+7=89 (82-89)

| Группы покупок по продолжительности, сек. | Число покупок | В процентах к итогу | Накопленные частоты |
|---|---|---|---|
| 61-68 | 3 | 10 | 3 |
| 68-75 | 9 | 30 | 12 |
| 75-82 | 16 | 53,3 | 28 |
| 82-89 | 2 | 6,7 | 30 |
| Итого | 30 | 100 | |

Теперь графически отобразим наш интервальный вариационный ряд в виде гистограммы и кумуляты.




По таблице и графика можно сделать вывод о том, что преобладающее большинство покупок (16 или 53.3%) находится во временном интервале 75-82, сек.

## Практическая работа №41

**Тема 6.5** Контрольная работа по разделу 6 «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 10 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Комбинаторика - это раздел математики, отвечающий на вопросы сколькими способами можно выбрать элементы …

А) заданного конечного множества; Б) бесконечного множества; В) любого множества; Г) иррациональных чисел.

2. (1 балл) Соединения из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются:

А) перестановками; Б) сочетаниями; В) размещениями; Г) комбинациями.

3. (1 балл) Число всех возможных размещений вычисляется по формуле:

А) $A_n^m = n(n-m)$; Б) $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$; В) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; Г) $A_n^m = n(n+m)$

4. (1 балл) Группировка – это…

А) упорядочение единиц совокупности по признаку; Б) разбиение единиц совокупности на группы по признаку; В) обобщение единичных фактов; Г) обобщение единичных признаков.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает?

6. Сравните всхожесть семян любых трех видов однолетних цветов за последние 3 года. Составьте диаграмму по найденным данным. Сделайте выводы.

7. (2 балла) Цветоводу предложили украсить клумбу цветами, используя 3 вида. Сколько различных вариантов есть у цветовода, если есть выбор из 5 видов разной рассады?

8. (2 балла) Сколькими способами можно посадить 4 кустарника в один ряд?

***Эталоны ответов***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | А | А | В | А | 0,997 | - | 10 | 24 |

## Практическая работа №42

**Тема 7.2** Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей

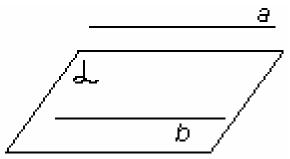
**Цель:** Научиться решать задачи, используя свойства параллельных плоскостей

**Теоретическая часть:**

**Определение.** Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек ($a \parallel \alpha$)

**Признак параллельности прямой и плоскости.**

**Теорема.** Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.




$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel \alpha$$

рис. 1

**Замечания.**

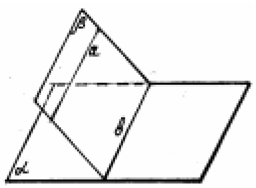


рис. 2

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а другая прямая имеет с плоскостью общую точку, то эта прямая лежит в данной плоскости.

**Выводы.**

Случаи взаимного расположения прямой и плоскости:

а) прямая лежит в плоскости;

б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку;

в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

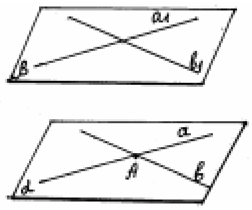


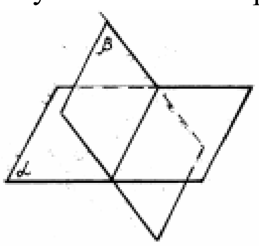
рис. 3

**Определение.** Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей $\alpha$ и $\beta$ обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

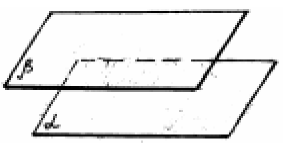
**Теорема.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Случаи взаимного расположения плоскостей:



плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются.

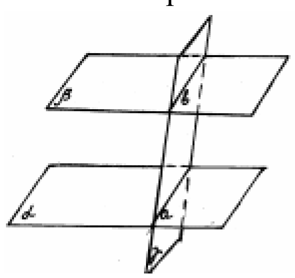
рис. 4



плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны.

рис. 5

Свойства параллельных плоскостей:



1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

рис. 6

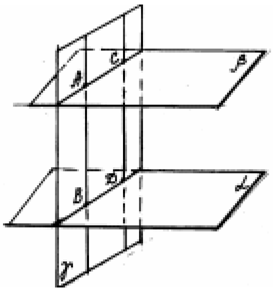
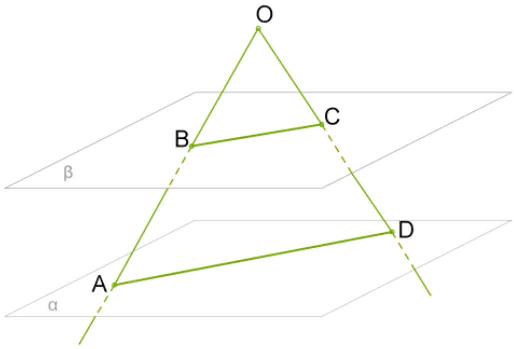


рис. 7

2. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

**Решение задач:**

Дан угол AOD и две параллельные плоскости α и β.




Плоскость α пересекает стороны угла OA и OD соответственно в точках A и D, плоскость β эти стороны пересекает соответственно в точках B и C.

Дано:

OB= 8

AB= 6

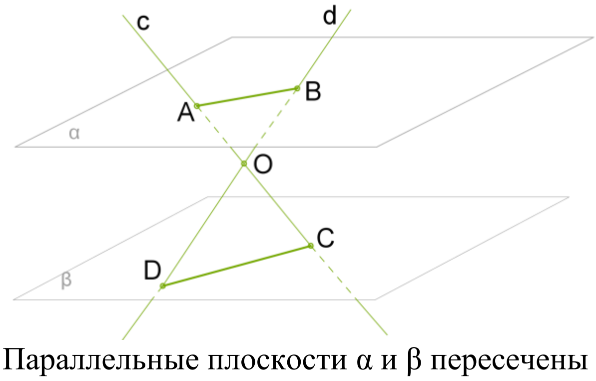
BC= 9

CD= 2

Найти AD, OD

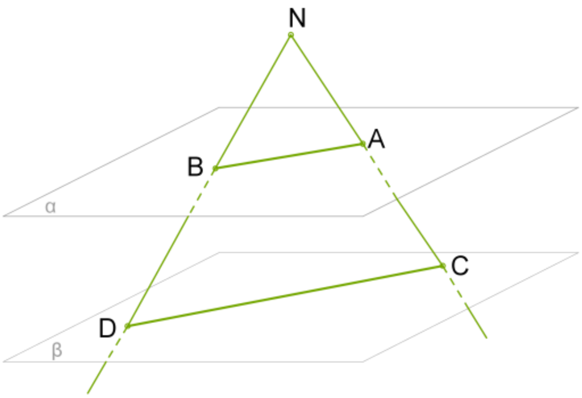
Через точку O, которая находится между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые c и d, пересекающие плоскости так, что точки A и B находятся в плоскости α, а точки C и D - в плоскости β AB=18 см, DO=26 см и AC=3·AO

Вычислить: BD;CD




Параллельные плоскости α и β пересечены прямыми c и d

Стороны ∡N пересекают параллельные плоскости β и α в точках C,D и A,B. Вычисли длину отрезка AB, если NA=13 см, NC=20 см и CD=55 см.

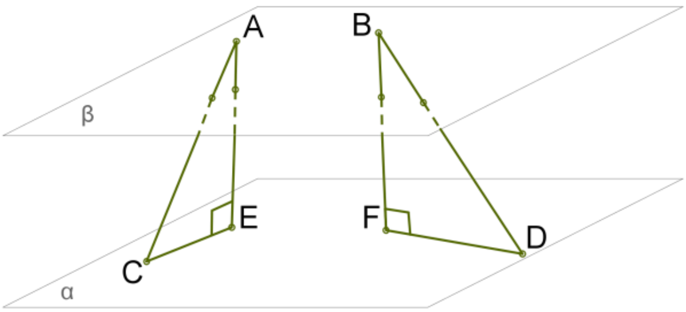



Стороны ∡N пересекают параллельные плоскости β и α

Даны параллельные плоскости α и β. Точки A и B находятся в плоскости α, а точки C и D в плоскости β. Длина отрезка AC=7, длина отрезка BD=12.

Сумма проекций этих отрезков в плоскости β равна 8.

Найти длину проекций обоих отрезков.




**Практическая работа №43**

**Тема 7.4** Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах

**Цель:** Научиться решать задачи, используя теорему о трех перпендикулярах

**Теоретическая часть:**

Имеем плоскость α (рис. 1). В плоскости α лежит прямая *b*. *AH* – перпендикуляр к плоскости α, *AM* – наклонная, *MH* - проекция наклонной *AM* на плоскость α.

По теореме о трех перпендикулярах, наклонная перпендикулярна к прямой *b* тогда и только тогда, когда ее проекция перпендикулярна к прямой *b*.

$b \perp AM \Leftrightarrow b \perp HM$

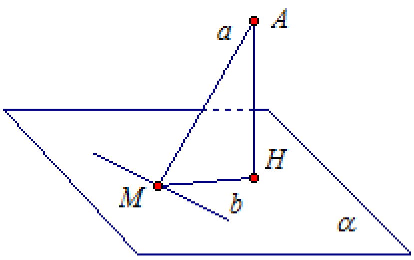



Рис. 1

В теореме идет речь трех перпендикулярах. Укажем их:

*AH* – это перпендикуляр к плоскости α, а значит, к прямой *b*.

*HM* – проекция, перпендикуляр к прямой *b*.

*AM* – наклонная, перпендикуляр к прямой *b*.

Угол между прямой и плоскостью

Рассмотрим плоскость α и прямую *a*, *a* = *AM* (рис. 2). Пусть прямая *a* пересекает плоскость α, но не перпендикулярна ей. Тогда углом между прямой *a* и плоскостью α называется угол между прямой *a* и ее проекцией на эту плоскость. То есть, угол меду прямой *a* и плоскостью α - это угол *AMH*. Пусть $\angle AMH = \varphi_0$.

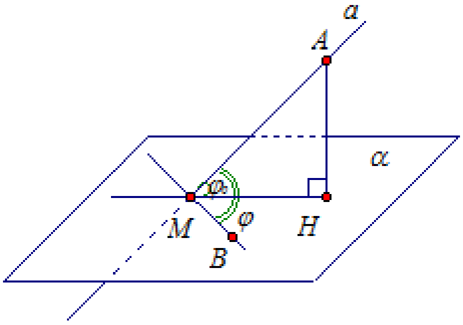



Рис. 2

**Свойство угла между прямой и плоскостью**

Через точку *M* в плоскости α проведем прямую *MB* (рис. 2). Рассмотрим угол между прямой *a* и прямой *MB*, назовем его *φ*. Тогда по свойству угла между прямой и плоскостью получаем, что $\varphi_0 < \varphi$.

