МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине
«ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»
для направления подготовки **09.04.02 Информационные системы и технологии**
направленность (профиль) **Технологии работы с данными и знаниями, анализ информации**

Пятигорск
2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи изучения дисциплины

Целью изучения дисциплины является формирование набора общепрофессиональных, профессиональных компетенций будущего магистра по направлению 09.04.02 «Информационные системы и технологии».

Задачей курса является освоение магистрантом математического аппарата для решения задач проектирования и разработки интеллектуальных информационных систем.

2. Оборудование и материалы

Для проведения практических занятий необходимо следующее материально-техническое обеспечение: персональный компьютер; проектор; возможность выхода в сеть Интернет для поиска по образовательным сайтам и порталам; интерактивная доска.

3. Наименование практических занятий

Практическое занятие 1. Построение и равносильность формул логики предикатов первого порядка.
Практическое занятие 2. Интерпретация в логике первого порядка. Логическое следствие.
Практическое занятие 3. Многосортная логика первого порядка.
Практическое занятие 4. Построение функций принадлежности.
Практическое занятие 5. Операции над нечеткими множествами.
Практическое занятие 6. Нечеткий логический вывод.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1.

Построение и равносильность формул логики предикатов первого порядка.

Цель. Познакомиться с основными понятиями логики предикатов первого порядка.

Форма проведения: решение типовых задач.

Вопросы для обсуждения: Формулы логики первого порядка. Законы логики первого порядка.

Теоретические сведения.

Предикаты и операции над ними

Определение. Пусть M – непустое множество. Тогда n-*местным предикатом, заданным на M,* называется выражение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при замене этих переменных элементами множества M.

Рассмотрим **примеры**. Пусть M есть множество натуральных чисел **N**. Тогда выражения «x – простое число», «x – четное число», «x – больше 10» являются *одноместными предикатами*. При подстановке вместо x натуральных чисел получаются высказывания: «2 – простое число», «6 – простое число», «3 – четное число», «5 больше 10» и т.д.

Выражения «x больше y», «x делит y нацело», «x плюс y равно 10» являются *двухместными предикатами*. (Конечно, последнее выражение можно было записать и так: «x+y=10»).

Примеры *трехместных предикатов*, заданных на множестве натуральных чисел: число z лежит между «x и y», «x плюс y равно z», «|x-y|✹z».

Будем считать, что *высказывание – нульместный предикат,* то есть предикат, в котором нет переменных для замены.

Надо отметить, что местность предикатов не всегда равна числу *всех* переменных, содержащихся в выражении. Например, выражение «существует число x такое, что y=2x» на множестве натуральных чисел определяет одноместный предикат. По смыслу этого выражение в нем можно заменять только переменную y. Например, замена y на 6 дает истинное высказывание: «существует число x такое, что 6=2x», а замена y на 7 дает ложное (на множестве **N**) высказывание «существует число x такое, что 7=2x».

Предикат с заменяемыми переменными $x_1,\dots,x_n$ будет обычно обозначаться заглавной латинской буквой, после которой в скобках указаны эти переменные. Например, $P(x_1,x_2)$, $Q(x_2,x_3)$, $R(x_1)$. Среди переменных в скобках могут быть и фиктивные.

На совокупности всех предикатов, заданных на множестве M, вводятся знакомые логические операции: *конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация* и *эквиваленция*. Эти операции вводятся довольно очевидным образом. Приведем в качестве примера определение конъюнкции предикатов.

Определение. Предикат $W(x_1,\dots,x_n)$ называется *конъюнкцией предикатов* $U(x_1,\dots,x_n)$ и $V(x_1,\dots,x_n)$, заданных на множестве M, если для любых $a_1,\dots,a_n$ из M высказывание $W(a_1,\dots,a_n)$ есть конъюнкция высказываний $U(a_1,\dots,a_n)$ и $V(a_1,\dots,a_n)$, т.е. W принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания U и V.

Легко по аналогии привести определения и других упомянутых выше операций.

В логике предикатов первого порядка вводятся и две новые операции. Называются они *квантором общности* и *квантором существования*. Эти операции рассмотрим вначале на примерах.

Пусть дано выражение «существует x такой, что x+y=10». На множестве натуральных чисел это предложение определяет одноместный предикат P(y), так P(2) и P(9) – истинные высказывания, P(11) – ложное. Если обозначить предикат «x+y=10» через S(x,y) (а это предикат двухместный), то P(y) можно записать так: «существует x такой, что S(x,y)». В этом случае говорят, что предикат P(y) получен из предиката S(x,y) навешиванием квантора существования на x и пишут $P(y)=(x)S(x,y)$.

Рассмотрим другой пример. Выражение «для всех x справедливо, что $y \geq -x^2$» определяет на множестве целых чисел одноместный предикат Q(y). Если предикат «$y \geq -x^2$» обозначить через T(x,y), то Q(y) можно записать так: «для всех x справедливо T(x,y)». В таком случае говорят, что предикат Q(y) получен из предиката T(x,y) навешиванием квантора общности на x и пишут $Q(y)=(x)T(x,y)$.

После этих примеров нетрудно дать определение в общем виде.

Определение. Пусть $P(x_1,\dots,x_n)$ – предикат, заданный на множестве M, y – переменная. Тогда выражение «для всякого y выполняется $P(x_1,\dots,x_n)$» – предикат, полученный из P *навешиванием квантора общности на переменнуюy,* а выражение «существует y такой, что выполняется $P(x_1,\dots,x_n)$» – предикат, полученный из P *навешиванием квантора существования на переменнуюy*.

Обозначения операций были введены выше.

Заметим, что в определении не требуется, чтобы y была одна из переменных $x_1, \dots,x_n$, хотя в содержательных примерах, которые будут ниже, квантор навешивается на одну из переменных $x_1,\dots,x_n$. Указанное требование не накладывается, чтобы избежать усложнения определения формулы логики предикатов. Если y – одна из переменных $x_1, \dots,x_n$, то после навешивания квантора на y новый предикат является (n-1)-местным, если $y \notin \{x_1,\dots,x_n\}$, то местность нового предиката равна n.

Если предикат $W(x_1,\dots,x_n)$ получен из предикатов $U(x_1,\dots,x_n)$ и $V(x_1,\dots,x_n)$ с помощью связок, то истинность высказывания $W(a_1,\dots,a_n)$ определяется таблицами истинности этих связок. Пусть $W(x_1,\dots,x_n)=(y)U(x_1,\dots,x_n,y)$. Тогда высказывание $W(a_1, \dots,a_n)$ истинно тогда и только тогда, когда для любого $b \in M$ истинно высказывание $U(a_1, \dots,a_n,b)$. Если же $W(x_1,\dots,x_n)=(y)U(x_1,\dots,x_n,y)$, то высказывание $W(a_1,\dots,a_n)$ истинно в том и только в том случае, когда найдется $b \in M$, для которого высказывание $U(a_1,\dots,a_n,b)$ истинно.

Понятие предиката – весьма широкое понятие. Это видно уже из приведенных выше примеров. Тем не менее, мы это еще раз подчеркнем, показав, что n-местная функция может рассматриваться как (n+1)-местный предикат. Действительно, функции $y=f(x_1,\dots,x_n)$, заданной на множестве M, можно поставить в соответствие выражение «y равно $f(x_1,\dots,x_n)$». Это выражение есть некоторый предикат $P(x_1,\dots,x_n,y)$. При этом если элемент b есть значение функции в точке $(a_1,\dots,a_n)$, то высказывание $P(a_1,\dots,a_n,b)$ истинно, и обратно. (Подобное «превращение» функции в предикат мы уже делали выше для сложения натуральных чисел.)

На предикаты можно смотреть и более формально, причем с двух точек зрения.

Во-первых, предикат можно представить отношением следующим образом. Пусть предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ задан на множестве M. Рассмотрим прямую степень этого множества $M^n=M\times M\times\ldots\times M$ и подмножество D_p множества M^n, определяемое равенством:

$D_p=\{(a_1,\ldots,a_n)\in M^n \mid$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно$\}$.

Отношение D_p можно назвать областью истинности предиката P. Во многих случаях предикат P можно отождествить с отношением D_p. При этом, правда, возникают некоторые трудности при определении операций над отношениями, аналогичными операциям над предикатами.