**Решение задач:**

Задача 1

Прямая *AK* перпендикулярна к плоскости правильного треугольника *ABC*, точка *M* – середина стороны *BC*.

1) Докажите, что $MK \perp BC$

2) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABC*, если *AK = a, BC = 2a*.

1) *Дано*:

$AB = BC = CA$,

$AK \perp ABC$,

$BM = MC$.

*Доказать*: $MK \perp BC$.

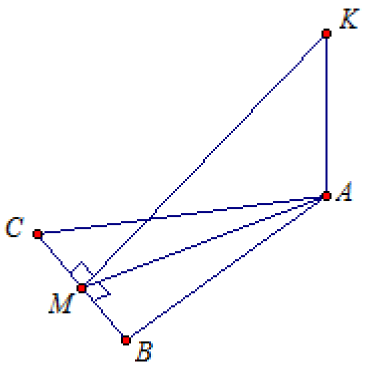



Рис. 3

*Доказательство*:

*AM* - это проекция наклонной *KM* на плоскость *ABC*. *AM* - медиана. По свойству правильного треугольника медиана *AM* является и высотой, то есть прямые *BC* и *AM* перпендикулярны.

Первый способ:

Прямая *BC* перпендикулярна *AM* - проекции наклонной *MK*. По теореме о трёх перпендикулярах получаем, что прямая *BC* перпендикулярна и наклонной *MK*, что и требовалось доказать.

Второй способ:

Прямая *AK* перпендикулярна плоскости *ABC*, а значит, и прямой *BC*, лежащей в плоскости *ABC*. Имеем, *BC* перпендикулярна *AM*, *BC* перпендикулярна *AK*, значит, *BC* перпендикулярна плоскости *MAK*, а значит, и прямой *MK*, лежащей в этой плоскости, что и требовалось доказать.

2) *Дано*:

*AB = BC = CA,*

*AK* ⊥ *ABC,*

*BC = 2a,*

*AK = a,*

*Найти: ∠(KM; ABC)*

*Решение*:

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскости. Мы имеем наклонную *MK*, имеем ее проекцию *AM*. Значит, углом между прямой *MK* и плоскостью *ABC* является угол *AMK*.

Треугольник *ABC* – правильный. Значит, все его углы равны 60°. Значит, ∠*ABC* = 60°.

Рассмотрим треугольник *AMB*. Он прямоугольный, так как *AM* ⊥ *BC*. Найдем *AM*:

$$AM = AB \cdot \sin \angle ABC = 2a \cdot \sin 60° = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник *AMK*. *AK* = *a*, $AM = a\sqrt{3}.$

$$\operatorname{tg} \angle AMK = \frac{AK}{AM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Угол *AMK* – острый, значит, $\angle AMK = 30°.$

*Ответ*: 30°.

Задача 2

Из точки *M* проведен перпендикуляр *MB* к плоскости прямоугольника *ABCD* (рис. 4).

1) Докажите, что треугольники *AMD* и *MCD* – прямоугольные.

2) Найдите угол между прямой *MD* и плоскостью *ABC*, если *CD* = 3см, *AD* = 4 см, *MB*=5 см.

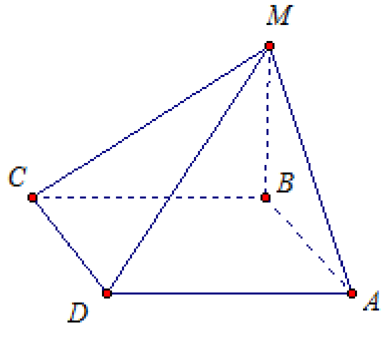



Рис. 4

1) *Дано*: прямоугольник *ABCD, MB* ⊥ *ABC.*

*Доказать*: Δ*AMD* и Δ*MCD* – прямоугольные

*Доказательство*:

*MB* – перпендикуляр к плоскости *ABC*. *MA* – наклонная, *BA* - ее проекция. Проекция *BA* перпендикулярна прямой *AD* из плоскости *ABC*. Значит, и наклонная *MA* перпендикулярна *DA* (по теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, треугольник *AMD* - прямоугольный, так как угол *MAD* - прямой.

Аналогично, *MC* – наклонная, *BC* - проекция наклонной *MC* на плоскость *ABC*. Проекция *BC* перпендикулярна *CD*, значит, и наклонная *MC* перпендикулярна *CD*(по теореме о трех перпендикулярах). Угол *MCD* прямой, треугольник *MCD* прямоугольный.

2) *Дано*:

*ABCD* – прямоугольник, $MD \perp ABC$

$CD = 3$ см, $AD = 4$ см, $MB = 5$ см.

*Найти*: $\angle(DM; ABC)$.

*Решение*:

Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и ее проекцией на плоскость. *DM* - наклонная, *DB* ее проекция на плоскость *ABC*, следовательно, нам нужно найти угол *MDB*. Обозначим его за φ.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *BAD*. $AB = CD = 3$ см (как противоположные стороны прямоугольника). Найдем *BD* по теореме Пифагора.

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ (см)$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *MBD*. Найдем угол *BDM*.

$tg\ \varphi = \frac{MB}{BD} = \frac{5}{5} = 1$.

Угол φ – острый, значит, $\varphi = 45°$.

*Ответ*: $45°$.

**Практическая работа №44**

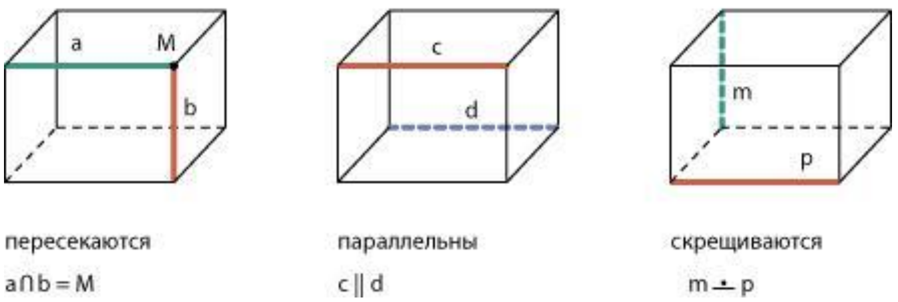
**Тема 7.5** Прямые и плоскости в практических задачах

**Цель:** Научиться решать задачи профессионально-ориентированной направленности

**Теоретическая часть:**

На плоскости две прямые или пересекаются, или параллельны друг другу. А в пространстве возможен еще один случай взаимного расположения прямых.

**Расположение прямых в пространстве (три случая)**




**Две прямые в пространстве параллельны друг другу, пересекаются или скрещиваются**.

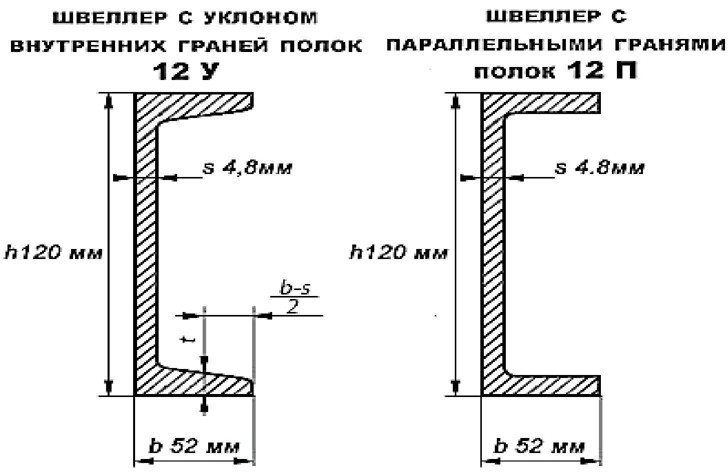
Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны друг другу.

**Скрещивающиеся прямые** не пересекаются и не параллельны друг другу. Через них невозможно провести плоскость. Скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях.

**Решение задач**

1. Два грузовика выехали в рейс по взаимно-перпендикулярным дорогам. Скорость одного – 50 км/ч, скорость другого – 60 км/ч, в данный момент они находятся на расстоянии 7 км и 10 км от начала пути. Через какое время расстояние между ними будет 35 км?

2. Сколько потребуется бетона для того чтобы залить швеллер с параллельными гранями полок 12П длиной 10м?




## Практическая работа №45

**Тема 7.6** Контрольная работа по разделу 7 «Прямые и плоскости в пространстве»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 11 «Прямые и плоскости в пространстве»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Расшифруйте краткую запись: а$\in\beta$.

А) точка а принадлежит плоскости $\beta$; Б) точка а принадлежит прямой $\beta$; В) прямая а принадлежит плоскости $\beta$; Г) прямая а пересекает плоскость $\beta$.

2. (1 балл) Прямые АВ и СД скрещиваются. Какое расположение имеют прямые АС и ВД?

А) параллельные; Б) перпендикулярные; В) скрещиваются; Г) пересекаются.

3. (1 балл) Плоскости $\alpha$ и $\beta$ имеют 1 общую точку. Каково их взаимное расположение?

А) параллельны; Б) пересекаются по прямой; В) совпадают; Г) скрещиваются.

4. (1 балл) Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она…

А) перпендикулярна и самой наклонной; Б) параллельна и самой наклонной; В) скрещивается с наклонной; Г) перпендикулярна основанию наклонной.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Через концы отрезка АВ и его середину М проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках $А_1$, $В_1$ и $М_1$. Найдите длину отрезка $ММ_1$, если отрезок АВ не пересекает плоскость и если $АА_1$ = 6,8см, $ВВ_1$ = 7,4см.

6. (2 балла) Прямые АС, АВ и АД попарно перпендикулярны. Найдите отрезок СД, если АВ = 5 см, ВС = 13 см, АД = 9 см.

7. (2 балла) Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины общего перпендикуляра, если проекции наклонных относятся как 2:3 и длины наклонных равны 23 см и 33 см.

8. (2 балла) Начертить куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Построить сечение $АД_1С$.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | В | Б | А | 7,1 | 15 | 9 | - |

## Практическая работа№46

**Тема 8.4** Примеры симметрий в профессии

**Цель:** Рассмотреть примеры симметрии вокруг нас

**Теоретическая часть:**

Рассмотрим понятие симметрии с геометрической точки зрения.

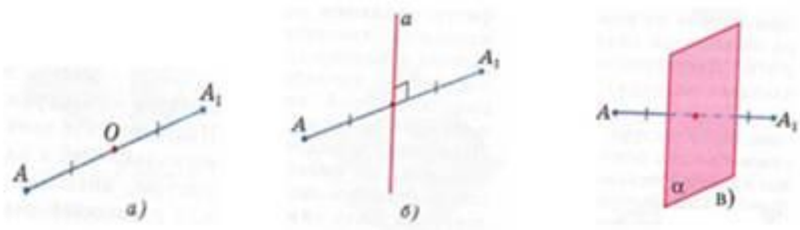
В учебнике по геометрии это понятие вводится следующим образом. Точки A и A1 называются симметричными относительно точки O (центр симметрии), если O – середина отрезка AA1 (рис. 1, а). Точка O считается симметричной самой себе.