Во-вторых, предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$, заданный на M, можно отождествить с функциейй $f_p:M^n\rightarrow\{0,1\}$, определяемой равенством

$$f_p(a_1,\ldots,a_n)=\begin{cases}1, \text{ если высказывание } P(a_1,\ldots,a_n) \text{ истинно},\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Мы, в основном, будем понимать термин «предикат» в смысле исходного определения, т.е. как языковое выражение. Связано это с тем, что одной из главных целей, как уже отмечалось во введении, является изучение выразительных возможностей логики первого порядка, возможности представления средствами этой логики информации, выраженной на естественном (скажем, русском) языке.

Формулы логики первого порядка

Для введения понятия формулы логики первого порядка будем исходить из следующих трех множеств: F,R,V. Элементы множества F – символы (или имена) функций, элементы R – символы (или имена) предикатов, элементы множества V – переменные. Будем считать, что каждому символу функции и предиката поставлено в соответствие натуральное число или ноль – местность (т.е. число аргументов) этого символа. Допускаются нульместные символы функций, которые называются *константами*, и нульместные символы предикатов (последние будут играть роль атомарных формул логики высказываний). Объединение F и R будем называть *сигнатурой*. Сигнатуру заранее фиксировать не будем, она будет определяться содержанием решаемой задачи. Множество V предполагается бесконечным, для обозначения его элементов будут использоваться, как правило, буквы x,y,z,u,y,w с индексами и без них.

В примерах, приведенных выше, мы видели, что для записи предикатов использовались арифметические выражения: 2x, x+y, $-x^2$. Аналогом арифметического выражения в логике служит понятие терма.

Определение.*Термом* называется

1) переменная и константа;

2) выражение вида $f(t_1,\ldots,t_n)$, где $t_1,\ldots,t_n$ – термы, а f – n-местный функциональный символ.

Можно сказать, что терм – выражение, полученное из переменных и констант с помощью символов функций.

Определение.*Атомарной формулой* называется выражение вида $r(t_1,\ldots,t_n)$, где $t_1, \ldots,t_n$ – термы, r – символ n-местного предиката.

Примерами атомарных формул являются выражения x✹y²+1, |x-y|⁂z, x делит нацело y-3.

Определение.*Формулой логики первого порядка* называется

1) атомарная формула,

2) выражения вида (F)&(G), (F_1)▸(G), ▲(F), (F)☰(G),(F)✪(G), (v)(F), (v)(F), где F и G – формулы логики предикатов, v – переменная.

Формула F в двух последних выражениях называется *областью действия квантора по переменной*.

К соглашениям о приоритете операций, принятом в логике высказываний, добавим следующее: кванторы имеют одинаковый приоритет, который больше приоритета всех связок.

Определение. Вхождение переменной в формулу называется *связанным*, если переменная стоит непосредственно за квантором или входит в область действия квантора по этой переменной. В противном случае вхождение называется *свободным*.

Например, в формуле

F=t(x)&(y)[s(x,y)☰(x)(r(x,y)▸t(y))]

Первое и второе вхождение переменной x свободны, третье и четвертое связаны. Все вхождения переменной y связаны.

Определение. Переменная называется *свободной в формуле,* если существует хотя бы одно свободное вхождение переменной в формулу.

Формула F из предыдущего примера имеет одну свободную переменную x.

Если $x_1,\ldots,x_n$ – все свободные переменные формулы F, то эту формулу будем обозначать через $F(x_1,\ldots,x_n)$. Это обозначение будем применять и в том случае, когда не все переменные из $x_1,\ldots,x_n$ являются свободными в F.

Задания

Задание 1 Какой из кванторов определяется следующими выражениями? Представьте выражения в виде формул.

- «для всякого x истинно F(x)»,
- «найдется x, такой что F(x)».

Задание 2 Будут ли равносильны следующие пары формул и почему?

- (x)(F(x)☰G(x)) и (x)F(x)☰(x)G(x);
- (x)F(x)☰ (x)G(x) и (x)(y)(F(x)☰G(y)).

Задание 3 Пусть M – множество всех точек, прямых и плоскостей трехмерного пространства. Рассмотрим алгебраическую систему <M; x∈y, p(x), l(x), pl(x)>, где ∈ – отношение принадлежности, p(x) означает, что x есть точка, I(x) – x есть прямая, pI(x) – x есть плоскость. Выразить следующие предикаты формулами указанной сигнатуры (в формулах можно использовать ограниченные кванторы):

- «плоскости x и y имеют общую точку»,
- «прямые x и y имеют общую точку»,
- «если плоскости x и y имеют общую точку, то они имеют общую прямую»,
- «прямые x и y параллельны».

Контрольные вопросы к практическому занятию №1

Базовый уровень

1. Предикаты и операции над ними.
2. Синтаксис и семантика логики предикатов первого порядка.
3. Формулы логики первого порядка.

Повышенный уровень

4. Достоинства и недостатки логики предикатов первого порядка.

Средства и технологии оценки: коллоквиум

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации(№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Практическое занятие№ 2.

Интерпретация в логике первого порядка. Логическое следствие.

Цель. Научиться доказывать логичность или нелогичность цепочки высказываний с использованием интерпретаций.

Форма проведения: решение типовых задач.

Вопросы для обсуждения: Интерпретация в логике первого порядка. Логическое следствие.Доказательство истинности или ложности высказываний.

Теоретические сведения.

Интерпретация в логике первого порядка

Необходимо соотнести формулы логики предикатов первого порядка и предикаты. Как и в логике высказываний, подобное соотнесение осуществляет функция, называемая *интерпретацией*.

Определение.*Интерпретацией* на непустом множестве M называется функция, заданная на сигнатуре F[illegible]R, которая

1) константе ставит в соответствие элемент из M;

2) символу n-местной функции ставит в соответствие некоторую n-местную функцию, определенную на множестве M;

3) символу n-местного предиката ставит в соответствие n-местный предикат, заданный на M.

В результате любая формула F получает в соответствие предикат, местность которого равна числу свободных переменных формулы F.

Приведем **примеры**. Пусть сигнатура состоит из символа одноместного предиката P и двухместного предиката D, M={2,3,6,9,12,15} и

F=(P(x)&(y)(P(y)[illegible]D(x,y))

Поставим в соответствие (проинтерпретируем) P(x) предикат «x – простое число», D(x,y) – предикат «x меньше или равно y». Тогда формула F получит в соответствие предикат «x=2». На этом же множестве можно рассмотреть и другую интерпретацию: P(x) ставится в соответствие «x – нечетное число», D(x,y) – предикат «x делит y». В таком случае, формула F получает в соответствие предикат «x=3». Если φ – интерпретация, то предикат, соответствующий формуле F, будем обозначать через φ(F).

Одним из основных типов задач этой темы являются задачи, связанные с использованием выразительных возможностей языка логики предикатов. В качестве примера рассмотрим задачу перевода на язык логики предикатов следующего рассуждения. «Каждый первокурсник знаком с кем-либо из спортсменов. Никакой первокурсник не знаком ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, никто из спортсменов не является любителем подледного лова». Для удобства ссылок это рассуждение условимся называть рассуждением о первокурсниках. Выберем следующую сигнатуру:

П(x): «x – первокурсник»,

С(x): «x – спортсмен»,

Л(x): «x – любитель подледного лова»,

З(x,y): «x знаком с y».

Тогда рассуждение запишется в виде следующей последовательности формул.

H_1=(x)[П(x)→(y)(С(y)&З(x,y))],

H_2=(x)(y)[П(x)&Л(y)→¬З(x,y)],

H_3=(x)(С(x)→¬Л(x))

Мы установили, что выразительных средств логики предикатов достаточно, чтобы записать рассуждение о первокурсниках. Естественно далее поставить вопрос, логично ли оно? Будет ли третье предложение следствием первых двух? На этот вопрос мы ответим в разделе 5.

Равносильность. Законы логики первого порядка

Определение. Формулы $F(x_1,…,x_n)$ и $G(x_1,…,x_n)$ называются *равносильными*, если для любой интерпретации φ с областью M высказывания $(\varphi F)(a_1,…,a_n)$ и $(\varphi G)(a_1,…,a_n)$ при любых $a_1,…,a_n$ из M одновременно истинны или одновременно ложны.