Точки A и A1 называются симметричными относительно прямой а (ось симметрии), если прямая а проходит через середину отрезка AA1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 1, б). Каждая точка прямой а считается симметричной самой себе.

Точки A и A1 называются симметричными относительно плоскости (плоскость симметрии), если плоскость проходит через середину отрезка AA1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис.1,в). Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.

Точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно неё некоторой точке той же фигуры. Если фигура имеет (рис. 1) центр (ось, плоскость симметрии), то говорят, что она обладает центральной (осевой, зеркальной) симметрией.

Выделяя геометрическую симметрию, говорим о положении, форме, структуре. Это та симметрия, которую можно непосредственно видеть.




Симметрию можно обнаружить почти везде, если знать, как ее искать. Многие народы с древнейших времен владели представлением о симметрии в широком смысле -- как об уравновешенности и гармонии. Творчество людей во всех своих проявлениях тяготеет к симметрии. Посредством симметрии человек всегда пытался, по словам немецкого математика Германа Вейля, «постичь и создать порядок, красоту и совершенство». Г. Вейль под симметрией понимал «неизменность какого-либо объекта, при определенного, рода преобразованиях; предмет является симметричным, в том случае, когда его можно подвергнуть какой-нибудь операции, после которой он будет выглядеть так же, как и до преобразования». Определенную главу Г. Вейль посвятил орнаментной симметрии. Упорядоченность и подчиненность определенному набору правил мы обнаруживаем в узорах и орнаментах (см. рис. 16).

Нельзя не увидеть симметрию и в ограненных драгоценных камнях. Многие гранильщики стараются придать бриллиантам форму тетраэдра, куба, октаэдра или икосаэдра. Так как гранат имеет те же элементы что и куб, он высоко ценится знатоками драгоценных камней. Художественные изделия из гранатов были обнаружены в могилах Древнего Египта, относящихся еще к додинастическому периоду (свыше двух тысячелетий до н.э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых венков, диадем, дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Одним из самых наглядных использований законов симметрии в жизни служат строения архитектуры. Это то, что чаще всего мы можем увидеть. В архитектуре оси симметрии используются как средства выражения архитектурного замысла. Примеров использования симметрии в архитектуре множество, одним из них является прекрасный Новосибирский театр оперы и балета.

Еще одним примером использования человеком симметрии в своей практике - это техника. В технике оси симметрии наиболее четко обозначаются там, где требуется оценить отклонение от нулевого положения, например на руле грузовика или на штурвале корабля. Или одно из важнейших изобретений человечества, имеющих центр симметрии, является колесо, также центр симметрии есть у пропеллера и других технических средств.

Симметрию можно заметить даже там, на что никогда не обращал внимание. Например, если вы поместите буквы перед зеркалом, расположив его параллельно строке, то заметите, что те из них, у которых ось симметрии проходит горизонтально, можно прочесть и в зеркале. А вот те, у которых ось расположена вертикально или отсутствует вовсе, становятся «нечитабельными».

Существуют языки, в которых начертание знаков опирается на наличие симметрии. Так, в китайской письменности иероглиф означает именно истинную середину.

Симметрия также есть и в числах, например, v12345678987654321=111111111; v123454321=11111 и т.д. симметрия центральная осевая зеркальная геометрия

**Задание**: приведите примеры симметрии, встречающейся в жизни человека.

**Практическая работа№ 47**

**Тема 8.4** Примеры симметрий в профессии

**Цель:** Рассмотреть примеры симметрии в профессиональной деятельности

**Теоретическая часть:**

Применение математики в будущей профессии – очень актуальная тема нашего времени.

Симметрия в профессии администратора магазина одежды

В магазине одежды обязанности администратора магазина будут заключаться в организации торговых процессов. Дополнительно в обязанности администратора входит контроль над размещением товара в торговом зале магазина. И тут главными принципами создания баланса являются симметрия и асимметрия.

Как использовать симметрию в магазине одежды? Так же, как набор весов уравновешивает левое и правое на весах, так левая половина витрины или пространства магазина уравновешивается правой:

● вещи и манекены в левой стороне витрины окна должны балансировать с объемом справа;

● стопки сложенных футболок равномерно и симметрично распределены по отдельно стоящему столу у входа в магазин;

● висят вещи одинакового ассортимента слева и права.

Симметрия (осевая) часто используется для оформления вещей в классическом стиле. Симметрия придает элегантность и формальность витрины с мужской одеждой; оформление в дизайнерских магазинах с минималистичным дизайном ; витрины с манекенами с необычной дизайнерской одеждой. Однако симметричное оформление может быть немного скучными для более повседневной и базовой одежды, которые требуют чего интересного.

Асимметрия. Для размещения повседневной и базовой одежды обычно используют асимметричные витрины. Благодаря асимметрии получается представить базовые вещи более необычными. Асимметричный дизайн может вызывать чувство движения и казаться более современным, чем симметричный, но при всем этом создать правильные пропорци и элементов здесь сложнее.

Как использовать асимметрию в магазине одежды? В качестве примера асимметричного баланса можно привести следующее один манекен в левой части витрины, уравновешенный двумя манекенами справа, стоящими близко друг к другу. В целом, гармония будет достигнута, поскольку три манекена удобно заполняют пространство, хотя они и распределены неравномерно

Симметрия в профессии водителя. Все автомобили имеют продольную симметрию кузова. Не являются исключением и большегрузные машины. Первое, что приходит на ум, когда речь идет о симметрии автомобилей, это аэродинамика. Если левая и правая части машины будут иметь разную форму, трудно предугадать, как поведет себя воздушный поток на большой скорости. В зависимости от скорости воздушные массы по обе стороны кузова меняли бы свой угол и неизвестно как пересекались бы между собой, создавая лишние проблемы водителю. Из-за ошибок проектирования формы кузова автомобили могут терять устойчивость на большой скорости и даже переворачиваться . Это особенно опасно для большегрузных машин. Если посмотреть на фуру с разных сторон, то можно заметить, что она имеет сразу несколько осей симметрии. Некоторые детали машин имеют центральную симметрию: колесо автомобиля, шестеренка и др. Рулевое колесо имеет осевую симметрию. При моделировании автомобильных дисков, для расчетов применяют поворотную симметрию. Регулировка схождения колес автомобиля производится относительно продольной оси симметрии машины. Для наземного вида транспорта в большей степени все осевая симметрия.

**Задание**: приведите примеры симметрии, встречающейся в вашей будущей профессии.

## Практическая работа№48

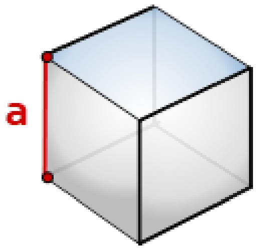
**Тема 8.7, Тема 8.8** Объем тела. Отношение объемов подобных тел. Объемы и площади поверхностей тел

**Цель:** Рассмотреть примеры нахождения объемов геометрических тел

**Теоретическая часть:**

Все формулы объемов геометрических тел

1. Расчет объема куба

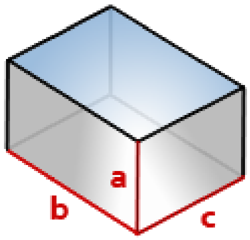



**a** - сторона куба

Формула объема куба, (***V***):

$$V=a^3$$

2. Найти по формуле, объем прямоугольного параллелепипеда



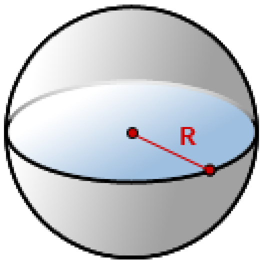

**a, b, c** - стороны параллелепипеда

Еще иногда сторону параллелепипеда, называют ребром.

Формула объема параллелепипеда, (**V**):

$$V=abc$$

3. Формула для вычисления объема шара, сферы

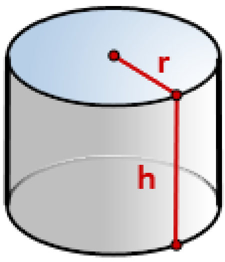



**R** - радиус шара
π ≈ 3.14

По формуле, если дан радиус, можно найти объема шара, (**V**):

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

4. Как вычислить объем цилиндра ?

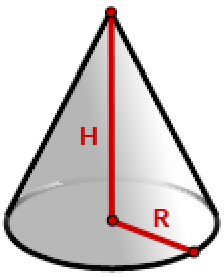



**h** - высота цилиндра
**r** - радиус основания
π ≈ 3.14

По формуле найти объема цилиндра, есди известны - его радиус основания и высота, (**V**):

$$V=\pi r^2 h$$

5. Как найти объем конуса ?

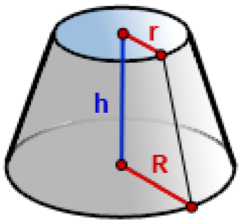



**R** - радиус основания
**H** - высота конуса
π ≈ 3.14

Формула объема конуса, если известны радиус и высота (**V**):

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

7. Формула объема усеченного конуса

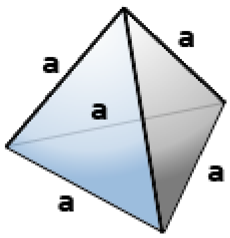



**r** - радиус верхнего основания
**R** - радиус нижнего основания
**h** - высота конуса
$\pi \approx 3.14$

Формула объема усеченного конуса, если известны - радиус нижнего основания, радиус верхнего основания и высота конуса (**V** ):

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2)$$

8. Объем правильного тетраэдра




Правильный тетраэдр - пирамида у которой все грани, равносторонние треугольники.

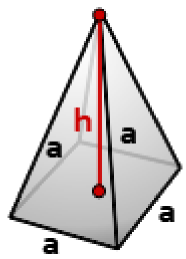
**a** - ребро тетраэдра

Формула, для расчета объема правильного тетраэдра (**V**):

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

9. Объем правильной четырехугольной пирамиды

Пирамида, у которой основание квадрат и грани равные, равнобедренные треугольники, называется правильной четырехугольной пирамидой.



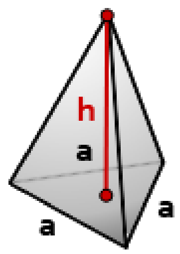

**a** - сторона основания
**h** - высота пирамиды

Формула для вычисления объема правильной четырехугольной пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{1}{3} h a^2$$

10. Объем правильной треугольной пирамиды

Пирамида, у которой основание равносторонний треугольник и грани равные, равнобедренные треугольники, называется правильной треугольной пирамидой.



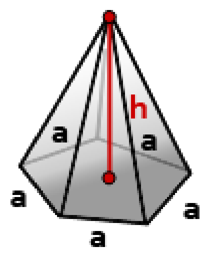

**a** - сторона основания
**h** - высота пирамиды

Формула объема правильной треугольной пирамиды, если даны - высота и сторона основания (**V**):

$$V = \frac{h a^2}{4\sqrt{3}}$$

11. Найти объем правильной пирамиды

Пирамида в основании, которой лежит правильный многоугольник и грани равные треугольники, называется правильной.



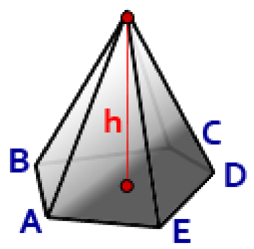

**h** - высота пирамиды

**a** - сторона основания пирамиды
**n** - количество сторон многоугольника в основании

Формула объема правильной пирамиды, зная высоту, сторону основания и количество этих сторон (**V**):

$$V = \frac{na^2h}{12\,\mathrm{tg}(\frac{180^\circ}{n})}$$

12. Расчет объема пирамиды

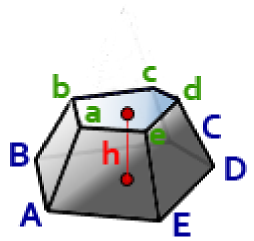



**h** - высота пирамиды
**S** - площадь основания **ABCDE**

Формула для вычисления объема пирамиды, если даны - высота и площадь основания (**V**):

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

13. Расчёт объёма усечённой пирамиды



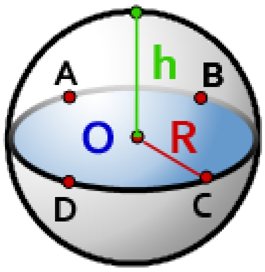

**h** - высота пирамиды
$S_{ниж}$ - площадь нижнего основания, **ABCDE**
$S_{верх}$ - площадь верхнего основания, **abcde**

Формула объема усеченной пирамиды, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}h(S_{ниж} + \sqrt{S_{ниж}S_{верх}} + S_{верх})$$

14. Объем шарового сегмента, формула

Шаровый сегмент- это часть шара отсеченная плоскостью. В данном примере, плоскостью ABCD.

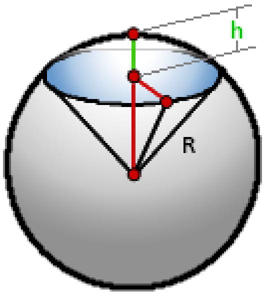



**R** - радиус шара
**h** - высота сегмента
$\pi \approx 3.14$

Формула для расчета объема шарового сегмента, (**V**):

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

15. Объем шарового сектора

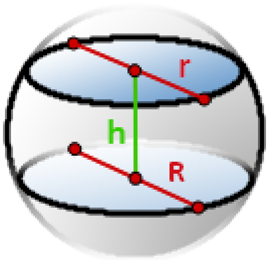



**R** - радиус шара
**h** - высота сегмента
$\pi \approx 3.14$

Формула объема шарового сектора, (**V**):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

16. Объем шарового слоя




**h** - высота шарового слоя
**R** - радиус нижнего основания
**r** - радиус верхнего основания
$\pi \approx 3.14$

Формула объема шарового слоя, (**V**):

$$V = \frac{1}{2}\pi h\left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$$

**Решение задач:**

1.Существует ли призма, имеющая 50 рёбер? 54 ребра?

Решение: Число ребер n – угольной призмы 3n, поэтому призмы, имеющей 50 ребер, не существует, а 54 ребра имеет 18-угольная призма.

2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 12 см , диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём параллелепипеда.

3. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10, 12. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём призмы.

4. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 2. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро увеличить в 3 раза.

Решение. Пусть ребра данного параллелепипеда равны a, b и c. Тогда имеем: V=abc=2.

После увеличения каждого ребра в 3 раза его объём будет равен V=3a*3b*3c =27 abc=27*2=54.

Ответ: 54.

5. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 30 см. Если в него налить 30 л. воды, то до верхнего края останется 5 см. Сколько литров воды нужно, чтобы наполнить пустой аквариум доверху?

***Решение.*** Пусть V и H соответственно объем и высота параллелепипеда.

V=SH . По условию V=30,H=25, тогда 25*S=30.

После заполнения пустого аквариума доверху H=30. Значит, 30*S=V.

Найдем отношение $\frac{25S}{30S} = \frac{30}{V}$ , V=36 л.

Ответ: 36.

6. Кубик весит 10 гр. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала.

***Решение.*** Пусть V- объём данного параллелепипеда. После увеличения каждого ребра в 3 раза, его объём будет равен 27 V.

$\frac{V}{27V} = \frac{10}{x}$ , x=270 гр.

Ответ: 270.

7. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 32. Чему будет равен объём параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в 2 раза.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд той же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого. Ответ выразите в сантиметрах.

9. Закрытый сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами 30, 40 и 45 см. стоит на горизонтальной поверхности таким образом, что наименьшая грань является дном. В сосуд налили воду до уровня 36 см. На каком уровне окажется вода, если сосуд поставить на наибольшую грань? Ответ дайте в сантиметрах.

10. Дано: ABCD - правильная пирамида. AB = 3; AD = 2√3 (рис. 3).

Найти: а) Sосн.; б) AO; в) DO; г) V.

11. Дано: ABCDF - правильная пирамида. ∠FCO = 45°; FO = 2 (рис. 4).

Найти: а) Sосн.; б) V.

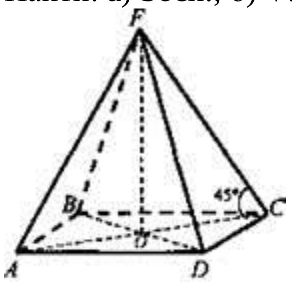



Рис. 4

Решение:

1) Рассмотрим ΔFOC: ∠O = 90°, ∠C = 45°, значит, ∠F = 45°. Следовательно, ΔFOC - равнобедренный, OC ≈ FO = 2.

2) AC = 2OC = 4. d = AC = AD√2 (по свойству диагонали квадрата, d2 = 2a2). Тогда $AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

3) ABCD - квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$

4) $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h.$ $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$

(Ответ: а) 8; б) 5·1/3.)

12. Дано: ABCDEKF - правильная пирамида. FO ⊥ (ABC), FM ⊥ AK, FO = 4, FM = 5 (рис. 5).

Найти: а) Sосн.; б) V.

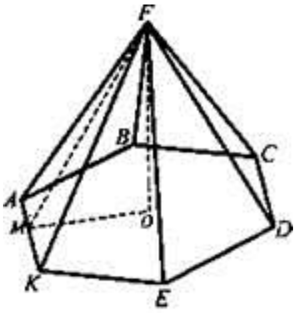



Рис. 5

Решение:

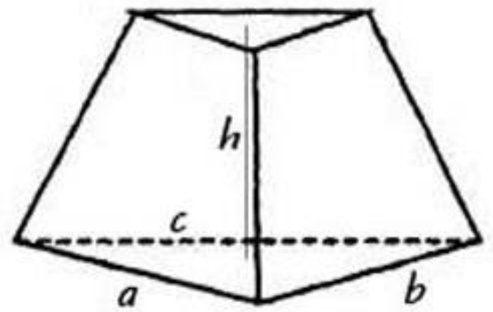
1) Рассмотрим ΔFOM: ∠O = 90° (так как FO ⊥ (ABC), значит, FO ⊥ OM) FO = 4, FM = 5. $OM = \sqrt{MF^2 - FO^2}$ (по теореме Пифагора), $OM = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3.$ OM = r (r - радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник). $AK = 2r \cdot \text{tg}\frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3\text{tg}\frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$

2) $S_{осн.} = 6S_{\Delta AOK}, S_{AOK} = \frac{1}{2} AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}.$ $S_{осн.} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.$

3) $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H;$ $V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}.$

(Ответ: а) 18√3, б) 24√3.)

13. Задача: Дана треугольная усеченная пирамида. Ее высота ***h*** = 10 см, стороны одного из оснований равны ***a*** = 27 см, ***b*** = 29 см, ***c*** = 52 см. Периметр второго основания равняется ***P2***=72 см. Найдите объем пирамиды.




Для расчета объема нам потребуется площадь оснований. Зная длины сторон одного треугольника, мы можем рассчитать площадь по формуле Герона. Для этого потребуется найти полупериметр:

$$P_1 = 27 + 29 + 52 = 108cm$$

$$P_1 = \frac{108}{2} = 54cm$$

Теперь найдем S2:

$$S_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_1 = \sqrt{54(54-27)(54-29)(54-52)} = \sqrt{54 \times 27 \times 25 \times 2} = \sqrt{72900} = 270cm^2$$

Зная, что пирамида усеченная, делаем вывод, что треугольники, лежащие в основаниях подобны. Коэффициент подобия этих треугольников можно найти из соотношения периметров. Отношение площадей треугольников будет равно квадрату этого коэффициента:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{108^2}{72^2} = \frac{9}{4}$$

$$S_2 = \frac{4S_1}{9}$$

$$S_2 = \frac{4 \times 270}{9} = 120cm^2$$

Теперь, когда мы нашли площади оснований усеченной пирамиды, можем легко рассчитать ее объем:

$$V = \frac{1}{3} \times 10 \times \left(270 + \sqrt{270 \times 120} + 120\right) = \frac{10}{3}(270 + 180 + 120) = \frac{10}{3} \times 570 = 1900cm^3$$

Таким образом, вычислив коэффициент подобия и рассчитав площадь оснований, мы нашли объем заданной усеченной пирамиды.

14. Дано: A1A2A3A4 - ромб, SA1A2A3A4 - пирамида, A1A4 = a, ∠SBO = β, OB ⊥ A3A4, ∠A2A1O = a (рис. 6).

Найти: V - ?

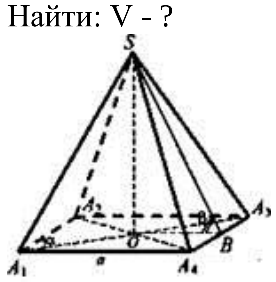



*Рис. 6*

Решение:

1) Рассмотрим $\Delta OA_3A_4 : OA_3 = a\cos\alpha,\qquad \Delta OA_3B : OB = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha.$

2) $\Delta SOB$: $SO = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \mathrm{tg}\beta.$

3) $S_{осн.} = 4S_{\Delta A_3OH_4} = 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot OB = 2a\cdot\frac{1}{2}a\sin 2\alpha\; = a^2\sin 2d$

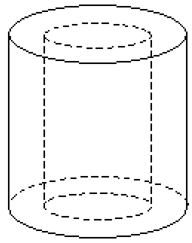
4) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot SO,\; V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot a^2\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}a\sin 2\alpha\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\mathrm{tg}\beta$

(Ответ: $\frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\mathrm{tg}\beta.$ )

15 .Найдите объем цилиндра с высотой, равной 3см и диаметром основания – 6см.