Пусть F(x)=¬(y)P(x,y), G(x)=(y)¬P(x,y), где P – символ двухместного предиката. Докажем, что формулы F(x) и G(x) равносильны. Возьмем интерпретацию φ с областью M. Пусть высказывание (φF)(a) истинно для a∈M. Истинность этого высказывания означает, что не для всякого y∈M высказывание (φP)(a,y) истинно. Следовательно, найдется b∈M, для которого высказывание (φP)(a,b) ложно. Если высказывание (φP)(a,b), ложно, то высказывание ¬(φP)(a,b) истинно. Отсюда следует, что найдется y∈Mтакой, для которого высказывание ¬(φP)(a,y) истинно. Это означает истинность высказывания (φG)(a). Итак, мы доказали, что если высказывание (φF)(a) истинно, то высказывание (φG)(a) тоже истинно. Обратная импликация доказывается аналогично. Значения истинности высказываний (φF)(a) и (φG)(a) при любом a∈M совпадают. Следовательно, формулы F(x) и G(x) равносильны.

Определение. Формула $F(x_1,…,x_n)$ называется *тождественно истинной*, если для любой интерпретации φ с областью M высказывание $(\varphi F)(a_1,…,a_n)$ при любых $a_1,…,a_n$ из M является истинным.

Приведем список основных равносильностей – законов логики предикатов. Законы 1–21 совпадают с соответствующими законами логики высказываний.

Пусть F,G и H – некоторые формулы логики предикатов. Тогда следующие формулы равносильны:

1) F&1 и F;	2) F∨1 и F;
3) F&0 и 0;	4) F∨0 и F;
5) F&F и F;	6) F∨F и F;
7) F&G и G&F;	8) F∨G и G∨F;

9) F&(G&H) и (F&G)&H; 10) F$^{\vee}$ (G$^{\vee}$H) и (F$^{\vee}$G) $^{\vee}$H;

11) F&(G$^{\vee}$H) и (F&G) $^{\vee}$ (F&H); 12) F$^{\vee}$ (G&H) и (F$^{\vee}$G)&(F$^{\vee}$H);

13) F&(F$^{\vee}$G) и F; 14) F$^{\vee}$ (F&G) и F;

15) F&¬F и 0; 16) F$^{\vee}$¬F и 1;

17) ¬ (F&G) и ¬F$^{\vee}$¬G; 18) ¬ (F$^{\vee}$G) и ¬F&¬G;

19) ¬¬F и F; 20) F→G и ¬F$^{\vee}$G;

21) F✪G и (F→G)&(G→F).

Дополним полученный список законами, специфичными для логики предикатов

22) (x)(F(x)&G(x) равносильна (x)(F(x)&(x)G(x),

23) (x)(F(x)▸G(x) равносильна (x)F(x)▸(x)G(x),

24) (x)(y)F(x,y) равносильна (y)(x)F(x,y),

25) (x)(y)F(x,y) равносильна (y)(x)F(x,y),

26) ▴(x)F(x) равносильна (x)▴F(x),

27) ▴(x)F(x) равносильна (x)▴F(x).

Законы 22,23 утверждают, что квантор общности можно переносить через конъюнкцию, а квантор существования через – дизъюнкцию. Естественно поставить вопрос, можно ли квантор существования переносить через конъюнкцию, а квантор общности – через дизъюнкцию. Другими словами, будут ли равносильны следующие пары формул

(x)(F(x)▸G(x)) и (x)(F(x)▸(x)G(x)

(x)(F(x)&G(x)) и (x)F(x)&(x)G(x) ?

Оказывается нет. Докажем это для случая, когда F(x) и G(x) – атомарные формулы. Пусть основное множество – множество натуральных чисел N, F(x) – предикат «x – четное число» , G(x) – предикат «x – нечетное число». Обозначим эту интерпретацию буквой ❶. Тогда ❶✧(x)(F(x)▸G(x))]=1, но ❶[(x)F(x)▸(x)G(x)]=0.

Аналогично, ❶✧(x)(F(x)&G(x))]=0 и ❶✧(x)F(x)&(x)G(x)]=1.

Рассмотрим законы 24 и 25. Они утверждают, что одноименные кванторы можно менять местами. Можно ли переставлять местами разноименные кванторы, сохраняя равносильность. Другими словами, равносильны ли формулы

(x)(y)F(x,y) и (y)(x)F(x,y)?

Оказывается, тоже нет. В качестве основного множества возьмем опять множество натуральных чисел, F(x,y) будем считать атомарной формулой и поставим ей в соответствие предикат «x меньше y». Тогда левая формула будет истинной, правая – ложной.

Вернемся к законам 22 и 23. Мы отмечали, что квантор существования нельзя переносить через конъюнкцию. Тем не менее, если одна из формул F или G не содержит переменной x, то это делать можно. Запишем соответствующие законы:

28) (x)(F(x)▸G) равносильна (x)F(x)▸G,

29) (x)(F(x)&G) равносильна (x)F(x)&G, где G не содержит x.

Законы 22, 23, 28, 29 можно записать в общем виде:

30) (Q_1x)(Q_2z)(F(x)▸G(z)) равносильна (Q_1x)F(x)▸(Q_2z)G(z)

31) (Q_1x)(Q_2u)(F(x)&G(u)) равносильна (Q_1x)F(x)&(Q_2u)G(u),

где Q_1, Q_2 - кванторы или , u не входит в F(x), а x не входит в G(u).

Для доказательства равносильности двух формул могут оказаться полезными следующие законы:

Рассмотрим формулу F(x)=(y)P(x,y)☰P(x,c), где P – символ двухместного отношения, c – константа. Докажем, что формула F(x) тождественно истинна. Возьмем интерпретацию ❶ с областью M и элемент a из M. Высказывание (❶F)(a) равно (y)(❶P)(a,y)☰(❶P)(a,❶(c)). Если посылка (y)(❶P)(a,y) ложна, то вся импликация (❶F)(a) истинна. Предположим, что посылка (y)(❶P)(a,y) истинна. Это означает, что для всякого y⊞M высказывание (❗P)(a,y) истинно, в том числе истинно это высказывание и для y=❗(c). Следовательно, истинно заключение (❗P)(a,❗(c)) и вся импликация (❗F)(a). Мы доказали, что высказывание (❗F)(a) истинно для любого a⊞M. Это означает, что формула F(x) является тождественно истинной.

Понятия равносильности и тождественной истинности в логике первого порядка связаны точно так же, как и в логике высказываний.

Теорема1. Формулы F(x_1,…,x_n) и G(x_1,…,x_n) равносильны тогда и только тогда, когда формулы F(x_1,…,x_n)⬇G(x_1,…,x_n) тождественно истинны.

32) (x)F(x) равносильна (z)F(z),

33) (x)F(x) равносильна (z)F(z).

В законах 32 и 33 переменная z не входит в F(x), а переменная x не входит в F(z).

В логике высказываний применяется два способа доказательства равносильности формул: построение совместной таблицы истинности и переход от одной формулы к другой с помощью законов. В случае логики первого порядка остается только второй способ.

Проиллюстрируем его на примере следующей задачи: доказать равносильность формул:

F=▲(x)(y)[S(x)&P(x,y)☰(z)(T(z)&P(x,z))]

G=(x)(y)[S(x)&P(x,y)&(z)(T(z)☰▲P(x,z))].

Применим к формуле F последовательно законы 26, 27 и 20, получим, что формула F равносильна формуле

F_1=(x)(y)▲[▲(S(x)&P(x,y))▸(z)(T(z)&P(x,z))].

Далее, используя законы 18,19 и 27 из F_1, получим формулу

F_2=(x)(y)[S(x)&P(x,y)&(z)▲(T(z)&P(x,z))].

Осталось заметить, что в силу законов 17 и 20 в формуле F_2подформулу▲(T(z)&P(x,z)) можно заменить на T(z)☰▲P(x,z).

Подчеркнем, что доказательство равносильности двух формул будем проводить с помощью законов логики первого порядка. Доказательство того, что формулы неравносильны, будем осуществлять построением интерпретации, при которой одна формула истинна, другая ложна. Например, так, как это было сделано выше для доказательства неравносильности формул (x)(F(x)▸G(x)) и (x)F(x)▸(x)G(x). Разумеется, до построения интерпретации формулы можно предварительно преобразовывать с помощью законов.

Логическое следствие

Определение. Формула G(x_1,…,x_n) называется *логическим следствием* формул F_1(x_1,…,x_n),…,F_k(x_1,…,x_n), если для любой интерпретации ❗ с областью M и любых a_1, …,a_n⊞M из истинности высказываний (❗F_1)(a_1,…,a_n),…,(❗F_k)(a_1,…,a_n) следует истинность высказывания (❗G)(a_1,…,a_n).