16. Площадь осевого сечения цилиндра равна 21см$^3$, площадь основания - 18п см$^2$ Найдите объем цилиндра.

17. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см$^3$) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 25 м?



$\rho$ = 11,4 г/см$^3$

$R_1$ = 6,5мм + 4мм = 10,5мм = 1,05см (наружный)

$R_2$ = 6,5мм = 0,65см

$V = V_1 - V_2 = \pi\cdot(1{,}05)^2\cdot 2500 - \pi\cdot 0{,}65^2\cdot 2500 = 1700\pi \approx 5338$ (см$^3$)

$M = \rho\cdot V = 11{,}4\cdot 5338 \approx 61$кг.

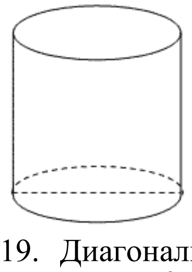
18. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметра 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см$^3$?

H = 7м; d = 1м; $\rho_{нефти}$ = 0,85 г/см$^3$

m =?

$V_ц = \pi R^2H = \pi\cdot 9^2\cdot 7 = 567\pi$ (м$^3$)

$m = V\cdot\rho \approx 1513$ т



19. Диагональ осевого сечения цилиндра составляет с плоскостью основания цилиндра угол 60$^0$. Найдите объем цилиндра , если площадь осевого сечения равна 16 $\sqrt{3}$ см$^3$.

20. На склад в мастерской по пошиву одежды поступил рулон драповой ткани в форме цилиндра. При транспортировке был утерян товарный ярлык с указанием длины ткани в рулоне. Необходимо определить длину ткани в рулоне. Произвели необходимые измерения, определили высоту и диаметр рулона: 90см и 30см, толщина ткани 0,2см.

21. Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить десятилитровое ведро?

R=AC/2, R=5см, H=√132-52=12(см), V=1/3*3,14*5$^2$*12 ≈314(см$^3$) ≈0,314дм$^3$

n=10/0,314 ≈31,8.

*Ответ: 32 воронки.*

22. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см$^3$. Определить массу стога сена.

Решение:

$R = 2{,}5$м

$01OO_1 = 4$м

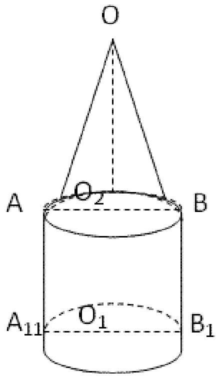
$O_1O_2 = 2{,}2$м

$\rho = 0{,}03$г/см$^3$

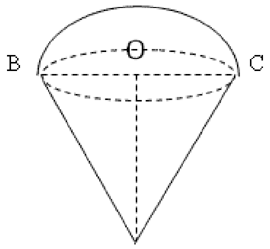
$m = \rho \cdot V$; $V_ц = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 2{,}2 = 13{,}75$ м$^3$= 13750000см$^3$

$V_к = 1/3\ \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 1{,}8 = 3{,}75$м$^3$ = 3750000 $\pi$ см$^3$

$M = 0{,}03 \cdot 17500000\pi = 0{,}525\ \pi$ т $\approx$ 1,6 т




23. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?




OA = 12 см

BC = d = 5 см

Переполнит ли мороженое стаканчик?

$V_ш = 4/3\pi R^3 (5/2)^3 = 125\pi/6 \approx 20\frac{5}{6}\pi$

$V_к = 1/3\ \pi R^2H = 1/3\ \pi (5/2)^2 \cdot 12 = \frac{25\pi 12}{12} = 25\pi$

Ответ: нет.

24. Найти объем шара радиусом 10 сантиметров.

Решение:

Для того чтобы вычислить объем шара формула используется следующая:

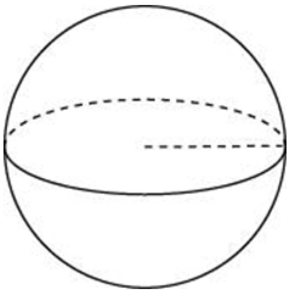
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

где V – искомый объем шара, π – 3,14, R – радиус.

Таким образом, при радиусе 10 сантиметров объем шара равен:

$V = \frac{4}{3} 3{,}14 \times 10^3 = 4082$ кубических сантиметров.

25. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в шесть раз?



Объем шара находится по формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

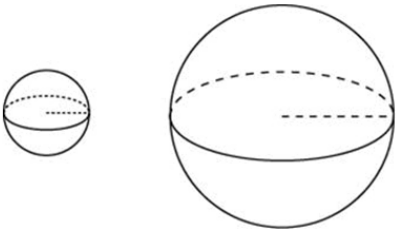
При увеличении радиуса в шесть раз его объём будет:

$$V = \frac{4}{3}\pi(6R)^3 = 216 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Таким образом, объем шара увеличится в 216 раз.

Ответ: 216

26. Объем одного шара в 216 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Формула объёма шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Формула площади поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2$$

Пусть объёмы шаров соответственно равны:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1{}^3 \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2{}^3$$

Из условия следует, что:

$$\frac{4}{3}\pi R_1{}^3 = 216 \cdot \frac{4}{3}\pi R_2{}^3$$

$$R_1{}^3 = 216 \cdot R_2{}^3$$

$$\frac{R_1{}^3}{R_2{}^3} = 216$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{216}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 6$$

То есть, мы установили, что радиус первого больше радиуса второго в 6 раз. Если радиус шара уменьшить в 6 раз, то площадь поверхности шара изменится следующим образом:

$$S = 4\pi\left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{4\pi R^2}{36}$$

То есть она уменьшится в 36 раз.

## Практическая работа №49

**Тема 8.9** Контрольная работа по разделу 8 «Многогранники и тела вращения»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 12 «Многогранники и тела вращения»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) В каких единицах измеряется площадь поверхности многогранника?

А) в градусах; Б) в метрах; В) в квадратных метрах; Г) в двугранных градусах.

2. (1 балл) Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле:

А) $S = S_{бок} + 2\ S_{осн}$; Б) $S_{бок} = P_{осн} * H$; В) $S = Б_{бок} + S\ S_{осн}$; Г) $S_{бок} = 2P_{осн} * H$.

3. (1 балл) Что является осевым сечением усеченного конуса?

А) равнобедренный треугольник; Б) равнобедренная трапеция; В) прямоугольник; Г) прямоугольная трапеция.

4. (1 балл) Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из своих катетов?

А) конус; Б) усеченный конус; В) пирамида; Г) усеченная пирамида.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Ребро основания правильной треугольной пирамиды 3 м, апофема 6м. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6. (2 балла) Диагональ куба равна $\sqrt{588}$. Найдите его объем.

7. (2 балла) Прямоугольник со сторонами 8см и 3см вращается вокруг большей стороны. Найдите объем, площади боковой и полной поверхностей полученного тела.

8. (2 балла) Вычислить поверхность кроны кустарника, имеющего форму шара радиуса 0,5 м. В ответ запишите число, деленное на π.

*Эталоны ответов*

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | Б | Б | А | 27 | 2744 | 72π; 48π; 64 π | 1 |

**Практическая работа№50**

**Тема 9.1** Координаты и векторы в пространстве. Простейшие задачи в координатах

**Цель**: Научиться решать простейшие задачи в координатах

**Теоретическая часть:**

Формулы деления отрезка в данном отношении на плоскости

Если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, то координаты точки $M(x_M; y_M)$, которая делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda = \frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$$

**Решение задач:**

Пример 1

Найти координаты точки $M$, делящей отрезок $AB$ в отношении $1:3$, если известны точки $A(5;3), B(-3;-1)$

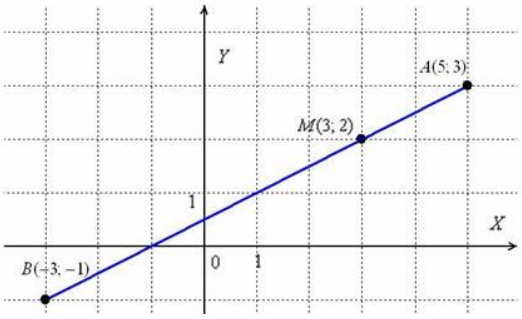
**Решение**: В данной задаче $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. По формулам деления отрезка в данном отношении, найдём точку $M(x_M; y_M)$:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{5+\frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5-1}{\frac{4}{3}} = 4\cdot\frac{3}{4} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{3+\frac{1}{3}\cdot(-1)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4} = 2$$

**Ответ**: $M(3;2)$

В задаче не требуется строить чертежа, но его всегда полезно выполнить на черновике:



Действительно, соотношение $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$ выполняется, то есть отрезок $AM$ в три раза короче отрезка $BM$. Если пропорция не очевидна, то отрезки всегда можно измерить обычной линейкой.

Пример 2

Даны точки $K(-2;1), L(5;-6)$. Найти:

а) точку $M$, делящую отрезок $KL$ в отношении $2:5$;

б) точку $N$, делящую отрезок $KL$ в отношении $4:3$.

Пример 3

Точка $P$ принадлежит отрезку $DH$. Известно, что отрезок $DP$ в два раза длиннее отрезка $HP$. Найти точку $H$, если $D(2;4), P\left(\frac{8}{3};2\right)$.

**Решение**: Из условия следует, что точка $P$ делит отрезок $DH$ в отношении $2:1$, считая от вершины $D$, то есть, справедлива пропорция: $\lambda=\frac{DP}{HP}=2$. По формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_P=\frac{x_D+\lambda\cdot x_H}{1+\lambda},\quad y_P=\frac{y_D+\lambda\cdot y_H}{1+\lambda}$$

$$\frac{8}{3}=\frac{2+2x_H}{1+2}\Rightarrow 2+2x_H=\frac{8}{3}\cdot 3\Rightarrow 2+2x_H=8\Rightarrow 2x_H=6\Rightarrow x_H=3$$

$$2=\frac{4+2y_H}{1+2}\Rightarrow 4+2y_H=6\Rightarrow 2y_H=2\Rightarrow y_H=1$$

**Ответ**: $H(3;1)$

Пример 4

Точка $M\in AB$. Отрезок $BM$ в полтора раза короче отрезка $AM$. Найти точку $A$, если известны координат точек $B(2;0), M(-1;1)$.

Решение в конце урока. Оно, кстати, не единственное, если пойдёте отличным от образца путём, то это не будет ошибкой, главное, чтобы совпали ответы.

Формулы деления отрезка в данном отношении в пространстве

Для пространственных отрезков всё будет точно так же, только добавится ещё одна координата.

Если известны две точки пространства $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B z_B)$, то координаты точки $M(x_M;y_M;z_M)$, которая делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda=\frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda},\quad y_M=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda},\quad z_M=\frac{z_A+\lambda\cdot z_B}{1+\lambda}.$$

Пример 5

Даны точки $A(-2;-3;-4), B(2;-4;0)$. Найти координаты точки $M$, принадлежащей отрезку $AB$, если известно, что $AM:BM=4:2$.