Приведем **примеры**. Пусть F_1=(x)(P(x)☰Q(x)&R(x)), F_2=P(c), G=Q(c). Покажем, что формула G является логическим следствием формул F_1 и F_2. Возьмем интерпретацию ❗ с областью M такую, что высказывания ❗F_1 и ❗F_2 истинны. Элемент ❗(c) обозначим буквой b. Истинность ❗F_2 означает, что высказывание (❗P)(b) истинно. А истинность высказывания ❗F_1 означает, что для любого элемента x⊞M истинно высказывание (❗P)(x)☰(❗Q)(x)&(❗R)(x). Поскольку это высказывание истинно для любого x, то, в частности, истинно для x=b. Мы видим, что истинна импликация (❗P)(b)☰(❗Q)(b)&(❗R)(b) и ее посылка (❗P)(b). Из таблицы истинности импликации следует истинность заключения (❗Q)(b)&(❗R)(b). Следовательно, истинно высказывание (❗Q)(b). А это и есть ❗G. Мы доказали, что если истинны высказывания ❗F_1 и ❗F_2, то истинно высказывание ❗G, т.е. что G –логическое следствие F_1 и F_2.

В качестве второго примера докажем нелогичность рассуждения о первокурсниках. Мы записали это рассуждение в виде последовательности формул

H_1,H_2, и H_3. Для доказательства нелогичности рассуждения надо найти интерпретацию φ, при которой формулы H_1 и H_2 истинны, а формула H_3 ложна. Пусть множество M состоит из трех элементов 2,3,4. Символы С, Л и П проинтерпретируем следующим образом:

$H_1 = (\forall x)[П(x) \rightarrow (\exists y)(С(y) \& З(x,y))]$,

$H_2 = (\forall x)(\forall y)[П(x) \& Л(y) \rightarrow \neg З(x,y)]$,

$H_3 = (\forall x)(С(x) \rightarrow \neg Л(x))$

$(\varphi С)(x)$=«x – простое число»,

$(\varphi Л)(x)$=«x – четное число»,

$(\varphi П)(x)$= «x>4»,

т.е. П интерпретируется как тождественно ложный предикат. Тогда формулы H_1 и H_2 истинны, поскольку посылки импликаций этих формул ложны при любом x. А формула H_3 ложна. Чтобы убедиться в этом достаточно взять x=2. Следовательно, рассуждение о первокурсниках нелогично.

Определение. Множество формул

$K=\{F_1(x_1,\dots,x_l),\dots,F_m(x_1,\dots,x_l)\}$

называется *выполнимым*, если существует интерпретация φ с областью M и элементы $a_1,\dots,a_l \in M$ такие, что все высказывания $(\varphi F_1)(a_1,\dots,a_l),\dots,(\varphi F_m)(a_1,\dots,a_l)$ истинны.

Множество формул $K = \{F_1=(\forall x)(\exists y)(P(y)\&Q(x,y)),\ F_2=(\forall y)Q(c,y),\ F_3=\neg P(c)\}$ выполнимо. Возьмем в качестве области интерпретации множество натуральных чисел **N.** Символы P,Q и C проинтерпретируем следующим образом:

$(\varphi P)(u)$=«u – простое число»,

$(\varphi Q)(u,v)$=«u меньше или равно v»,

$(\varphi(C)=1$.

Тогда высказывание φF_1 означает, что для любого натурального числа x найдется простое число y, которое не меньше x, высказывание φF_2 означает, что 1 – наименьшее натуральное число, а высказывание φF_3 означает, что 1 – непростое число. Ясно, что все эти высказывания истинны, и поэтому множество формул K выполнимо.

Понятия логического следствия и выполнимости в логике первого порядка связаны точно так же, как и в логике высказываний.

Теорема 2. Формула $G(x_1,\dots,x_n)$ является логическим следствием формул $F_1(x_1,\dots,x_n),\dots,F_k(x_1,\dots,x_n)$ тогда и только тогда, когда множество формул $\{F_1(x_1,\dots,x_n),\dots,F_k(x_1,\dots,x_n),\neg G(x_1,\dots,x_n)\}$ невыполнимо.

Дано утверждение: «Некоторые из первокурсников знакомы с кем-либо из спортсменов. Но ни один из первокурсников не знаком ни с одним любителем подледного лова». Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:

а) «ни один спортсмен не является любителями подледного лова»,

б) «некоторые из спортсменов не являются любителями подледного лова»,

в) «найдется спортсмен, который любит подледный лов»?

Задание

Дано утверждение: «Некоторые из первокурсников знакомы с кем-либо из спортсменов. Но ни один из первокурсников не знаком ни с одним любителем подледного лова». Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:

а) «ни один спортсмен не является любителями подледного лова»,

б) «некоторые из спортсменов не являются любителями подледного лова»,

в) «найдется спортсмен, который любит подледный лов»?

Контрольные вопросы к практическому занятию № 2

Базовый уровень

1. Интерпретация в логике первого порядка.
2. Равносильность формул. Законы логики первого порядка.
3. Логическое следствие.

Повышенный уровень

4. Доказательство логичности и нелогичности цепочки высказываний.

Средства и технологии оценки: коллоквиум

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации(№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Практическое занятие № 3.

Многосортная логика первого порядка.

Цель. Научиться представлять запросы к информационной системе формулами логики предикатов заданной сигнатуры.

Форма проведения: групповоерешение задач.

Вопросы для обсуждения: Ограниченные кванторы. Понятие многосортной логики. Перевод высказываний на язык многосортной логики предикатов. Представление запросов к информационной системе формулами логики предикатов заданной сигнатуры.

Теоретические сведения.

Многосортная логика первого порядка

Расширим понятия формулы, введя так называемые ограниченные кванторы. Допустим, что нам надо записать на языке логики предикатов следующее утверждение «для всякого x>5 существует y>0 такое, что xy=1». Отметим, что здесь написано не «для всякого x» и «существует y», а «для всякого x>5 « и «существует y>0 «. Если на это не обратить внимания, то получается формула (x)(y)(xy=1) имеющая другой смысл, нежели исходное утверждение. Для правильного перевода надо немного изменить исходное предложение по форме (не меняя, разумеется, смысла): «для всякого x справедливо, если x>5, то существует y такой, что y>0 и xy=1». Правильный перевод имеет вид (x)[x>5→(y)(y>0&(xy=1)].

Если рассматривать более длинные исходные предложения, то соответствующие им формулы логики предикатов будут, вообще говоря, довольно громоздкими. Для того чтобы частично избавиться от усложнения при переводе на язык логики предикатов, вводятся ограниченные кванторы. Пусть B(x) – формула с одной свободной переменной x. Тогда выражение B(x) называется ограниченным квантором общности, B(x) – ограниченным квантором существования. С помощью ограниченных кванторов исходное предложение предыдущего абзаца можно записать довольно просто: (x>5)(y>0)(xy=1).

Более формально ограниченные кванторы вводятся следующим образом: формула (B(x)F(x)) есть сокращение формулы ((x)B(x)→F(x)), формула (B(x)F(x)) – сокращение формулы (B(x)&F(x)). Для ограниченных кванторов справедливы аналоги законов 22-33.

Ограниченные кванторы часто вводятся неявно. Для переменных, пробегающих множество истинности формулы B(x), вводят специальное обозначение. Например, в геометрии довольно часто применяется следующее соглашение: A, B, C, D,… обозначаются точки, буквами a, b, c, d,… прямые, а буквами a, b, g,… – плоскости, т.е. с нашей точки зрения первые пробегают множество истинности формулы T(x), вторые – Пр(x), третьи – Пл(x).

Последовательное оформление этой идеи приводит к понятию многосортной (многоосновной) логики предикатов. Строгих определений давать не будем, укажем только отличие от обсуждавшейся ранее (одноосновной или односортной) логики предикатов. Построение формулы также исходит из множеств F, R, V. Только в этом случае переменные разбиты по сортам. В примере с геометрией таких сортов три: переменные, принимающие в качестве значений точки, прямые и плоскости. Далее, для каждого символа из F указано, какой сорт имеет первый аргумент, какой – второй и т.д., какой сорт имеет значение функции. Аналогичная информация имеется и для каждого символа предиката. Для интерпретации берется не одно множество, а столько, сколько сортов переменных (эти множества называются основами). Для геометрии таких основ три: множество точек, множество прямых, множество плоскостей.

Приведем **пример** применения многоосновной логики предикатов.