Решение:

По формулам координат середины отрезка: $x_M = \dfrac{-2+2\cdot 2}{1+2} = \dfrac{2}{3},\quad y_M = \dfrac{-3+2\cdot(-4)}{1+2} = -\dfrac{11}{3},\quad z_M = \dfrac{-4+2\cdot 0}{1+2} = -\dfrac{4}{3}$

Ответ: $M\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{11}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$

Пример 6

Даны точки $B(-5;2;3), C(4;2;-5)$. Найти координаты точки $A$, если известно, что она делит отрезок $BC$ в отношении $3:1$.

Формулы координат середины отрезка


$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2},\quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B z_B)$, то координаты его середины $M$ выражаются формулами: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2},\quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2},\quad z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Пример 7

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-4;0), B(4;4), C(7;2), D(-1;-2)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

Решение:

По известному свойству, диагонали параллелограмма своей точкой пересечения $O(x_O; y_O)$ делятся пополам, поэтому задачу можно решить двумя способами.

Способ первый: Рассмотрим противоположные вершины $A(-4;0), C(7;2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали $AC$:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2},\quad y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

В результате: $O\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$

Способ второй: Рассмотрим противоположные вершины $B(4;4), D(-1;-2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали $BD$: $x_O = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2},\quad y_O = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1$

Таким образом: $O\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$

Ответ: $O\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$

Пример 8

Даны точки $P\left(\dfrac{5}{3}; -1; \dfrac{1}{4}\right), Q\left(-\dfrac{1}{2}; 1; 0\right)$. Найти середину $R$ отрезка $PQ$.

Пример 9

Точка $M$ делит отрезок $AB$ пополам. Найти точку $B$, если известны точки $A(2;0;-3)$, $M(5;-4;1)$

Решение: Используем формулы координат середины отрезка:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Нам неизвестны координаты $x_B, y_B, z_B$. И снова можно вывести общую формулу для их нахождения, но гораздо легче сразу подставить числа. Только пропорциями верти:

$$5 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow 2 + x_B = 10 \Rightarrow x_B = 8$$

$$-4 = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = -8$$

$$1 = \frac{-3 + z_B}{2} \Rightarrow -3 + z_B = 2 \Rightarrow z_B = 5$$

Ответ: $B(8;-8;5)$

## Практическая работа№ 51

**Тема 9.2** Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

**Цель**: Научиться находить скалярное произведение векторов

**Теоретическая часть**

***Вектор*** **–** это направленный прямолинейный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Пусть точка $A$ – начало вектора, а точка $B$ – его конец, тогда вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Вектор $\overline{BA}$ называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$ и может быть обозначен $-\overline{a}$.

Сформулируем ряд базовых определений.

***Длиной*** или ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. Вектор нулевой длины (его суть - точка) называется ***нулевым*** $\overline{0}$ и направления не имеет. Вектор $\overline{e}$ единичной длины, называется ***единичным***. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется ***ортом вектора*** $\overline{a}$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, записывают $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Коллинеарные векторы могут иметь совпадающие или противоположные направления. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Векторы называются равными $\left(\overline{a} = \overline{b}\right)$, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $0xyz$. Выделим на осях координат $0x$, $0y$, $0z$ единичные векторы (орты) и обозначим их через $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ соответственно. Выберем произвольный вектор пространства и совместим его начало с началом координат. Спроектируем вектор на координатные оси и обозначим проекции через $a_x$, $a_y$, $a_z$ соответственно. Тогда нетрудно показать, что

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей***. Числа $a_x$, $a_y$, $a_z$ называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$. Таким образом, координаты вектора являются его проекциями на оси координат. Векторное равенство (2.25) часто записывают в виде

$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ или $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Мы будем использовать обозначение вектора в фигурных скобках, чтобы визуально легче различать координаты вектора и координаты точки. С использованием формулы длины отрезка, известной из школьной геометрии, можно найти выражение для вычисления модуля вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

то есть модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Обозначим углы между вектором и осями координат через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно. ***Косинусы*** этих углов называются для вектора $\bar{a}$ ***направляющими***, и для них выполняется соотношение: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ Верность данного равенства можно показать с помощью свойства проекции вектора на ось, которое будет рассмотрено в нижеследующем пункте 4.

Пусть в трехмерном пространстве заданы векторы $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$ своими координатами. Имеют место следующие операции над ними: линейные (сложение, вычитание, умножение на число и проектирование вектора на ось или другой вектор); не линейные – различные произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное).

**1.** ***Сложение*** двух векторов производится покоординатно, то есть если

$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, то $c = \{x_3; y_3; z_3\} = \{x_1; y_1; z_1\} + \{x_2; y_2; z_2\} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

Данная формула имеет место для произвольного конечного числа слагаемых.

Геометрически два вектора складываются по двум правилам:

а) ***правило треугольника*** – результирующий вектор суммы двух векторов соединяет начало первого из них с концом второго при условии, что начало второго совпадает с концом первого вектора; для суммы векторов – результирующий вектор суммы соединяет начало первого из них с концом последнего вектора-слагаемого при условии, что начало последующего слагаемого совпадает с концом предыдущего;

б) ***правило параллелограмма*** (для двух векторов) – параллелограмм строится на векторах-слагаемых как на сторонах, приведенных к одному началу; диагональ параллелограмма исходящая из их общего начала, является суммой векторов.

**2.** ***Вычитание*** двух векторов производится покоординатно, аналогично сложению, то есть если $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, то

$$\bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\} = \{x_1; y_1; z_1\} - \{x_2; y_2; z_2\} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}.$$

Геометрически два вектора складываются по уже упомянутому правилу параллелограмма с учетом того, что разностью векторов является диагональ, соединяющая концы векторов, причем результирующий вектор направлен из конца вычитаемого в конец уменьшаемого вектора.

Важным следствием вычитания векторов является тот факт, что если известны координаты начала и конца вектора, то ***для вычисления координат вектора необходимо из координат его конца вычесть координаты его начала***. Действительно, любой вектор пространства $\overline{AB}$ может быть представлен в виде разности двух векторов, исходящих из начала координат: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Координаты векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ совпадают с координатами точек $A$ и $B$, так как начало координат $O(0;0;0)$. Таким образом, по правилу вычитания векторов следует произвести вычитание координат точки $A$ из координат точки $B$.

**3.** ***Умножение вектора на число $\lambda$*** покоординатно: $\lambda \cdot \overline{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$.

При $\lambda>0$ – вектор $\lambda\overline{a}$ сонаправлен $\overline{a}$; $\lambda<0$ – вектор $\lambda\overline{a}$ противоположно направлен $\overline{a}$; $|\lambda|>1$ – длина вектора $\overline{a}$ увеличивается в $\lambda$ раз; $|\lambda|<1$ – длина вектора $\overline{a}$ уменьшается в $\lambda$ раз.

**4.** Пусть в пространстве задана направленная прямая (ось $l$), вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ задан координатами конца и начала. Обозначим проекции точек $A$ и $B$ на ось $l$ соответственно через $A'$ и $B'$.

***Проекцией*** $np_l\,\overline{a}$ ***вектора*** $\overline{a}$ ***на ось*** $l$ называется длина вектора $\overline{A'B'}$, взятая со знаком «+», если вектор $\overline{A'B'}$ и ось $l$ сонаправлены, и со знаком «–», если $\overline{A'B'}$ и $l$ противоположно направлены.

Если в качестве оси $l$ взять некоторый другой вектор $\overline{b}$, то получим проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$.

Рассмотрим некоторые основные свойства проекций:

1) проекция вектора $\overline{a}$ на ось $l$ равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла между вектором и осью, то есть $np_l\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi$;

2.) проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой;

3) проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме проекций на эту ось.

Сформулируем определения и теоремы о произведениях векторов, представляющих нелинейные операции над векторами.

**5.** ***Скалярным произведением*** $\overline{a} \cdot \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi$ между ними, то есть

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$$

Очевидно, что скалярный квадрат любого ненулевого вектора равен квадрату его длины, так как в этом случае угол $\varphi=0$, поэтому его косинус (в 2.27) равен 1.

**Теорема 2.2.** Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения •

*Следствие.* Попарные скалярные произведения единичных орт равны нулю, то есть $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j} \cdot \overline{k} = 0$ •

**Теорема 2.3.** Скалярное произведение двух векторов $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, заданных своими координатами, равно сумме произведений их одноименных координат, то есть $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

С помощью скалярного произведения векторов можно вычислить угол между ними. Если заданы два ненулевых вектора своими координатами $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то косинус угла $\varphi$ между ними:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}, \text{ то есть}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} \cdot \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}}.$$

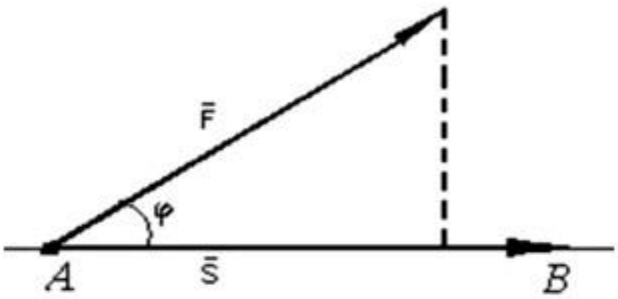
Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}, \quad \text{то есть} \quad np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}.$$

С помощью скалярного произведения векторов находят работу постоянной силы $\bar{F}$ на прямолинейном участке пути.

Предположим, что под действием постоянной силы $\bar{F}$ материальная точка перемещается прямолинейно из положения *A* в положение *B*. Вектор силы $\bar{F}$ образует угол $\varphi$ с вектором перемещения $\overline{AB} = \bar{S}$ (рис. 2.14). Физика утверждает, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна $A = \bar{F} \cdot \bar{S} \cdot \cos\varphi$, то есть $A = \bar{F} \cdot \bar{S}$.




Следовательно, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки ее приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

***Векторным произведением*** $\bar{a} \times \bar{b}$ вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

– $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

– имеет длину, равную $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi$ – угол, образованный векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

– векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку.

**Решение задач:**

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 5, \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}$

**Решение:** Используем формулу $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. В данном случае: $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\dfrac{\pi}{6} = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

**Ответ:** $\overline{a}\overline{b} = 5\sqrt{3}$

Пример 2

Найти $\overline{c}\overline{d}$, если $|\overline{c}| = 3, \quad |\overline{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен $135^\circ$.

Угол между векторами и значение скалярного произведения

В Примере 1 скалярное произведение получилось положительным, а в Примере 2 – отрицательным. Выясним, от чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. Длины ненулевых векторов всегда положительны: $|\overline{a}| > 0, |\overline{b}| > 0$, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.