Рассмотрим информационную систему под условным названием «Сделки». Система содержит сведения о сделках купли-продажи, произведенных некоторой фирмой. Предметом сделок служат партии товаров, определяемые номером партии, наименованием товара, единицей измерения и количеством. Используются следующие атрибуты: НОМ – номер партии товара, НАИМ – наименование товара, ЕД – единица измерения, КОЛ – количество единиц товара в партии, ДАТА – дата сделки, АГЕНТ – покупатель или продавец, СЕК – номер секции склада, СРОК – срок годности. Информация хранится в виде отношений: ПАР (НОМ, НАИМ, ЕД, КОЛ), ПОК (НОМ, ДАТА, АГЕНТ), ПРОД (НОМ, ДАТА, АГЕНТ), СКЛАД (СЕК, НОМ, СРОК). Первое отношение содержит сведения о партиях товара, которые были предметом сделок, второе – сведения о покупках, третье – о продажах партий товара. В четвертом указывается, в какой секции склада хранится купленная (но еще не проданная) партия товара и срок годности товара в партии. Система может вычислять отношение РАН(x,y)=«x раньше y», определенное на доменах атрибутов ДАТА и СРОК.

Формализуем эту информационную систему в многоосновной логике предикатов следующим образом. Введем восемь сортов переменных (по количеству атрибутов), для каждого атрибута – свой сорт. Переменные будут принимать значения в доменах соответствующих атрибутов. Другими словами, области интерпретации (основы) будут состоять из доменов атрибутов. Переменные по сортам синтаксически различать не будем. А для того, чтобы указать, что переменная x, например, изменяется по домену атрибута НАИМ, а y – по домену атрибута ЕД, будем писать: $x \in$НАИМ, $y \in$ЕД. Каждому отношению поставим в соответствие предикат той же местности, что и отношения, с соответствующими типами переменных. Предикат и отношение будем обозначать одинаково. Например, отношению ПАР(НОМ, НАИМ, ЕД, КОЛ) будет соответствовать предикат ПАР(x, y, u, v), где $x \in$НОМ, $y \in$НАИМ, $u \in$ЕД, $v \in$КОЛ. Сигнатура Σ, таким образом, будет содержать 5 символов предикатов:

$$\Sigma=\{\text{ПАР}(x, y, u, v), \text{ПОК}(x, y, z), \text{ПРОД}(x, y, z), \text{СКЛАД}(x, y, z), \text{РАН}(x,y)\}.$$

В сигнатуру Σ можно добавлять константы, интерпретируемые как элементы доменов атрибутов.

Эта формализация позволяет запросы к информационной системе представлять формулами логики предикатов указанной сигнатуры. Рассмотрим следующий запрос:

Q_1. «Каковы номера партий товаров, купленных у фирмы b, и каково наименование товара в этих партиях?»

Запрашиваемая информация содержится в двух отношениях ПАР(НОМ, НАИМ, ЕД, КОЛ) и ПОК(НОМ, ДАТА, АГЕНТ), которые связаны номером партии товара, АГЕНТ – b. Если взять конъюнкцию предикатов

ПАР(x, y, u, v)&ПОК(x, z, фирма b),

то эта формула будет задавать пятиместный предикат, в котором, кромезапрашиваемой, будет содержаться информация о единицах, количестве единиц и дате сделок. Судя по запросу, эта дополнительная информация пользователя не интересует, поэтому на соответствующие переменные навесим кванторы существования. Получим формулу:

F_1(x, y)=x∈НОМ&y∈НАИМ&(u∈ЕД)(z∈ДАТА)[ПАР(x, y ,u, v)&ПОК(x, z, фирма b)]

Формула F_1(x,y) представляет собой перевод запроса Q_1 на язык многоосновной логики предикатов.

Рассмотрим еще ряд примеров перевода запросов на язык логики предикатов.

Q_2. «Каковы наименования товаров, единицы измерения и количество единиц в партиях товара, срок годности которого истекает 20.03.16?»

Q_3. «Для каких фирм срок годности товара, купленного у этих фирм, истекает 20.03.16?»

Q_4. «Какой товар хранится на складе более чем в двух партиях?»

Q_5. «Какие из закупленных партий товаров впоследствии проданы?»

Эти запросы на язык логики предикатов будут переведены формулами F_2 – F_5:

F_2(x,y,z)=x∈НАИМ&y∈ЕД&z∈КОЛ&(u∈СЕК)(v∈НОМ)(w∈СРОК)

[ПАР(v,x,y,z)&СКЛАД(u,v,w)&РАН(w,20.03.16)],

F_3(x)=x∈АГЕНТ&("y∈НОМ)("z∈ДАТА)("u∈СЕК)

("v∈СРОК)[ПОК(y,z,x)&СКЛАД(u,y,v)→РАН(v,20.03.16)],

F_4(x)=x∈НАИМ&(y_1,y_2∈НОМ)(z_1,z_2∈ЕД)(u_1,u_2∈КОЛ)(v_1,v_2∈СЕК)

(w_1,w_2∈СРОК)[y_1≠y_2&ПАР(y_1,x,z_1,u_1)&СКЛАД(v_1,x,w_1)&

ПАР(y_2,x,z_2,u_2)&СКЛАД(v_2,x,w_2),

F_5(x)=x∈НОМ&(y∈НАИМ)(z∈ЕД)(u∈КОЛ)(v_1,v_2∈ДАТА(w_1,w_2∈АГЕНТ)

ПАР(x,y,z,u)&ПОК(x,v_1,w_1)&ПРОД(x,v_2,w_2) &РАН(v_1,v_2)].

Рассмотрим второй вариант выбора сигнатуры для формализации запросов Q_1 – Q_5. Для этого вначале к имеющимся восьми основам (доменам восьми исходных атрибутов) добавим девятую основу: множество сделок СДЕЛ. Далее, вместо предикатов ПАР(x,y,u,v), ПОК(x,y,z), ПРОД(x,y,z), СКЛАД(x,y,z) введем функции:

наим : НОМ→НАИМ,

ед : НОМ→ЕД,

кол : НОМ→КОЛ,

сдел : СДЕЛ→НОМ,

тип : СДЕЛ→{пок, прод},

дата : СДЕЛ→ДАТА,

агент : СДЕЛ→АГЕНТ,

сек : НОМ→СЕК,

срок : НОМ→СРОК,

а предикат РАН(x,y) оставим. Функции имеют естественный смысл: Например, функция наим номеру партии товара ставит в соответствие наименование товара в этой партии, функция сдел ставит в соответствие сделке номер партии товара, относительно которого эта сделка была заключена. Новую сигнатуру будем обозначать буквой D. К сигнатуре D, как и к🗩, можно добавлять константы. Тогда запросы Q_1 – Q_5 будут переведены следующим образом:

Q_1. «Каковы номера партий товаров, купленных у фирмы b, и каково наименование товара в этих партиях?»

$G_1(x,y)=x\in\text{НОМ}\&y\in\text{НАИМ}\&y=\text{наим}(x)\&((z\in\text{СДЕЛ})$

$[x=\text{сдел}(z)\ \&\text{тип}(z)=\text{пок}\&\text{агент}(z)=\text{фирма } b,$

Q_2. «Каковы наименования товаров, единицы измерения и количество единиц в партиях товара, срок годности которого истекает 20.03.16?»

$G_2(x,y,z)=x\in\text{НАИМ}\&y\in\text{ЕД}\&z\in\text{КОЛ}\&$

$(u\in\text{НОМ})[x=\text{наим}(u)\&y=\text{ед}(u)\&z=\text{кол}(u)\&\text{РАН}(\text{срок}(u),20.03.16)],$

$G_4(x)=x\in\text{НАИМ}\&(\$u_1,u_2\in\text{НОМ})[v_1,v_2\in\text{СЕК})[u_1\neq u_2\&\text{сек}(u_1)=v_1\&\text{сек}(u_2)=v_2],$

$G_5(x)=x\in\text{НОМ}\&(v_1,u_2\in\text{СДЕЛ})[x=\text{сдел}(u_1)\&x=\text{сдел}(u_2)\&\text{тип}(u_1)=$

$\text{пок}\&\text{тип}(u_2)=\text{прод}\&\text{РАН}(\text{дата}(u_1),\ \text{дата}(u_2))].$

Сигнатуру Σ можно назвать «реляционной» (или «предикатной»), а D – «функциональной». Разумеется, возможны и другие варианты выбора сигнатуры.

Задания

Рассмотрим информационную систему под условным названием «Кадры», которая содержит сведения о сотрудниках некоторой организации. Для представления информации используются атрибуты: ФАМ – фамилия сотрудника, ПОЛ – пол сотрудника, ВОЗР – возраст, ДОЛЖ – должность, НОМ – номер отдела (подразделения) этой организации. Сведения хранятся в виде двух отношений СОТР(ФАМ, НОМ, ДОЛЖ), АНК(ФАМ, ПОЛ, ВОЗР). Первое отношение содержит фамилии сотрудников, их должность и номера отделов, где работают эти сотрудники. Второе отношение хранит анкетные данные: фамилию, пол и возраст сотрудника. Кроме того, система может вычислять отношения Мен(x,y)=«x меньше y», определенное на множестве натуральных чисел, точнее, на домене атрибута ВОЗР.

Формализуем систему «Кадры» в многоосновной логике предикатов. Введем пять сортов переменных (по количеству атрибутов), для каждого атрибута – свои сорта. Переменные будут принимать значения в доменах соответствующих атрибутов. Эти домены и будут являться основами. Переменные синтаксически можно не различать. А область изменения переменной указывать с помощью принадлежности домену соответствующего атрибута. Каждому из отношений поставим в соответствие предикат той же местности, что и отношение, с соответствующими типами переменных. Сигнатура Σ будет содержать три символа предиката:

$$\Sigma=\{\text{СОТР}(x,y,z),\ \text{АНК}(x,y,z),\ \text{МЕН}(x,y)\}.$$

К Σ можно добавлять константы, интерпретируемые как элементы доменов.

Перевести следующие запросы на язык логики первого порядка сигнатуры Σ:

1. Кто из сотрудников–мужчин старше 40 лет?
2. В каких отделах работают пенсионеры?
3. Кто из программистов старше 40 лет и в каком отделе работает?
4. В каких отделах все программисты – пенсионеры?

Контрольные вопросы к практическому занятию № 3

Базовый уровень

1. Ограниченные кванторы.
2. Понятие многосортной логики.
3. Перевод высказываний на язык многосортной логики предикатов.

Повышенный уровень

4. Представление запросов к информационной системе формулами логики предикатов заданной сигнатуры.

Средства и технологии оценки: коллоквиум

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации(№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Практическое занятие № 4.

Построение функции принадлежности.

Цель. Научиться строить функции принадлежности.

Форма проведения: решение типовых задач.

Вопросы для обсуждения: Определение и основные характеристики нечеткого множества. Виды функций принадлежности.

Теоретические сведения.

Теория нечеткой математики позволяет описывать качественные, неточные понятия и наши знания об окружающем мире, а также оперировать этими знаниями с целью получения новой информации. Нечеткая логика оказывается особенно полезной, когда в описании технических систем и бизнес-процессов присутствует неопределенность, которая затрудняет или даже исключает применение точных количественных методов и подходов.

Пусть *X*-*универсальное множество* (универсум), то есть множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, *A* – подмножество множества *X* ($A \subseteq X$).

Нечетким множествомA называется совокупность упорядоченных пар вида: $<x, \mu_A(x)>$, где $x \in X$, $\mu_A(x)$ - *функция принадлежности*, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ некоторое действительное число из отрезка $[0,1]$. При этом значение $\mu_A(x) = 1$ для некоторого $x \in X$ означает, что элемент *x* определённо принадлежит нечёткому множеству *A*, а значение $\mu_A(x) = 0$ означает, что элемент *x* определённо не принадлежит нечёткому множеству *A*. Остальные значения функции $\mu_A(x)$ из интервала $(0,1)$ означают, что элемент *x* принадлежит множеству*A* в той или иной степени.

Виды функций принадлежности

Треугольная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитическим выражением:

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases} 0, если x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, если\, a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, если\, b \le x \le c \\ 0, если c \le x \end{cases},$$

где *a, b, c* – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \le b \le c$. Параметры *a* и *c* характеризуют основание треугольника, а параметр *b* – его вершину.

Трапециевидная функция принадлежности в общем случае может быть задана следующим аналитическим выражением:

$$f(x;a,b,c,d)=\begin{cases} 0, \text{если } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } a \le x \le b \\ 1, \text{если } b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, \text{если } c \le x \le d \\ 0, \text{если } d \le x \end{cases},$$

где *a, b, c, d* – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядочены отношением: $a \le b \le c \le d$. Параметры *a* и *d* характеризуют нижнее основание трапеции, а параметры *b*и *c* верхнее основание трапеции.

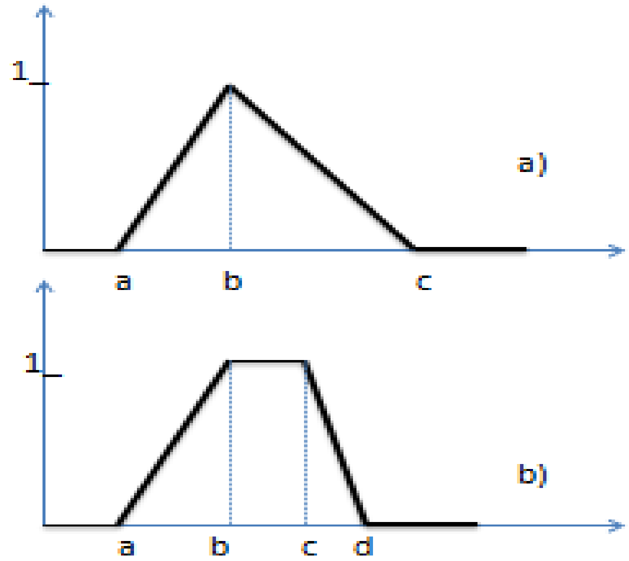

Рисунок 1 - Графики функций принадлежности треугольной (a), трапециевидной (b)

Эти функции используются для задания таких свойств множеств, которые характеризуются неопределённостью типа: «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет» и др.

Z-образные и S-образные функции принадлежности также получили своё название по виду кривых, которые представляют их графики (рисунок 2).

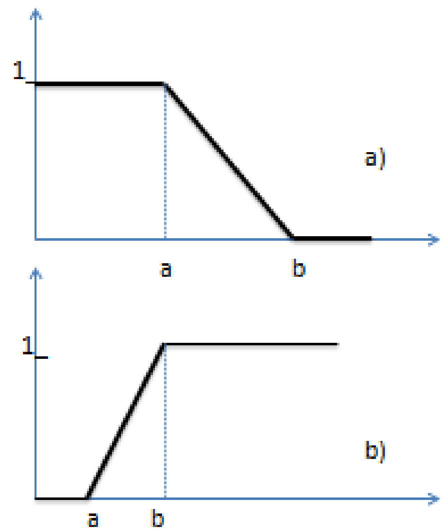

Рисунок 2 - Графики линейной Z-образной (a) и
S-образной (b) функций принадлежности

Первая из функций этой группы называется *Z-образной* кривой или *сплайн-функцией* и в общем случае аналитически может быть задана следующим выражением:

$$f(x;a,b)=\begin{cases} 1, если\, x\le a \\ \dfrac{b-x}{b-a}, если\, a<x<b, \\ 0, x\ge b \end{cases}$$

где *a* и *b* – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением *a*¿*b*.

Линейные Z-образные функции используются для представления таких нечётких множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «низкое качество», «незначительная величина», «низкий уровень доходов или цен», «низкая процентная ставка».

S-образная функция в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f(x;a,b)=\begin{cases} 0, если\, x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, если\, a<x<b \\ 1, если\, x\ge b \end{cases},$$

где *a* и *b* – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: *a*¿*b*.

Линейные S-образные функции используются для представления таких нечётких множеств, которые характеризуются неопределённостью типа «отличное качество», «значительная величина», «высокий уровень доходов и цен», «высокая норма прибыли», «высокое качество услуг».

Задания.

Задание 1 Придумать функцию принадлежности переменной *«Зарплата программиста [10;120] тыс. руб.»* к нечеткому множеству *«Зарплата программиста – низкая»*. Использовать один из типов функций принадлежности, наилучшим образом описывающий данную ситуацию. Подобрать соответствующие

	коэффициенты.Полученные функции принадлежности представить в аналитическом и графическом виде с помощью средств MicrosoftExcel.
Задание 2	Придумать функцию принадлежности переменной *«Температура воды [0;100] ^{0}С»* к нечеткому множеству *«Температура воды – горячая»*. Использовать один из типов функций принадлежности, наилучшим образом описывающий данную ситуацию. Подобрать соответствующие коэффициенты.Полученные функции принадлежности представить в аналитическом и графическом виде с помощью средств MicrosoftExcel.