Угол между векторами может изменяться в пределах $0 \le \angle(\overline{a};\overline{b}) \le \pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0 < \angle(\overline{a};\overline{b}) < \dfrac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\overline{a};\overline{b}) > 0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\overline{a}\overline{b} > 0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\overline{a};\overline{b}) = 0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0 = 1$, то формула упрощается: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\dfrac{\pi}{2} < \angle(\overline{a};\overline{b}) < \pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\overline{a};\overline{b}) < 0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\overline{a}\overline{b} < 0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\overline{a};\overline{b}) = \pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi = -1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\overline{a}\overline{b} > 0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\overline{a}\overline{b} < 0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\frac{\pi}{2}=0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\overline{a}\overline{b}=0$. Обратное тоже верно: если $\overline{a}\overline{b}=0$, то $\angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{2}$. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: $\overline{a}\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$

А что будет, если вектор $\overline{a}$ умножить на самого себя? Понятно, что вектор сонаправлен сам с собой, поэтому пользуемся вышеуказанной упрощенной формулой: $\overline{a}\overline{a}=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|$

Или: $\overline{a}\overline{a}=|\overline{a}|^2$

Число $\overline{a}\overline{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\overline{a}$, и обозначатся как $\overline{a}^2$.

Таким образом, **скалярный квадрат вектора** $\overline{a}$ **равен квадрату длины данного вектора:**

$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$

Из данного равенства можно получить формулу для вычисления длины вектора: $|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}^2}$

Для произвольных векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и любого числа $\lambda$ справедливы следующие свойства:

1) $\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{a}$ – переместительный или **коммутативный** закон скалярного произведения.

2) $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$ – распределительный или **дистрибутивный** закон скалярного произведения.

3) $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\overline{b})$ – сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

<u>Пример 3</u>

Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}=-2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}|=4\sqrt{2},\quad|\overline{b}|=8,\quad\angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\pi}{4}$.

**Решение:**

$\overline{c}\cdot\overline{d}=^{(1)}$

$=(-2\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})=^{(2)}$

$=-2\overline{a}\cdot\overline{a}+\overline{b}\cdot\overline{a}+2\overline{a}\cdot\overline{b}-\overline{b}\cdot\overline{b}=^{(3)}$

$=-2\overline{a}^2+\overline{a}\cdot\overline{b}+2\overline{a}\cdot\overline{b}-\overline{b}^2=^{(4)}$

$=-2\overline{a}^2+3\overline{a}\overline{b}-\overline{b}^2=^{(5)}$

$=-2|\overline{a}|^2+3\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})-|\overline{b}|^2=^{(6)}$

$=-2\cdot(4\sqrt{2})^2+3\cdot4\sqrt{2}\cdot8\cdot\cos\frac{\pi}{4}-8^2=-64+96\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-64=-32$

Подставляем выражения векторов $\overline{c},\overline{d}$.

Раскрываем скобки по правилу умножения многочленов

В первом и последнем слагаемом компактно записываем скалярные квадраты векторов: $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2,\quad \overline{b}\cdot\overline{b}=\overline{b}^2$. Во втором слагаемом используем перестановочность скалярного произведения: $\overline{b}\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Приводим подобные слагаемые: $\overline{a}\cdot\overline{b}+2\overline{a}\cdot\overline{b}=3\overline{a}\overline{b}$.

В первом слагаемом используем формулу скалярного квадрата $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$, о которой не так давно упоминалось. В последнем слагаемом, соответственно, работает та же штука: $\overline{b}^2=\left|\overline{b}\right|^2$. Второе слагаемое раскладываем по стандартной формуле $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$.

Подставляем данные условия $\left|\overline{a}\right|=4\sqrt{2},\quad \left|\overline{b}\right|=8\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\pi}{4}$, и проводим окончательные вычисления.

**Ответ:** $\overline{c}\overline{d}=-32$

Отрицательное значение скалярного произведения констатирует тот факт, что угол между векторами $\overline{c},\overline{d}$ является тупым.

Решение упражнений:

<u>Пример 4</u>

Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}=-\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{d}=-\overline{a}+\overline{b}$, если известно, что $\left|\overline{a}\right|=4,\quad \left|\overline{b}\right|=2\sqrt{3},\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\pi}{6}$.

<u>Пример 5</u>

Найти длину вектора $\overline{c}=-\overline{a}+3\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right|=3,\quad \left|\overline{b}\right|=2,\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

**Решение**

$$\left|\overline{c}\right|\overset{(1)}{=}\left|-\overline{a}+3\overline{b}\right|\overset{(2)}{=}\sqrt{(-\overline{a}+3\overline{b})^2}\overset{(3)}{=}\sqrt{\overline{a}^2-6\overline{a}\overline{b}+9\overline{b}^2}\overset{(4)}{=}\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2-6\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})+9\cdot\left|\overline{b}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{3^2-6\cdot3\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+9\cdot2^2}=\sqrt{9-36\cdot\frac{1}{2}+36}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

**Ответ:** $\left|\overline{c}\right|=3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

<u>Пример 6</u>

Найти длину вектора $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right|=5,\quad \left|\overline{b}\right|=10,\quad \angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

<u>Пример 7</u>

Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $\left|\overline{a}\right|=4,\quad \left|\overline{b}\right|=2\sqrt{2},\quad \overline{a}\overline{b}=8$.

**Решение:** Используем формулу:

$$\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{8}{4\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Итак, если $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то: $\angle(\overline{a};\overline{b})=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

**Ответ:** $\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\pi}{4}$ рад. $=45^\circ$

<u>Пример 7</u>

Даны $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=4$ – длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и угол между ними $\angle(\bar{a};\bar{b})=\frac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\bar{c}=-2\bar{a}+3\bar{b}$, $\bar{d}=4\bar{a}-3\bar{b}$.

Задание даже не столько сложное, сколько многоходовое. Разберём алгоритм решения:

1) По условию требуется найти угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$, поэтому нужно использовать формулу $\cos\angle(\bar{c};\bar{d})=\frac{\bar{c}\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}$.

2) Находим скалярное произведение $\bar{c}\bar{d}$ (см. Примеры №№3,4).

3) Находим длину вектора $\bar{c}$ и длину вектора $\bar{d}$ (см. Примеры №№5,6).

4) Концовка решения совпадает с Примером №7 – нам известно число $\frac{\bar{c}\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}$, а значит, легко найти и сам угол: $\angle(\bar{c};\bar{d})=\arccos\left(\frac{\bar{c}\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}\right)$

Краткое решение и ответ в конце урока.

Второй раздел урока посвящен тому же скалярному произведению. Координаты. Будет даже проще, чем в первой части.

Пример 8

Найти скалярное произведение векторов:

а) $\bar{a}(2;-5)$ и $\bar{b}(-1;0)$

б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если даны точки $A(1;-1;3), B(0;1;-2), C(4;-4;0)$

**Ответ:** $а)\ \bar{a}\bar{b}=-2,\quad б)\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=6$

При некотором опыте скалярное произведение можно приноровиться считать устно.

Пример 9

Даны четыре точки пространства $A(-4;-3;-2), B(2;-2;-3), C(-8;-5;1), D(4;-3;-1)$. Выяснить будут ли перпендикулярными следующие **прямые**:

а) $AB, DC$;

б) $AC, BD$.

Пример 10

При каком значении $\lambda$ векторы $\bar{a}(3;\lambda;-2), \bar{b}(2-\lambda;-1;5)$ будут ортогональны?

**Решение:** По условию требуется найти **такое** значение параметра $\lambda$, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства $\bar{v}(v_1;v_2;v_3), \bar{w}(w_1;w_2;w_3)$ ортогональны тогда и только тогда, когда $v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=0$.

Составим уравнение:

$\bar{a}\bar{b}=0$

$3\cdot(2-\lambda)+\lambda\cdot(-1)+(-2)\cdot 5=0$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$6-3\lambda-\lambda-10=0$

$-4\lambda-4=0$

Решаем простейшее линейное уравнение:

$-4\lambda = 4$

$\lambda = -1$

**Ответ:** при $\lambda = -1$

Пример 11

При каком значении $\lambda$ скалярное произведение векторов $\overline{a}(2;\ \lambda),\ \overline{b}(2;\ -3)$ будет равно –2?

Найти скалярное произведение векторов $3\overline{c}$ и $2\overline{c}+\overline{d}$, если $\overline{c}(0;\ -3;\ 5),\ \overline{d}(-4;\ 1;\ 0)$

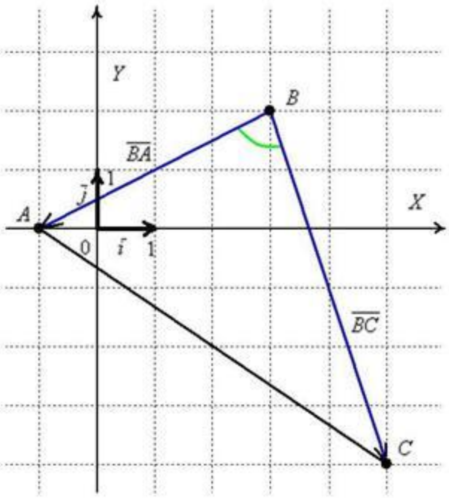
Это пример для самостоятельного решения. Здесь можно использовать ассоциативность операции, то есть не считать $3\overline{c} = 3(0;\ -3;\ 5) = (0;\ -9;\ 15)$, а сразу вынести тройку за пределы скалярного произведения и домножить на неё в последнюю очередь. Решение и ответ в конце урока.

В заключение параграфа провокационный пример на вычисление длины вектора:

Пример 12

Даны три вершины треугольника $A(-1;\ 0),\ B(3;\ 2),\ C(5;\ -4)$. Найти $\angle ABC$ (угол при вершине $B$).

**Решение:** По условию чертёж выполнять не требуется, но всё-таки:




Найдём векторы:

$\overline{BA}(-1-3;\ 0-2) = \overline{BA}(-4;\ -2)$

$\overline{BC}(5-3;\ -4-2) = \overline{BC}(2;\ -6)$

Вычислим скалярное произведение:

$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -4\cdot 2 - 2\cdot(-6) = -8+12 = 4$

И длины векторов:

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{2^2+(-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Косинус угла:

$$\cos\angle(\overline{BA};\ \overline{BC}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos\angle(\overline{BA};\overline{BC}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{-4\cdot 2 - 2\cdot(-6)}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-6)^2}} =$$

$$= \frac{-8+12}{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{4+36}} = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{800}} = \frac{4}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Найдём сам угол:

$$\angle(\overline{BA};\overline{BC}) = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 1{,}43 \text{ рад.} \approx 82°$$

**Ответ:** $\angle ABC = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 1{,}43 \text{ рад.} \approx 82°$

Пример 13

В пространстве задан треугольник координатами своих вершин $A_1(1;1;1),\ A_2(3;0;0),\ A_3(2;3;7)$. Найти угол между сторонами $A_1A_2$ и $A_1A_3$

Пример 14

С помощью скалярного произведения векторов найти угол при вершине *A* параллелограмма *ABCD*, построенного на векторах $\overline{AB} = \{8;2;0\}$ и $\overline{AC} = \{3;-5;-1\}$.

*Решение.* Вычислим модули векторов и их скалярное произведение по теореме:

$$|AB| = \sqrt{8^2+2^2+0^2} = \sqrt{68}; \qquad |AC| = \sqrt{3^2+(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35};$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 3\cdot 8 + 2\cdot(-5) + 0\cdot(-1) = 14.$$

Отсюда согласно формуле (2.29) получим косинус искомого угла

$\cos\varphi = \frac{14}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{35}} \approx 0{,}3$. Следовательно, $\angle\varphi = \arccos 0{,}3 \approx 72^0$

## Практическая работа № 77

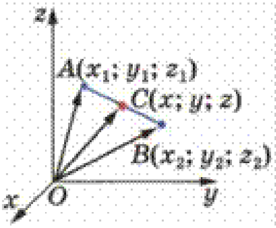
**Тема 13.3**: Практико-ориентированные задачи на координатной плоскости

**Цель**: Научиться решать задачи на координатной плоскости

**Теоретическая часть:**

## Простейшие задачи в координатах

### 1. Координаты середины отрезка

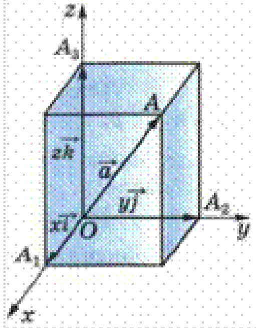



**Координаты середины точки** $C(x; y; z)$ вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляется по формуле:

$$C(x; y; z) = (\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2})$$

*Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

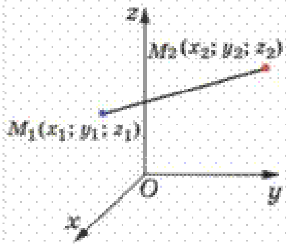
### 2. Длина вектора (по его координатам)




**Длина вектора** $\vec{a}\{x; y; z\}$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### 3. Расстояние между двумя точками




**Расстояние между двумя точками**
и

**Решение задач:**

1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3; -1; 2)$ и $B(2; -1; 4)$

| *Дано:* | *Решение:* |
|---|---|
| $A(3; -1; 2)$<br>$B(2; -1; 4)$ | $\overrightarrow{AB}\{x; y; z\} = \{2 - 3; (-1) - (-1); 4 - 2\}$<br>$\overrightarrow{AB}\{-1; 0; 2\}$ Координаты вектора по двум точкам. Находим координаты вектора: из конца вектора вычитаем значение координат начала вектора. |
| $\overrightarrow{AB}\{x; y; z\}$ - ? | |

***Ответ:*** $\overrightarrow{AB}\{-1;0;2\}$

2. Точка $M$ – середина отрезка $AB$. Найдите координаты точки $M$, если $A(0; 3; -4)$ и $B(-2; 2; 0)$.

| *Дано:* | *Решение:* |
|---|---|
| $A(0; 3; -4)$<br>$B(-2; 2; 0)$ | Координаты середины вектора (формула):<br>$M(x; y; z) = (\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2})$ |
| $M(x; y; z)$ -? | $M(x; y; z) = (\frac{0 + (-2)}{2}; \frac{3 + 2}{2}; \frac{(-4) + 0}{2})$<br>$M(x; y; z) = (-1; 2{,}5; -2)$ |

***Ответ:*** $M(-1; 2{,}5; -2)$

3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если .

| ***Дано:*** | ***Решение:*** |
|---|---|
| $A(-1; 0; 2)$<br>$B(1; -2; 3)$ | Длина вектора по его координатам:<br>$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$<br>Найдем координаты вектора:<br>$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ |
| $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert - ?$ | Подставим в формулу длины вектора.<br>$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$<br>$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(1-(-1))^2 + ((-2)-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ |

***Ответ:*** $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 3$

4. Даны векторы $\vec{a}\{3; -2; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; 1\}$ и $\vec{c}\{-3; 2; 1\}$. Найдите $\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert$.

| ***Дано:*** | ***Решение:*** |
|---|---|
| $\vec{a}\{3; -2; 1\}$<br>$\vec{b}\{-2; 3; 1\}$<br>$\vec{c}\{-3; 2; 1\}$ | Найдем сумму соответствующих координат векторов:<br>$\vec{a} + \vec{b}\{3 + (-2); (-2) + 3; 1 + 1\} = \{1; 1; 2\}$<br>Длина вектора по его координатам:<br>$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. |
| $\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert - ?$ | Подставим значения координат: |

$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

***Ответ:*** $\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = \sqrt{6}$

**Задача№5. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A(2;-3), B(1,1), C(-6,5)**

Задачу очень просто решить, воспользовавшись формулой

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]$$

в которой нужно взять $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -6$,

$y_1 = -3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 5$.

Подставляя эти числа в формулу, получим

$S = 12$ кв. ед.

**6.** Построить треугольник с вершинами $A$ (– 4; 2), $B$ (0; – 1) и $C$ (3; 3) и определить его периметр и углы.

*Решение*. Чтобы вычислить периметр необходимо найти длины сторон треугольника. Найдем длины сторон по формуле (1):

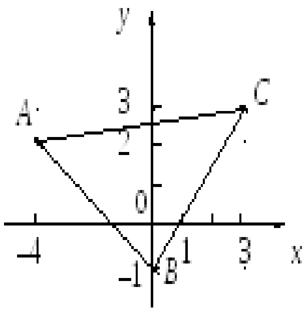
$d_1 = AB = \sqrt{(0+4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

$d_2 = BC = \sqrt{(3-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

$d_3 = AC = \sqrt{(3+4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Периметр вычислим по формуле $p = d_1 + d_2 + d_3$, т. е.

$p = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 5(2 + \sqrt{2}) = 17{,}1$.




Выполним чертеж.

Так как треугольник равнобедренный, то углы при основании равны, т. е. $\alpha = \gamma$. Тогда $\beta = 180 - \alpha - \alpha = 180 - 2\cdot\alpha$

По теореме косинусов найдем угол $\alpha$:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos\alpha$.

$$5^2 = (5\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\sqrt{2}\cos\alpha.$$

$$25 = 50 + 25 - 50\sqrt{2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{50}{50\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ = 45º. Значит $\beta$ = 180º – 90º = 90º. Следовательно, треугольник является прямоугольным.

**7.** Даны вершины треугольника *ABC*: *A* (1; 5), *B* (9; 10); *C* (10; 3). Определить координаты точки пересечения медиан треугольника.

*Решение*. Сначала найдем координаты точки *D* середины одной из сторон, например стороны *AB*. Для этого воспользуемся формулой (3):

$$x = \frac{1+9}{2} = 5 \qquad y = \frac{5+10}{2} = 7{,}5.$$

Точка *M*, в которой пересекаются медианы, делит отрезок *CD* в отношении 2:1, считая от точки *C*. Следовательно, координаты точки *M* определяются по формулам (2):

$$x = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2} = \frac{10+10}{3} = \frac{20}{3}; \quad y = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2} = \frac{3+15}{3} = 6.$$

*Ответ*: $M\left(\frac{20}{3}; 6\right)$.

**8.** Известны точки *A* (– 2; 5), *B* (4; 17) – концы отрезка *AB*. На этом отрезке находится точка *C*, расстояние которой от точки *A* в два раза больше расстояния от точки *B*. Определить координаты точки *C*.

*Решение*. Так как |AC| = 2·|CB|, то $\lambda$ = |AC|:|CB| = 2. Следовательно,

$$x = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1+2} = \frac{6}{3} = 2; \quad y = \frac{5 + 2\cdot 17}{1+2} = \frac{39}{3} = 13$$

*Ответ*: *C* (2; 13).

## Практическая работа №52

**Тема 9.3** Контрольная работа по разделу 9 «Координаты и векторы»

**Цель**: Проверить уровень усвоения данного материала по разделу 13 «Координаты и векторы»

***При решении заданий 1-4 запишите правильный ответ из четырех предложенных.***

1. (1 балл) Даны точки А(1,0,5), В(-2,0,4), С(0,-1,0), Д(0,0,2). Какие из них лежат на координатной прямой Оу?

А) А; Б) В; В) С; Г) Д.

2. (1 балл) Какие из векторов а(1,0,-1), с(1/3,2/3,-2/3), в(1,1,1), р(0,0,-2) являются единичными?

А) а; Б) с; В) в; Г) р.

3. (1 балл) Какие из векторов а(1,2,-3), с(3,6,-6), в(2,4,-6) коллинеарны?

А) а, в; Б) с, в; В) а, с; Г) коллинеарных векторов нет.

4. (1 балл) Даны точки А(2,0,5), В(2,4,-2) С(-2,6,3). Серединой какого отрезка является точка М(0,3,4)?

А) АВ; Б) ВС; В) АС; Г) СВ.

***При выполнении заданий 5-8 запишите ход решения и полученный ответ.***

5. (2 балла) Даны векторы а(-6,0,8), в(-3,2,-6). Найдите скалярное произведение векторов.

6. (2 балла) При каких значениях п векторы $\vec{a}$ (4,п,2), $\vec{в}$ (1,2,п) перпендикулярны?)

7. (2 балла) Даны векторы а(-6,0,8), в(-3,2,-6). Найдите косинус угла между векторами.

8. (2 балла) Даны векторы в{3,1-2}, с {1,4,-3}. Найти длину вектора 2в-с.

***Эталоны ответов:***

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ | В | В | А | В | -30 | -1 | -3/7 | $\sqrt{30}$ |

## Литература


**Основные печатные издания**

1. Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Базовый и углублённый уровни / Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и другие. – М.: Издательство «Просвещение», 2022. – 464 с.

2. Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 класс. Учебник. Базовый и углублённый уровни / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие. – М.: Издательство «Просвещение», 2024. – 288 с.

**Основные электронные издания**

1. Кытманов А. М. Математика: учебное пособие для СПО / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 288 с. — ISBN 978-5-507-47937-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/333293

2. Райцин А. М. Элементарная математика / А. М. Райцин. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. — 244 с. — ISBN 978-5-507-48065-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/362867

3. https://minobrnauki.gov.ru/ - Министерство образования и науки Российской Федерации

4. http://www.edu.ru/ - федеральный портал «Российское образование»

**Дополнительные источники**

1. Абдуллина К.Р. Математика: учебник для СПО / Абдуллина К.Р., Мухаметдинова Р.Г.. — Саратов: Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-4488-0941-5

2. Булдык Г. М. Математика: учебное пособие для СПО / Г. М. Булдык. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. — 156 с. — ISBN 978-5-507-48578-9.

3. Воронина Л. В. Математика: учебное пособие / Л. В. Воронина, Е. А. Утюмова. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2023. — 300 с. — ISBN 978-5-222-38583-8.

4. Математика: учебное пособие / М.М. Чернецов [и др.]. — М.: Российский государственный университет правосудия, 2022.— 336 с.