Контрольные вопросы к практическому занятию № 4

Базовый уровень

1. Определение нечеткого множества.
2. Основные характеристики нечеткого множества.
3. Виды функций принадлежности.

Повышенный уровень

4. Методы построения функции принадлежности.

Средства и технологии оценки: коллоквиум

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Практическое занятие № 5.

Операции над нечеткими множествами

Цель. Научиться выполнять операции над нечеткими множествами.

Форма проведения: решение типовых задач.

Вопросы для обсуждения: Сравнение нечетких множеств. Операции над нечеткими множествами. Нечеткие величины. Нечеткие отношения.

Теоретические сведения.

Операции над нечеткими множествами

Говорят, что нечеткое множество *A* содержится в нечетком множестве *B*, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие: $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Обозначение: $A \subset B$.

*Степень включения множестваAв множество B*равна

$$\eta(AB) = 1 - \max_{x \in X}(\mu_A(x) - \mu_B(x))$$

*Степень включения множестваBв множество A*равна

$$\eta(BA) = 1 - \max_{x \in X}(\mu_B(x) - \mu_A(x))$$

Говорят, что нечеткие множества *A* и *Bравны*, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие: $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Обозначение: *A = B*.

В случае, если значения функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ почти равны между собой, говорят о степени равенства нечетких множеств *A* и *B*.

Степенью равенства нечетких множеств A и *B* называется величина

$$\rho(A = B) = 1 - \max_{x \in X} \left| \mu_B(x) - \mu_A(x) \right|$$

Объединением нечётких множеств A и B называется нечёткое множество $A \cup B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Пересечением нечётких множеств A и *B* называется нечёткое множество $A \cap B$, функция принадлежности которого имеет вид: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Множество $\bar{A}$ является *дополнением (отрицанием)* множества *A*, если для всех элементов $x \in X$ выполняется условие: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Операция A^{α} *возведения в степень* α нечеткого множества *A*, где α - положительное число, определяется функцией принадлежности $\mu_{A^{\alpha}}(x) = \mu^{\alpha_A}(x)$.

Операцию возведения множества *A* в степень *α=2* называют *концентрированием.* Операцию возведения множества *A* в степень $\alpha = \frac{1}{2}$ называют *растяжением*.

Применение операции концентрирования к нечёткому множеству означает *уменьшение нечёткости или неопределённости* в задании этого множества. Это может быть следствием поступления дополнительной информации, которая уточняет некоторые аспекты соответствующей предметной области. Напротив, применение операции растяжения означает *усиление неопределённости* в задании нечёткого множества, что может быть следствием либо потери информации, либо поступления информации о дополнительных факторах, не учитываемых в исходной нечёткой модели.

Операция возведения в степень нечёткого множества поможет задать функции принадлежности для нечётких множеств, в описании которых используются модификаторы типа «очень», «слегка» и т.д.

Результат операции	*Свойства нечётких множеств, полученных в результате операций*
A^n, где n¿1	Элементы нечёткого множества A^n обладают свойствами элементов нечёткого множества А в меньшей степени («слегка», «умеренно» т.д.)
A^n, где 0¿n<1	Элементы нечёткого множества A^n обладают свойствами элементов нечёткого множества А в превосходной степени («очень», «слишком» и т.д.).

Задание

Дано универсальное множество *U*={собаки} и два нечетких множества:

A=«лохматая собака»= $\left\{ \frac{x_1}{0.9}; \frac{x_2}{0.7}; \frac{x_3}{0.2}; \frac{x_4}{1}; \frac{x_5}{0.1}; \frac{x_6}{0.5}; \frac{x_7}{0.8}; \frac{x_8}{0.2} \right\}$

B=«умная собака»= $\left\{ \frac{x_1}{0.1}; \frac{x_2}{0.7}; \frac{x_3}{1}; \frac{x_4}{0}; \frac{x_5}{0.5}; \frac{x_6}{0.4}; \frac{x_7}{0.3}; \frac{x_8}{0.1} \right\}$, где

x_1 – болонка, x_2 – водолаз, x_3 – овчарка, x_4 – пудель,

x_5 – доберман, x_6 – терьер, x_7 – йоркшир, x_8 – ротвейлер.

Найти: множество C = «нелохматая собака»; множество D= «лохматая и умная собака»; множество E = «очень лохматая собака»; множество F= «более-менее умная собака».

Контрольные вопросы к практическому занятию № 5

Базовый уровень

1. Сравнение нечетких множеств.
2. Операции над нечеткими множествами.
3. Нечеткие величины.

Повышенный уровень

4. Нечеткие отношения.

Средства и технологии оценки: коллоквиум

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Практическое занятие № 6.

Нечеткий логический вывод.

Цель. Научиться строить составные нечеткие высказывания и определять степень их истинности.

Форма проведения: решение проблемных задач.

Вопросы для обсуждения: Нечеткие высказывания и логические операции. Нечеткие логические формулы и их свойства. Нечеткие предикаты и кванторы.

Теоретические сведения.

Нечёткие высказывания и логические операции

Нечётким высказыванием А называется любое утверждение, о котором имеет смысл судить истинно оно или ложно в той или иной степени. Каждому нечёткому высказыванию А поставим в соответствие *функцию истинности* λ(А), принимающую любые значения на отрезке [0; 1]. Значение функции истинности нечёткого высказывания А будем также называть *степенью истинности* нечёткого высказывания. 0 и 1 – предельные значения функции истинности, совпадающие со значениями ложь и истина для чётких высказываний.

Нечёткое высказывание, принимающее значение истинности 0.5, называется *индифферентностью*, поскольку оно истинно в той же мере, что и ложно.

Определим нечёткие логические операции на множестве нечётких высказываний.

Пусть А и В – нечёткие высказывания, λ(А) и λ(В) – соответствующие значения степени истинности.

Отрицанием нечёткого высказывания А называется нечёткое высказывание $\overline{A}$, степень истинности которого определяется выражением: λ($\overline{A}$) =1-λ(А).

Конъюнкцией нечётких высказываний А и В называется нечёткое высказывание А ∧ В, степень истинности которого совпадает со степенью истинности наименее истинного высказывания: λ(А ∧ В)=min{λ(А); λ(В)}.

Дизъюнкций нечётких высказываний А и В называется нечёткое высказывание А ∨ В, степень истинности которого совпадает со степенью истинности наиболее истинного высказывания: λ(А ∨ В)=max{λ(А); λ(В)}.

Импликацией нечётких высказываний А и В называется нечёткое высказывание А→ В, степень истинности которого определяется выражением: λ(А→В)=max{1-λ(А); λ(В)}. Степень истинности импликации не меньше чем степень ложности её посылки или степень истинности её следствия.

*Эквиваленцией*нечётких высказываний А и В называется нечёткое высказывание А↔ В, степень истинности которого определяется выражением: λ(А↔В)=min{max{1-λ(А); λ(В)}; max{1-λ(В); λ(А)}}. Степень истинности эквиваленции совпадает со степенью истинности менее истинной из импликаций А→В и В→А.

Используются и другие интерпретации операции импликации нечетких множеств.

Larsen	$\mu_{A\to B}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y)$
Lukasiewicz	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Mamdani	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Standard Strict (Godel)	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } \mu_A(x)\le\mu_B(y)\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$
Gaines	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } \mu_A(x)\le\mu_B(y)\\ \dfrac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, & \text{в противном случае}\end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mu_{A\to B}(x,y)=\max\{1-\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Lu	$\mu_{A\to B}(x,y)=1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)$

Из нечётких высказываний при помощи логических операций можно строить составные нечёткие высказывания, степень истинности которых определяется в соответствии с введёнными определениями логических операций. Порядок выполнения операций над нечёткими высказываниями следующий: скобки, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, затем импликация и эквиваленция в порядке следования.

Пример

Пустьλ(А)=0.4, λ(В)=0.7, λ(С)=0.5. Найдём степень истинности нечёткого высказывания: (А→В) ∨ С.

λ((А→В) ∨ С)=max{max{1-λ(А); λ(В)}; λ(С)}= max{max{1-0.4; 0.7};0.5}= =max{0.7;0.5}=0.7.

Задание

Пусть существует некоторая система, описываемая тремя параметрами: температура, давление и расход рабочего вещества. Все показатели измеримы, и множество возможных значений известно. Заданы графики функций принадлежности данных величин нечетким множествам. Из опыта работы с системой известны некоторые правила, связывающие значения этих параметров:

- если температура низкая и расход малый, то давление низкое;
- если температура средняя, то давление среднее;
- если температура высокая или расход большой, то давление высокое.

Найти значение параметра «давление», если значения температуры и расхода равны соответственно 60 и 5.

Контрольные вопросы к практическому занятию № 6

Базовый уровень

1. Нечеткие высказывания и логические операции.
2. Нечеткие логические формулы и их свойства.
3. Нечеткие предикаты и кванторы.

Повышенный уровень

4. Алгоритмы нечеткого контроля и управления.

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он демонстрирует глубокое усвоение программного материала по всем разделам курса, изложение его на высоком научно-техническом уровне; ознакомление с дополнительной литературой и передовыми научно-техническими достижениями; умение творчески подтвердить теоретические положения процессов и расчета аппаратов соответствующими примерами, умелое применение теоретических знаний при решении практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он демонстрирует полное усвоение программного материала в объеме обязательной литературы по курсу; владение терминологией и символикой изучаемой дисциплины при изложении материала; умение увязывать теоретические знания с решением практических задач; наличие не искажающих существа ответа погрешностей и пробелов при изложении материала.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он демонстрирует знание основных теоретических и практических вопросов программного материала; допущение незначительных ошибок и неточностей, нарушение логической последовательности изложения материала, недостаточную аргументацию теоретических положений.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он демонстрирует существенные пробелы в знаниях основного программного материала; недостаточный объем знаний по дисциплине для дальнейшей учебы.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если студент знает математические методы, предусмотренные программой дисциплины, и умеет их применять для решения специфических задач в области информационных систем и технологий.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если у студента отсутствуют знания математических методов, а также практические навыки их применения для решения специфических задач в области информационных систем и технологий.

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя письменное решение студентами задач.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить уровень владения компетенциями ОПК-1. При выполнении заданий студенту предоставляется право пользования лекциями, методическими материалами к самостоятельной работе и практическим занятиям.

При проверке задания оцениваются последовательность, рациональность выполнения и правильность расчетов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Рекомендуемая литература

1.1. Основная литература:

1. Модели и методы искусственного интеллекта. Применение в экономике: учебное пособие / М.Г.Матвеев, А.С. Свиридов. – М.: Финансы и статистики; ИНФРА – М:, 2015. - 448 с.
2. Советов, Б. Я. Интеллектуальные системы и технологии: учебник / Б.Я. Советов, В.В. Цехановский, В.Д. Чертовской. - М.: Академия, 2013. - 320 с.

1.2. Дополнительная литература:

1. Федотова, Е. Л. Информационные технологии и системы: учеб.пособие / Е. Л. Федотова. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011. – 352 с.
2.

1.3. Интернет-ресурсы:

1. http://www.intuit.ru – сайт дистанционного образования в области информационных технологий
2. http://www.biblioclub.ru - электронная библиотечная система «Университетская библиотека – online»: специализируется на учебных материалах для ВУЗов по научно-гуманитарной тематике, а так же содержит материалы по точным и естественным наукам.
3. http://www.iprbookshop.ru– электронно-библиотечная система IPRbooks.
4. http://www.exponenta.ru - образовательный математический сайт
5. http://window.edu.ru – образовательные ресурсы ведущих вузов

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Пятигорский институт (филиал) СКФУ

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА» для студентов направления подготовки **09.04.02 Информационные системы и технологии** направленность (профиль) **Технологии работы с данными и знаниями, анализ информации**

Пятигорск
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины является формирование набора общепрофессиональных, профессиональных компетенций будущего магистра по направлению 09.04.02 «Информационные системы и технологии».

Задачей курса является освоение магистрантом математического аппарата для решения специфических задач в области информационных систем и технологий.

2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Для студентов очной формы обучения:

Код реализуемой компетенции	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
ОПК-1	Подготовка к лекциям	Собеседование	1,62	0,18	1,8
	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование	96,3	10,7	107
ОПК-1	Подготовка к практическим занятиям	Отчет письменный	6,48	0,72	7,2
	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа	9	1,0	10
		Итого	**113,4**	**12,6**	**126**

Для студентов заочной формы обучения:

Код реализуемой компетенции	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
ОПК-1	Подготовка к лекциям	Собеседование	0,36	0,04	0,4
	Самостоятельное изучение литературы	Собеседование	140,4	15,6	156
ОПК-1	Подготовка к практическим занятиям	Отчет письменный	1,44	0,16	1,6
	Выполнение контрольной работы	Контрольная работа	9	1,0	10
		Итого	**151,2**	**16,8**	**168**

3. СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема самостоятельного изучения № 1. Логика предикатов первого порядка.

Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение литературы.

Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект.

Средства и технологии оценки: собеседование

План конспекта:
Определение предиката. Кванторы всеобщности. Операции над предикатами. Формулы логики первого порядка. Интерпретация в логике первого порядка.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Тема самостоятельного изучения № 2. Основные понятия теории нечетких множеств.

Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение литературы.

Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект.

Средства и технологии оценки: собеседование

План конспекта:
Нечеткие множества. Нечеткие отношения. Их свойства. Классы нечетких отношений. Нечеткие меры и интервалы. Нечеткая переменная. Операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

Тема самостоятельного изучения № 3. Нечеткая логика. Нечеткие алгоритмы.
Вид деятельности студентов: самостоятельное изучение литературы.
Итоговый продукт самостоятельной работы: конспект.

Средства и технологии оценки: собеседование

План конспекта:
Формализация понятия нечеткого алгоритма. Алгоритмы нечеткого контроля и управления. Примеры нечетких алгоритмов

Работа с литературой:

Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-

			ресурсы
1-2	1	1-3	1-5

4. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он демонстрирует глубокое усвоение программного материала по всем разделам курса, изложение его на высоком научно-техническом уровне; ознакомление с дополнительной литературой и передовыми научно-техническими достижениями умение творчески подтвердить теоретические положения процессов и расчета аппаратов соответствующими примерами, умелое применение теоретических знаний при решении практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он демонстрирует полное усвоение программного материала в объеме обязательной литературы по курсу; владение терминологией и символикой изучаемой дисциплины при изложении материала; умение увязывать теоретические знания с решением практических задач; наличие не искажающих существа ответа погрешностей и пробелов при изложении материала.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он демонстрирует знание основных теоретических и практических вопросов программного материала; допущение незначительных ошибок и неточностей, нарушение логической последовательности изложения материала, недостаточную аргументацию теоретических положений.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он демонстрирует существенные пробелы в знаниях основного программного материала; недостаточный объем знаний по дисциплине для дальнейшей учебы.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если студент знает математические методы, предусмотренные программой дисциплины, и умеет их применять для решения специфических задач в области информационных систем и технологий.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если у студента отсутствуют знания математических методов, а также практические навыки их применения для решения специфических задач в области информационных систем и технологий.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими практические занятия по дисциплине, в следующих формах: собеседованиеы и контрольная работа.

Допуск к защите контрольной работы происходит при наличии у студентов печатного варианта контрольной работы. Защита контрольной работы проходит в форме ответов студента на вопросы преподавателя.

Оценку «зачтено» студент получает, если содержание и оформление контрольной работы соответсвуют установленным требованиям.

Контрольная работа может быть отправлена на доработку в следующих случаях:

- полностью не соответствует установленным требованиям;
- выполнены не все задания;

- допущены грубые ошибки при решении задач.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература:

3. Модели и методы искусственного интеллекта. Применение в экономике: учебное пособие / М.Г.Матвеев, А.С. Свиридов. – М.: Финансы и статистики; ИНФРА – М:, 2015. - 448 с.
4. Советов, Б. Я. Интеллектуальные системы и технологии: учебник / Б.Я. Советов, В.В. Цехановский, В.Д. Чертовской. - М.: Академия, 2013. - 320 с.

6.1.2. Дополнительная литература:

3. Федотова, Е. Л. Информационные технологии и системы: учеб. пособие / Е. Л. Федотова. – М.: Форум: ИНФРА-М, 2011. – 352 с.

6.1.3. Интернет-ресурсы:

6. http://www.intuit.ru – сайт дистанционного образования в области информационных технологий
7. http://www.biblioclub.ru - электронная библиотечная система «Университетская библиотека – online»: специализируется на учебных материалах для ВУЗов по научно-гуманитарной тематике, а так же содержит материалы по точным и естественным наукам.
8. http://www.iprbookshop.ru– электронно-библиотечная система IPRbooks.
9. http://www.exponenta.ru - образовательный математический сайт.
10. http://window.edu.ru – образовательные ресурсы ведущих вузов.